第１問

解答解説のページへ

[1] 実数 a, b, c が，$a+b+c=1$ ……①および $a^2+b^2+c^2=13$ ……②を満たしているとする。

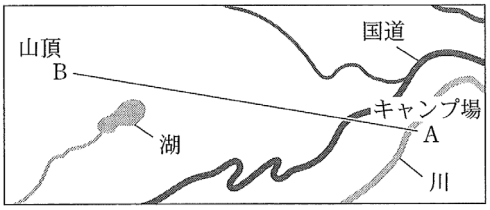
(1) $(a+b+c)^2$ を展開した式において，①と②を用いると，$ab+bc+ca=$ $\boxed{\text{アイ}}$ であることがわかる。よって，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) $a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。

$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，$x+y=$ $\boxed{\text{オカ}}$ $\sqrt{5}$ である。また，(1)の計算から，$x^2+y^2=$ $\boxed{\text{キク}}$ が成り立つ。これらより $(a-b)(b-c)(c-a)=$ $\boxed{\text{ケ}}$ $\sqrt{5}$ である。

[2] 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 3 ページの三角比の表を用いてもよい。

太郎さんと花子さんは，キャンプ場のガイドブックにある地図を見ながら，後のように話している。



参考図

太郎：キャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角度はどれくらいかな。

花子：地図アプリを使って，地点 A と山頂 B を含む断面図を調べたら，図 1 のようになったよ。点 C は，山頂 B から地点 A を通る水平面に下ろした垂線とその水平面との交点のことだよ。

太郎：図 1 の角度 θ は，AC，BC の長さを定規で測って，三角比の表を用いて調べたら16°だったよ。

花子：本当に16°なの？ 図 1 の鉛直方向の縮尺と水平方向の縮尺は等しいのかな？

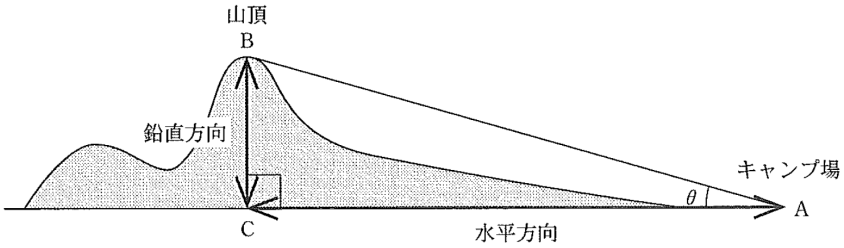


図 1

図 1 のθはちょうど16°であったとする。しかし，図 1 の縮尺は，水平方向が$\dfrac{1}{100000}$であるのに対して，鉛直方向は$\dfrac{1}{25000}$であった。

実際にキャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角である∠BACを考えると，tan∠BACは $\boxed{\text{コ}}$.$\boxed{\text{サシス}}$となる。したがって，∠BACの大きさは $\boxed{\text{セ}}$。ただし，目の高さは無視して考えるものとする。

$\boxed{\text{セ}}$の解答群

⓪	3°より大きく4°より小さい	①	ちょうど4°である
②	4°より大きく5°より小さい	③	ちょうど16°である
④	48°より大きく49°より小さい	⑤	ちょうど49°である
⑥	49°より大きく50°より小さい	⑦	63°より大きく64°より小さい
⑧	ちょうど64°である	⑨	64°より大きく65°より小さい

[3] 外接円の半径が 3 である△ABC を考える。点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。

(1) AB＝5，AC＝4 とする。このとき，$\sin\angle ABC = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$AD = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$である。

(2) 2 辺 AB, AC の長さの間に$2AB + AC = 14$の関係があるとする。
このとき，AB の長さのとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ト}} \leqq AB \leqq \boxed{\text{ナ}}$であり，

$AD = \dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}AB^2 + \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}AB$と表せるので，AD の長さの最大値は$\boxed{\text{ヒ}}$である。

三角比の表

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	------

第２問

解答解説のページへ

[1] p, q を実数とする。花子さんと太郎さんは，次の 2 つの 2 次方程式について考えている。

$$x^2+px+q=0 \cdots\cdots\cdots ①,\quad x^2+qx+p=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①または②を満たす実数 x の個数を n とおく。

(1) $p=4$，$q=-4$ のとき，$n=$ ア である。

また，$p=1$，$q=-2$ のとき，$n=$ イ である。

(2) $p=-6$ のとき，$n=3$ になる場合を考える。

花子：例えば，①と②をともに満たす実数 x があるときは $n=3$ になりそうだね。
太郎：それを α としたら，$\alpha^2-6\alpha+q=0$ と $\alpha^2+q\alpha-6=0$ が成り立つよ。
花子：なるほど。それならば，α^2 を消去すれば，α の値が求められそうだね。
太郎：確かに α の値が求まるけど，実際に $n=3$ となっているかどうかの確認が必要だね。
花子：これ以外にも $n=3$ となる場合がありそうだね。

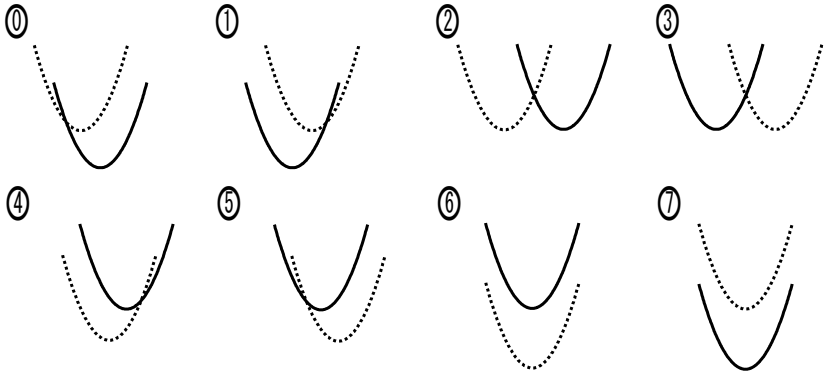
$n=3$ となる q の値は $q=$ ウ，エ である。ただし ウ < エ とする。

(3) 花子さんと太郎さんは，グラフ表示ソフトを用いて，①，②の左辺を y とおいた 2 次関数 $y=x^2+px+q$ と $y=x^2+qx+p$ のグラフの動きを考えている。

$p=-6$ に固定したまま，q の値だけを変化させる。

$y=x^2-6x+q \cdots\cdots ③$，$y=x^2+qx-6 \cdots\cdots ④$ の 2 つのグラフについて，$q=1$ のときのグラフを点線で，q の値を 1 から増加させたときのグラフを実線でそれぞれ表す。このとき，③のグラフの移動の様子を示すと オ となり，④のグラフの移動の様子を示すと カ となる。

オ，カ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。



(4) $\boxed{\text{ウ}} < q < \boxed{\text{エ}}$ とする。全体集合 U を実数全体の集合とし，U の部分集合 A, B を，$A = \{x \mid x^2 - 6x + q < 0\}$，$B = \{x \mid x^2 + qx - 6 < 0\}$ とする。U の部分集合 X に対し，X の補集合を $\overline{X}$ と表す。このとき，次のことが成りたつ。

・$x \in A$ は，$x \in B$ であるための $\boxed{\text{キ}}$。

・$x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための $\boxed{\text{ク}}$。

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪	必要条件であるが，十分条件ではない
①	十分条件であるが，必要条件ではない
②	必要十分条件である
③	必要条件でも十分条件でもない

[2] 日本国外における日本語教育の状況を調べるために，独立行政法人国際交流基金では「海外日本語教育機関調査」を実施しており，各国における教育機関数，教員数，学習者数が調べられている。2018 年度において学習者数が 5000 人以上の国と地域（以下，国）は 29 か国であった。これら 29 か国について，2009 年度と 2018 年度のデータが得られている。

(1) 各国において，学習者数を教員数で割ることにより，国ごとの「教員 1 人あたりの学習者数」を算出することができる。図 1 と図 2 は，2009 年度および 2018 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである。これら 2 つのヒストグラムから，9 年間の変化に関して，後のことが読み取れる。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

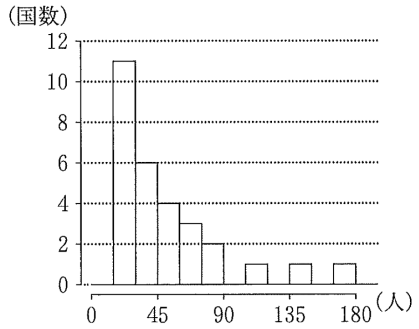


図 1　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

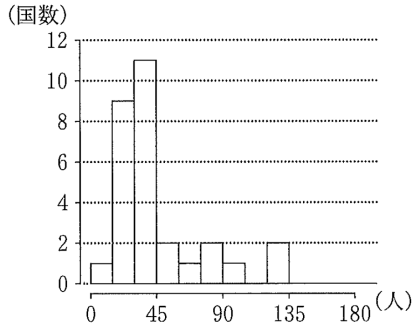


図 2　2018 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

・2009 年度と 2018 年度の中央値が含まれる階級の階級値を比較すると，［ケ］。

・2009 年度と 2018 年度の第 1 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，［コ］。

・2009 年度と 2018 年度の第 3 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，［サ］。

・2009 年度と 2018 年度の範囲を比較すると，［シ］。

・2009 年度と 2018 年度の四分位範囲を比較すると，［ス］。

［ケ］～［ス］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪	2018 年度の方が小さい
①	2018 年度の方が大きい
②	両者は等しい
③	これら 2 つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない

(2) 各国において，学習者数を教育機関数で割ることにより，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」も算出した。図 3 は，2009 年度における「教育機関 1 機関あたりの学習者数」の箱ひげ図である。

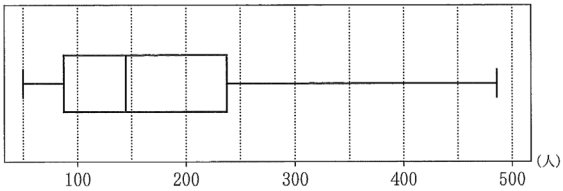


図 3　2009 年度における教育機関 1 機関あたりの学習者数の箱ひげ図

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

2009 年度について，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」(横軸)と「教員 1 人あたりの学習者数」(縦軸)の散布図は［セ］である。ここで，2009 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである(1)の図 1 を，図 4 として再掲しておく。

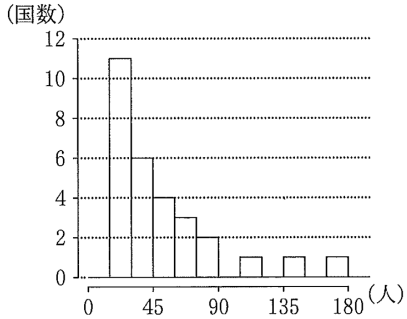
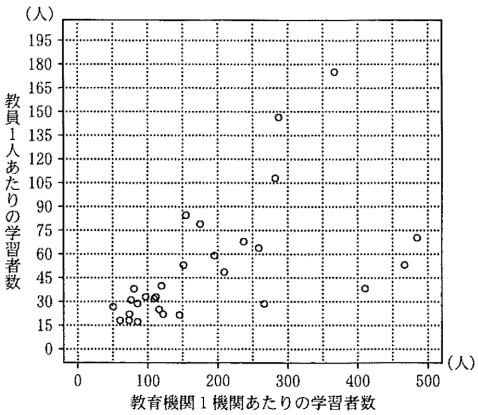


図 4　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

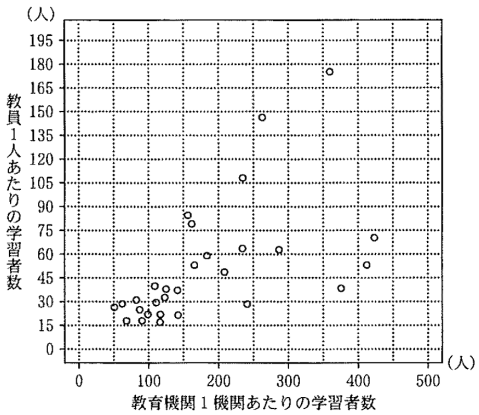
（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

セ については，最も適当なものを，次の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。

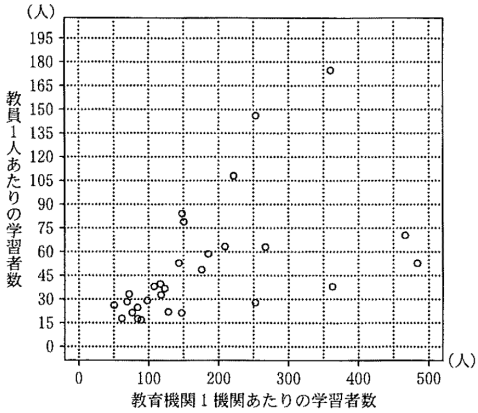
⓪



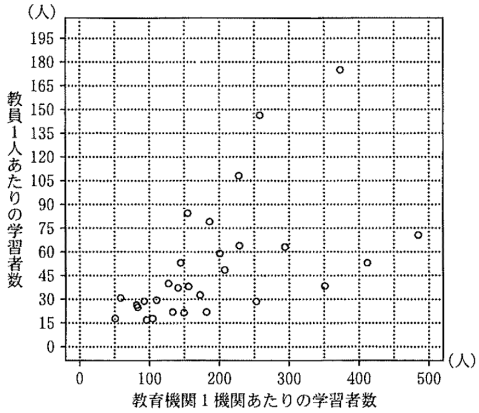
①



②



③



(3) 各国における 2018 年度の学習者数を 100 としたときの 2009 年度の学習者数 S，および，各国における 2018 年度の教員数を 100 としたときの 2009 年度の教員数 T を算出した。

例えば，学習者数について説明すると，ある国において，2009 年度が 44272 人，2018 年度が 174521 人であった場合，2009 年度の学習者数 S は $\frac{44272}{174521}\times 100$ より 25.4 と算出される。

表 1 は S と T について，平均値，標準偏差および共分散を計算したものである。ただし，S と T の共分散は，S の偏差と T の偏差の積の平均値である。

表 1 の数値が四捨五入していない正確な値であるとして，S と T の相関係数を求めると ソ . タチ である。

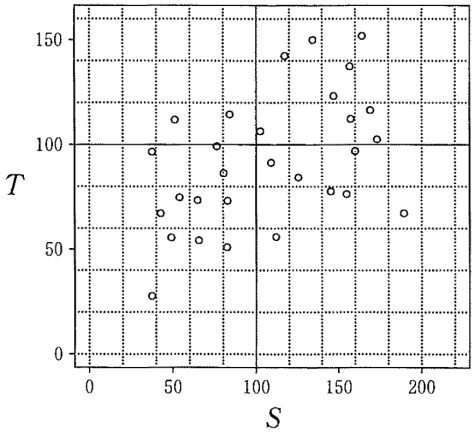
表１　平均値，標準偏差および共分散

Sの平均値	Tの平均値	Sの標準偏差	Tの標準偏差	SとTの共分散
81.8	72.9	39.3	29.9	735.3

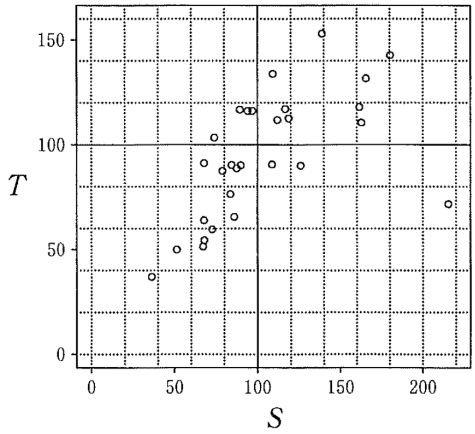
(4)　表１と(3)で求めた相関係数を参考にすると，(3)で算出した 2009 年度の S (横軸)と T (縦軸)の散布図は［ ツ ］である。

［ ツ ］については，最も適当なものを，次の ⓪～③のうちから １ つ選べ。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。

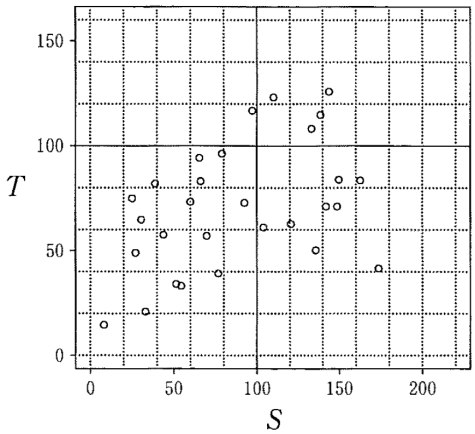
⓪



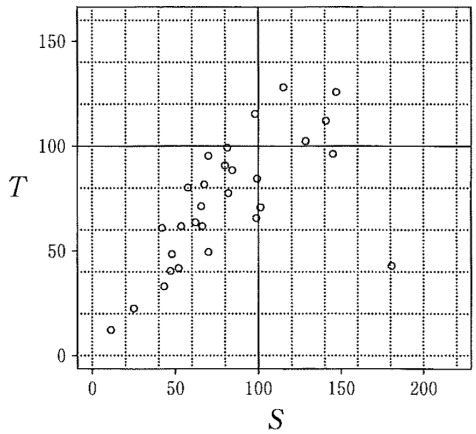
①



②



③



第３問

解答解説のページへ

複数人がそれぞれプレゼントを 1 つずつ持ち寄り，交換会を開く。ただし，プレゼントはすべて異なるとする。プレゼントの交換は次の**手順**で行う。

手順

外見が同じ袋を人数分用意し，各袋にプレゼントを 1 つずつ入れたうえで，各参加者に袋を 1 つずつでたらめに配る。各参加者は配られた袋の中のプレゼントを受け取る。

交換の結果，1 人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は，交換をやり直す。そして，全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了する。

(1) 2 人または 3 人で交換会を開く場合を考える。

(i) 2 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(ii) 3 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(iii) 3 人で交換会を開く場合，4 回以下の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(2) 4 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率を次の**構想**に基づいて求めてみよう。

構想

1 回目の交換で交換会が**終了しない**プレゼントの受け取り方の総数を求める。そのために，自分の持参したプレゼントを受け取る人数によって場合分けをする。

1 回目の交換で，4 人のうち，ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は $\boxed{\text{サ}}$ 通りあり，ちょうど 2 人が自分のプレゼントを受け取る場合は $\boxed{\text{シ}}$ 通りある。このように考えていくと，1 回目のプレゼントの受け取り方のうち，1 回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ である。

(3)　5 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}}$ である。

(4)　A, B, C, D, E の 5 人が交換会を開く。1 回目の交換で A, B, C, D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，その回で交換会が終了する条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌネ}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

(1) $5^4=625$ を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。このことを用いると，不定方程式

$$5^4x-2^4y=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは，$x=$ ア ，$y=$ イウ であることがわかる。

また，①の整数解のうち，x が 2 桁の正の整数で最小になるのは，$x=$ エオ ，$y=$ カキク である。

(2) 次に，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りについて考えてみよう。

まず，$625^2=5^{\boxed{ケ}}$ であり，また，$m=$ イウ とすると

$$625^2=2^{\boxed{ケ}}m^2+2^{\boxed{コ}}m+1$$

である。これらより，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りがわかる。

(3) (2)の考察は，不定方程式

$$5^5x-2^5y=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

の整数解を調べるために利用できる。

x, y を②の整数解とする。5^5x は 5^5 の倍数であり，2^5 で割ったときの余りは 1 となる。よって，(2)により，5^5x-625^2 は 5^5 でも 2^5 でも割り切れる。5^5 と 2^5 は互いに素なので，5^5x-625^2 は $5^5\cdot 2^5$ の倍数である。

このことから，②の整数解のうち，x が 3 桁の正の整数で最小になるのは，$x=$ サシス ，$y=$ セソタチツ であることがわかる。

(4) 11^4 を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。不定方程式

$$11^5x-2^5y=1$$

の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは，$x=$ テト ，$y=$ ナニヌネノ である。

第５問

解答解説のページへ

△ABC の重心を G とし，線分 AG 上で点 A とは異なる位置に点 D をとる。直線 AG と辺 BC の交点を E とする。また，直線 BC 上で辺 BC 上にはない位置に点 F をとる。直線 DF と辺 AB の交点を P，直線 DF と辺 AC の交点を Q とする。

(1) 点 D は線分 AG の中点であるとする。このとき，△ABC の形状に関係なく，

$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また，点 F の位置に関係なく

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ウ}}\times\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\boxed{\text{カ}}\times\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

であるので，つねに $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\boxed{\text{ケ}}$ となる。

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ BC	① BF	② CF	③ EF
④ FP	⑤ FQ	⑥ PQ	

(2) AB＝9，BC＝8，AC＝6 とし，(1)と同様に，点 D は線分 AG の中点であるとする。ここで，4 点 B, C, Q, P が同一円周上にあるように点 F をとる。

このとき，$\mathrm{AQ}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\mathrm{AP}$ であるから，$\mathrm{AP}=\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$\mathrm{AQ}=\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であり，$\mathrm{CF}=\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

(3) △ABC の形状や点 F の位置に関係なく，つねに $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=10$ となるのは，

$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときである。

第１問

問題のページへ

[1] 条件より，$a+b+c=1$ ……①，$a^2+b^2+c^2=13$ ……②

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ より，①②から，

$$1^2=13+2(ab+bc+ca),\ ab+bc+ca=-6 \cdots\cdots\cdots ③$$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$ より，②③から，

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\cdot 13-2\cdot(-6)=38 \cdots\cdots\cdots ④$$

(2) $a-b=2\sqrt{5}$ のとき，$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，

$$x+y=b-a=-2\sqrt{5}$$

④より，$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2=38-(a-b)^2=38-(2\sqrt{5})^2=18$

さらに，$xy=\dfrac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}=\dfrac{1}{2}\{(-2\sqrt{5})^2-18\}=1$ なので，

$$(a-b)(b-c)(c-a)=2\sqrt{5}xy=2\sqrt{5}$$

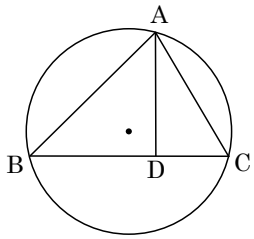
[2] 図１において，$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BC}=y$ とおくと，$\dfrac{y}{x}=\tan 16^\circ=0.2867$

水平方向の縮尺は $\dfrac{1}{100000}$，鉛直方向の縮尺は $\dfrac{1}{25000}$ から，実際の∠BACについて，

$$\tan\angle\mathrm{BAC}=\frac{25000y}{100000x}=\frac{y}{4x}=\frac{1}{4}\times 0.2867 \fallingdotseq 0.072$$

すると，$\tan 4^\circ<\tan\angle\mathrm{BAC}<\tan 5^\circ$ から，∠BACは 4° より大きく 5° より小さい。

[3] 外接円の半径が 3 の△ABC について，点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。



(1) 正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=2\cdot 3$ なので，

$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{AC}=4$ であるとき，$\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}=5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

(2) 正弦定理より，$\mathrm{AB}=6\sin\angle\mathrm{ACB}$ ……①，$\mathrm{AC}=6\sin\angle\mathrm{ABC}$ ……②

まず，$0<\sin\angle\mathrm{ACB}\leqq 1$ なので，①から $0<\mathrm{AB}\leqq 6$ ……③

また，$2\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=14$ から $\mathrm{AC}=14-2\mathrm{AB}$ となり，$0<\sin\angle\mathrm{ABC}\leqq 1$ と②から，

$$0<14-2\mathrm{AB}\leqq 6,\ 4\leqq \mathrm{AB}<7 \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$4\leqq \mathrm{AB}\leqq 6$ である。

すると，$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}=\mathrm{AB}\cdot\dfrac{\mathrm{AC}}{6}=\mathrm{AB}\cdot\dfrac{14-2\mathrm{AB}}{6}=-\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}^2+\dfrac{7}{3}\mathrm{AB}$ より，

$$\mathrm{AD}=-\frac{1}{3}\left(\mathrm{AB}-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{12}$$

$4\leqq \mathrm{AB}\leqq 6$ から，AD は，$\mathrm{AB}=4$ のとき最大値 $4\cdot\dfrac{14-2\cdot 4}{6}=4$ をとる。

© 電送数学舎 2022

［解 説］

[1]はよく見かける数と式の基本題，[2]は測量についての三角比の利用です。また，[3]は三角比の平面図形への応用という頻出題です。なお，AB の取り得る値の範囲は，各辺の長さが直径を超えないということから導いても構いません。

© 電送数学舎 2022

第２問

問題のページへ

[1] 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ ……①または $x^2+qx+p=0$ ……②を満たす実数 x の個数を n とおく。

(1) $p=4$，$q=-4$ のとき，① は $x^2+4x-4=0$ となり $x=-2\pm2\sqrt{2}$，② は $x^2-4x+4=0$ となり，$(x-2)^2=0$ から $x=2$

よって，$n=3$ である。

また，$p=1$，$q=-2$ のとき，①は $x^2+x-2=0$ となり，$(x+2)(x-1)=0$ から $x=-2,\ 1$，②は $x^2-2x+1=0$ となり，$(x-1)^2=0$ から $x=1$

よって，$n=2$ である。

(2) $p=-6$ のとき，①は $x^2-6x+q=0$ ……①′，②は $x^2+qx-6=0$ ……②′

$n=3$ となるのは，②′ が重解をもたないことに着目すると，

(i) ①′ ②′ がともに異なる 2 実数解をもつとき

①′ ②′ の共通解を $x=\alpha$ とすると，

$$\alpha^2-6\alpha+q=0 \text{ ……ⓐ},\quad \alpha^2+q\alpha-6=0 \text{ ……ⓑ}$$

ⓐⓑから，$(q+6)\alpha-6-q=0$，$(q+6)(\alpha-1)=0$ ……ⓒ

・$q=-6$ のとき：①′ ②′ とも $x^2-6x-6=0$ となり，$n=2$ である。

・$q\neq-6$ のとき：ⓒより $\alpha=1$ となり，ⓐⓑより $q=5$ である。

そして，$q=5$ のとき，①′ は $x^2-6x+5=0$ となり，$(x-5)(x-1)=0$ から $x=1,\ 5$，②′ は $x^2+5x-6=0$ となり，$(x+6)(x-1)=0$ から $x=1,\ -6$，

よって，$q=5$ のとき $n=3$ となる。

(ii) ①′ が重解をもち，②′ が異なる 2 実数解をもつとき

①′ より $D/4=9-q=0$ から $q=9$ となり，このとき重解 $x=\dfrac{6}{2}=3$ をもつ。また，②′ は $x^2+9x-6=0$ となり，$x=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$

よって，$q=9$ のとき $n=3$ となる。

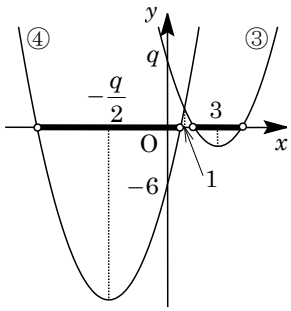
(i)(ii)より，$n=3$ となる q の値は $q=5,\ 9$ である。

(3) 2 次関数 $y=x^2-6x+q=(x-3)^2+q-9$ ……③に対し，グラフの頂点の座標は $(3,\ q-6)$ なので，q の値を 1 から増加させるとグラフは上側に移動する。これより，対応する移動の様子は ⑥ である。

また，2 次関数 $y=x^2+qx-6=\left(x+\dfrac{q}{2}\right)^2-6-\dfrac{q^2}{4}$ ……④に対し，グラフの頂点の座標は $\left(-\dfrac{q}{2},\ -6-\dfrac{q^2}{4}\right)$ なので，q の値を 1 から増加させるとグラフは左下側に移動する。これより，対応する移動の様子は ① である。

© 電送数学舎 2022

(4) $5<q<9$ のとき，③④のグラフは頂点の y 座標がともに負であり，x 軸と異なる 2 点で交わる。



また，③④の交点は，$x^2-6x+q=x^2+qx-6$ より，

$$(q+6)x-q-6=0,\ x=1$$

ここで，全体集合 U を実数全体の集合とし，その部分集合を $A=\{x\,|\,x^2-6x+q<0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+qx-6<0\}$ とおくと，A, B は右図の太線部で表され，

$x\in A$ は，$x\in B$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

$x\in B$ は，$x\in\overline{A}$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

[2] (1) 中央値は小さい方から 15 番目より，中央値が含まれる階級は，2009 年度が 30 人以上 45 人未満，2018 年度が 30 人以上 45 人未満である。すると，中央値が含まれる階級の階級値は等しい。

第 1 四分位数は小さい方から 7 番目と 8 番目の平均値より，第 1 四分位数が含まれる階級は，2009 年度が 15 人以上 30 人未満，2018 年度が 15 人以上 30 人未満である。すると，第 1 四分位数が含まれる階級の階級値は等しい。

第 3 四分位数は小さい方から 22 番目と 23 番目の平均値より，第 3 四分位数が含まれる階級は，2009 年度が 60 人以上 75 人未満，2018 年度が 45 人以上 60 人未満である。すると，第 3 四分位数が含まれる階級の階級値は 2018 年度の方が小さい。

範囲については，2009 年度が $165-30=135$ 人より大で $180-15=165$ 人未満，2018 年度が $120-15=105$ 人より大で $135-0=135$ 人未満である。すると，範囲は 2018 年度の方が小さい。

四分位範囲については，2009 年度が $60-30=30$ 人より大で $75-15=60$ 人未満，2018 年度が $45-30=15$ 人より大で $60-15=45$ 人未満である。すると，四分位範囲はこれら 2 つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない。

(2) 図 3 の箱ひげ図から，最大値は 485 人程度なので散布図 ①が不適，中央値は 145 人程度なので散布図 ③が不適，第 3 四分位数は 235 人程度なので散布図 ⓪が不適。よって，最も適当な散布図は ②である。

(3) 表 1 より，S と T の相関係数は，$\dfrac{735.3}{39.3\times29.9}\fallingdotseq0.63\cdots\cdots\cdots(*)$

(4) $(*)$より，S と T は正の相関があるので，散布図は ①または ③となる。

次に，表 1 から，S の平均値が 81.8，T の平均値が 72.9 であることに着目すると，散布図 ③が最も適当である。

© 電送数学舎 2022

［解 説］

[1]は 2 次関数のグラフに 2 次方程式と 2 次不等式を組み合わせた問題です。4 つの設問がゆるく関連しています。[2]はデータの分析の問題です。図を読み取り数えていくだけですが, 非常に煩雑です。とにかく時間制限がきついので。

© 電送数学舎 2022

第３問

問題のページへ

(1) 交換会の参加者を A, B, C, …とし，プレゼントをそれぞれ a, b, c, …とおく。

(i) 2 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(\mathrm{b},\ \mathrm{a})$の 1 通りなので，その確率は$\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$である。

(ii) 3 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は$(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=(\mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{a})$，$(\mathrm{c},\ \mathrm{a},\ \mathrm{b})$の 2 通りなので，その確率は$\dfrac{2}{3!}=\dfrac{1}{3}$である。

(iii) 3 人で交換会を開く場合，2 回目，3 回目，4 回目の交換で交換会が終了する確率は，それぞれ$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{81}$である。

これより，4 回以下の交換で交換会が終了する確率は，(ii)と合わせて，

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}=\frac{65}{81}$$

(2) 4 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で，

・1 人が自分のプレゼントを受け取る場合　(1)(ii)より ${}_4\mathrm{C}_1\times 2=8$ 通り

・2 人が自分のプレゼントを受け取る場合　(1)(i)より ${}_4\mathrm{C}_2\times 1=6$ 通り

・3 人が自分のプレゼントを受け取る場合　0 通り

・4 人が自分のプレゼントを受け取る場合　1 通り

これより，1 回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は，

$$8+6+0+1=15\ \text{（通り）}$$

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は，$1-\dfrac{15}{4!}=\dfrac{3}{8}$である。

(3) 5 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で，

・1 人が自分のプレゼントを受け取る場合　(2)より ${}_5\mathrm{C}_1\times(4!-15)=45$ 通り

・2 人が自分のプレゼントを受け取る場合　(1)(ii)より ${}_5\mathrm{C}_2\times 2=20$ 通り

・3 人が自分のプレゼントを受け取る場合　(1)(i)より ${}_5\mathrm{C}_3\times 1=10$ 通り

・4 人が自分のプレゼントを受け取る場合　0 通り

・5 人が自分のプレゼントを受け取る場合　1 通り

これより，1 回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は，

$$45+20+10+0+1=76\ \text{（通り）}$$

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は，$1-\dfrac{76}{5!}=\dfrac{11}{30}$である。

(4) A, B, C, D, E の 5 人が交換会を開く。1 回目の交換で A, B, C, D がそれぞれ自分以外の人のプレゼントを受け取るのは，自分以外のプレゼントを＊で表すと，$(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \mathrm{E})=(*,\ *,\ *,\ *,\ e)$，$(*,\ *,\ *,\ *,\ *)$より，その確率は，

$$\frac{4!-15}{5!}+\frac{11}{30}=\frac{3}{40}+\frac{11}{30}=\frac{53}{120}$$

© 電送数学舎 2022

したがって，1回目の交換でA，B，C，Dがそれぞれ自分以外の人のプレゼントを受け取ったとき，その回で交換会が終了する条件付き確率は，

$$\frac{11}{30} \div \frac{53}{120} = \frac{44}{53}$$

［解 説］

確率の有名問題です。方針が示されているので，それに従って解いていけばよいのですが，次第に複雑になっていくように小問が設定されていますので，完答するにはかなりの注意力が要求されます。

© 電送数学舎 2022

第４問

問題のページへ

(1) 不定方程式$5^4x-2^4y=1$……①に対して，$5^4=2^4\cdot 39+1$より，

$$5^4\cdot 1-2^4\cdot 39=1 \cdots\cdots ①'$$

①①′より，$5^4(x-1)-2^4(y-39)=0$，$5^4(x-1)=2^4(y-39)$

5^4と2^4は互いに素なので，kを整数として，$(x-1,\ y-39)=(2^4k,\ 5^4k)$

$$x=2^4k+1,\ y=5^4k+39$$

xが正の整数で最小になるのは，$k=0$のときで，$x=1$，$y=39$

xが２桁の正の整数で最小になるのは，$k=1$のときで，$x=17$，$y=664$

(2) $625=5^4$であり，$m=39$とおくと$5^4=2^4m+1$から，

$$625^2=5^8=(2^4m+1)^2=2^8m^2+2^5m+1=2^5(2^3m^2+m)+1 \cdots\cdots ⓐ$$

すると，$625^2=5^5\cdot 5^3$を5^5で割ったときの余りは 0，625^2を2^5で割ったときの余りはⓐから１である。

(3) 不定方程式$5^5x-2^5y=1$……②に対して，$5^5x=2^5y+1$

すると，5^5xは5^5の倍数であり，また2^5で割ったときの余りは１となり，

$$5^5x-625^2\equiv 0-0\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,5^5),\ 5^5x-625^2\equiv 1-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2^5)$$

よって，5^5x-625^2は5^5でも2^5でも割り切れ，5^5と2^5は互いに素なので，5^5x-625^2は$5^5\cdot 2^5$の倍数である。

すると，lを整数として，$5^5x-625^2=5^5\cdot 2^5l$と表せ，

$$x-5^3=2^5l,\ x=125+32l$$

xが３桁の正の整数で最小になるのは，$l=0$のときで$x=125$

このとき，②から$5^8-2^5y=1$となり，ⓐを代入すると，

$$2^5(2^3m^2+m)+1-2^5y=1,\ y=2^3m^2+m=39(8\cdot 39+1)=12207$$

(4) $11^2=2^2\cdot 30+1$より，$11^4=2^4\cdot 30^2+2^3\cdot 30+1=2^4(900+15)+1=2^4\cdot 915+1$

$n=915$とおくと$11^4=2^4n+1$……ⓑから，

$$11^8=(2^4n+1)^2=2^8n^2+2^5n+1=2^5(2^3n^2+n)+1 \cdots\cdots ⓒ$$

すると，$11^8=11^5\cdot 11^3$を11^5で割ったときの余りは 0，11^8を2^5で割ったときの余りはⓒから１である。

さて，不定方程式$11^5x-2^5y=1$……③に対して，$11^5x=2^5y+1$

すると，11^5xは11^5の倍数であり，また2^5で割ったときの余りは１となり，

$$11^5x-11^8\equiv 0-0\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,11^5),\ 11^5x-11^8\equiv 1-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2^5)$$

よって，11^5x-11^8は11^5でも2^5でも割り切れ，11^5と2^5は互いに素なので，11^5x-11^8は$11^5\cdot 2^5$の倍数である。

すると，jを整数として，$11^5x-11^8=11^5\cdot 2^5j$と表せ，

$$x-11^3=2^5j,\ x=1331+32j$$

© 電送数学舎 2022

x が正の整数で最小になるのは，$j=-41$ のときで $x=1331-32\cdot 41=19$

このとき，③から $11^5\cdot 19-2^5y=1$ となり，ⓑを代入すると，

$$11(2^4n+1)\cdot 19-2^5y=1,\ 209\cdot 2^4n+208-2^5y=0,\ 209n+13-2y=0$$

よって，$y=\dfrac{209\cdot 915+13}{2}=95624$

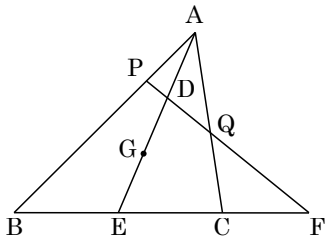
［解 説］

不定方程式の特殊解を求める問題です。ただ，数値計算の量が尋常ではありません。(4)は(3)の 5 を 11 に変えただけの設問ですが，配点比でトータル 14 分の問題として，最後の空欄まで埋めるのは難しいでしょう。

© 電送数学舎 2022

第５問

問題のページへ



(1) △ABC の重心を G, 線分 AG の中点を D とする。直線 BC 上で辺 BC 上にはない位置に点 F をとり, 直線 DF と辺 AB, AC の交点を, それぞれ P, Q とする。

まず, $\mathrm{AG}:\mathrm{GE}=2:1$, $\mathrm{AD}=\mathrm{DG}$ より,

$$\mathrm{AD}=\mathrm{DG}=\mathrm{GE},\ \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}$$

ここで, △ABE と直線 PF にメネラウスの定理を適用すると,

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}}=1,\ \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}}=2\times\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}\cdots\cdots\cdots①$$

また, △AEC と直線 DF にメネラウスの定理を適用すると,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1,\ \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{EF}}=2\times\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\times\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}+2\times\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}=2\times\dfrac{\mathrm{BF}+\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}$

ここで, 点 E は線分 BC の中点なので, $\mathrm{EF}=\dfrac{\mathrm{BF}+\mathrm{CF}}{2}$ となり,

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\times\frac{2\mathrm{EF}}{\mathrm{EF}}=4\cdots\cdots\cdots③$$

(2) $\mathrm{AB}=9$, $\mathrm{BC}=8$, $\mathrm{AC}=6$ で, $\mathrm{AD}=\mathrm{DG}=\mathrm{GE}$ のとき, 4 点 B, C, Q, P が同一円周上にあるように点 F をとる。すると, 方べきの定理より,

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AC},\ 9\mathrm{AP}=6\mathrm{AQ}$$

これより, $\mathrm{AQ}=\dfrac{9}{6}\mathrm{AP}=\dfrac{3}{2}\mathrm{AP}$ であり, $\mathrm{AP}=2x$ とおくと $\mathrm{AQ}=3x$ となる。

③から, $\dfrac{9-2x}{2x}+\dfrac{6-3x}{3x}=4$, $\dfrac{9}{2x}+\dfrac{6}{3x}=6$ となり, $\dfrac{13}{2x}=6$ から $x=\dfrac{13}{12}$ なので,

$$\mathrm{AP}=2\cdot\frac{13}{12}=\frac{13}{6},\ \mathrm{AQ}=3\cdot\frac{13}{12}=\frac{13}{4}$$

さらに, $\mathrm{CF}=y$ とおくと, $\mathrm{EF}=\dfrac{8}{2}+y=4+y$ となり, また $\mathrm{CQ}=6-\dfrac{13}{4}=\dfrac{11}{4}$

②より, $\dfrac{11}{13}=2\cdot\dfrac{y}{4+y}$ となり, $11(4+y)=26y$, $\mathrm{CF}=y=\dfrac{44}{15}$

(3) $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=10$ のとき, ③の $2\to\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}$ と変えて, $\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\cdot\dfrac{2\mathrm{EF}}{\mathrm{EF}}=10$ から $\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}=5$

これより, $\mathrm{AD}=\dfrac{1}{1+5}\mathrm{AE}=\dfrac{1}{6}\mathrm{AE}$, $\mathrm{DG}=\mathrm{AE}-\dfrac{1}{6}\mathrm{AE}-\dfrac{1}{3}\mathrm{AE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AE}$ となり,

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}=\frac{1}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

[解 説]

平面図形の標準題です。なお, 点 F の位置が上の図と異なっても同様です。

© 電送数学舎 2022