1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 自然数 m, n について，$2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ。

(2) 6912 の正の約数のうち，12 で割り切れないものの総和を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$について考える。

$$a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$とおくとき，b_{n+1}をb_nとnの式で表せ。

(2)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

a を 0 でない実数とする。C を $y=-x^3+x^2$ で表される曲線，l を $y=a$ で表される直線とし，C と l は共有点をちょうど 2 つもつとする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　C と l の共有点の x 座標をすべて求めよ。

(3)　C と l で囲まれた図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし，この試行を繰り返す。例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は 5 となる。なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1)　この試行を 2 回行ったとき，持ち点が 1 である確率を求めよ。

(2)　この試行を 4 回行ったとき，持ち点が 10 以下である確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$2^m\cdot 3^n$ の正の約数は，k を 0 以上 m 以下の整数，l を 0 以上 n 以下の整数として，$2^k\cdot 3^l$ で表されることより，その個数は $(m+1)(n+1)$ である。

(2)　$6912=2^8\cdot 3^3$ の正の約数は，k を 0 以上 8 以下の整数，l を 0 以上 3 以下の整数として，$2^k\cdot 3^l$ と表される。

　この中で，$12=2^2\cdot 3^1$ で割り切れる約数は $2^k\cdot 3^l$ $(k\geqq 2$ かつ $l\geqq 1)$ と表せるので，12 で割り切れない約数は $2^k\cdot 3^l$ $(k\leqq 1$ または $l=0)$ となり，

(i)　$l=0$ $(3^l=1)$ のとき　k は任意で，2^0，2^1，2^2，2^3，2^4，2^5，2^6，2^7，2^8

(ii)　$l=1$ $(3^l=3^1)$ のとき　k は 1 以下で，$2^0\cdot 3^1$，$2^1\cdot 3^1$

(iii)　$l=2$ $(3^l=3^2)$ のとき　k は 1 以下で，$2^0\cdot 3^2$，$2^1\cdot 3^2$

(iv)　$l=3$ $(3^l=3^3)$ のとき　k は 1 以下で，$2^0\cdot 3^3$，$2^1\cdot 3^3$

(i)〜(iv)より，この約数の総和は，

$$(2^0+2^1+2^2+\cdots 2^8)+(2^0+2^1)(3^1+3^2+3^3)=\frac{2^9-1}{2-1}+3\cdot 39=628$$

［解　説］

約数についての基本題です。(2)では, 12 で割り切れる約数から考えて, l の値で場合分けをしています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$a_{n+1}=3a_n-\dfrac{3^{n+1}}{n(n+1)}$ に対し，両辺を 3^{n+1} で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}-\dfrac{1}{n(n+1)}$

すると，$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ から，$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{n(n+1)}$ ………(＊)

(2)　$a_1=3$ から $b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=1$ となり，(＊)より $n\geqq 2$ で，

$$b_n=b_1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=1-\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)$$

$$=1-\Big\{\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)\Big\}=1-\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\Big)=\frac{1}{n}$$

この式は，$n=1$ のときも成り立っている。

したがって，$a_n=3^nb_n=\dfrac{3^n}{n}$ である。

［解　説］

漸化式の基本題です。誘導がなくてもよいレベルです。

3

問題のページへ

(1)　$C: y=-x^3+x^2$ に対して，$y'=-3x^2+2x=-x(3x-2)$

これより，y の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$

すると，$l: y=a\ (a\neq 0)$ と C が共有点を 2 つもつ条件は，$a=\dfrac{4}{27}$ である。

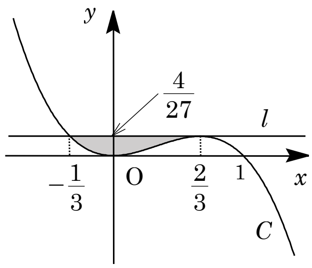
(2)　(1)より，$l: y=\dfrac{4}{27}$ である。

すると，C と l の共有点の x 座標は，$-x^3+x^2=\dfrac{4}{27}$ から $x^3-x^2+\dfrac{4}{27}=0$ となり，

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$$

よって，$x=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}$ である。

(3)　C と l で囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{4}{27}-(-x^3+x^2)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x-\frac{2}{3}+1\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^3+\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right\}dx=\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^3\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{12}$$

［解　説］

微積分の基本的な典型題です。計算ミスだけが要注意です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　正八面体のさいころを投げ，「1」，「2」，「3」，「0」の書かれた面が出る確率は，それぞれ$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{5}{8}$である。このとき，持ち点 0 から始め，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を行う。

さて，試行を 2 回行ったとき，持ち点が 1 であるのは「1」が 1 回，「0」が 1 回の場合より，その確率は${}_2\mathrm{C}_1\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{32}$である。

(2)　試行を 4 回行ったとき，持ち点が 10 より大きくなるのは，11 または 12 より，

(i)　持ち点が 11 のとき

「2」が 1 回，「3」が 3 回の場合より，その確率は${}_4\mathrm{C}_1\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{8}\right)^3=\dfrac{4}{4096}$

(ii)　持ち点が 12 のとき

「3」が 4 回の場合より，その確率は$\left(\dfrac{1}{8}\right)^4=\dfrac{1}{4096}$

(i)(ii)より，持ち点が 10 より大きくなる確率は，$\dfrac{4}{4096}+\dfrac{1}{4096}=\dfrac{5}{4096}$である。

したがって，試行を 4 回行ったとき，持ち点が 10 以下である確率は，

$$1-\frac{5}{4096}=\frac{4091}{4096}$$

［解　説］

確率の基本題です。(2)で余事象を考えることは，すぐに気づくと思われます。