1

解答解説のページへ

a を正の実数とする。放物線 $y=x^2$ を C_1，放物線 $y=-x^2+4ax-4a^2+4a^4$ を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 が異なる 2 つの共通接線 l，l' をもつような a の範囲を求めよ。ただし C_1 と C_2 の共通接線とは，C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである。

以下，a は(2)で求めた範囲にあるとし，l，l' を C_1 と C_2 の異なる 2 つの共通接線とする。

(3)　l，l' の交点の座標を求めよ。

(4)　C_1 と l，l' で囲まれた領域を D_1 とし，不等式 $x \leqq a$ の表す領域を D_2 とする。D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(5)　$S(a)$ を(4)の通りとする。a が(2)で求めた範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

4 つの実数を $\alpha=\log_2 3$，$\beta=\log_3 5$，$\gamma=\log_5 2$，$\delta=\dfrac{3}{2}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha\beta\gamma=1$ を示せ。

(2)　α，β，γ，δ を小さい順に並べよ。

(3)　$p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とし，$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ とする。このとき $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-1)$ および $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ。

3

解答解説のページへ

1 から 12 までの数字が右の図のように並べて書かれている。以下のルール(a), (b)と(終了条件)を用いたゲームを行う。ゲームを開始すると，最初に(a)を行い，(終了条件)が満たされたならゲームを終了する。そうでなければ(終了条件)が満たされるまで(b)の操作を繰り返す。ただし，(a)と(b)における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

(a)　1 から 12 までの数字のどれか 1 つを等しい確率で選び，右の図において選んだ数字を丸で囲み，その上に石を置く。

(b)　石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか 1 つを等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く。例えば，石が 6 の位置に置かれているときは，その水平右側または垂直下側の位置にある数字 7, 8, 9, 10, 12 のどれか 1 つの数字を等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く。

(終了条件)　5, 9, 11, 12 の数字のどれか 1 つが丸で囲まれ石が置かれている。

ゲーム終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする。以下の問いに答えよ。

(1)　確率 p_2 を求めよ。

(2)　確率 p_5 と p_{11} を求めよ。

(3)　確率 p_5，p_9，p_{11}，p_{12} のうち最も大きいものの値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$0 \leqq a < 1$ を満たす実数 a に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a\,,\ \ a_{n+1} = 3\left[a_n + \frac{1}{2}\right] - 2a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という漸化式で定める。ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　a が $0 \leqq a < 1$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y) = (a_1,\ a_2)$ の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2)　$a_n - [a_n] \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$a_n < a_{n+1}$ であることを示せ。

(3)　$a_n > a_{n+1}$ ならば，$a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$ かつ $[a_{n+1}] = [a_n] - 1$ であることを示せ。

(4)　ある 2 以上の自然数 k に対して，$a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ が成り立つとする。このとき a_k を a の式で表せ。

1　　解答解説のページへ

(1)　$C_1 : y = x^2$ に対して $y' = 2x$ となり，点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①と $C_2 : y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4 \cdots\cdots②$を連立すると，

$$2tx - t^2 = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4,\quad x^2 + 2(t - 2a)x - t^2 + 4a^2 - 4a^4 = 0$$

直線①と C_2 が接する条件は，$D/4 = (t - 2a)^2 - (-t^2 + 4a^2 - 4a^4) = 0$ となり，

$$t^2 - 4at + 4a^2 + t^2 - 4a^2 + 4a^4 = 0,\quad t^2 - 2at + 2a^4 = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

C_1 と C_2 の共通接線が 2 本存在することより，③は異なる 2 実数解をもち，

$$D/4 = a^2 - 2a^4 > 0,\quad a^2(\sqrt{2}a + 1)(\sqrt{2}a - 1) < 0$$

すると，$a > 0$ から，$0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

(3)　$0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，③の解を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，

$$\alpha + \beta = 2a,\quad \alpha\beta = 2a^4 \cdots\cdots\cdots⑤$$

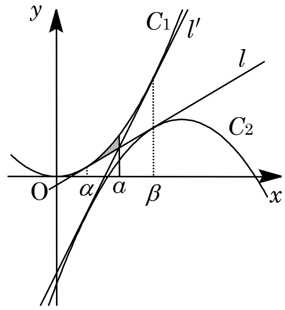
①より，共通接線 $l : y = 2\alpha x - \alpha^2$，$l' : y = 2\beta x - \beta^2$ とおき，連立すると，

$$2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2,\quad 2(\beta - \alpha)x = \beta^2 - \alpha^2,\quad x = \frac{\beta + \alpha}{2}$$

⑤から $x = \dfrac{2a}{2} = a$ となり，$y = 2\alpha \cdot \dfrac{\beta + \alpha}{2} - \alpha^2 = \alpha\beta = 2a^4$

これより，l，l' の交点の座標は $(a,\ 2a^4)$ である。

(4)　C_1 と l，l' で囲まれた領域で $x \leqq a$ の部分の面積 $S(a)$ は，



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\}dx \\ &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x - \alpha)^2 dx = \Big[\,\frac{1}{3}(x - \alpha)^3\,\Big]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{\beta - \alpha}{2}\Big)^3 \end{aligned}$$

③より，$t = a \pm \sqrt{a^2 - 2a^4} = a \pm a\sqrt{1 - 2a^2}$ となり，

$$\alpha = a - a\sqrt{1 - 2a^2},\quad \beta = a + a\sqrt{1 - 2a^2}$$

よって，$S(a) = \dfrac{1}{3}\big(a\sqrt{1 - 2a^2}\,\big)^3 = \dfrac{1}{3}a^3(1 - 2a^2)\sqrt{1 - 2a^2}$ である。

(5)　(4)より，$S(a) = \dfrac{1}{3}\big(\sqrt{-2a^4 + a^2}\,\big)^3 = \dfrac{1}{3}\Big\{\sqrt{-2\Big(a^2 - \dfrac{1}{4}\Big)^2 + \dfrac{1}{8}}\,\Big\}^3$

$0 < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$S(a)$ は $a^2 = \dfrac{1}{4}\ \Big(a = \dfrac{1}{2}\Big)$ のとき最大値 $\dfrac{1}{3}\Big(\sqrt{\dfrac{1}{8}}\,\Big)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{96}$ をとる。

［解　説］

2 つの放物線の共通接線を題材にした超頻出題です。

2

解答解説のページへ

(1)　$\alpha=\log_2 3$，$\beta=\log_3 5$，$\gamma=\log_5 2$ のとき，$\alpha\beta\gamma=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\dfrac{1}{\log_2 5}=1$

(2)　まず，$\alpha=\log_2 3>\log_2 2=1$，$\beta=\log_3 5>\log_3 3=1$ であり，

$$0=\log_5 1<\log_5 2<\log_5 5=1,\ 0<\gamma<1$$

また，$\alpha-\delta=\log_2 3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}(2\log_2 3-3)=\dfrac{1}{2}(\log_2 9-\log_2 8)>0$

$$\beta-\delta=\log_3 5-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(2\log_3 5-3)=\frac{1}{2}(\log_3 25-\log_3 27)<0$$

これより，$\alpha>\delta$，$1<\beta<\delta$ となり，$\gamma<\beta<\delta<\alpha$ である。

(3)　$p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ のとき，(1)より $\alpha\beta\gamma=1$ なので，

$$q=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

すると，$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ に対して，

$$f(x)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$$
$$=(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$

これより，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $x=-\alpha,\ -\beta,\ -\gamma$ となる。

さて，(2)より $0<\gamma<1<\beta<\dfrac{3}{2}<\alpha$ なので，$-\alpha<-\dfrac{3}{2}<-\beta<-1<-\gamma<0$

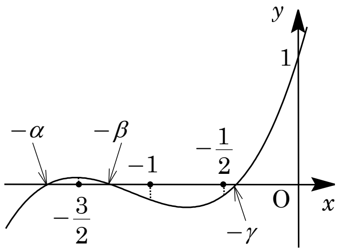
また，$\gamma-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(2\log_5 2-1)=\dfrac{1}{2}(\log_5 4-\log_5 5)<0$

から，$0<\gamma<\dfrac{1}{2}$ となり，

$$-\alpha<-\frac{3}{2}<-\beta<-1<-\frac{1}{2}<-\gamma<0$$

したがって，右図より，

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)<0,\ f(-1)<0,\ f\left(-\frac{3}{2}\right)>0$$



［解　説］

対数計算と高次方程式が融合した問題です。誘導が丁寧なので，方針に迷うことはないでしょう。

3　　解答解説のページへ

(1)　与えられたルール(a), (b)と(終了条件)を用いたゲームを行う。

まず, 終了時に数字 1 が丸で囲まれているのは, ルール(a)で 1 を選び石を置くときより, その確率 p_1 は, $p_1=\dfrac{1}{12}$ である。

次に, 終了時に数字 2 が丸で囲まれているのは, ルール(a)で 2 を選び石を置くとき, またはルール(b)で 1→2 と石を移すときより, その確率 p_2 は,

$$p_2=\frac{1}{12}+p_1\times\frac{1}{7}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{12}\times\frac{8}{7}=\frac{2}{21}$$

(2)　終了時に数字 5 が丸で囲まれているのは, ルール(a)で 5 を選び石を置くとき, またはルール(b)で 1→5, 2→5, 3→5, 4→5 と石を移すときより, その確率 p_5 は,

$$p_5=\frac{1}{12}+p_1\times\frac{1}{7}+p_2\times\frac{1}{5}+p_3\times\frac{1}{3}+p_4\times\frac{1}{2}$$

同様に考えて, $p_3=\dfrac{1}{12}+p_1\times\dfrac{1}{7}+p_2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{21}+\dfrac{2}{21}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{21}\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{4}{35}$

$$p_4=\frac{1}{12}+p_1\times\frac{1}{7}+p_2\times\frac{1}{5}+p_3\times\frac{1}{3}=\frac{4}{35}+\frac{4}{35}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{35}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{105}$$

よって, $p_5=\dfrac{16}{105}+\dfrac{16}{105}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{16}{105}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{8}{35}$ である。

終了時に数字 11 が丸で囲まれているのは, ルール(a)で 11 を選び石を置くとき, またはルール(b)で 10→11, 2→11, 7→11 と石を移すときより, その確率 p_{11} は,

$$p_{11}=\frac{1}{12}+p_{10}\times\frac{1}{2}+p_2\times\frac{1}{5}+p_7\times\frac{1}{3}$$

同様に考えて, $p_6=\dfrac{1}{12}+p_1\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{2}{21}$, $p_{10}=\dfrac{1}{12}+p_1\times\dfrac{1}{7}+p_6\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{35}$

$$p_7=\frac{1}{12}+p_2\times\frac{1}{5}+p_6\times\frac{1}{5}=\frac{1}{12}+\frac{2}{21}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{21}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{12}+\frac{4}{105}=\frac{17}{140}$$

よって, $p_{11}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{4}{35}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{21}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{17}{140}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{35+24+8+17}{3\cdot4\cdot5\cdot7}=\dfrac{1}{5}$ である。

(3)　終了時に数字 12 が丸で囲まれているのは, ルール(a)で 12 を選び石を置くとき, またはルール(b)で 1→12, 6→12, 10→12 と石を移すときより, その確率 p_{12} は,

$$p_{12}=\frac{1}{12}+p_1\times\frac{1}{7}+p_6\times\frac{1}{5}+p_{10}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{35}+\frac{4}{35}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{35}\times\frac{3}{2}=\frac{6}{35}$$

また, $p_5+p_9+p_{11}+p_{12}=1$ より, $p_9=1-\left(\dfrac{8}{35}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{6}{35}\right)=\dfrac{2}{5}$

よって, p_5, p_9, p_{11}, p_{12} のうち最も大きいものは $p_9=\dfrac{2}{5}$ である。

［解 説］

題意を把握して確率計算を行う問題です。(1)が実質的には誘導となり, 同じ方法で(2), (3)と計算をしていきます。なお, 数値計算はやや面倒ですので, 流用することを心がけました。

4

解答解説のページへ

(1)　$0 \leqq a < 1$ のとき，$a_1 = a$，$a_{n+1} = 3\left[a_n + \dfrac{1}{2}\right] - 2a_n$ ……①に対して，

$$a_2 = 3\left[a_1 + \frac{1}{2}\right] - 2a_1 = 3\left[a + \frac{1}{2}\right] - 2a$$

(i)　$0 \leqq a < \dfrac{1}{2}$ のとき　$\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = 0$ となり，

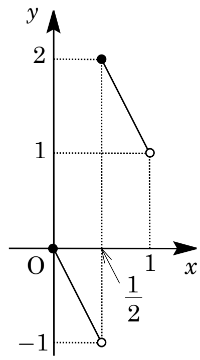
$$(x,\ y) = (a_1,\ a_2) = (a,\ -2a)$$

点 $(x,\ y)$ の軌跡は，線分 $y = -2x\ \left(0 \leqq x < \dfrac{1}{2}\right)$ である。

(ii)　$\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ のとき　$\left[a + \dfrac{1}{2}\right] = 1$ となり，

$$(x,\ y) = (a_1,\ a_2) = (a,\ 3 - 2a)$$

点 $(x,\ y)$ の軌跡は，線分 $y = -2x + 3\ \left(\dfrac{1}{2} \leqq x < 1\right)$ である。



(i)(ii)より，軌跡を図示すると，右図の通りである。

ただし，黒丸は含み，白丸は含まない。

(2)　$a_n - [a_n] \geqq \dfrac{1}{2}$ より，$[a_n] + \dfrac{1}{2} \leqq a_n < [a_n] + 1$ ……②となり，

$$[a_n] + 1 \leqq a_n + \frac{1}{2} < [a_n] + \frac{3}{2}$$

すると，$\left[a_n + \dfrac{1}{2}\right] = [a_n] + 1$ となり，①に代入すると，$a_{n+1} = 3([a_n] + 1) - 2a_n$

これより，$a_{n+1} - a_n = 3([a_n] + 1 - a_n)$ となるので，②から，

$$a_{n+1} - a_n > 0,\ a_n < a_{n+1}$$

(3)　(2)より，対偶を考えると，$a_n \geqq a_{n+1}$ ならば $a_n - [a_n] < \dfrac{1}{2}$ である。

すると，$a_n > a_{n+1}$ のとき $a_n - [a_n] < \dfrac{1}{2}$ となり，$[a_n] \leqq a_n < [a_n] + \dfrac{1}{2}$ ……③から，

$$[a_n] + \frac{1}{2} \leqq a_n + \frac{1}{2} < [a_n] + 1$$

よって，$\left[a_n + \dfrac{1}{2}\right] = [a_n]$ となり，①に代入すると，$a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$ ………④

また，③から $-2[a_n] - 1 < -2a_n \leqq -2[a_n]$ となり，④から，

$$[a_n] - 1 < 3[a_n] - 2a_n \leqq [a_n],\ [a_n] - 1 < a_{n+1} \leqq [a_n]$$

ここで，$a_{n+1} = [a_n]$ とおくと，④から $a_{n+1} = a_n$ となり $a_n > a_{n+1}$ に反するので，

$$[a_n] - 1 < a_{n+1} < [a_n],\ [a_{n+1}] = [a_n] - 1 \text{ ………⑤}$$

(4)　$a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ のとき，⑤より，$[a_n] = [a_1] - (n-1) = -n + 1\ \ (n \leqq k)$

④に代入すると，$a_{n+1} = 3(-n+1) - 2a_n\ \ (n \leqq k - 1)$

$$a_{n+1} = -2a_n - 3n + 3 \text{ ………⑥}$$

ここで，⑥を満たす 1 つの数列を $a_n = \alpha n + \beta$ (α，β は定数) とおくと，

$$\alpha(n+1) + \beta = -2(\alpha n + \beta) - 3n + 3 \text{ ………⑦}$$

すると，$\alpha=-2\alpha-3$，$\alpha+\beta=-2\beta+3$ となり，$(\alpha,\ \beta)=\left(-1,\ \dfrac{4}{3}\right)$………⑧

⑥⑦より，$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=-2\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ となり，

$$a_n-(\alpha n+\beta)=\{a_1-(\alpha+\beta)\}(-2)^{n-1}\quad(n\leqq k)$$

⑧を代入して，$a_n-\left(-n+\dfrac{4}{3}\right)=\left\{a-\left(-1+\dfrac{4}{3}\right)\right\}(-2)^{n-1}=\left(a-\dfrac{1}{3}\right)(-2)^{n-1}$ から，

$$a_k=\left(a-\frac{1}{3}\right)(-2)^{k-1}-k+\frac{4}{3}$$

［解 説］

ガウス記号の絡んだ漸化式の問題です。$a_n-[a_n]$ が a_n の小数部分ということをもとに，数直線を利用して評価式を立てています。なお，(4)の後半の漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。