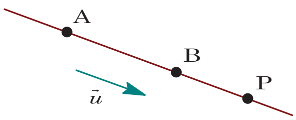
第１講　直線の方程式



直線は，異なる２点によって決定されます。この２点を A, B とし，直線 AB 上の任意の点を P とおきます。

$\overrightarrow{AP} = t'\overrightarrow{AB}$（$t'$ は実数）

点 P の始点を原点 O に変更すると，

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t'\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t'\overrightarrow{AB}$（$t'$ は実数）

ここで，直線 AB に平行なベクトルを $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) とすると，$\vec{u}$ は $\overrightarrow{AB}$ の実数倍なので，$t'\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$ とおくことができ，

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$（$t$ は実数）

と表すことができます。この $\vec{u}$ を直線 AB の方向ベクトルといいます。

直線のパラメータ表示

点 A を通り，ベクトル $\vec{u}$ に平行な直線

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$（$t$ は実数）

P$(x,\ y,\ z)$，A$(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，

$(x,\ y,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + t(a,\ b,\ c)$（$t$ は実数）………(＊)

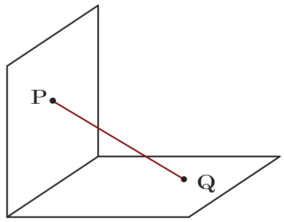
例題１　２点 A$(4,\ 5,\ 2)$, B$(10,\ 15,\ 4)$ を通る直線が xz 平面および, xy 平面と交わる点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ の長さを求めよ。

解　$\overrightarrow{AB} = (6,\ 10,\ 2) = 3(3,\ 5,\ 1)$ より，直線 AB のパラメータ表示は，

$(x,\ y,\ z) = (4,\ 5,\ 2) + t(3,\ 5,\ 1)$

$x = 4 + 3t$，$y = 5 + 5t$，$z = 2 + t$ ………①

さて, xz 平面：$y = 0$ ……②, xy 平面：$z = 0$ ……③



①②より，$5 + 5t = 0$ から $t = -1$ となり，$x = 1$，$z = 1$ から P$(1,\ 0,\ 1)$ である。

①③より，$2 + t = 0$ から $t = -2$ となり，$x = -2$，$y = -5$ から Q$(-2,\ -5,\ 0)$ である。

よって，$PQ = \sqrt{(1+2)^2 + (0+5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{35}$

《注》t の値だけから，$PQ = |-1-(-2)|\sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{35}$ と計算できます。

次に,(＊)から,パラメータ t を消去して,x, y, z の関係式を一般的に求めます。

$$x = x_0 + at,\quad y = y_0 + bt,\quad z = z_0 + ct$$

$a \neq 0$,$b \neq 0$,$c \neq 0$ のときは,$t = \dfrac{x - x_0}{a}$,$t = \dfrac{y - y_0}{b}$,$t = \dfrac{z - z_0}{c}$ より,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

直線の方程式

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り,ベクトル $\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ に平行な直線の方程式

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (abc \neq 0)$$

《注》 $a = 0$,$b \neq 0$,$c \neq 0$ のときは,$x = x_0$,$t = \dfrac{y - y_0}{b}$,$t = \dfrac{z - z_0}{c}$ より,

$$x = x_0,\quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

また,$a = 0$,$b = 0$,$c \neq 0$ のときは,$x = x_0$,$y = y_0$,$t = \dfrac{z - z_0}{c}$ より,

$$x = x_0,\quad y = y_0$$

この場合,「z は任意」となりますが,この記述は省略します。なお,$x = x_0$ は x 軸に垂直な平面の方程式,$y = y_0$ は y 軸に垂直な平面の方程式を表します。この 2 つの方程式の連立として表されるということから,この直線は,平面 $x = x_0$ と平面 $y = y_0$ の交線ということを意味します。

例題 2　2 直線 $l : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = z - 6$,$m : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-9}{4}$ の交点を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$ $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = z - 6 = t$,$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-9}{4} = s$ とおくと,

$x = 3t$,$y = -2t - 1$,$z = t + 6$ ………①

$x = 2s - 1$,$y = -3s - 2$,$z = 4s + 9$ ………②

①②の方程式をすべて満たす x, y, z が l と m の交点の座標を表すので,

$3t = 2s - 1$ ……③,$-2t - 1 = -3s - 2$ ……④,$t + 6 = 4s + 9$ ……⑤

③④より,$s = t = -1$ となり,この値を⑤の両辺に代入すると,

$$-1 + 6 = 4 \times (-1) + 9$$

よって,⑤は成立し,このとき①より,$x = -3$,$y = 1$,$z = 5$ である。

すなわち,2 直線 l, m の交点の座標は $(-3,\ 1,\ 5)$ となる。