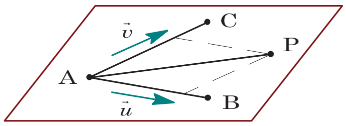
第 2 講　平面の方程式



平面は，異なる 3 点によって決定されます。この 3 点を A, B, C とし，平面 ABC に含まれる任意の点を P とおきます。

$\overrightarrow{AP} = t'\overrightarrow{AB} + s'\overrightarrow{AC}$ （t', s' は実数）

点 P の始点を原点 O に変更すると，

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t'\overrightarrow{AB} + s'\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t'\overrightarrow{AB} + s'\overrightarrow{AC}$ （t', s' は実数）

ここで，直線 AB, AC に平行なベクトルをそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ $(\vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0})$ とすると，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は互いに平行でなく，$\vec{u}$ は $\overrightarrow{AB}$ の実数倍，$\vec{v}$ は $\overrightarrow{AC}$ の実数倍なので，$t'\overrightarrow{AB} = t\vec{u}$，$s'\overrightarrow{AC} = s\vec{v}$ とおくことができ，

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} + s\vec{v}$ （t, s は実数）

と表すことができます。

平面のパラメータ表示

点 A を通り，互いに平行でない 2 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ を含む平面

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} + s\vec{v}$ （t, s は実数）

$P(x,\ y,\ z)$，$A(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{u} = (a',\ b',\ c')$，$\vec{v} = (d',\ e',\ f')$ とおくと，

$(x,\ y,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + t(a',\ b',\ c') + s(d',\ e',\ f')$ （t, s は実数）

《注》パラメータ t, s を消去して x, y, z の関係を求めると，次式が得られます。

$$(b'f' - c'e')(x - x_0) + (c'd' - a'f')(y - y_0) + (a'e' - b'd')(z - z_0) = 0$$

例題 3　$O(0,\ 0,\ 0)$, $A(0,\ 0,\ 1)$, $P(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$, $Q(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)$ とするとき，点 A から平面 OPQ に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

$\boxed{解}$　点 H は平面 OPQ 上の点より，

$\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ} = t(2\sqrt{2},\ 0,\ 0) + s(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1) = (2\sqrt{2}t + \sqrt{2}s,\ \sqrt{5}s,\ s)$

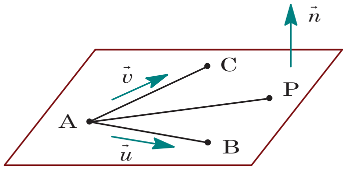
すると，$\overrightarrow{AH} = (2\sqrt{2}t + \sqrt{2}s,\ \sqrt{5}s,\ s - 1)$ となる。

直線 AH は平面 OPQ に垂直なので，$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$，$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ より，

$2\sqrt{2}(2\sqrt{2}t + \sqrt{2}s) = 0$，$2t + s = 0$ ………①

$\sqrt{2}(2\sqrt{2}t + \sqrt{2}s) + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}s + (s - 1) = 0$，$4t + 8s - 1 = 0$ ………②

①②より，$s = \dfrac{1}{6}$，$t = -\dfrac{1}{12}$ となるので，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$である。



次に，点 A を通り，$\vec{u}$，$\vec{v}$ を含む平面に対して，垂直なベクトルを $\vec{n}$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$ とすると，

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{u} + s\vec{v})$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{n} \cdot \vec{u} + s\vec{n} \cdot \vec{v}$$

となります。この $\vec{n}$ を平面 ABC の法線ベクトルといいます。

ここで，$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$，$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ から，

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \vec{n} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0$$

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

展開してまとめると，一般的に，$ax + by + cz + d = 0$ と表せます。

平面の方程式

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，ベクトル $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ に垂直な平面の方程式

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

《注》パラメータ t, s を消去して導いた方程式と比較すると，

$$a = b'f' - c'e', \quad b = c'd' - a'f', \quad c = a'e' - b'd'$$

数学 C の範囲になりますが，行列 A の行列式を $\det A$ としたとき，

$$a = \det\begin{pmatrix} b' & e' \\ c' & f' \end{pmatrix}, \quad b = \det\begin{pmatrix} c' & f' \\ a' & d' \end{pmatrix}, \quad c = \det\begin{pmatrix} a' & d' \\ b' & e' \end{pmatrix}$$

と表すことができます。

例題 4　原点 O と直線 $l : \dfrac{x+1}{-3} = 1 - y = \dfrac{z-4}{2}$ を含む平面 α の方程式を求めよ。

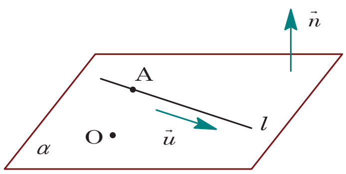
解　l は $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 4)$ を通り，方向ベクトル $\vec{u} = (-3,\ -1,\ 2)$ の直線である。

平面 α の法線ベクトルを $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{n} = 0$ より，

$$-3a - b + 2c = 0 \cdots\cdots①, \quad -a + b + 4c = 0 \cdots\cdots②$$

①②より，$a = \dfrac{3}{2}c$，$b = -\dfrac{5}{2}c$ となり，

$$\vec{n} = \left(\frac{3}{2}c,\ -\frac{5}{2}c,\ c\right) = \frac{c}{2}(3,\ -5,\ 2)$$



よって，平面 α の方程式は，

$$3(x - 0) - 5(y - 0) + 2(z - 0) = 0$$

$$3x - 5y + 2z = 0$$