第 1 講　等差数列の漸化式

イントロ　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$$

解説　$a_1=2,\ a_2=a_1+3=5,\ a_3=a_2+3=8,\ a_4=a_3+3=11,\ a_5=a_4+3=14$

これより，この数列は公差 3 の等差数列であり，

$$a_5=a_1+3+3+3+3=a_1+4\times3=a_1+(5-1)\times3$$

となっていることがわかる。一般化すると，次の Point 1 となる。

Point 1

$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+d$ で定められた数列［等差数列］

$$a_n=a+(n-1)d$$

例題 1　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$$

解　初項 2，公差 3 の等差数列より，一般項は，

$$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$$

練習 1　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n-3$

(2)　$a_1=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$

イントロ　次の数列のはじめの5項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=5,\quad a_{n+1}=a_n+2n$$

解説　$a_1=5$，$a_2=a_1+2\times1=7$，$a_3=a_2+2\times2=11$，$a_4=a_3+2\times3=17$，
$a_5=a_4+2\times4=25$

この数列の隣接2項間の差 $a_{n+1}-a_n$ を $f(n)$ とおくと，$f(n)=2n$ であり，

$$a_5=a_1+2\times1+2\times2+2\times3+2\times4=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$$

という構造をもっていることがわかる。一般化すると，次の Point 2 となる。

Point 2

$a_1=a,\ \ a_{n+1}=a_n+f(n)$ で定められた数列

$$a_n=a+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n-1)=a+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad(n\geqq2)$$

《注》 $f(n)=d$（d は定数）の場合は，$a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}d=a+(n-1)d$ となる。

これより，Point 1 と Point 2 に共通する漸化式は，

$$\boldsymbol{a_{n+1}=1\times a_n+f(n)}$$

という形をもつことで特徴づけられる。

例題 2　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=5,\quad a_{n+1}=a_n+2n$$

解　$n\geqq2$ で，$a_n=5+\sum_{k=1}^{n-1}2k=5+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=n^2-n+5$

この式は，$n=1$ でも成立する。

練習 2　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=1,\ \ a_{n+1}=a_n+2\cdot3^{n-1}$

(2)　$a_1=\frac{1}{2},\ \ a_{n+1}=a_n-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

第１講　等差数列の漸化式（略解）

練習１

(1)　$a_n = 2+(n-1)\cdot(-3) = -3n+5$

(2)　$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1}+(n-1)\cdot 2 = 2+2(n-1) = 2n$ より，$a_n = \dfrac{1}{2n}$

練習２

(1)　$n \geqq 2$ で，$a_n = 1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k-1} = 1+2\cdot\dfrac{3^{n-1}-1}{3-1} = 3^{n-1}$

この式は，$n=1$ でも成立する。

(2)　$n \geqq 2$ で，$a_n = \dfrac{1}{2}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$$= \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

この式は，$n=1$ でも成立する。