

第2講 等比数列の漸化式

イントロ 次の数列のはじめの5項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n$$

解説 $a_1 = 3, a_2 = a_1 \times 2 = 6, a_3 = a_2 \times 2 = 12, a_4 = a_3 \times 2 = 24, a_5 = a_4 \times 2 = 48$

これより、この数列は公比2の等比数列であり、

$$a_5 = a_1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = a_1 \times 2^4 = a_1 \times 2^{5-1}$$

となっていることがわかる。一般化すると、次のPoint 3となる。

Point 3

$a_1 = a, a_{n+1} = ra_n$ で定められた数列 [等比数列]

$$a_n = ar^{n-1}$$

例題 3 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n$$

解 初項3、公差2の等比数列より、一般項は、

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

練習 3 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n$

(2) $a_1 = 4, -3a_{n+1} = a_n$

イントロ 次の数列のはじめの5項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = na_n$$

解説 $a_1 = 1, a_2 = a_1 \times 1 = 1, a_3 = a_2 \times 2 = 2, a_4 = a_3 \times 3 = 6, a_5 = a_4 \times 4 = 24$

この数列の隣接2項間の比 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を $f(n)$ とおくと、 $f(n) = n$ であり、

$$a_5 = a_1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = a_1 \times f(1) \times f(2) \times f(3) \times f(4)$$

という構造をもっていることがわかる。一般化すると、次の Point 4 となる。

Point 4

$a_1 = a, a_{n+1} = f(n)a_n$ で定められた数列

$$a_n = a \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n-1) = a \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$$

《注》 $f(n) = r$ (r は定数) の場合は、 $a_n = a \prod_{k=1}^{n-1} r = ar^{n-1}$ となる。

これより、Point 3 と Point 4 に共通する漸化式は、

$$a_{n+1} = f(n)a_n + 0$$

という形をもつことで特徴づけられる。

例題 4 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_1 = 1, a_{n+1} = na_n$$

解 $n \geq 2$ で、 $a_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) = (n-1)!$

この式は、 $n = 1$ でも成立する。

練習 4 次の数列の一般項を求めよ。($n = 1, 2, 3, \dots$)

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2^n a_n$

第2講 等比数列の漸化式 (略解)

練習3

$$(1) a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^n$$

$$(2) a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n \text{ より, } a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

練習4

$$(1) n \geq 2 \text{ で, } a_n = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} = 2n$$

この式は, $n=1$ でも成立する。

$$(2) n \geq 2 \text{ で, } a_n = 1 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^{n-1} = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

この式は, $n=1$ でも成立する。