# 第 4 講　隣接 2 項間型の漸化式(2)

**イントロ**　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+2^n$$

**解説**　$a_1=1$，$a_2=3a_1+2^1=5$，$a_3=3a_2+2^2=19$，$a_4=3a_3+2^3=65$，
$a_5=3a_4+2^4=211$

まず，階差数列は，$a_2-a_1=4$，$a_3-a_2=14$，$a_4-a_3=46$，$a_5-a_4=146$ となるが，これだけでは規則性が予測できない。ここでは Point 5 や Point 6 と同じように，新たに設定した数列$\{b_n\}$の漸化式を $b_{n+1}=3b_n$ とすることを考える。つまり，

$$\boldsymbol{a_{n+1}=f(n)a_n+0}$$（ただし $f(n)$ が定数の場合）

の形になるように，漸化式の $2^n$ の項を $a_n$ と $a_{n+1}$ に振り分けるわけである。

さて，$2^n$ は $n$ の指数の式なので，Point 6 と異なり，指数の式 $\alpha\cdot 2^n$ を用いて振り分ける。一般的には，次の Point 7 のようになる。

**Point 7**

**$a_1=a,\quad a_{n+1}=pa_n+q^n\quad(p\neq 1,\ p\neq q)$ で定められた数列**

式変形の目標を $a_{n+1}-\alpha q^{n+1}=p(a_n-\alpha q^n)$ とし，$b_n=a_n-\alpha q^n$ とおくと，$b_{n+1}=pb_n$ となり，数列$\{b_n\}$は初項 $b_1=a_1-\alpha q$，公比 $p$ の等比数列である。

なお，目標の式を展開し，もとの漸化式と係数を比較すると，

$$-p\alpha q^n+\alpha q^{n+1}=q^n,\quad \alpha q^{n+1}=p\alpha q^n+q^n$$

となり，この式より $\alpha$ を求める。

《注》漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q^n\cdots\cdots$①を公比 $p$ の等比数列の漸化式と関連づけるには，指数の項 $q^n$ を新たに設定した数列の漸化式では 0 にする必要がある。その方法として, Point 6 と同じく，①を満たす特殊な数列を利用してみる。

指数の式の処理ということから，これを等比数列 $a_n=\alpha q^n$ とする。

①に代入すると，

$$\alpha q^{n+1}=p\alpha q^n+q^n\cdots\cdots\cdots②$$

①，②の両辺の差をとると，目標の式

$$a_{n+1}-\alpha q^{n+1}=p(a_n-\alpha q^n)$$

が得られる。

**例題 7**　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+2^n$$

**解**　$a_{n+1}=3a_n+2^n\cdots\cdots$①を満たす１つの数列を $a_n=\alpha\cdot 2^n$ とおく。

①に代入して，$\alpha\cdot 2^{n+1}=3\alpha\cdot 2^n+2^n$ より，$2\alpha=3\alpha+1$

すると，$\alpha=-1$ となり，

$$-2^{n+1}=-3\cdot 2^n+2^n\cdots\cdots\cdots②$$

①－②より，$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$

$b_n=a_n+2^n$ とおくと $b_{n+1}=3b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列なので，

$$b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=(a_1+2^1)3^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

したがって，$a_n=b_n-2^n=3^n-2^n$

《注》等差型の基本タイプ

$$\boldsymbol{a_{n+1}=1\times a_n+f(n)}$$

を目標とした式変形が誘導として与えられることがあるが，計算は複雑である。

①の $a_n$ の係数 3 を新たに設定した数列の漸化式では 1 にすることを考え，例題 5 の《注》と同様にして，両辺を $3^{n+1}$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3a_n}{3^{n+1}}+\frac{2^n}{3^{n+1}}\quad \text{すなわち}\quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$n\geqq 2$ で，$b_n=b_1+\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{a_1}{3^1}+\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

この式は $n=1$ のときも成立する。

よって，$a_n=3^n b_n=3^n\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}=3^n-2^n$

また，両辺を $2^{n+1}$ で割るという誘導もあるが，計算はさらに複雑になる。

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^n}{2^{n+1}}\quad \text{すなわち}\quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$ となり，漸化式は Point 5 のタイプになる。

---

**練習 7**　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=2,\quad a_{n+1}=2a_n-3\cdot 5^n$

(2)　$a_1=3,\quad a_{n+1}=-2a_n+2^{n+1}$

---

**イントロ** 次の数列のはじめの 5 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}$$

**解説** $a_1=3$, $a_2=3a_1+3^2=18$, $a_3=3a_2+3^3=81$, $a_4=3a_3+3^4=324$,

$a_5=3a_4+3^5=1215$

まず，階差数列をとっても規則性は予測できないので，Point 7 と同様に考え，漸化式の $3^{n+1}$ の項を $a_n$ と $a_{n+1}$ に振り分けることを考える。つまり，式変形の目標を $a_{n+1}-\alpha\cdot 3^{n+1}=3(a_n-\alpha\cdot 3^n)$ と設定する。

ところが，この目標の式を展開すると，

$$a_{n+1}=3a_n-3\alpha\cdot 3^n+\alpha\cdot 3^{n+1}=3a_n-\alpha\cdot 3^{n+1}+\alpha\cdot 3^{n+1}=3a_n$$

となってしまい，定数$\alpha$ は存在しない。言い換えると，等比型の基本タイプ

$\boldsymbol{a_{n+1}=f(n)a_n+0}$ （ただし $f(n)$ が定数の場合）

には変形できないというわけである。

そこで，式変形の目標を，もう 1 つのタイプである等差型の基本タイプ

$\boldsymbol{a_{n+1}=1\times a_n+f(n)}$

に変えてみる。例題 5 や例題 7 の《注》で記したように，$a_n$ の係数 3 に注目し，漸化式の両辺を $3^{n+1}$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3a_n}{3^{n+1}}+\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}}\qquad \text{すなわち}\qquad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+1$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+1$ となり，数列$\{b_n\}$は公差 1 の等差数列である。

一般化すると，次の Point 8 のようになる。

**Point 8**

**$\boldsymbol{a_1=a,\quad a_{n+1}=pa_n+p^n\quad (p\neq 1)}$ で定められた数列**

両辺 $\div\, p^{n+1}$ より，$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{1}{p}$

$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{p}$ となり，数列$\{b_n\}$は初項$b_1=\dfrac{a_1}{p}$，公差$\dfrac{1}{p}$ の等差数列である。

《注》漸化式 $a_{n+1}=pa_n+p^n$ を満たす特殊な数列を $a_n=\alpha p^n$ としたとき，

$$\alpha p^{n+1}=p\alpha p^n+p^n,\quad \alpha p^{n+1}=\alpha p^{n+1}+p^n$$

となってしまう。この漸化式を満たす数列 $a_n=\alpha p^n$ は存在しないことが一般的にわかる。

**例題 8**　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=3,\ \ a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}$$

**解**　$a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}$ の両辺を $3^{n+1}$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{3a_n}{3^{n+1}}+\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}}\quad \text{すなわち}\quad \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+1$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+1$ となり，数列 $\{b_n\}$ は公差 1 の等差数列である。

$$b_n=b_1+(n-1)\cdot 1=\frac{a_1}{3^1}+n-1=1+n-1=n$$

よって，$a_n=b_n\cdot 3^n=n\cdot 3^n$

《注》イントロで $a_2$ から $a_5$ まで計算をしたが，その過程をもう一度振り返ってみる。

$$a_1=1\cdot 3$$
$$a_2=3a_1+3^2=3\cdot 1\cdot 3+3^2=1\cdot 3^2+3^2=2\cdot 3^2$$
$$a_3=3a_2+3^3=3\cdot 2\cdot 3^2+3^3=2\cdot 3^3+3^3=3\cdot 3^3$$
$$a_4=3a_3+3^4=3\cdot 3\cdot 3^3+3^4=3\cdot 3^4+3^4=4\cdot 3^4$$
$$a_5=3a_4+3^5=3\cdot 4\cdot 3^4+3^5=4\cdot 3^5+3^5=5\cdot 3^5$$

これより，一般項が $a_n=n\cdot 3^n$ であると推測できる。この点からも，推測の難しかった例題 7 の数列とは，基本的に違いがあることがわかる。

つまり，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q^n$ で定義される数列は，$p\neq q$ の場合と $p=q$ の場合ではその性質が異なり，それが漸化式の解法にも反映しているということになる。

**練習 8**　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=1,\ \ a_{n+1}=-2a_n+3\cdot(-2)^n$

(2)　$a_1=2,\ \ a_{n+1}=3a_n-2\cdot 3^n$

# 第4講　隣接2項間型の漸化式(2)（略解）

## 練習7

(1)　$a_{n+1}=2a_n-3\cdot 5^n$ より，$a_{n+1}+5^{n+1}=2(a_n+5^n)$

$$a_n+5^n=(a_1+5^1)\cdot 2^{n-1}=7\cdot 2^{n-1}$$

よって，$a_n=7\cdot 2^{n-1}-5^n$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n+2^{n+1}$ より，$a_{n+1}-\frac{1}{2}\cdot 2^{n+1}=-2\left(a_n-\frac{1}{2}\cdot 2^n\right)$

$$a_n-\frac{1}{2}\cdot 2^n=\left(a_1-\frac{1}{2}\cdot 2^1\right)(-2)^{n-1}=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^n$$

よって，$a_n=-(-2)^n+\frac{1}{2}\cdot 2^n=-(-2)^n+2^{n-1}$

## 練習8

(1)　$a_{n+1}=-2a_n+3\cdot(-2)^n$ より，$\frac{a_{n+1}}{(-2)^{n+1}}=\frac{a_n}{(-2)^n}-\frac{3}{2}$

$$\frac{a_n}{(-2)^n}=\frac{a_1}{(-2)^1}-\frac{3}{2}(n-1)=-\frac{3}{2}n+1$$

よって，$a_n=\left(-\frac{3}{2}n+1\right)(-2)^n=(3n-2)(-2)^{n-1}$

(2)　$a_{n+1}=3a_n-2\cdot 3^n$ より，$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{2}{3}$

$$\frac{a_n}{3^n}=\frac{a_1}{3^1}-\frac{2}{3}(n-1)=-\frac{2}{3}n+\frac{4}{3}$$

よって，$a_n=\left(-\frac{2}{3}n+\frac{4}{3}\right)\cdot 3^n=-2(n-2)\cdot 3^{n-1}$