第 5 講　連立漸化式

イントロ　次の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$のはじめの 3 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=2,\quad b_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+b_n,\quad b_{n+1}=a_n+3b_n$$

解説　$a_1=2$，$b_1=1$，$a_2=3a_1+b_1=7$，$b_2=a_1+3b_1=5$

$a_3=3a_2+b_2=26$，$b_3=a_2+3b_2=22$

このようにa_1，b_1の値からa_2，b_2，a_2，b_2の値からa_3，b_3が求まっていく連立型の定数係数の漸化式には，大別して 2 種類のタイプがある。その 1 つはa_nとb_nの係数の等しい対称型と呼ばれるタイプであり，もう 1 つは等しくない非対称型である。対称型については，数列$\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$がともに等比数列となることから，連立式の両辺の和と差をとって，一般項を求める。

Point 9

$a_1=a$，$b_1=b$，$a_{n+1}=pa_n+qb_n$，$b_{n+1}=qa_n+pb_n$ $(q\neq 0)$で定められた数列

連立式の両辺の和をとり，$a_{n+1}+b_{n+1}=(p+q)(a_n+b_n)$

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)(p+q)^{n-1}=(a+b)(p+q)^{n-1}\cdots\cdots\cdots①$$

連立式の両辺の差をとり，$a_{n+1}-b_{n+1}=(p-q)(a_n-b_n)$

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)(p-q)^{n-1}=(a-b)(p-q)^{n-1}\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②，①－②より，a_n，b_nを求める。

例題 9　次の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=2,\quad b_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+b_n,\quad b_{n+1}=a_n+3b_n$$

解　$a_{n+1}=3a_n+b_n\cdots\cdots①$，$b_{n+1}=a_n+3b_n\cdots\cdots②$

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$となり数列$\{a_n+b_n\}$は等比数列なので，

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)4^{n-1}=3\cdot 4^{n-1}\cdots\cdots\cdots③$$

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$となり数列$\{a_n-b_n\}$は等比数列なので，

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)2^{n-1}=2^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a_n=\dfrac{1}{2}(3\cdot 4^{n-1}+2^{n-1})$，$b_n=\dfrac{1}{2}(3\cdot 4^{n-1}-2^{n-1})$

練習 9　次の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=2,\quad b_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n-b_n,\quad b_{n+1}=-a_n+2b_n$$

イントロ　次の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$のはじめの3項を求めよ。($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)

$$a_1=5,\ b_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+7b_n,\ b_{n+1}=a_n-4b_n$$

解説　$a_1=5,\ b_1=3,\ a_2=2a_1+7b_1=31,\ b_2=a_1-4b_1=-7$

$a_3=2a_2+7b_2=13,\ b_3=a_2-4b_2=59$

非対称型の連立漸化式では，両辺の和と差をとって，数列$\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$を考えても，一般的には等比数列にはならない。すなわち，

$$a_{n+1}=2a_n+7b_n\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=a_n-4b_n\cdots\cdots②$$

として，①＋②や①－②ではなく，①－②×kを計算し，数列$\{a_n-kb_n\}$が公比αの等比数列となるようにα，kを決めることを考える。つまり，式変形の目標を，

$$a_{n+1}-kb_{n+1}=\alpha(a_n-kb_n)$$

とするわけである。一般的には，次の Point 10 のようになる。

Point 10

$a_1=a,\ b_1=b,\ a_{n+1}=pa_n+qb_n,\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\ (qr\neq0)$で定められた数列

式変形の目標を$a_{n+1}-kb_{n+1}=\alpha(a_n-kb_n)$とする。左辺の$a_{n+1}$，$b_{n+1}$に漸化式を適用すると，$(p-kr)a_n+(q-ks)b_n=\alpha a_n-k\alpha b_n$となり，

$$p-kr=\alpha\cdots\cdots①,\quad q-ks=-k\alpha\cdots\cdots②$$

①を②に代入すると，$q-ks=-k(p-kr)$，$rk^2+(s-p)k-q=0\cdots\cdots③$

③が異なる2つの解をもつとき，$k=k_1$，k_2とすると，数列$\{a_n-k_1b_n\}$および$\{a_n-k_2b_n\}$が等比数列となり，両者の一般項からa_n，b_nを求めることができる。

③が重解をもつときは，数列$\{a_n-k_1b_n\}$の一般項ともとの漸化式を連立する。

《注》Point 10 の①と②から，公比αに関する条件式を求めてみる。

①より$k=\dfrac{p-\alpha}{r}$とし，②に代入すると$q-\dfrac{p-\alpha}{r}s=-\dfrac{p-\alpha}{r}\alpha$となり，まとめると$\alpha^2-(p+s)\alpha+(ps-qr)=0$となっている。これから，$\alpha$は2次方程式

$$x^2-(p+s)x+(ps-qr)=0\cdots\cdots\cdots④$$

の解であることがわかる。

連立漸化式は，行列を用いて表すことができ，

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$$

これから，数列の一般項を行列のn乗を利用して求めることができる。

なお，④は行列$\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$の固有方程式と呼ばれており，その解$\alpha$を固有値という。

例題 10　次の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=5,\ b_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+7b_n,\ b_{n+1}=a_n-4b_n$$

解　$a_{n+1}=2a_n+7b_n$ ……①，$b_{n+1}=a_n-4b_n$ ……②

①－②×k より，$a_{n+1}-kb_{n+1}=(2-k)a_n+(7+4k)b_n$ ……③

③と $a_{n+1}-kb_{n+1}=\alpha(a_n-kb_n)$ が一致することより，

$$2-k=\alpha \text{ ……④},\quad 7+4k=-k\alpha \text{ ……⑤}$$

④を⑤に代入して，$7+4k=-k(2-k)$，$k^2-6k-7=0$

よって，$k=-1,\ 7$ となり，④から，$(\alpha,\ k)=(3,\ -1),\ (-5,\ 7)$

$(\alpha,\ k)=(3,\ -1)$ のとき，$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$ から，

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\cdot 3^{n-1}=8\cdot 3^{n-1} \text{ ……⑥}$$

$(\alpha,\ k)=(-5,\ 7)$ のとき，$a_{n+1}-7b_{n+1}=-5(a_n-7b_n)$

$$a_n-7b_n=(a_1-7b_1)\cdot(-5)^{n-1}=-16(-5)^{n-1} \text{ ……⑦}$$

⑥⑦より，$8a_n=56\cdot 3^{n-1}-16(-5)^{n-1}$，$a_n=7\cdot 3^{n-1}-2(-5)^{n-1}$

$$8b_n=8\cdot 3^{n-1}+16(-5)^{n-1},\quad b_n=3^{n-1}+2(-5)^{n-1}$$

《注》Point 10 の《注》のように，公比α に関する条件から求めてもよい。

$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+7b_n \\ b_{n+1}=a_n-4b_n \end{cases}$ に対して，方程式$x^2-(2-4)x+(-8-7)=0$の解は，

$$x^2+2x-15=0 \quad \text{すなわち} \quad x=3,\ -5$$

まず，$x=3$のとき $a_{n+1}-kb_{n+1}=3(a_n-kb_n)$ とすると，

$$(2-k)a_n+(7+4k)b_n=3a_n-3kb_n$$

よって，$k=-1$ となり，$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$

また，$x=-5$ のとき $a_{n+1}-kb_{n+1}=-5(a_n-kb_n)$ とすると，

$$(2-k)a_n+(7+4k)b_n=-5a_n+5kb_n$$

よって，$k=7$ となり，$a_{n+1}-7b_{n+1}=-5(a_n-7b_n)$

このように式変形すると，数列$\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-7b_n\}$がともに等比数列であることがわかる。

練習 10　次の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\ b_1=2,\ a_{n+1}=a_n-b_n,\ b_{n+1}=4a_n+5b_n$$

第５講　連立漸化式（略解）

練習９

$a_{n+1}=2a_n-b_n$ ……①，$b_{n+1}=-a_n+2b_n$ ……②に対して，

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$

$$a_n+b_n=a_1+b_1=3 \cdots\cdots ③$$

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=3(a_n-b_n)$

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\cdot 3^{n-1}=3^{n-1} \cdots\cdots ④$$

③④より，$a_n=\dfrac{1}{2}(3+3^{n-1})$，$b_n=\dfrac{1}{2}(3-3^{n-1})$

練習１０

$a_{n+1}=a_n-b_n$ ……①，$b_{n+1}=4a_n+5b_n$ ……②に対して，

$$x^2-(1+5)x+\{1\times 5-(-1)\times 4\}=0，\ x^2-6x+9=0，\ x=3$$

$a_{n+1}-kb_{n+1}=3(a_n-kb_n)$とすると，①②より，

$$(1-4k)a_n+(-1-5k)b_n=3a_n-3kb_n$$

これより，$k=-\dfrac{1}{2}$となり，$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}b_n\right)$

$$a_n+\frac{1}{2}b_n=\left(a_1+\frac{1}{2}b_1\right)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}，\ b_n=4\cdot 3^{n-1}-2a_n \cdots\cdots ③$$

③を①に代入して，$a_{n+1}=a_n-(4\cdot 3^{n-1}-2a_n)=3a_n-4\cdot 3^{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{4}{9}$$

すると，$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{a_1}{3^1}-\dfrac{4}{9}(n-1)=\dfrac{-4n+7}{9}$より，

$$a_n=\frac{-4n+7}{9}\cdot 3^n=(-4n+7)\cdot 3^{n-2}$$

③より，$b_n=4\cdot 3^{n-1}-2(-4n+7)\cdot 3^{n-2}=2(4n-1)\cdot 3^{n-2}$