第 6 講　隣接 3 項間型の漸化式

イントロ　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)

$$a_1=a_2=1,\ \ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$$

解説　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=5a_2-6a_1=-1$，$a_4=5a_3-6a_2=-11$，

$a_5=5a_4-6a_3=-49$

定数係数の隣接 3 項間型の漸化式は，新たに設定した数列の漸化式が等比型となるように式変形をする。つまり，中間の項である $5a_{n+1}$ の一部分を a_{n+2} とドッキングし，残りの部分を a_n とドッキングすると考えて，目標の式を

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

とするわけである。一般的には，次の Point 11 のようになる。

Point 11

$a_1=a,\ \ a_2=a',\ \ a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\ \ (p^2-4q\neq 0)$ で定められた数列

$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ を目標の式とし，$b_n=a_{n+1}-\beta a_n$ とおくと，

$$b_{n+1}=\alpha b_n$$

これより，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-\beta a_1$，公比 α の等比数列となる。

なお，目標の式を展開すると $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ となり，もとの漸化式と係数比較すると，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ から，α，β の値が求まる。

さらに，2 次方程式の解と係数の関係を利用すると，α，β は

$$x^2+px+q=0$$

の 2 つの解であり，$D=p^2-4q\neq 0$ のときは $\alpha\neq\beta$ となる。

《注》漸化式を $a_{n+2}=-pa_{n+1}-qa_n$ ……①と変形し，$a_{n+1}=1\cdot a_{n+1}+0\cdot a_n$ ……②との連立式とする。Point 10 と同様に考えて，式変形の目標を①－②×k から，

$$a_{n+2}-ka_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-ka_n)\ \cdots\cdots\cdots③$$

とする。すると，③は Point 11 の目標式の β を k に替えた式に等しい。

さらに，①②を行列を用いて表すと，$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ となる。このとき，行列 $\begin{pmatrix} -p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有方程式は，$x^2-(-p+0)x+(0+q)=0$ から，

$$x^2+px+q=0$$

であり，その解 α は固有値に対応する。

このように，隣接 3 項間型の漸化式を連立漸化式と関連させて解くこともできる。

例題 11　次の数列の一般項を求めよ。($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)

$$a_1=a_2=1,\quad a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$$

解　2 次方程式 $x^2=5x-6$，$x^2-5x+6=0$ の解は，$x=2,\ 3$ より，

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n$ から，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}$

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)2^{n-1}=-2\cdot 2^{n-1}=-2^n\cdots\cdots\cdots①$$

また，$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ と変形して，

$c_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと，$c_{n+1}=3c_n$ から，$c_n=c_1\cdot 3^{n-1}$

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)3^{n-1}=-3^{n-1}\cdots\cdots\cdots②$$

②−①より，$a_n=-3^{n-1}+2^n$

《注》①を $a_{n+1}=3a_n-2^n$ ……③と変形し, Point 7 と同様にして解くこともできる。

③を満たす 1 つの数列を $a_n=\alpha\cdot 2^n$ とおく。

③に代入して，$\alpha\cdot 2^{n+1}=3\alpha\cdot 2^n-2^n$ より，$2\alpha=3\alpha-1$

すると，$\alpha=1$ となり，

$$2^{n+1}=3\cdot 2^n+2^n\cdots\cdots\cdots④$$

③−④より，$a_{n+1}-2^{n+1}=3(a_n-2^n)$

$b_n=a_n-2^n$ とおくと $b_{n+1}=3b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列なので，

$$b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=(a_1-2^1)3^{n-1}=-3^{n-1}$$

したがって，$a_n=b_n+2^n=-3^{n-1}+2^n$

練習 11　次の数列の一般項を求めよ。($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)

$$a_1=a_2=1,\quad a_{n+2}=5a_{n+1}+6a_n$$

イントロ　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\ \ a_2=4,\ \ a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$$

解説　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=4a_2-4a_1=12$，$a_4=4a_3-4a_2=32$，

$a_5=4a_4-4a_3=80$

Point 11 と同様にして，漸化式を $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形することを考える。そのため，2 次方程式 $x^2=4x-4$ すなわち $x^2-4x+4=0$ の解を計算する。すると，重解 $x=2$ をもつことから，$\alpha=\beta=2$ である。

Point 12

$a_1=a$，$a_2=a'$，$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$　$(p^2-4q=0)$ で定められた数列

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の解は，$D=p^2-4q=0$ のとき重解であり，これを $x=\alpha$ とおく。漸化式は，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形でき，

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}\quad \text{すなわち}\quad a_{n+1}=\alpha a_n+(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-1}$$

すると, Point 8 と同様にして一般項を求めることができる。

例題 12　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\ \ a_2=4,\ \ a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$$

解　2 次方程式 $x^2=4x-4$，$x^2-4x+4=0$ の解は，$x=2$ より，

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n$ から，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}$

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)2^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

よって，$a_{n+1}=2a_n+2^n$ から，両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^n}{2^{n+1}}\quad \text{すなわち}\quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$c_{n+1}=c_n+\dfrac{1}{2}$ となり，

$$c_n=c_1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{a_1}{2^1}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n$$

よって，$a_n=c_n\cdot 2^n=\dfrac{1}{2}n\cdot 2^n=n\cdot 2^{n-1}$

練習 12　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\ \ a_2=2,\ \ a_{n+2}=-6a_{n+1}-9a_n$$

第6講　隣接3項間型の漸化式（略解）

練習 11

$a_{n+2}=5a_{n+1}+6a_n$ ……①に対して，$x^2=5x+6$，$x^2-5x-6=0$，$x=6,\ -1$

①より，$a_{n+2}-6a_{n+1}=-(a_{n+1}-6a_n)$

$$a_{n+1}-6a_n=(a_2-6a_1)(-1)^{n-1}=-5\cdot(-1)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$a_{n+2}+a_{n+1}=6(a_{n+1}+a_n)$

$$a_{n+1}+a_n=(a_2+a_1)\cdot 6^{n-1}=2\cdot 6^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③－②より，$7a_n=2\cdot 6^{n-1}+5\cdot(-1)^{n-1}$，$a_n=\dfrac{2}{7}\cdot 6^{n-1}+\dfrac{5}{7}(-1)^{n-1}$

練習 12

$a_{n+2}=-6a_{n+1}-9a_n$ ……(＊)に対して，$x^2=-6x-9$，$x^2+6x+9=0$，$x=-3$

(＊)より，$a_{n+2}+3a_{n+1}=-3(a_{n+1}+3a_n)$

$$a_{n+1}+3a_n=(a_2+3a_1)(-3)^{n-1}=5\cdot(-3)^{n-1}$$

すると，$a_{n+1}=-3a_n+5\cdot(-3)^{n-1}$，$\dfrac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}}=\dfrac{a_n}{(-3)^n}+\dfrac{5}{9}$

$$\frac{a_n}{(-3)^n}=\frac{a_1}{(-3)^1}+\frac{5}{9}(n-1)=\frac{5n-8}{9}$$

よって，$a_n=\dfrac{5n-8}{9}(-3)^n=(5n-8)(-3)^{n-2}$