1

解答解説のページへ

a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y=x^2+ax+b$ は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1)　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

複素数 a, b, c に対して整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。i を虚数単位とする。

(1)　α，β，γ を複素数とする。$f(0)=\alpha$，$f(1)=\beta$，$f(i)=\gamma$ が成り立つとき，a, b, c をそれぞれ α，β，γ で表せ。

(2)　$f(0)$，$f(1)$，$f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

関数$f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$に対して，$y=f(x)$のグラフを C とする。点A$(1,\ f(1))$におけるCの接線を$l:y=g(x)$とする。

(1) Cとlの共有点でAと異なるものがただ1つ存在することを示し，その点のx座標を求めよ。

(2) (1)で求めた共有点の x 座標をαとする。定積分$\displaystyle\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx$を計算せよ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA = LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2)　正の整数 $a,\ b$ が $a > b$ を満たしているとする。このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。

(3)　$a,\ b$ は(2)の通りとし, さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4)　${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha,\ -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1)　$0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

定数 b, c, p, q, r に対し，$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$ が x の恒等式であるとする。

(1)　$p\neq 0$ であるとき，q, r を p, b で表せ。

(2)　$p\neq 0$ とする。b，c が定数 a を用いて $b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3)　a を整数とする。x の 4 次式 $x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　放物線$C: y=x^2+ax+b$……①と放物線$y=-x^2$……②を連立して，

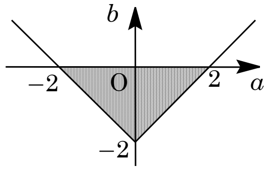
$$x^2+ax+b=-x^2,\ 2x^2+ax+b=0\ \cdots\cdots③$$

放物線①②が$-1<x<0$と$0<x<1$に 2 つの共有点をもつので，③の実数解が$-1<x<0$と$0<x<1$に存在することになり，$f(x)=2x^2+ax+b$とおくと，

$$f(-1)=2-a+b>0,\ f(0)=b<0,\ f(1)=2+a+b>0$$

まとめると，$b>a-2$，$b>-a-2$，$b<0$………④

これより，点$(a,\ b)$のとりうる範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含まない。

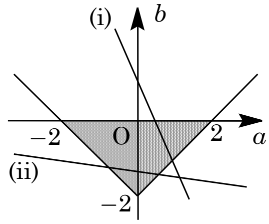


(2)　連立不等式④を満たす$(a,\ b)$のもとで，①より，

$$b=-xa-x^2+y\ \cdots\cdots⑤$$

すると，放物線Cが通過する$(x,\ y)$は，直線⑤が(1)の網点部と共有点をもつ条件として求められる。まず，直線⑤の b 切片$-x^2+y$に注意すると，通過点が$(a,\ b)=(2,\ 0)$のとき$-x^2+y=2x$，$(a,\ b)=(-2,\ 0)$のとき$-x^2+y=-2x$，$(a,\ b)=(0,\ -2)$のとき$-x^2+y=-2$となる。

これより，直線⑤の傾き$-x$の値で場合分けをすると，

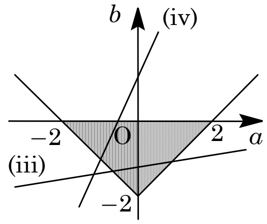


(i)　$-x<-1\ (x>1)$のとき

$$-2x<-x^2+y<2x,\ x^2-2x<y<x^2+2x$$

(ii)　$-1\leqq -x<0\ (0<x\leqq 1)$のとき

$$-2<-x^2+y<2x,\ x^2-2<y<x^2+2x$$



(iii)　$0\leqq -x<1\ (-1<x\leqq 0)$のとき

$$-2<-x^2+y<-2x,\ x^2-2<y<x^2-2x$$

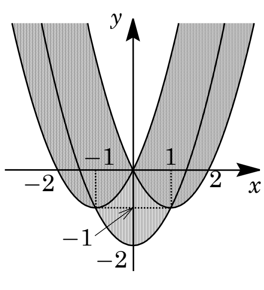
(iv)　$-x\geqq 1\ (x\leqq -1)$のとき

$$2x<-x^2+y<-2x,\ x^2+2x<y<x^2-2x$$

(i)～(iv)より，領域の境界線は，$y=x^2-2x$……⑥

$$y=x^2+2x\ \cdots\cdots⑦,\ y=x^2-2\ \cdots\cdots⑧$$

⑥⑦の交点は$(0,\ 0)$，⑥⑧の交点は$(1,\ -1)$，⑦⑧の交点は$(-1,\ -1)$であることより，放物線 C の通りうる範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



［解　説］

放物線の通過領域についての標準的な問題です。条件が連立不等式で与えられているので，図を利用した処理をしました。要演習の 1 題です。

2

問題のページへ

(1)　$f(z)=az^2+bz+c$ に対して，$f(0)=\alpha$，$f(1)=\beta$，$f(i)=\gamma$ より，

$$c=\alpha\cdots\cdots\cdots①,\ \ a+b+c=\beta\cdots\cdots\cdots②,\ \ -a+bi+c=\gamma\cdots\cdots\cdots③$$

①②より $a+b=\beta-\alpha$，①③より $-a+bi=\gamma-\alpha$ となり，

$$b=\frac{-2\alpha+\beta+\gamma}{1+i}=\frac{(-2\alpha+\beta+\gamma)(1-i)}{2}=(-1+i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma$$

$$a=\beta-\alpha-(-1+i)\alpha-\frac{1-i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma=-i\alpha+\frac{1+i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma$$

(2)　$1\leqq\alpha\leqq 2$，$1\leqq\beta\leqq 2$，$1\leqq\gamma\leqq 2$ のもとで，$f(2)=4a+2b+c$ に対して，(1)の結果を適用すると，

$$f(2)=-4i\alpha+2(1+i)\beta-2(1-i)\gamma+2(-1+i)\alpha+(1-i)\beta+(1-i)\gamma+\alpha$$

$$=(-1-2i)\alpha+(3+i)\beta+(-1+i)\gamma=(-\alpha+3\beta-\gamma)+(-2\alpha+\beta+\gamma)i$$

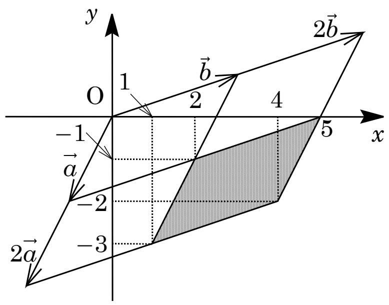
さて，$f(2)=x+yi$ とおくと，$x=-\alpha+3\beta-\gamma$，$y=-2\alpha+\beta+\gamma$ となり，

$$(x,\ y)=\alpha(-1,\ -2)+\beta(3,\ 1)+\gamma(-1,\ 1)$$

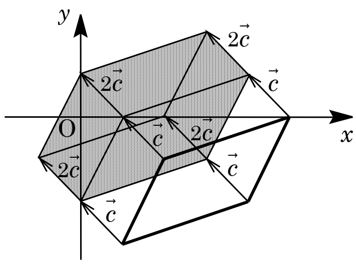
ここで，$\vec{x}=(x,\ y)$，$\vec{a}=(-1,\ -2)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$，$\vec{c}=(-1,\ 1)$ とすると，

$$\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$

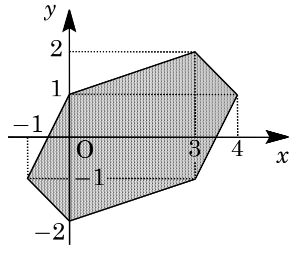
まず，$\vec{x'}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ とおき，α と β を独立に $1\leqq\alpha\leqq 2$，$1\leqq\beta\leqq 2$ で動かすと，$\vec{x'}$ のとりうる範囲は，右図の網点をつけた平行四辺形の内部または辺上である。



次に，α，β とは独立に，γ を $1\leqq\gamma\leqq 2$ で動かすと，$\vec{x}=\vec{x'}+\gamma\vec{c}$ から，$\vec{x}$ のとりうる範囲は，$\vec{x'}$ のとりうる平行四辺形の内部または辺上を，$\vec{c}$ だけ平行移動したものから，$2\vec{c}$ だけ平行移動したものに至る通過領域として表せる。これを図示すると，右図の網点部である。



以上より，$f(2)$ のとりうる範囲を，複素数平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

複素数平面上の領域についての問題で，1 文字を固定して考える頻出タイプです。

3

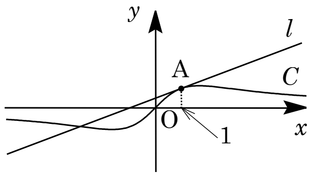
問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ に対し，$f(-x)=-f(x)$ に注意すると，

$$f'(x)=\frac{(x^2+3)-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$	$\searrow$

これより，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表の通りであり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ から，$C: y=f(x)$ の概形は右図のようになる。



さて，$\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における接線 $l: y=g(x)$ の方程式は，$f(1)=\dfrac{1}{4}$，$f'(1)=\dfrac{1}{8}$ から，

$$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}(x-1),\quad y=\frac{1}{8}(x+1)$$

すると，C と l の共有点は，$\dfrac{x}{x^2+3}=\dfrac{1}{8}(x+1)$ より，$8x=(x^2+3)(x+1)$ となり，

$$x^3+x^2-5x+3=0,\quad (x-1)^2(x+3)=0$$

よって，A と異なる共有点は 1 つあり，その x 座標は $x=-3$ である。

(2)　(1)より $\alpha=-3$ となり，このとき $I=\displaystyle\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx$ に対して，

$$I=\int_{-3}^{1}\{f(x)\}^2dx-2\int_{-3}^{1}f(x)g(x)dx+\int_{-3}^{1}\{g(x)\}^2dx$$

$I_1=\displaystyle\int_{-3}^{1}\{f(x)\}^2dx$，$I_2=\displaystyle\int_{-3}^{1}f(x)g(x)dx$，$I_3=\displaystyle\int_{-3}^{1}\{g(x)\}^2dx$ とする。

まず，$x=\sqrt{3}\tan t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt$ となり，

$$I_1=\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{3\tan^2 t}{9(\tan^2 t+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^2 t}{\tan^2 t+1}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\tan^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2t)dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Big[t-\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$$

$$I_2=\int_{-3}^{1}\frac{x}{x^2+3}\cdot\frac{1}{8}(x+1)dx=\frac{1}{8}\int_{-3}^{1}\Big(1+\frac{x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}\Big)dx$$

$$=\frac{1}{8}\Big[x+\frac{1}{2}\log(x^2+3)\Big]_{-3}^{1}-\frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3(\tan^2 t+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{8}\Big(4+\frac{1}{2}\log\frac{4}{12}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\log 3-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi$$

$$I_3=\frac{1}{64}\int_{-3}^{1}(x+1)^2dx=\frac{1}{64}\Big[\,\frac{1}{3}(x+1)^3\,\Big]_{-3}^{1}=\frac{1}{64\cdot 3}(8+8)=\frac{1}{12}$$

したがって，$I=I_1-2I_2+I_3$ より，

$$I=\Big(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}\Big)-2\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\log 3-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi\Big)+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}\sqrt{3}\pi+\frac{1}{8}\log 3-\frac{7}{6}$$

［解　説］

接線の方程式を求める設問もありますが，実質的には，定積分の標準的な計算問題です。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　正の奇数 K, L と正の整数 A, B に対して，$KA = LB$ ………①

ここで, K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいとき,

$K - L = 4n$　(n は整数)………②

②より，$K = L + 4n$ となり，①に代入すると,

$(L+4n)A = LB$，$L(A-B) = -4nA$

$-4nA$ は 4 の倍数なので $L(A-B)$ も 4 の倍数となるが, L は奇数であることより，$A-B$ が 4 の倍数となる。

すなわち, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しい。

(2)　正の整数 $a, b\,(a > b)$ に対して，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b$ とすると,

$$A = \frac{{}_{4a+1}\mathrm{P}_{4b+1}}{(4b+1)!} = \frac{(4a+1)4a(4a-1)(4a-2)\cdots(4a-4b+2)(4a-4b+1)}{(4b+1)4b(4b-1)(4b-2)\cdots2\cdot1}$$

ここで，$r_0 = 4a(4a-4)\cdots(4a-4b+4)$，$r_1 = (4a+1)(4a-3)\cdots(4a-4b+1)$

$r_2 = (4a-2)(4a-6)\cdots(4a-4b+2)$，$r_3 = (4a-1)(4a-5)\cdots(4a-4b+3)$

また，$s_0 = 4b(4b-4)\cdots8\cdot4$，$s_1 = (4b+1)(4b-3)\cdots5\cdot1$

$s_2 = (4b-2)(4b-6)\cdots6\cdot2$，$s_3 = (4b-1)(4b-5)\cdots7\cdot3$

すると，$A = \dfrac{r_0 r_1 r_2 r_3}{s_0 s_1 s_2 s_3}$ となり，$\dfrac{r_0}{s_0} = \dfrac{a(a-1)\cdots(a-b+1)}{b(b-1)\cdots2\cdot1} = \dfrac{{}_a\mathrm{P}_b}{b!} = {}_a\mathrm{C}_b = B$

$$\frac{r_2}{s_2} = \frac{(2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1)}{(2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1}$$

これより，$A = B\cdot\dfrac{r_1 r_3 (2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1)}{s_1 s_3 (2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1}$ ………③

ここで，$K = s_1 s_3 (2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1$，$L = r_1 r_3 (2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1)$ とおくと, K, L は正の奇数であり, ③から $A = B\cdot\dfrac{L}{K}$ となり，$KA = LB$ が成り立つ。

(3)　以下，mod 4 で記すと，$4a \equiv 4b \equiv 0$ より,

$r_1 = (4a+1)(4a-3)\cdots(4a-4b+1) \equiv (4b+1)(4b-3)\cdots(4b-4b+1) = s_1$

$r_3 = (4a-1)(4a-5)\cdots(4a-4b+3) \equiv (4b-1)(4b-5)\cdots(4b-4b+3) = s_3$

また，$a-b$ が 2 で割り切れることより, a と b の偶奇は一致し,

(i)　a, b がともに偶数のとき　$2a \equiv 2b \equiv 0$

(ii)　a, b がともに奇数のとき　$2a \equiv 2b \equiv 2$

(i)(ii)より, a, b の偶奇にかかわらず，$2a \equiv 2b$ が成り立ち,

$$\begin{aligned}(2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1) &\equiv (2b-1)(2b-3)\cdots(2b-2b+1)\\ &= (2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1\end{aligned}$$

以上より，$r_1 r_3 (2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1) \equiv s_1 s_3 (2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1$ が成り立つので，$L \equiv K$ すなわち K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しい。

すると，(1)(2)の結果から，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは $B={}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい。

(4)　(3)の結果を利用すると，

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37}={}_{4\times505+1}\mathrm{C}_{4\times9+1}\equiv{}_{505}\mathrm{C}_9={}_{4\times126+1}\mathrm{C}_{4\times2+1}\equiv{}_{126}\mathrm{C}_2$$

これより，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りは ${}_{126}\mathrm{C}_2$ を 4 で割った余りと等しく，

$${}_{126}\mathrm{C}_2=\frac{126\times125}{2}=63\times125\equiv3\times1\equiv3$$

よって，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りは 3 である。

［解 説］

二項係数を題材にした論証問題です。(1)～(3)の証明結果が, (4)の求値問題にうまくつながっています。ただ, 証明の記述方法はやや面倒です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$\alpha>0$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，2 点 $\mathrm{A}(-\alpha,\ -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ に対して，

$$f(\theta)=\mathrm{AP}^2=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$$

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=2(\theta+\sin\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+2(\cos\theta+3)(-\sin\theta)\\&=2(\theta+\sin\theta+\alpha)+2(\theta+\sin\theta+\alpha)\cos\theta-2\cos\theta\sin\theta-6\sin\theta\\&=2\theta+2(\theta+\alpha)\cos\theta-4\sin\theta+2\alpha\end{aligned}$$

$$f''(\theta)=2+2\cos\theta-2(\theta+\alpha)\sin\theta-4\cos\theta=2-2\cos\theta-2(\theta+\alpha)\sin\theta$$

$$f'''(\theta)=2\sin\theta-2\sin\theta-2(\theta+\alpha)\cos\theta=-2(\theta+\alpha)\cos\theta$$

すると，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f''(\theta)$ の増減は右表のようになり，$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<f''(0)=0$ から，$f''(\theta)=0$ となる θ はただ 1 つ存在し，これを $\theta=\beta$ とおくと，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ である。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f''(\theta)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	4

これより，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f'(\theta)$ の増減は右表のようになり，$f'(\beta)<f'(\pi)=0$，$4\alpha>0$ から，$f'(\theta)=0$ となる θ はただ 1 つ存在する。

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f''(\theta)$	0	$-$	0	$+$	
$f'(\theta)$	4α	$\searrow$		$\nearrow$	0

(2)　(1)より，$f'(\theta)=0$ となる θ を $\theta=\gamma$ とおくと，$0<\gamma<\beta$ である。

これより，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$0\leqq\theta\leqq\pi$ において $f(\theta)$ が最大となるのは $\theta=\gamma$ のときである。

θ	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ である条件は，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ となり，

$$2\cdot\frac{\pi}{2}-4+2\alpha<0,\ \ 2\alpha<4-\pi$$

よって，求める α の範囲は，$0<\alpha<2-\dfrac{\pi}{2}$ である。

［解 説］

微分と増減についての基本的な問題です。増減表を書きながらグラフをイメージすると，結論はスムーズに導けます。

6

問題のページへ

(1) 恒等式 $x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$ に対して,

$0=r-p^2+q$ ……①, $b=pr-pq$ ……②, $c=qr$ ……③

①②より, $b=p(p^2-q)-pq=p^3-2pq$ となり, $p\neq 0$ から,

$$q=\frac{1}{2}p^2-\frac{b}{2p},\quad r=p^2-\frac{1}{2}p^2+\frac{b}{2p}=\frac{1}{2}p^2+\frac{b}{2p}$$

(2) $p\neq 0$ で, $b=(a^2+1)(a+2)$, $c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$ のとき, (1)より,

$$q=\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2p}(a^2+1)(a+2)\text{ ……④},\quad r=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2p}(a^2+1)(a+2)\text{ ……⑤}$$

④⑤を③に代入すると, $-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)=\frac{1}{4}p^4-\frac{1}{4p^2}(a^2+1)^2(a+2)^2$ となり,

$$-(4a+3)(a^2+1)p^2=p^6-(a^2+1)^2(a+2)^2$$

$$p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2=0\text{ ………⑥}$$

⑥について, 左辺を $p^2-(a^2+1)$ で割ると,

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0\text{ ………⑦}$$

⑦より, $\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$ を満たす $f(t)$ と $g(t)$ として,

$$f(t)=t^2+1,\quad g(t)=(t^2+1)(t+2)^2$$

(3) 4 次式 $A(x)=x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$ が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるとき, x^4 の係数が 1, x^3 の係数が 0 に注目すると,

$A(x)=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$ （p, q, r は有理数）

(i) $p=0$ のとき

$A(x)=(x^2+q)(x^2+r)=x^4+(q+r)x^2+qr$ から,

$$0=q+r,\ (a^2+1)(a+2)=0,\ -\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)=qr$$

すると, $r=-q$, $a=-2$ となるが, $\frac{5}{4}\cdot 5=-q^2$ は成立しない。

(ii) $p\neq 0$ のとき

整数 a に対し, ⑦より $p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$ なので,

$$p^2=a^2+1,\quad p=\pm\sqrt{a^2+1}$$

また, ④⑤に代入すると,

$$q=\frac{1}{2}(a^2+1)\mp\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}(a^2+1)(a+2)=\frac{1}{2}(a^2+1)\mp\frac{1}{2}\sqrt{a^2+1}(a+2)$$

$$r=\frac{1}{2}(a^2+1)\pm\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}(a^2+1)(a+2)=\frac{1}{2}(a^2+1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+1}(a+2)$$

すると, p, q, r がすべて有理数である条件は, $\sqrt{a^2+1}$ が有理数であることより,

$\sqrt{a^2+1}=\frac{n}{m}$ （m と n は互いに素な正の整数）

これより，$(a^2+1)m^2 = n^2$ となり，m^2 と n^2 が互いに素であることより，

$m^2 = 1$，$a^2+1 = n^2$ ………⑧

⑧から，$m = 1$ かつ $(a+n)(a-n) = -1$ となり，$a+n > a-n$ より，

$a+n = 1$，$a-n = -1$

よって，求める整数 a の値は，$a = 0$ である。

［解　説］

恒等式が題材の問題です。(1)(2)が(3)につながる誘導になっています。