1

解答解説のページへ

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=(\cos x)\log(\cos x)-\cos x+\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(1)　$f(x)$ は区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ において最小値をもつことを示せ。

(2)　$f(x)$ の区間 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　正の整数nが3の倍数のとき，a_nは5の倍数となることを示せ。

(2)　$k,\ n$を正の整数とする。a_nがa_kの倍数となるための必要十分条件を$k,\ n$を用いて表せ。

(3)　a_{2022}と$(a_{8091})^2$の最大公約数を求めよ。

3

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $\mathrm{S}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{T}(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式 $0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$ が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ を考える。さらに，次の条件(i), (ii)をともに満たす点 P をとる。

(i)　点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある。

(ii)　点 P は，3 点 O, A, B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　次の条件(iii), (iv)をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii)　点 Q は領域 D の点である。

(iv)　点 Q は，4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている。

(3)　a は(1)で求めた範囲を動くとする。(2)の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標平面上の曲線 $C : y = x^3 - x$ を考える。

(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件(i)を満たすことを示せ。

(i) 点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2) 次の条件(ii)を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 l と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

5

解答解説のページへ

座標空間内の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，X_2，…，X_N を以下の規則(i), (ii)に従って定める。

(i)　X_0 は O にある。

(ii)　n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

・n 回目のコイン投げで表が出た場合，$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$ により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

・n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1)　$N=8$ とする。X_8 が O にある確率を求めよ。

(2)　$N=200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0\leqq r\leqq 200$ である。p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=(\cos x)\log(\cos x)-\cos x+\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt\ \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$に対して，

$$f'(x)=-(\sin x)\log(\cos x)+(\cos x)\cdot\frac{(-\sin x)}{\cos x}+\sin x+(\cos x)\log(\cos x)$$
$$=-(\sin x-\cos x)\log(\cos x)$$
$$=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\log(\cos x)$$

$f(x)$は，$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$において増減が右表のようになり，$x=\dfrac{\pi}{4}$で最小値をもつ。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\times$
$f(x)$	-1	↘		↗	$\times$

(2)　最小値は，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt$となり，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)\,dt=\Big[(\sin t)\log(\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t)\cdot\frac{(-\sin t)}{\cos t}dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}dt-\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)\cos t\,dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\Big|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

よって，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\log 2-\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)$

［解　説］

積分方程式の基本問題です。面倒な計算もありません。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}={a_n}^2+1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対し，以下 mod 5 で記すと，

$$a_1=1\equiv 1,\ a_2={a_1}^2+1\equiv 1^2+1\equiv 2,\ a_3={a_2}^2+1\equiv 2^2+1\equiv 5\equiv 0$$

$$a_4={a_3}^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1$$

これより，m を 0 以上の整数として，$a_{3m+1}\equiv 1$，$a_{3m+2}\equiv 2$，$a_{3m+3}\equiv 0$ ……①と予測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$m=0$ のとき　上記の計算より成立している。

(ii)　$m=l$ のとき　①の成立を仮定すると，

$$a_{3l+4}={a_{3l+3}}^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1,\ a_{3l+5}={a_{3l+4}}^2+1\equiv 1^2+1\equiv 2$$

$$a_{3l+6}={a_{3l+5}}^2+1\equiv 2^2+1\equiv 5\equiv 0$$

よって，$m=l+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，0 以上のすべての整数 m に対して，①は成立している。

よって，正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となる。

(2)　$a_{n+1}-a_n={a_n}^2-a_n+1=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ から，数列 $\{a_n\}$ は単調に増加し，

$$1=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$$

ここで，ある自然数 k に対して，以下 mod a_k で記すと，

$$a_1\equiv a_1,\ a_2\equiv a_2,\ \cdots,\ a_{k-1}\equiv a_{k-1},\ a_k\equiv 0$$

そして，自然数 i について，$a_{k+i}\equiv a_i$ ……②と予測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$i=1$ のとき　$a_{k+1}={a_k}^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1\equiv a_1$

(ii)　$i=j$ のとき　$a_{k+j}\equiv a_j$ と仮定すると，

$$a_{k+j+1}={a_{k+j}}^2+1\equiv {a_j}^2+1\equiv a_{j+1}$$

よって，$i=j+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，すべての自然数 i について，②は成立している。

すると，$a_{2k}=a_{k+k}\equiv a_k\equiv 0$，$a_{3k}=a_{2k+k}\equiv a_{2k}\equiv 0$ となり，n が k の倍数ならば，帰納的に $a_n\equiv 0$ である。すなわち，a_n は a_k の倍数である。

また，n が k の倍数でないとき，n を k で割った余りを r $(1\leqq r\leqq k-1)$ とおくと，$a_n\equiv a_r$ となり $a_n\equiv 0$ ではない。すなわち，a_n は a_k の倍数ではない。

以上より，a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件は，n が k の倍数である。

(3)　$8091=2022\times 4+3$ より，$a_{8091}\equiv a_3\equiv 5$，$(a_{8091})^2\equiv 25\ (\mathrm{mod}\ a_{2022})$ となり，

$$(a_{8091})^2=a_{2022}\cdot N+25\quad (N\text{は整数})$$

これより，a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数は，a_{2022} と 25 の最大公約数である。

ここで，$2022=3\times 674$ なので，まず a_{2022} は $a_3=5$ の倍数である。

そこで，a_{2022} が 25 の倍数であるかどうかを調べるために，以下 $\mathrm{mod}\,25$ で記すと，

$$a_1 = 1 \equiv 1,\ a_2 = {a_1}^2 + 1 \equiv 1^2 + 1 \equiv 2,\ a_3 = {a_2}^2 + 1 \equiv 2^2 + 1 \equiv 5$$

$$a_4 = {a_3}^2 + 1 \equiv 5^2 + 1 \equiv 26 \equiv 1$$

これより，帰納的に，$a_n \equiv 1$ または $a_n \equiv 2$ または $a_n \equiv 5$ となり，$a_n \equiv 0$ となる n は存在しないので，a_{2022} は 25 の倍数ではない。

以上より，a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数は 5 である。

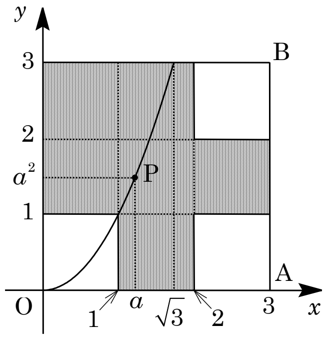
［解 説］

漸化式と整数についての難しめの問題です。(2)については，たとえば $a_4 = 26$ ですが，$\mathrm{mod}\,a_4 = \mathrm{mod}\,26$ で調べると，$a_1 \equiv 1$，$a_2 \equiv 2$，$a_3 \equiv 5$，$a_4 \equiv 0$，$a_5 \equiv 1$，$a_6 \equiv 2$，$a_7 \equiv 5$，$a_8 \equiv 0$，$\cdots$という周期性が現れ，これをもとに考えることができます。

3

問題のページへ

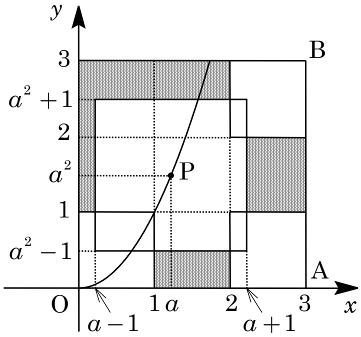
(1)　まず，正方形 $D: 0 \leqq x \leqq 3$ かつ $0 \leqq y \leqq 3$ に対して，点 O，A(3, 0)，B(3, 3) のいずれからも十分離れている領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



このとき，放物線 $y = x^2$ 上にある領域 D の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ が，右図の網点部にあるとき，a のとりうる値の範囲は，$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ となる。

(2)　4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている領域 D の点 Q について，存在しうる範囲の面積 $f(a)$ は，

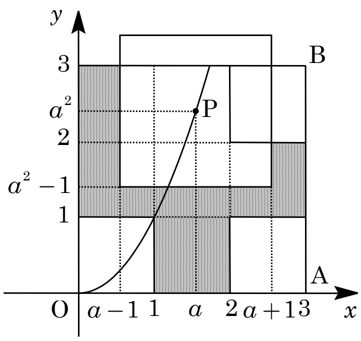
(a)　$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき



点 Q の存在しうる範囲は右図の網点部となり，

$$\begin{aligned} f(a) &= 1\cdot(a^2-1)+(a-1)\cdot a^2+(3-a-1)\cdot 1 \\ &\quad +2\cdot(3-a^2-1) \\ &= a^2-1+a^3-a^2+2-a+4-2a^2 \\ &= a^3-2a^2-a+5 \end{aligned}$$

(b)　$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき



点 Q の存在しうる範囲は右図の網点部となり，

$$\begin{aligned} f(a) &= 1^2+3\cdot(a^2-1-1)+(a-1)\cdot(3-a^2+1) \\ &\quad +(3-a-1)\cdot(2-a^2+1) \\ &= 1+3a^2-6-a^3+a^2+4a-4 \\ &\quad +a^3-2a^2-3a+6 \\ &= 2a^2+a-3 \end{aligned}$$

(3)　(a)　$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき　$f'(a) = 3a^2-4a-1$

ここで，$f'(a)=0$ の解は $a = \dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ であるが，$2.6 < \sqrt{7} < 2.7$ から，

$$\frac{2-\sqrt{7}}{3} < 1 < \sqrt{2} < \frac{2+\sqrt{7}}{3}$$

よって，$f'(a) < 0$ となり，$f(a)$ は単調に減少する。

(b)　$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき　$f'(a) = 4a+1 > 0$ となり，$f(a)$ は単調に増加する。

(a)(b)より，$f(a)$ は $a=\sqrt{2}$ で連続なので，$a=\sqrt{2}$ のとき最小になる。

［解　説］

題意を正確に読みとって図を描き，さらに注意力も要求される領域の問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y=x^3-x$ ……①に対し，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通る傾き m の直線 l の方程式は，

$$l: y-b=m(x-a)\,,\ \ y=mx-ma+b\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$x^3-x=mx-ma+b$，$x^3-(m+1)x+ma-b=0$ ………③

さて，$f(x)=x^3-(m+1)x+ma-b$ とおくと，$f'(x)=3x^2-(m+1)$

ここで，$m+1>0$ $(m>-1)$ のもとで $k=\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$$f(-k)=\frac{2(m+1)}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}+ma-b\,,\ \ f(k)=-\frac{2(m+1)}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}+ma-b$$

すると，$k^2=\dfrac{m+1}{3}$ から，$m=3k^2-1$ となり，

$$f(-k)=2k^3+3ak^2-a-b\,,\ \ f(k)=-2k^3+3ak^2-a-b$$

これより，十分に大きな m に対して k も十分に大きくなり，このとき任意の a，b に対し $f(-k)>0$ かつ $f(k)<0$ であるので，$f(x)=0$ すなわち③は相異なる 3 実数解をもつ。

言い換えると，どんな点 P に対しても，点 P を通る直線 l で曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2)　③の 3 つの実数解を $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$ とおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=0\,,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-(m+1)\,,\ \ -\alpha\beta\gamma=ma-b$$

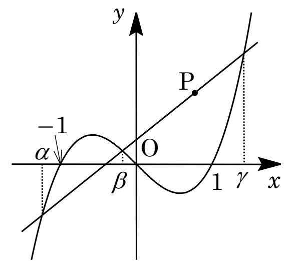
これより $\beta=-\alpha-\gamma$ となり，$-(m+1)=-(\alpha+\gamma)^2+\gamma\alpha=-\alpha^2-\alpha\gamma-\gamma^2$

$$m+1=\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2\ \cdots\cdots④,\ \ ma-b=-\alpha\gamma(-\alpha-\gamma)=\alpha\gamma(\alpha+\gamma)\ \cdots\cdots⑤$$

ここで，条件より，

$$\int_\alpha^\beta\{x^3-(m+1)x+ma-b\}dx$$

$$=-\int_\beta^\gamma\{x^3-(m+1)x+ma-b\}dx$$



よって，$\displaystyle\int_\alpha^\gamma\{x^3-(m+1)x+ma-b\}dx=0$

④⑤を代入すると，$\displaystyle\int_\alpha^\gamma\{x^3-(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)x+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)\}dx=0$ となり，

$$\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}{2}x^2+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)x\Big]_\alpha^\gamma=0$$

$$\frac{1}{4}(\gamma^4-\alpha^4)-\frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}{2}(\gamma^2-\alpha^2)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha)=0$$

$\alpha<\gamma$ から，$(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma+\alpha)-2(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)(\gamma+\alpha)+4\alpha\gamma(\alpha+\gamma)=0$

$$(\alpha+\gamma)\{(\gamma^2+\alpha^2)-2(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)+4\alpha\gamma\}=0,\ (\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha)^2=0$$

$\alpha<\gamma$ から $\alpha+\gamma=0$ となり，$\alpha<0<\gamma$ のもとで，⑤⑥から，

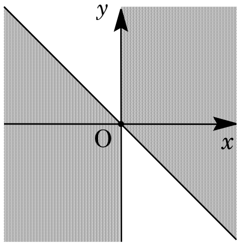
$$m=\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2-1=\alpha(\alpha+\gamma)+\gamma^2-1=\gamma^2-1,\ ma-b=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

よって，②より，$l: y=(\gamma^2-1)x$ である。

このとき，③は $x^3-\gamma^2x=0$ から，$x(x-\gamma)(x+\gamma)=0$ となり，$\gamma>0$ から $x=0,\ \pm\gamma$ という異なる 3 実数解をもつ。

すると，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ のとりうる範囲は，⑥より $ma-b=0$ $(m=\gamma^2-1>-1)$ に注意すると，右図の網点部となる。

ただし，原点以外の境界は含まない。

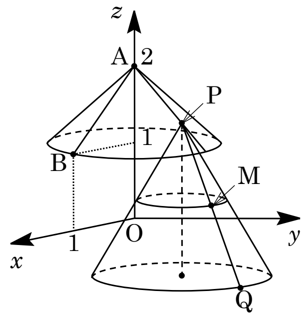


［解 説］

3 次曲線を題材にした記述しにくい問題です。(1)は明らかとも思えることを証明するものですが，極大値，極小値の符号の示し方は難しいところです。また，(2)は題意を満たすのが原点を通る直線となり，予測通りの結果が得られますが……。

5

問題のページへ



点 $A(0,\ 0,\ 2)$ と点 $B(1,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる円錐側面 S 上の点を $P(s,\ t,\ u)$ $(1\leqq u\leqq 2)$ とおくと，$\angle BAO=\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AO}|\cos\frac{\pi}{4}$$

ここで，$\overrightarrow{AP}=(s,\ t,\ u-2)$，$\overrightarrow{AO}=(0,\ 0,\ -2)$ から，

$$-2(u-2)=\sqrt{s^2+t^2+(u-2)^2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$1\leqq u\leqq 2$ から，両辺 2 乗すると，$2(2-u)^2=s^2+t^2+(u-2)^2$ となり，

$$s^2+t^2=(2-u)^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，点 P を固定すると，xy 平面上の点 Q は $PQ=2$ を満たしながら動くことより，点 Q は P を頂点とする母線の長さが 2 の円錐の底面の円を描く。

さらに，線分 PQ の中点 $M(x,\ y,\ z)$ は，$PM=1$ から，平面 $z=\dfrac{u}{2}$ 上で，中心 $\left(s,\ t,\ \dfrac{u}{2}\right)$，半径 $\sqrt{1^2-\left(\dfrac{u}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-u^2}$ の円を描くので，

$$(x-s)^2+(y-t)^2=\frac{1}{4}(4-u^2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，平面 $z=\dfrac{u}{2}$ 上で①②を満たす $s,\ t$ が存在する条件は，st 平面上で 2 つの円①と②が共有点をもつ条件として求められる。

円①は中心 $(0,\ 0)$ で半径 $2-u$，円②は中心 $(x,\ y)$ で半径 $\dfrac{1}{2}\sqrt{4-u^2}$ であり，2 円の中心間距離が $\sqrt{x^2+y^2}$ であることから，

$$\left|(2-u)-\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right|\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq(2-u)+\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}$$

$$\left\{(2-u)-\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right\}^2\leqq x^2+y^2\leqq\left\{(2-u)+\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right\}^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

これより，中点 M が通過しうる範囲 K を，平面 $z=\dfrac{u}{2}$ で切断した切り口は，③からドーナツ形になり，その面積を $S(z)$ とおくと，

$$S(z)=\pi\left\{(2-u)+\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right\}^2-\pi\left\{(2-u)-\frac{1}{2}\sqrt{4-u^2}\right\}^2$$

$$=2\pi(2-u)\sqrt{4-u^2}$$

よって，K の体積 V は，$z=\dfrac{u}{2}$ から，

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{1}S(z)dz=2\pi\int_1^2(2-u)\sqrt{4-u^2}\cdot\frac{1}{2}du=\pi\int_1^2(2-u)\sqrt{4-u^2}\,du$$

$$=2\pi\int_1^2\sqrt{4-u^2}\,du-\pi\int_1^2u\sqrt{4-u^2}\,du$$

ここで，$\displaystyle\int_1^2 \sqrt{4-u^2}\,du = \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_1^2 u\sqrt{4-u^2}\,du = \left[-\frac{1}{3}(4-u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = -\frac{1}{3}\cdot(-3\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

よって，$V = 2\left(\dfrac{2}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi - \sqrt{3}\pi = \dfrac{4}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi$ である。

［解 説］

通過領域の体積を求めるという頻出の問題です。上の解答例では，数式的な処理で解いています。

6　　問題のページへ

0 以上の整数 k に対して $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ より，l を 0 以上の整数として，

$$\overrightarrow{v_{3l}}=(1,\ 0),\ \overrightarrow{v_{3l+1}}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \overrightarrow{v_{3l+2}}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これより，$\overrightarrow{v_{3l}}+\overrightarrow{v_{3l+1}}+\overrightarrow{v_{3l+2}}=\vec{0}$ である。

さて，コインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0=\mathrm{O}$，X_1，X_2，…，X_N を，次の規則で定める。

まず，表が出たとき，$\overrightarrow{v_{3l}}$ だけ移動するのが a 回，$\overrightarrow{v_{3l+1}}$ だけ移動するのが b 回，$\overrightarrow{v_{3l+2}}$ だけ移動するのが c 回とする。また，裏が出たときは移動しないので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_N}=a\overrightarrow{v_{3l}}+b\overrightarrow{v_{3l+1}}+c\overrightarrow{v_{3l+2}}=\left(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c,\ \frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$$

(1)　$N=8$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OX}_8}=\vec{0}$ となるのは，$a\overrightarrow{v_{3l}}+b\overrightarrow{v_{3l+1}}+c\overrightarrow{v_{3l+2}}=\vec{0}$ から，

$$a=b=c$$

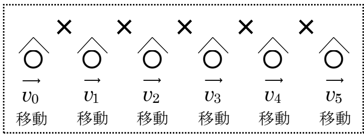
そして，$0\leqq a+b+c\leqq 8$ から，$a=b=c=0$，$a=b=c=1$，$a=b=c=2$

ここで，コイン投げで表が出たのを○，裏が出たのを×で表すと，

・$a=b=c=0$ のとき

×が 8 回から「××××××××」の場合だけとなり，その確率は $\dfrac{1}{2^8}$ である。

・$a=b=c=1$ のとき



×は 5 回から，$\vec{v_i}$ $(0\leqq i\leqq 5)$ について，$\overrightarrow{v_{3l}}$ ($\overrightarrow{v_0}$ または $\overrightarrow{v_3}$) の移動が 1 回，$\overrightarrow{v_{3l+1}}$ ($\overrightarrow{v_1}$ または $\overrightarrow{v_4}$) の移動が 1 回，$\overrightarrow{v_{3l+2}}$ ($\overrightarrow{v_2}$ または $\overrightarrow{v_5}$) の移動が 1 回である。すると，$2^3=8$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{8}{2^8}$ である。

・$a=b=c=2$ のとき

×が 2 回から，$\vec{v_i}$ $(0\leqq i\leqq 2)$ について，$\overrightarrow{v_{3l}}$ ($\overrightarrow{v_0}$) の移動が 2 回，$\overrightarrow{v_{3l+1}}$ ($\overrightarrow{v_1}$) の移動が 2 回，$\overrightarrow{v_{3l+2}}$ ($\overrightarrow{v_2}$) の移動が 2 回である。すると，「○○×○○×○○」の場合だけとなり，その確率は $\dfrac{1}{2^8}$ である。

よって，$\mathrm{X}_8=\mathrm{O}$ となる確率は，$\dfrac{1}{2^8}+\dfrac{8}{2^8}+\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{5}{2^7}=\dfrac{5}{128}$ である。

(2)　$N=200$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OX}_{200}}=\vec{0}$ なるのは，$a=b=c$ のときであり，このとき表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0\leqq r\leqq 200$ である。

まず，表の出る回数 $r=a+b+c=3a$ なので，r が 3 の倍数でないときは $p_r=0$ である。

次に，r が 3 の倍数のとき，$0\leqq k\leqq 66$ として，$r=3k$ とおくと，

$a=b=c=k \quad (0 \leqq k \leqq 66)$

そして，×は $200-3k$ 回から，$\overrightarrow{v_i}$ $(0 \leqq i \leqq 200-3k)$ について，$\overrightarrow{v_{3l}}$ $(\overrightarrow{v_0},\ \overrightarrow{v_3},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_{198-3k}})$ の移動が k 回，$\overrightarrow{v_{3l+1}}$ $(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_4},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_{199-3k}})$ の移動が k 回，$\overrightarrow{v_{3l+2}}$ $(\overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_5},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_{200-3k}})$ の移動が k 回である。

ここで，$\overrightarrow{v_0},\ \overrightarrow{v_3},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_{198-3k}}$ の移動が，それぞれ a_0，a_1，…，a_{66-k} 回とすると，

$a_0+a_1+\cdots+a_{66-k}=k \quad (a_0 \geqq 0,\ a_1 \geqq 0,\ \cdots,\ a_{66-k} \geqq 0)$

すると，$(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{66-k})$ の組は，${}_{67-k}\mathrm{H}_k={}_{66}\mathrm{C}_k$（通り）

同様に，$\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_4},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_{199-3k}}$ の移動が，それぞれ b_0，b_1，…，b_{66-k} 回とすると，

$b_0+b_1+\cdots+b_{66-k}=k \quad (b_0 \geqq 0,\ b_1 \geqq 0,\ \cdots,\ b_{66-k} \geqq 0)$

すると，$(b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_{66-k})$ の組は，${}_{67-k}\mathrm{H}_k={}_{66}\mathrm{C}_k$（通り）

さらに，$\overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_5},\ \cdots,\ \overrightarrow{v_{200-3k}}$ の移動が，それぞれ c_0，c_1，…，c_{66-k} 回とすると，

$c_0+c_1+\cdots+c_{66-k}=k \quad (c_0 \geqq 0,\ c_1 \geqq 0,\ \cdots,\ c_{66-k} \geqq 0)$

すると，$(c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{66-k})$ の組は，${}_{67-k}\mathrm{H}_k={}_{66}\mathrm{C}_k$（通り）

したがって，r が 3 の倍数のとき，表が $r=3k$ 回出る確率 p_r は，

$$p_r=\frac{({}_{66}\mathrm{C}_k)^3}{2^{200}}=\frac{\left({}_{66}\mathrm{C}_{\frac{r}{3}}\right)^3}{2^{200}}$$

このとき，$\dfrac{p_{3(k+1)}}{p_{3k}}=\dfrac{({}_{66}\mathrm{C}_{k+1})^3}{({}_{66}\mathrm{C}_k)^3}=\left(\dfrac{{}_{66}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_k}\right)^3$ となり，

$$\frac{{}_{66}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_k}-1=\frac{66!}{(k+1)!\,(65-k)!}\cdot\frac{k!\,(66-k)!}{66!}-1=\frac{66-k}{k+1}-1=\frac{65-2k}{k+1}$$

$k<\dfrac{65}{2}$ $(k \leqq 32)$ のとき $\dfrac{{}_{66}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_k}>1$，$k>\dfrac{65}{2}$ $(k \geqq 33)$ のとき $\dfrac{{}_{66}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_k}<1$ なので，

$p_0<p_3<p_6<\cdots<p_{96}<p_{99}>p_{102}>\cdots>p_{198}$

以上より，$r=99$ のとき p_r は最大となる。

［解 説］

読解力が要求される難しめの確率問題です。ポイントは，$\overrightarrow{v_{3l}}+\overrightarrow{v_{3l+1}}+\overrightarrow{v_{3l+2}}=\vec{0}$ の関係をベースに，具体的に○と×のパターンを調べ，一般化することです。