1　解答解説のページへ

座標平面上にすべての内角が$180°$未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$とおく。$k$ は$0\leqq k\leqq 1$を満たす定数とする。0以上の実数$s,\ t,\ u$が$k+s+t+u=1$を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を$E(k)$とする。

(1)　$E(1)$および$E(0)$を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの$E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。

2

解答解説のページへ

数直線上の点 Q は，はじめは原点$x=0$にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が$x=a$にあるとき，

- 出た目が 1 ならば$x=a$にとどまる。
- 出た目が 2, 3 ならば$x=a+1$へ動く。
- 出た目が 4, 5, 6 ならば$x=0$に戻る（$a=0$ならば動かない)。

(1)　整数$a \geqq 0$に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が$x=a$にある確率を求めよ。

(2)　さいころをn回投げたとき，Q が$x=0$にある確率を求めよ。

(3)　さいころをn回投げたとき，Q が$x=1$にある確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

曲線 $C: y=\sin x$ 上を点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が動く。正の実数 r に対して，P における C の接線上に $\mathrm{PQ}=r$ となるように点 Q をとる。ただし，Q の x 座標は t よりも大きいとする。

(1)　Q の座標を求めよ。

(2)　$t=\dfrac{\pi}{4}$ のときに Q の y 座標が最大となるような r の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

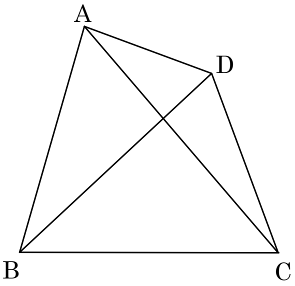
p を 2 でない素数とし，自然数 m，n は，$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$ を満たすとする。

(1)　互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ で，$m+n\sqrt{p}=\dfrac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$ を満たすものが存在することを示せ。

(2)　x は(1)の条件を満たす自然数とする。x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることが，同値であることを示せ。

1

問題のページへ



(1) 原点 O, 四角形 ABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。定数 k は $0\leqq k\leqq 1$，0 以上の実数 s, t, u は $k+s+t+u=1$ を満たす。

そして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

まず，$k=1$ のとき $s+t+u=0$ から $s=t=u=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$ となる。すなわち，$E(1)$ は点 A である。

次に，$k=0$ のとき $s+t+u=1$ から $s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $u=1-s-t\geqq 0$ となり，

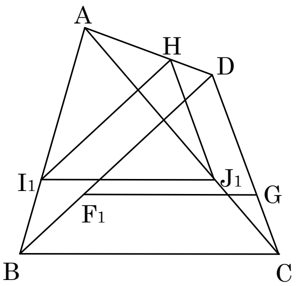
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+t\vec{c}+(1-s-t)\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{d}=s(\vec{b}-\vec{d})+t(\vec{c}-\vec{d})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}\quad (s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

よって，$E(0)$ は△DBC の内部または辺上となる。

(2) $k=\dfrac{1}{3}$ のとき，$s+t+u=\dfrac{2}{3}$ から $s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $u=\dfrac{2}{3}-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+\Big(\frac{2}{3}-s-t\Big)\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおき，DB, DC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{F_1}$，$\mathrm{G_1}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}\ \Big(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\Big)$$

これより，点 Q は $\triangle\mathrm{DF_1G_1}$ の内部または辺上にある。

さらに，AD, AB, AC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{I_1}$，$\mathrm{J_1}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{H_1P}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}\ \Big(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\Big)$$

よって，$E\Big(\dfrac{1}{3}\Big)$ は $\triangle\mathrm{H_1I_1J_1}$ の内部または辺上となる。

(3) (2)と同様にして，$s+t+u=1-k$ から $s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $u=1-k-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+(1-k-s-t)\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\{k\vec{a}+(1-k)\vec{d}\}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

ここで，AD, AB, AC を $1-k:k$ に内分する点を，それぞれ H, I, J とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{s}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HI}}+\frac{t}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HJ}}\ \Big(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{s}{1-k}+\frac{t}{1-k}\leqq 1\Big)$$

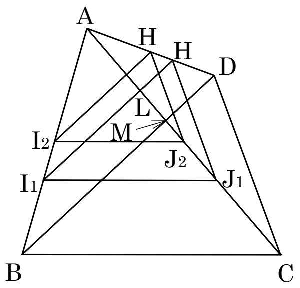
よって，$E(k)$ は△HIJ の内部または辺上となる。

さて，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，AD, AB, AC の中点を，それぞれ $\mathrm{H_2}$，$\mathrm{I_2}$，$\mathrm{J_2}$ とおくと，$E\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ は $\triangle\mathrm{H_2I_2J_2}$ の内部または辺上となる。

すると，$\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ において，どの $E(k)$ にも属するような点 P が存在する条件は，$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ と $E\left(\dfrac{1}{2}\right)$ に共通部分が存在することである。すなわち，対角線 AC, BD の交点を M, AC と H_1I_1 の交点を L とすると，

$$AJ_2 \geqq AL, \ \frac{1}{2}AC \geqq \frac{2}{3}AM$$

よって，求める条件は，3AC≧4AM である。



［解　説］

平面ベクトルと領域に関する問題です。解答例が書きにくいタイプで，やや冗長な感じもします。また，丁寧な誘導のため，後半になるに従い省略ぎみに記しましたが，それでもボリュームはかなりのものとなっています。

2

問題のページへ

(1)　さいころを 3 回投げ Q が $x=a$ にある確率を，a の値で場合分けをして求める。

(i)　$a \geqq 4$ のとき

到達点は $a \leqq 3$ なので，このときの確率は 0 である。

(ii)　$a=3$ のとき

$0 \to 1 \to 2 \to 3$ の場合のみより，このときの確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ である。

(iii)　$a=2$ のとき

$0 \to 0 \to 1 \to 2$, $0 \to 1 \to 1 \to 2$, $0 \to 1 \to 2 \to 2$ の場合があり，これらの確率はそれぞれ $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}$，$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{54}$，$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{54}$ である。

よって，このときの確率は $\frac{2}{27} + \frac{1}{54} + \frac{1}{54} = \frac{1}{9}$ である。

(iv)　$a=1$ のとき

$0 \to 0 \to 0 \to 1$, $0 \to 0 \to 1 \to 1$, $0 \to 1 \to 0 \to 1$, $0 \to 1 \to 1 \to 1$ の場合があり，これらの確率はそれぞれ $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$，$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{27}$，$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$，$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{108}$ である。

よって，このときの確率は $\frac{4}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{108} = \frac{1}{4}$ である。

(v)　$a=0$ のとき

このときの確率は，(i)～(iv)の結果から，$1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = \frac{65}{108}$ である。

(2)　さいころを n 回投げ，Q が $x=0$，$x \neq 0$ にある確率をそれぞれ p_n，q_n とおくと，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}$$

すると，$p_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{3}{5}\right)$ となり，$p_1 = \frac{2}{3}$ から，

$$p_n - \frac{3}{5} = \left(p_1 - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$ である。

(3)　さいころを n 回投げ，Q が $x=1$ にある確率を r_n とおくと，$r_1 = \frac{1}{3}$ で，(2)から，

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}r_n = \frac{1}{6}r_n + \frac{1}{45}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$$

すると，両辺に 6^n をかけて，$6^n r_{n+1} = 6^{n-1}r_n + \frac{2}{15} + \frac{1}{5}\cdot 6^n$ となり，$n \geqq 2$ で，

$$6^{n-1}r_n = 6^0 r_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{5}\cdot 6^k\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}(n-1) + \frac{1}{5}\cdot\frac{6(6^{n-1}-1)}{6-1}$$

$$= \frac{2}{15}n + \frac{1}{25}\cdot 6^n - \frac{1}{25}$$

$$r_n = \frac{2}{15}n\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{25} - \frac{1}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{15}n - \frac{1}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{25}$$

$n=1$ をあてはめると，$r_1=\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{25}+\dfrac{6}{25}=\dfrac{1}{3}$ となり成立するので，

$$r_n=\Big(\frac{2}{15}n-\frac{1}{25}\Big)\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}+\frac{6}{25}$$

［解 説］

設定が微妙に複雑な確率の問題です。(1)では，記述を省略しましたが，樹系図を書いて数えもれのチェックをしています。また，(2)は直接的に求めようかとも思いましたが，無難な漸化式という方針を採用しました。また，(3)は(2)の結果を利用しましたが，漸化式がやや複雑なタイプです。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

$\boxed{3}$　　　問題のページへ

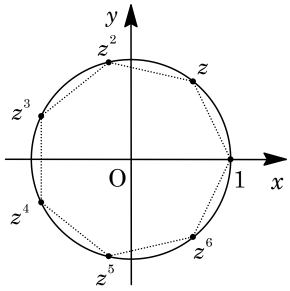
(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して，$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\overline{\alpha}=\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}=z^6+z^5+z^3$

$$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3=-1$$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7\\&=3+z^6+z^4+z+z^5+z^3+z^2\\&=3-1=2\end{aligned}$$



よって，α，$\overline{\alpha}$ は2次方程式 $x^2+x+2=0$ の解より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

そして，α の虚部は $\overline{\alpha}$ の虚部より大きいので，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ である。

(3)　$x^7=1$ の解は，$x=1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^6$ より，

$$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

そして，$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ より，

$$\begin{aligned}&x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\&=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)\cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ に $x=1$ を代入すると，

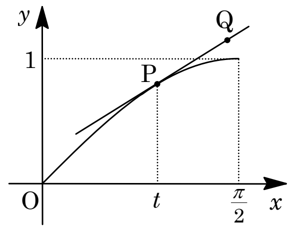
$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=7$$

［解　説］

1の n 乗根に関する超有名問題です。解答例に示した図がすべてと言っても構わない内容です。

4

問題のページへ



(1)　$C: y=\sin x$ に対して $y'=\cos x$ なので，$\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線の方向ベクトルで，x 成分が正のものを，$\vec{u}=(1,\ \cos t)$ とおくことができる。

すると，$|\vec{u}|=\sqrt{1+\cos^2 t}$ で，条件から $\mathrm{PQ}=r$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t,\ \sin t)+\frac{r}{\sqrt{1+\cos^2 t}}(1,\ \cos t)$$

よって，$\mathrm{Q}\Big(t+\dfrac{r}{\sqrt{1+\cos^2 t}},\ \sin t+\dfrac{r\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\Big)$ となる。

(2)　Q の y 座標を $f(t)$ とおくと，$f(t)=\sin t+\dfrac{r\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$ となり，

$$f'(t)=\cos t+r\cdot\frac{-\sin t\sqrt{1+\cos^2 t}+\cos t\cdot(1+\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}\cos t\sin t}{1+\cos^2 t}$$

$$=\cos t+r\cdot\frac{-\sin t(1+\cos^2 t)+\sin t\cos^2 t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cos t(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}-r\sin t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

さらに，$g(t)=\cos t(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}-r\sin t$ とおくと，

$$g'(t)=-\sin t(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}-\cos t\cdot\frac{3}{2}(1+\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\cos t\sin t-r\cos t$$

$$=(-1-\cos^2 t-3\cos^2 t)\sin t(1+\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}-r\cos t$$

$$=-\sin t(1+4\cos^2 t)(1+\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}-r\cos t<0$$

これより，$g(t)$ は $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少し，$g(0)=2\sqrt{2}>0$，$g\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)=-r<0$ から $g(\alpha)=0$ となる α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つ存在する。

そして，$f'(t)$ と $g(t)$ は符号が一致するので，$f(t)$ は，増減が右表のようになり，$t=\alpha$ で最大となる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

すると，条件から $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ となるので，

$$g\Big(\frac{\pi}{4}\Big)=\cos\frac{\pi}{4}\Big(1+\cos^2\frac{\pi}{4}\Big)^{\frac{3}{2}}-r\sin\frac{\pi}{4}=0,\ \ r=\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{6}$$

［解　説］

微分と増減についての標準的な問題です。ただ，$g(t)$ が単調減少であるのは形から明らかでしたが，習慣から，つい $g'(t)$ という余計な計算をしています。

5

問題のページへ

(1)　3 以上の素数 p，自然数 m, n に対して，$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$ より，

$$m^2-n^2p=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，$m^2=n^2p+1\geqq 1^2\cdot 3+1=4$ から，$m\geqq 2$ となる。

さて，条件より，互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ に対して，

$$m+n\sqrt{p}=\frac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}} \cdots\cdots\cdots ②$$

②を同値変形すると，$(m+n\sqrt{p})(x-y\sqrt{p})=x+y\sqrt{p}$ となり，

$$(mx-npy-x)+(nx-my-y)\sqrt{p}=0$$

m, n, x, y は自然数，$\sqrt{p}$ は無理数なので，

$$mx-npy-x=0 \cdots\cdots\cdots ③,\quad nx-my-y=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

③より，$(m-1)x-npy=0$，$y=\dfrac{m-1}{np}x \cdots\cdots\cdots ⑤$

④より，$nx-(m+1)y=0$，$y=\dfrac{n}{m+1}x \cdots\cdots\cdots ⑥$

ここで，①から，$\dfrac{m-1}{np}-\dfrac{n}{m+1}=\dfrac{m^2-1-n^2p}{np(m+1)}=0$ なので，⑤と⑥は一致する。

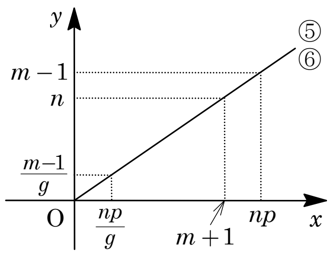
よって，②を満たす互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ は，

(i)　$\dfrac{m-1}{np}$ が既約分数のとき　$(x,\ y)=(np,\ m-1)$

(ii)　$\dfrac{m-1}{np}$ が既約分数でないとき

np と $m-1$ の最大公約数を g $(g\geqq 2)$ とすると，

$$(x,\ y)=\left(\frac{np}{g},\ \frac{m-1}{g}\right)$$



(i)(ii)より，②を満たす互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ は，

$$(x,\ y)=\left(\frac{np}{g},\ \frac{m-1}{g}\right)\ （g \text{ は } np \text{ と } m-1 \text{ の最大公約数}）$$

(2)　(1)と同様にして，$m+1$ と n の最大公約数を h とすると，②を満たす互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ は，

$$x=\frac{np}{g}=\frac{m+1}{h} \cdots\cdots\cdots ⑦,\quad y=\frac{m-1}{g}=\frac{n}{h} \cdots\cdots\cdots ⑧$$

さて，x が p で割り切れないとき，⑦から $xg=np$ なので g は p の倍数となり，k を自然数として $g=kp$ とかける。

すると，⑧から $y=\dfrac{m-1}{kp}$ となり，$m=ykp+1$ すなわち m を p で割った余りは 1 である。

また，逆に m を p で割った余りが 1 であるとき，l を自然数として $m=lp+1$ と

かける。すると，⑦から $x=\dfrac{lp+1+1}{h}=\dfrac{lp+2}{h}$ となり，

$$xh=lp+2 \cdots\cdots\cdots ⑨$$

ここで，x が p で割り切れるとすると，j を自然数として $x=jp$ とかけ，⑨から，

$$jph=lp+2\,,\ (jh-l)\,p=2 \cdots\cdots\cdots ⑩$$

ところが，p は 3 以上の素数より⑩は成立しないので，x は p で割り切れない。

以上より，x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることは同値である。

［解　説］

約数・倍数の関係が絡んだ整数問題です。①のもとで，②と⑤が同値，または②と⑥が同値ということに着目しつつ，直線⑤，⑥のイメージ図を参照しながら解答例を作成しました。