1　解答解説のページへ

半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある。その面積を S とする。D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる。さらに，D_1 の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_2 をつくる。このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n\geqq 2)$。D_n の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S と S_1 を求めよ。

(2)　S_n を n の式で表せ $(n\geqq 1)$。

(3)　$S_n\leqq\dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ。ただし，$1.89<\log_2(2+\sqrt{3})<1.9$ である。

2

解答解説のページへ

1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある。右の図 1 のように，2 辺 BC, CD 上に，$\mathrm{BS}=\mathrm{CT}=x\ (0\leqq x\leqq 2)$ を満たす点 S, T をとる。このとき，三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

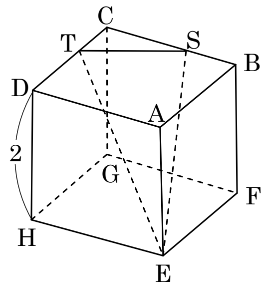


図1

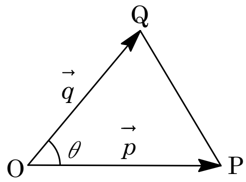


図2

(1) 右の図 2 を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{c}$ とおく。立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ。

(3) 上の(1)を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ。

(4) $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値も答えよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=xe^x$ で定まる曲線 $C: y=f(x)$ を考える。p を正の数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。また，すべての x について，$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ が成り立つような定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $l: y=c(x-p)+d$ とする。c と d の値を p を用いて表せ。さらに，区間 $x\geqq 0$ において関数

$$g(x)=f(x)-\{c(x-p)+d\}$$

の増減を調べ，不等式 $f(x)\geqq c(x-p)+d\ (x\geqq 0)$ が成り立つことを示せ。

(3) $x\geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 l，および y 軸で囲まれた図形を F とする。その面積 $S(p)$ を求めよ。

(4) 2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える。R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (a>0)$ と y 軸の交点を $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(0,\ -a)$ とする。θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く。以下の問いに答えよ。

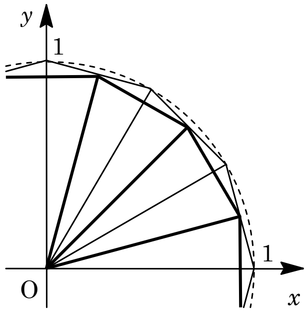
(1) 線分 AP の長さを l とする。$X=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$Y=l^2$ となる関数を $Y=f(X)$ とする。$f(X)$ を X の式で表せ。

(2) $0<a<1$ の場合。(1)の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し，そのときの X の値を求めよ。

(3) $a=2$ の場合。(1)の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を P_1 とする。$f(X)$ の最大値と P_1 の座標を求めよ。また点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とし点 P_1 を通る円を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　半径 1 の円に内接する正十二角形 D の面積 S は,

$$S=\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)\times 12=3$$

また, D の各辺の中点を順に結んでできる正十二角形 D_1 の面積 S_1 は,

$$S_1=\left\{\frac{1}{2}\left(1\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)^2\sin\frac{\pi}{6}\right\}\times 12=\cos^2\frac{\pi}{12}\cdot S$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)S=\frac{2+\sqrt{3}}{4}S=\frac{3(2+\sqrt{3})}{4}$$

(2)　(1)と同様に考えると，$S_{n+1}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}S_n$　$(n\geqq 1)$ より，

$$S_n=S_1\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^{n-1}=3\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n$$

(3)　$S_n\leqq\dfrac{1}{2}S$ とすると，$3\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n\leqq\dfrac{3}{2}$ となり，$2(2+\sqrt{3})^n\leqq 4^n$ から，

$$\log_2 2+n\log_2(2+\sqrt{3})\leqq n\log_2 2^2,\ 1+n\log_2(2+\sqrt{3})\leqq 2n$$

すると，$\{2-\log_2(2+\sqrt{3})\}n\geqq 1$ となり，$1.89<\log_2(2+\sqrt{3})<1.9$ から，

$$0.1<2-\log_2(2+\sqrt{3})<0.11$$

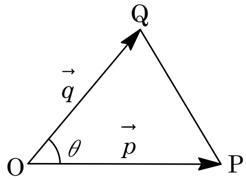
よって，$n\geqq\dfrac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})}$ となるので，$9.09<\dfrac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})}<10$ から，求める最小の整数 n は 10 である。

［解　説］

図形と数列の基本的な融合問題です。最後の対数計算も複雑ではありません。

2

問題のページへ

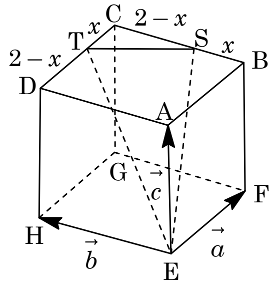


(1)　$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2(1-\cos^2\theta)}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{ES}}=\overrightarrow{\mathrm{EB}}+\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\vec{a}+\vec{c}+\dfrac{x}{2}\vec{b}=\vec{a}+\dfrac{x}{2}\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{ET}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\overrightarrow{\mathrm{DT}}=\vec{b}+\vec{c}+\dfrac{2-x}{2}\vec{a}=\dfrac{2-x}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より，

$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2=2^2+2^2+\dfrac{x^2}{4}\cdot 2^2=x^2+8$

$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2=\dfrac{(2-x)^2}{4}\cdot 2^2+2^2+2^2=x^2-4x+12$

$\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}=\dfrac{2-x}{2}\cdot 2^2+\dfrac{x}{2}\cdot 2^2+2^2=8$

(3)　$\triangle\mathrm{EST}$ の面積 $f(x)$ は，(1)より，

$f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)(x^2-4x+12)-8^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^4-4x^3+20x^2-32x+32}$

(4)　$g(x)=x^4-4x^3+20x^2-32x+32$ とおくと，

$g'(x)=4x^3-12x^2+40x-32$

$=4(x-1)(x^2-2x+8)$

$=4(x-1)\{(x-1)^2+7\}$

これより，$0\leqq x\leqq 2$ における $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	32	↘	17	↗	32

すると，$f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{g(x)}$ より，$f(x)$ は，$x=0,\ 2$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{32}=2\sqrt{2}$ をとり，$x=1$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ をとる。

［解　説］

空間の三角形の面積を求める問題です。対象が立方体ですので，計算は簡単です。

３

問題のページへ

(1)　$f(x)=xe^x$ に対し，$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

また，すべての x について，$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ が成り立つとき，

$$(a+ax+b)e^x=xe^x\,,\ \{(a-1)x+a+b\}e^x=0$$

すると，$a-1=a+b=0$ より，$a=1$，$b=-1$

(2)　曲線 $C: y=f(x)$ の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))\ (p>0)$ における C の接線 l は，

$$y-f(p)=f'(p)(x-p)\,,\ y=f'(p)(x-p)+f(p)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$ が $y=c(x-p)+d$ と一致することより，

$$c=f'(p)=(p+1)e^p\,,\ d=f(p)=pe^p$$

さらに，$x\geqq 0$ において，$g(x)=f(x)-\{c(x-p)+d\}$ とおくと，

$$g(x)=f(x)-f'(p)(x-p)-f(p)$$

$$g'(x)=f'(x)-f'(p)$$

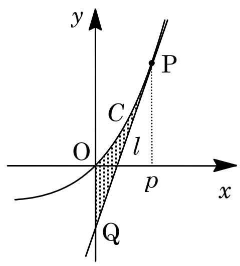
$$g''(x)=f''(x)=(x+2)e^x>0$$

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	0	↗

すると，$g'(x)$ は単調に増加し，$g(x)$ の増減は右表のようになる。

よって，$x\geqq 0$ において $g(x)\geqq 0$，すなわち $f(x)\geqq c(x-p)+d$ が成り立つ。

(3)　図形 F は右図の網点部であり，その面積 $S(p)$ は，



$$S(p)=\int_0^p\{xe^x-(p+1)e^p(x-p)-pe^p\}dx$$

$$=\int_0^p\{xe^x-(p+1)e^px+p^2e^p\}dx$$

$$=\Big[(x-1)e^x-\frac{(p+1)e^p}{2}x^2+p^2e^px\Big]_0^p$$

$$=(p-1)e^p+1-\frac{(p+1)e^p}{2}p^2+p^3e^p=\frac{1}{2}(p^3-p^2+2p-2)e^p+1$$

(4)　長方形 R が F を囲んでいるとき R の面積の最小値 $T(p)$ は，$\mathrm{Q}(0,\ -p^2e^p)$ から，

$$T(p)=p\{f(p)-(-p^2e^p)\}=p(pe^p+p^2e^p)=(p^3+p^2)e^p$$

すると，$\dfrac{S(p)}{T(p)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p^3-p^2+2p-2}{p^3+p^2}+\dfrac{1}{(p^3+p^2)e^p}$ となるので，

$$\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}=\frac{1}{2}\cdot 1+0=\frac{1}{2}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。設問は多めですが，内容はいずれも基本的です。

4

問題のページへ

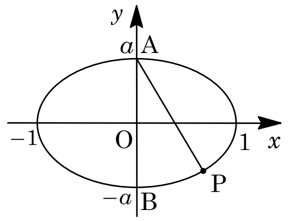
(1)　楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 上の点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，

$$Y=\mathrm{AP}^2=\cos^2\theta+(a\sin\theta-a)^2=1-\sin^2\theta+a^2(\sin\theta-1)^2$$

ここで，$Y=f(X)$ とし，$X=\sin\theta$ とおくと，

$$f(X)=1-X^2+a^2(X-1)^2=(a^2-1)X^2-2a^2X+a^2+1\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$0<a<1$ のとき，①から，



$$f(X)=(a^2-1)\left(X-\frac{a^2}{a^2-1}\right)^2-\frac{1}{a^2-1}$$
$$=-(1-a^2)\left(X+\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2+\frac{1}{1-a^2}$$

(i)　$-1\leqq-\dfrac{a^2}{1-a^2}<0$ $\left(0<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき

$-1\leqq X\leqq1$ より $f(X)$ は $X=-\dfrac{a^2}{1-a^2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{1-a^2}$ をとる。

(ii)　$-\dfrac{a^2}{1-a^2}<-1$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<1\right)$ のとき

$-1\leqq X\leqq1$ より $f(X)$ は $X=-1$ のとき最大値 $a^2-1+2a^2+a^2+1=4a^2$ をとる。

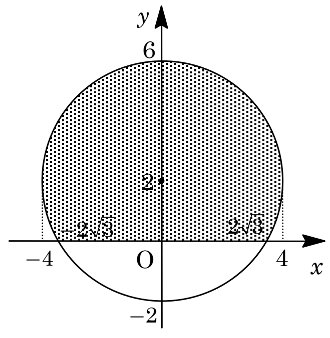
(3)　$a=2$ のとき，①から，$f(X)=3X^2-8X+5=3\left(X-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}$

すると，$-1\leqq X\leqq1$ より $f(X)$ は $X=-1$ のとき最大値 $3+8+5=16$ をとる。

このとき，$\sin\theta=-1$ から $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\mathrm{P}=\mathrm{P}_1$ から $\mathrm{P}_1(0,\ -2)$ である。

さて，点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$ を中心とし点 P_1 を通る円は，

$$x^2+(y-2)^2=16\ \cdots\cdots\cdots②$$



そして，②で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は，右図の網点部を x 軸のまわりに回転した立体に等しい。

②から，$y=2\pm\sqrt{16-x^2}$ となり，V_1，V_2 を，

$$V_1=\pi\int_0^4(2+\sqrt{16-x^2})^2dx$$

$$V_2=\pi\int_{2\sqrt{3}}^4(2-\sqrt{16-x^2})^2dx$$

すると，求める回転体の体積 V は，$V=2(V_1-V_2)$ となる。

$V_1=\pi\displaystyle\int_0^4(20-x^2+4\sqrt{16-x^2})dx$，$V_2=\pi\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^4(20-x^2-4\sqrt{16-x^2})dx$ から，

$$V_1-V_2=\pi\int_0^{2\sqrt{3}}(20-x^2)dx+4\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx+4\pi\int_{2\sqrt{3}}^4\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= \pi\left[\,20x - \frac{x^3}{3}\,\right]_0^{2\sqrt{3}} + 4\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\pi}{2} + 4\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\right)$$

$$= 32\sqrt{3}\pi + 16\pi^2 + \frac{16}{3}\pi^2 - 8\sqrt{3}\pi = 24\sqrt{3}\pi + \frac{64}{3}\pi^2$$

よって，$V = 2\left(24\sqrt{3}\pi + \dfrac{64}{3}\pi^2\right) = 48\sqrt{3}\pi + \dfrac{128}{3}\pi^2$ である。

［解 説］

楕円と体積という 2 つの領域の融合問題です。他の問題と同じように誘導が丁寧です。なお, (3)の後半は, 2012 年九大・理系の第 1 問と数値が異なるだけで，そのときつくった解答例を流用しています。