

1

解答解説のページへ

$\triangle OAB$ において、 $OA = 5$ 、 $OB = 6$ 、 $AB = 7$ とする。 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t : (1-t)$ に内分する点を P 、辺 OB を $1 : t$ に外分する点を Q 、辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) \overrightarrow{OR} を t 、 \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (3) \overrightarrow{OS} を t 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

3 が書かれたカードが 10 枚, 5 が書かれたカードが 10 枚, 10 が書かれたカードが 10 枚, 全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき, 取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3, 5, 10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし, 取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

- (1) 操作が終了するまでに, カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。
- (2) 操作が終了するまでに, カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。
- (3) 操作が終了したときに, 取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を $0 < a < 1$ を満たす実数として x の関数 $f(x) = ax - \log(1 + e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし必要があれば、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ が成り

立つことを用いてよい。

- (1) $M(a)$ を a を用いて表せ。
- (2) a の関数 $y = M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。
- (3) a の関数 $y = M(a)$ のグラフをかけ。

4

解答解説のページへ

一般項が $a_n = \frac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。
- (3) 2 以上の整数 k に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

1

問題のページへ

- (1)
- $OA=5$
- ,
- $OB=6$
- ,
- $AB=7$
- である
- $\triangle OAB$
- において,

 $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ とすると, 余弦定理から,

$$5^2 + 6^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 7^2, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{25+36-49}{2} = 6$$

- (2)
- $\triangle OAB$
- と直線
- PQ
- にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{OP}{PA} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BQ}{QO} = 1, \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{t}{1} = 1$$

よって, $\frac{AR}{RB} = \frac{1-t}{t^2}$ より, $\vec{OR} = \frac{t^2}{t^2-t+1}\vec{a} + \frac{1-t}{t^2-t+1}\vec{b}$

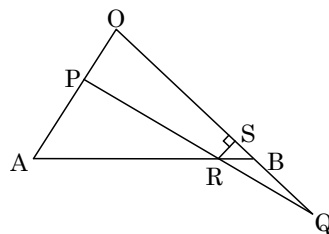
- (3)
- \vec{OS}
- は
- \vec{OR}
- の
- OB
- への正射影ベクトルであり,
- $|\vec{b}|=6$
- から,

$$\begin{aligned} \vec{OS} &= \left(\frac{\vec{OR} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{36(t^2-t+1)} \{ (t^2\vec{a} + (1-t)\vec{b}) \cdot \vec{b} \} \vec{b} \\ &= \frac{1}{36(t^2-t+1)} \{ 6t^2 + 36(1-t) \} \vec{b} = \frac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)} \vec{b} \end{aligned}$$

- (4)
- $|\vec{OS}|=4$
- なので, (3)の結果から,
- $\frac{|t^2-6t+6|}{6|t^2-t+1|} \cdot 6 = 4$
- ,
- $\frac{|t^2-6t+6|}{|t^2-t+1|} = 4$

 $0 < t < 1$ のとき, $t^2-6t+6 = t^2+6(1-t) > 0$, $t^2-t+1 = t^2+(1-t) > 0$ から,

$$\frac{t^2-6t+6}{t^2-t+1} = 4, \quad t^2-6t+6 = 4(t^2-t+1), \quad 3t^2+2t-2=0$$

すると, $0 < t < 1$ から, $t = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ 

[解説]

平面ベクトルの図形への応用問題です。(2)は分点ベクトル表示, (3)は $\vec{RS} \cdot \vec{b} = 0$ を用いる解法でも, 少し記述量が多くなるだけです。

2

問題のページへ

(1) 3 のカード, 5 のカード, 10 のカードがそれぞれ 10 枚ずつ, 全部で 30 枚のカードが箱の中にあり, この中から 1 枚ずつカードを取り出していき, 取り出したカードの数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。

さて, 1 回取り出したとき操作が終了するのは, 10 のカードを取り出した場合だけより, その確率は, $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ である。

(2) 2 回取り出したとき操作が終了するのは, 次の場合がある。

(i) 1 回目が 3 のカードで, 2 回目が 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\frac{10}{30} \cdot \frac{10}{29} = \frac{10}{3 \cdot 29}$ である。

(ii) 1 回目が 5 のカードで, 2 回目が 5 または 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\frac{10}{30} \cdot \frac{9+10}{29} = \frac{19}{3 \cdot 29}$ である。

(i)(ii)より, 2 回取り出したとき操作が終了する確率は, $\frac{10}{3 \cdot 29} + \frac{19}{3 \cdot 29} = \frac{1}{3}$

(3) まず, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する場合を考える。

(i) 数の合計が 10 で操作が終了する場合

1 回目が 10, または 1 回目と 2 回目がともに 5 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30} + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{38}{3 \cdot 29}$$

(ii) 数の合計が 11 で操作が終了する場合

1 回目, 2 回目, 3 回目の数が, 3→3→5 または 3→5→3 または 5→3→3 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{10}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} = \frac{45}{14 \cdot 29}$$

(i)(ii)より, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する確率は,

$$\frac{38}{3 \cdot 29} + \frac{45}{14 \cdot 29} = \frac{667}{3 \cdot 14 \cdot 29} = \frac{23}{42}$$

すると, カードを多くとも 4 回取り出せば, 操作は必ず終了するので, 操作が終了したときに, 取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率は,

$$1 - \frac{23}{42} = \frac{19}{42}$$

[解説]

確率の基本的な問題です。(3)は, 取り出した回数で場合分けをしても構いませんが, 数値計算がややこしくなります。

3

問題のページへ

(1) $0 < a < 1$ のとき, $f(x) = ax - \log(1 + e^x)$ に対して,

$$f'(x) = a - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{a + ae^x - e^x}{1 + e^x} = -\frac{(1-a)e^x - a}{1 + e^x}$$

ここで, $\frac{a}{1-a} > 0$ より $e^x = \frac{a}{1-a}$ を満たす x がただ 1 つ存在し, これを $x = \alpha$ とおくと, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	...	α	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

すると, 最大値 $M(a)$ は, $e^\alpha = \frac{a}{1-a}$ から,

$$\begin{aligned} M(a) &= f(\alpha) = a\alpha - \log(1 + e^\alpha) = a \log \frac{a}{1-a} - \log\left(1 + \frac{a}{1-a}\right) \\ &= a \log a - a \log(1-a) - \log \frac{1}{1-a} = a \log a - a \log(1-a) + \log(1-a) \\ &= a \log a + (1-a) \log(1-a) \end{aligned}$$

(2) (1)より, $0 < a < 1$ において,

$$\begin{aligned} M'(a) &= \log a + 1 - \log(1-a) - 1 \\ &= \log a - \log(1-a) \end{aligned}$$

$M'(a) = 0$ とすると, $a = 1-a$ から $a = \frac{1}{2}$

a	0	...	$\frac{1}{2}$...	1
$M'(a)$		-	0	+	
$M(a)$		↘		↗	

すると, $M(a)$ は $a = \frac{1}{2}$ のとき最小となり, 最小値は,

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \log \frac{1}{2} = -\log 2$$

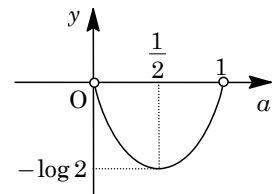
(3) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ より, $\lim_{a \rightarrow +0} M(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \{a \log a + (1-a) \log(1-a)\} = 0$

$$\lim_{a \rightarrow 1-0} M(a) = \lim_{a \rightarrow 1-0} \{a \log a + (1-a) \log(1-a)\} = 0$$

また, $M''(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} > 0$ となるので, $y = M(a)$ の

グラフは下に凸である。

以上より, $y = M(a)$ のグラフは右図のようになる。



[解説]

微分法に関する総合的な問題です。計算は易しめです。

4

問題のページへ

(1) $n \geq 2$ のとき, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n \leq 1 \cdot n \cdot n \cdots n \cdot n = n^{n-1}$ となり,

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

(2) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(3) 2 以上の整数 k に対して, $b_n = \log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log \frac{a_{kn}}{a_n}$ とおくと,

$$b_n = \frac{1}{n} \log \frac{(kn)!}{(kn)^{kn}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{n} \log \frac{(kn)!}{n!} \left(\frac{1}{k^k n^{k-1}}\right)^n = \frac{1}{n} \log \frac{(kn)!}{n!} - \log k^k n^{k-1}$$

$$= \frac{1}{n} \log\{(n+1)(n+2)\cdots(kn)\} - k \log k - (k-1) \log n$$

$$= \frac{1}{n} \{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn)\} - (k-1) \log n - k \log k$$

$$= \frac{1}{n} \{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn) - (k-1)n \log n\} - k \log k$$

$$= \frac{1}{n} \{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn) - (kn-n) \log n\} - k \log k$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \log \frac{n+1}{n} + \log \frac{n+2}{n} + \cdots + \log \frac{n+(k-1)n}{n} \right\} - k \log k$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{(k-1)n}{n}\right) \right\} - k \log k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \int_0^{k-1} \log(1+x) dx - k \log k$$

$$= \left[(1+x) \log(1+x) \right]_0^{k-1} - \int_0^{k-1} dx - k \log k$$

$$= k \log k - (k-1) - k \log k = 1 - k$$

よって, $\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{b_n}$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{1-k}$ である。

[解説]

誘導のない極限の設問 3 題で構成されています。しかも、各問の相互関係もあまり感じられません。