1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　e を自然対数の底とする。$x > e$ の範囲において，関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ を考える。この両辺の対数を x について微分することにより，y は減少関数であることを示せ。また，$e < a < b$ のとき，$a^b > b^a$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項が，$a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$ であるとき，$a_{n+1} - a_n$ を n の式で表し，a_n が最大となる正の整数 n をすべて求めよ。

(4)　複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ が，原点を中心とする半径 3 の円の周上を動くとき，$w = \dfrac{z+3i}{z}$ で表される点 $\mathrm{Q}(w)$ はどのような図形を描くか。

2

解答解説のページへ

空間内の 3 点 A, B, C を頂点とする△ABC を考える。2 辺 BC, AC の中点をそれぞれ M, N とし，中線 AM と BN の交点を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) 2 点 P, Q が $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たすとき, 3 点 P, Q, G は同一直線上にあることを示せ。

(3) △ABC の頂点の座標が $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(7,\ 0,\ 6)$，$\mathrm{C}(2,\ 12,\ 5)$ であるとき，xy 平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ を考える。このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

(4) (3)において，特に点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ の最大値とそのときの P の座標，および最小値とそのときの P の座標を，それぞれ求めよ。

3　解答解説のページへ

放物線$C: y=x^2$と定点$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$およびC上の第 1 象限の点$\mathrm{P}_1(2,\ 4)$が与えられている。自然数$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$について，以下の操作を繰り返す。

C上の第 1 象限の点$\mathrm{P}_n(p_n,\ {p_n}^2)$に対し， 手順 1　直線$\mathrm{P}_n\mathrm{A}$と$C$との交点のうち，第 2 象限にあるものを$\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$とし， 手順 2　直線$\mathrm{Q}_n\mathrm{B}$と$C$との交点のうち，第 1 象限にあるものを$\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ {p_{n+1}}^2)$ とする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　aを定数とする。直線$y=ax+1$とCとの交点のうち，第 1 象限にあるものを$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，第 2 象限にあるものを$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$とする。このとき，$pq=-1$が成り立つことを示せ。また，点Q_1の座標を求めよ。

(2)　点P_2，Q_2およびP_3の座標を求めよ。

(3)　数列$\{p_n\}$および数列$\{q_n\}$の一般項をそれぞれ求めよ。

(4)　$x \geqq 0$の範囲において，Cと直線$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$およびy軸で囲まれた図形の面積S_nを求めよ。さらに，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$を求めよ。

4

解答解説のページへ

xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円がある。この円の周上に 2 点 $\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ と $\mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとる。ただし，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。さらに，2 点 A, B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ C, D とする。扇形 OAB の面積を S_1，弧 AB と線分 BD, DC, CA で囲まれた図形 F の面積を S_2 とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 を α と β で表せ。

(2)　S_2 を α と β で表せ。

(3)　$S_1=S_2$ のとき，β を α の式で表せ。また，このとき $t=\cos\alpha-\cos\beta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(4)　(3)のとき，扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とする。さらに，$V=V_1-V_2$ とする。V を t の式で表せ。

(5)　(4)において，V の最大値，およびそのときの A, B の座標を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$t = \sin\theta$ とおくと，$0 \leqq t \leqq 1$ となり，

$$f(\theta) = 4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta = 4\sin^3\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4t^3 - 3t^2 + 3$$

ここで，$g(t) = f(\theta)$ とおくと，

$$g'(t) = 12t^2 - 6t = 6t(2t-1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	4

これより，$g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$t = 1\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき最大値 4 をとり，$t = \dfrac{1}{2}\left(\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$ のとき最小値 $\dfrac{11}{4}$ をとる。

(2)　$x > e$ のとき，$y = x^{\frac{1}{x}}$ に対して $\log y = \dfrac{1}{x}\log x$ となり，両辺を x で微分すると，

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x^2} = -\frac{\log x - 1}{x^2},\quad y' = -x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\log x - 1}{x^2} < 0$$

よって，$x > e$ において，y は減少関数である。

これより，$e < a < b$ のとき $a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$ となり，両辺を ab 乗すると，

$$\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^{ab} > \left(b^{\frac{1}{b}}\right)^{ab},\quad a^b > b^a$$

(3)　$a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$ のとき，$a_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}(n+1)n$ となり，

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n n\left\{\frac{3}{4}(n+1) - (n-1)\right\} = -\left(\frac{3}{4}\right)^n n\left(\frac{1}{4}n - \frac{7}{4}\right)$$

すると，$n \leqq 6$ のとき $a_{n+1} > a_n$，$n = 7$ のとき $a_{n+1} = a_n$，$n \geqq 8$ のとき $a_{n+1} < a_n$ となるので，a_n が最大となる正の整数 n は，$n = 7,\ 8$ である。

(4)　点 $\mathrm{P}(z)$ は原点を中心とする半径 3 の円の周上を動くので，$|z| = 3$ ………①

条件より $w = \dfrac{z + 3i}{z}$ から $wz = z + 3i$ となり，$(w-1)z = 3i$ より，

$$z = \frac{3i}{w-1}\quad (w \neq 1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると，$\left|\dfrac{3i}{w-1}\right| = 3$ から $\dfrac{3}{|w-1|} = 3$ となり，$|w-1| = 1$

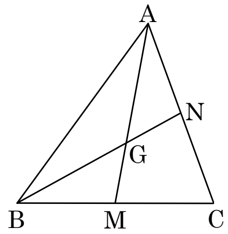
よって，点 $\mathrm{Q}(w)$ は点 1 を中心とする半径 1 の円を描く。なお，このとき $w \neq 1$ は満たされている。

［解 説］

独立した基本小問 4 題の構成です。2 次数学ではあまり見かけないスタイルです。ただ，一昨年にもありましたが。

2

問題のページへ



(1)　条件より，点 G は△ABC の重心なので，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　(1)から，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}})$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}})$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，与えられた条件$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$に，①を代入すると$3\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$となり，これより 3 点 P, Q, G は同一直線上にある。

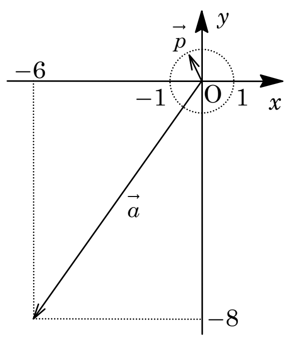
(3)　A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(7,\ 0,\ 6)$，C$(2,\ 12,\ 5)$に対して，△ABC の重心はG$(3,\ 4,\ 4)$となり，P$(x,\ y,\ 0)$とすると，①から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|=3\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+16}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$は，P$(3,\ 4,\ 0)$で最小値$3\sqrt{16}=12$をとる。

(4)　P$(x,\ y,\ 0)$が xy 平面上の円$x^2+y^2=1$の周上を動くことより，$0\leqq\theta<2\pi$として$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$とおき，(3)と同様にすると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3\sqrt{(\cos\theta-3)^2+(\sin\theta-4)^2+16}$$
$$=3\sqrt{-6\cos\theta-8\sin\theta+42}\cdots\cdots\cdots②$$



ここで，ベクトル$\vec{a}=(-6,\ -8)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$を設定し，$\vec{a}$と$\vec{p}$のなす角を$\varphi\ (0\leqq\varphi\leqq\pi)$とすると，

$$-6\cos\theta-8\sin\theta=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi$$
$$=10\cos\varphi\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3\sqrt{10\cos\varphi+42}$

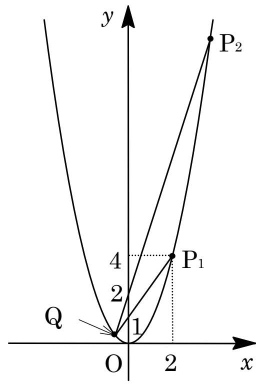
すると，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$は，$\cos\varphi=1\ (\varphi=0)$すなわちP$\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5},\ 0\right)$のとき最大値$3\sqrt{10+42}=6\sqrt{13}$をとり，$\cos\varphi=-1\ (\varphi=\pi)$すなわちP$\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 0\right)$のとき最小値$3\sqrt{-10+42}=12\sqrt{2}$をとる。

［解 説］

ベクトルと図形を題材にした基本的な問題です。誘導が細かいので，方針に迷うことはないでしょう。なお，(4)では$\vec{a}$と$\vec{p}$を設定し，2 つのベクトルの内積を用いて図形的に処理をしています。もちろん，サインでの合成でも構いませんが。

3

問題のページへ



(1)　$C: y=x^2$ と $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通る直線 $y=ax+1$ を連立して，

$$x^2=ax+1,\ x^2-ax-1=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①の解を $x=p,\ q\ (p>q)$ とすると，$pq=-1 \cdots\cdots\cdots ②$

すると，$\mathrm{P_1}(2,\ 4)$ より，点 $\mathrm{Q_1}$ の x 座標は $-\dfrac{1}{2}$ となり，

$\mathrm{Q_1}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ である。

(2)　C と $\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通る直線 $y=bx+2$ を連立して，

$$x^2=bx+2,\ x^2-bx-2=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③の解を $x=p,\ q\ (p>q)$ とすると，$pq=-2 \cdots\cdots\cdots ④$

すると，$\mathrm{Q_1}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ より，点 $\mathrm{P_2}$ の x 座標は 4 となり $\mathrm{P_2}(4,\ 16)$ である。

同様にして，②から点 $\mathrm{Q_2}$ の x 座標は $-\dfrac{1}{4}$ となり $\mathrm{Q_2}\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16}\right)$ である。さらに，

④から点 $\mathrm{P_3}$ の x 座標は 8 となり $\mathrm{P_3}(8,\ 64)$ である。

(3)　$\mathrm{P}_n(p_n,\ {p_n}^2)$，$\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$ に対して，$p_1=2$，$q_1=-\dfrac{1}{2}$ のもとで，②④より，

$$p_nq_n=-1 \cdots\cdots\cdots ⑤,\quad p_{n+1}q_n=-2 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥より，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=2$ となり，$p_{n+1}=2p_n$ から，

$$p_n=p_1\cdot 2^{n-1}=2^n,\quad q_n=-\frac{1}{2^n}$$

(4)　直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ は，傾きが $\dfrac{{p_n}^2-{q_n}^2}{p_n-q_n}=p_n+q_n=2^n-\dfrac{1}{2^n}$ から，その方程式は，

$$y=\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)x+1$$

$x\geqq 0$ で C と直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n は，

$$S_n=\int_0^{2^n}\left\{\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)x+1-x^2\right\}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{2^n}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 2^{3n}+\frac{1}{2}\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)\cdot 2^{2n}+2^n=\frac{1}{6}\cdot 2^{3n}+\frac{1}{2}\cdot 2^n=\frac{1}{6}\cdot 2^n(2^{2n}+3)$$

すると，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{2^{n+1}(2^{2n+2}+3)}{2^n(2^{2n}+3)}=\dfrac{2(2^2+3\cdot 2^{-2n})}{1+3\cdot 2^{-2n}}$ となり，

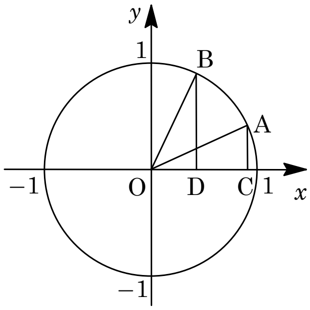
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{2\cdot 2^2}{1}=8$$

［解　説］

図形と数列の問題です。与えられた条件は簡明で誘導も詳しいので，計算ミスだけ要注意です。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\ \sin\beta)$ に対して，扇形 OAB の面積 S_1 は，$\angle AOB = \beta - \alpha$ より，

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

(2)　$C(\cos\alpha,\ 0)$，$D(\cos\beta,\ 0)$ に対して，弧 AB と線分 BD, DC, CA で囲まれた図形 F の面積 S_2 は，

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta$$
$$= \frac{1}{2}(\beta-\alpha) + \frac{1}{4}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$$

(3)　$S_1 = S_2$ のとき，(2)より $\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 0$ となり，

$$2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = 0$$

ここで，$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ より $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ となり，$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ………①

さて，$t = \cos\alpha - \cos\beta$ に対して，①から，

$$t = \cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{3}{4}\pi\right)$$

すると，$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2}$ から $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ となるので，$0 < \sin\left(\alpha+\frac{3}{4}\pi\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $0 < t < 1$ である。

(4)　扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とすると，

$$V_1 = \frac{1}{3}(\pi\sin^2\beta)\cos\beta + V_2 - \frac{1}{3}(\pi\sin^2\alpha)\cos\alpha$$

すると，$V = V_1 - V_2$ に①を適用して，

$$V = \frac{1}{3}\pi(\sin^2\beta\cos\beta - \sin^2\alpha\cos\alpha) = \frac{1}{3}\pi(\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha)$$
$$= \frac{1}{3}\pi\cos\alpha\sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

ここで，$t^2 = 1 - 2\cos\alpha\sin\alpha$ から $\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1-t^2}{2}$ となり，

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1-t^2}{2}t = \frac{1}{6}\pi(t - t^3)$$

(5)　(4)より，$V' = \frac{1}{6}\pi(1-3t^2)$ となり，$0 < t < 1$ における V の値の変化は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
V'		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

これより，$t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき V は最大となり，最大値は $\frac{1}{6}\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{27}\pi$ である。このとき，

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdots\cdots\cdots②,\ \ \cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots③$$

②より $\cos\alpha=\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，③に代入すると $\left(\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ から，

$$\sin^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha-\frac{1}{3}=0$$

$0<\sin\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より $\sin\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$，$\cos\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

また，①より，$\cos\beta=\sin\alpha$，$\sin\beta=\cos\alpha$ となるので，求める A, B の座標は，

$$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6},\ \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right),\ \ \mathrm{B}\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6},\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right)$$

［解　説］

微分と最大・最小問題ですが，設問が 5 題もあり，かなりの量になっています。ただ，難しい計算はありませんが。