1

解答解説のページへ

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{d_l\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{d_l\}$ の初項から第 l 項までの和 $S_l = \sum_{i=1}^{l} d_i$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA} \perp \mathrm{PB}$ を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $x\overrightarrow{\mathrm{PA}} + y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ とするとき，x, y を α を用いて表せ。

(2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた x，y の和 $x+y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

(1)　次の定積分を求めよ。　$f(x)=\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)\,dt$

(2)　(1)で求めた x の関数 $f(x)$ に対し，極限値 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数として，n 枚のカード C_1，C_2，…，C_{n-1}，C_n がある。初めにこれらのカードを下から C_n，C_{n-1}，…，C_2，C_1 の順番に積み上げておく。いちばん上にあるカードが C_1 で，いちばん下が C_n である。積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す。いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか，またはいちばん上に戻す。どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする。

$k=1,\ 2,\ \cdots$ について，k 回の試行の後にカード C_1 が上から数えて l 番目にある確率を $P(k,\ l)$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で表し，また k 回の試行の後にカード C_2 が上から数えて l 番目にある確率を $Q(k,\ l)$ で表す。例えば $P(1,\ l)$ は l によらず $\dfrac{1}{n}$ に等しい。以下の問いに答えよ。

(1)　$P(2,\ l)$ を求めよ。

(2)　$P(k,\ l)$ を求めよ。

(3)　$Q(k,\ l)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

複素数$z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$に対し，$\alpha=z+z^8$とおく。$f(x)$は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ$f(\alpha)=0$となるものとする。ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1)　$f(x)$を求めよ。ただし，$f(x)$がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。

(2)　3 次方程式$f(x)=0$のα以外の 2 つの解を，αの 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。

1　問題のページへ

(1)　初項 1, 公差 6 である等差数列$\{a_n\}$について，$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

また, 初項 3, 公差 4 である等差数列$\{b_m\}$について，$b_m=3+4(m-1)=4m-1$

ここで，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{c_k\}$とすると，$a_n=b_m$から,

$$6n-5=4m-1,\ 3n-2m=2\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす 1 つの解が$(n,\ m)=(2,\ 2)$より，$3\times2-2\times2=2\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$3(n-2)-2(m-2)=0$，$3(n-2)=2(m-2)$

ここで, 3 と 2 は互いに素なので, jを整数として，$n-2=2j$，$m-2=3j$から,

$$n=2j+2,\ m=3j+2\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$m\geqq1$，$n\geqq1$より$j\geqq0$となるので，$k=j+1\geqq1$とおくと，③より,

$$n=2(k-1)+2=2k,\ m=3(k-1)+2=3k-1$$

よって，$\{c_k\}$の一般項は，$c_k=a_{2k}=12k-5$である。

(2)　まず，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{d_l\}$とする。ここで，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$に注意して，$\{d_l\}$のd_3以降を項数 4 のグループに分け，$c_1=7$から 4 項を第 1 群，$c_2=19$から 4 項を第 2 群, $c_3=31$から 4 項を第 3 群, …と呼ぶ。

$$1,\ 3\,|\underbrace{\underline{7},\ 11,\ 13,\ 15}_{\text{第 1 群}}|\underbrace{\underline{19},\ 23,\ 25,\ 27}_{\text{第 2 群}}|\underbrace{\underline{31},\ 35,\ 37,\ 39}_{\text{第 3 群}}|\cdots\cdots$$

さて，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$から，数列$\{d_l\}$の第k群にはc_k，a_{2k+1}，b_{3k}，b_{3k+1}の 4 項が含まれ，$a_{2k+1}=c_k+6$，$b_{3k}=c_k+4$，$b_{3k+1}=c_k+8$より,

$$c_k<b_{3k}<a_{2k+1}<b_{3k+1}$$

これより，$d_1=1$，$d_2=3$で，$l\geqq3$のd_lに対して，第k群の 4 項は,

$$(d_{4k-1},\ d_{4k},\ d_{4k+1},\ d_{4k+2})=(c_k,\ b_{3k},\ a_{2k+1},\ b_{3k+1})$$

(i)　$l=4k-1$のとき　$d_l=c_k=12k-5=12\cdot\dfrac{l+1}{4}-5=3l-2$

(ii)　$l=4k$のとき　$d_l=c_k+4=12k-1=12\cdot\dfrac{l}{4}-1=3l-1$

(iii)　$l=4k+1$のとき　$d_l=c_k+6=12k+1=12\cdot\dfrac{l-1}{4}+1=3l-2$

(iv)　$l=4k+2$のとき　$d_l=c_k+8=12k+3=12\cdot\dfrac{l-2}{4}+3=3l-3$

ここで，(iii)に$l=1$をあてはめると$d_1=3\cdot1-2=1$，(iv)に$l=2$をあてはめると$d_2=3\cdot2-3=3$となり，ともに成立している。よって，(i)～(iv)について，lを 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると，d_lは,

$$d_l=3l-1\ (l\equiv0),\ d_l=3l-2\ (l\equiv1,\ 3),\ d_l=3l-3\ (l\equiv2)$$

(3) i を自然数として，$s_i = d_{4i-3} + d_{4i-2} + d_{4i-1} + d_{4i}$ とおくと，(2)より，

$$s_i = \{12(i-1)+1\} + \{12(i-1)+3\} + (12i-5) + (12i-1) = 48i-26$$

ここで，p を自然数として，$S_l = \sum_{i=1}^{l} d_i$ とすると，

(i) $l = 4p$ のとき

$$S_l = S_{4p} = \sum_{i=1}^{p} s_i = \sum_{i=1}^{p} (48i-26) = \frac{22+(48p-26)}{2}\cdot p = 2p(12p-1)$$
$$= 2\cdot\frac{l}{4}\left(12\cdot\frac{l}{4}-1\right) = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l$$

(ii) $l = 4p-1$ のとき

$$S_l = S_{4p-1} = S_{4p} - d_{4p} = 2p(12p-1) - (12p-1) = (2p-1)(12p-1)$$
$$= \left(2\cdot\frac{l+1}{4}-1\right)\left(12\cdot\frac{l+1}{4}-1\right) = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l - 1$$

(iii) $l = 4p-2$ のとき

$$S_l = S_{4p-2} = S_{4p-1} - d_{4p-1} = (2p-1)(12p-1) - (12p-5)$$
$$= 2p(12p-13) + 6 = 2\cdot\frac{l+2}{4}\left(12\cdot\frac{l+2}{4}-13\right) + 6 = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l - 1$$

(iv) $l = 4p-3$ のとき

$$S_l = S_{4p-3} = S_{4p-2} - d_{4p-2} = 2p(12p-13) + 6 - \{12(p-1)+3\}$$
$$= 2p(12p-19) + 15 = 2\cdot\frac{l+3}{4}\left(12\cdot\frac{l+3}{4}-19\right) + 15 = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l$$

(i)～(iv)より，l を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると，S_l は，

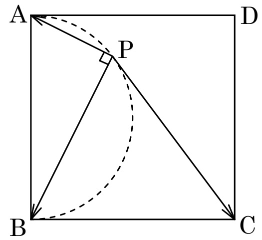
$$S_l = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l\ (l \equiv 0,\ 1),\quad S_l = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l - 1\ (l \equiv 2,\ 3)$$

［解　説］

2 つの等差数列の共通数列が題材です。記述量はかなりのものです。なお，(2)では(1)の数列 $\{c_k\}$ に注目し，d_1 と d_2 は特別に扱い，d_3 以降を群数列の考え方で処理しています。ただ，この扱いは，結果的には不要だったのですが。

2

問題のページへ



(1)　正方形 ABCD の内部の点 P は，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$ を満たすので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdots\cdots\cdots②$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ より $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ となり，①②から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2(y-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2$$

$$1+\alpha^2=x^2+\alpha^2(y-1)^2\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\{x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}\}=0$ となり，①②から，

$$x|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-\alpha^2(y-1)|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0,\ x-\alpha^2(y-1)=0\cdots\cdots\cdots④$$

さらに，直線 PB に関して，点 A と点 C は反対側にあるので，$x<0\cdots\cdots\cdots⑤$

③④より，$1+\alpha^2=\alpha^4(y-1)^2+\alpha^2(y-1)^2$ となり，$\alpha^2(y-1)^2=1$

$$y-1=\pm\frac{1}{\alpha},\ x=\pm\alpha\ （複号同順）$$

すると，⑤より，$x=-\alpha$，$y=1-\dfrac{1}{\alpha}$

(2)　(1)より，$x+y=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}=1-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ となる。

ここで，$\alpha>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geqq 2$ となり，

$$x+y\leqq 1-2=-1$$

等号成立は，$\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$ すなわち $\alpha=1$ のときである。

以上より，$x+y$ の最大値は -1 であり，このとき，②から $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$ となり，点 P は正方形 ABCD の対角線の交点に位置する。

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。対象が正方形なので，座標の設定という方法も考えられますが，ここでは①②を利用して x，y の連立方程式を立てるという方針で記しました。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)\,dt=e^{-x}\int_0^x e^t\sin(t+x)\,dt$

ここで，$\left(e^t\sin(t+x)\right)'=e^t\sin(t+x)+e^t\cos(t+x)$ ………①

$\left(e^t\cos(t+x)\right)'=e^t\cos(t+x)-e^t\sin(t+x)$ ………②

①－②より，$\left(e^t\sin(t+x)-e^t\cos(t+x)\right)'=2e^t\sin(t+x)$ となり，

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{2}\Big[e^t\sin(t+x)-e^t\cos(t+x)\Big]_0^x$$
$$=\frac{e^{-x}}{2}(e^x\sin 2x-e^x\cos 2x-\sin x+\cos x)$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)$$

(2)　$f(0)=0$ なので，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ となり，(1)から，

$$f'(x)=\cos 2x+\sin 2x+\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x+\sin x)$$
$$=\cos 2x+\sin 2x-e^{-x}\cos x$$

これより，$f'(0)=1+0-1\cdot 1=0$ となるので，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ である。

［解　説］

定積分の計算と極限の融合問題です。(2)は微分係数の定義式に着目する点がポイントです。式変形だけでも極限は求まりますが，この場合も同様に定義式が絡みます。

4　　　　問題のページへ

(1)　まず，C_1 がいちばん上にあるとき，1 回の試行の後に C_1 が l 番目になる確率は，どんな l に対しても $\frac{1}{n}$ である。

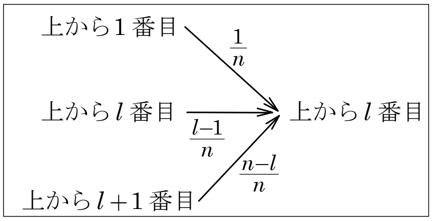
また，C_1 がいちばん上にない，すなわち C_1 が l 番目 $(l \geqq 2)$ にあるとき，1 回の試行の後に C_1 は l 番目または $l-1$ 番目になる。

C_1 が l 番目になる場合は，いちばん上にあるカードを C_1 より上に入れたときで，そのときの確率は $\frac{l-1}{n}$，C_1 が $l-1$ 番目になる場合は，いちばん上にあるカードを C_1 より下に入れたときで，そのときの確率は $\frac{n-l+1}{n}$ である。

さて，どんな l に対しても 1 回の試行の後に l 番目にある確率 $P(1,\ l)=\frac{1}{n}$ をもとに，$P(2,\ l)$ を求めると，

(a)　$2 \leqq l \leqq n-1$ のとき

1 回の試行の後と 2 回の試行の後の状態の推移，およびその確率は右図のようになり，



$$P(2,\ l)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{l-1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n-l}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

(b)　$l=1$ のとき　$P(2,\ 1)=\frac{1}{n}P(1,\ 1)+\frac{n-1}{n}P(1,\ 2)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$

(c)　$l=n$ のとき　$P(2,\ n)=\frac{1}{n}P(1,\ 1)+\frac{n-1}{n}P(1,\ n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$

(a)～(c)より，どんな l に対しても $P(2,\ l)=\frac{1}{n}$ である。

(2)　$P(k,\ l)=\frac{1}{n}$ であることを，k についての数学的帰納法により示す。

(i)　$k=1$ のとき　どんな l に対しても，$P(1,\ l)=\frac{1}{n}$ より成立している。

(ii)　$k=j$ のとき　どんな l に対しても，$P(j,\ l)=\frac{1}{n}$ と仮定すると，(1)と同様に，

$2 \leqq l \leqq n-1$ のときは，

$$P(j+1,\ l)=\frac{1}{n}P(j,\ 1)+\frac{l-1}{n}P(j,\ l)+\frac{n-l}{n}P(j,\ l+1)$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{l-1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n-l}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

また，$P(j+1,\ 1)=\frac{1}{n}P(j,\ 1)+\frac{n-1}{n}P(j,\ 2)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$

$$P(j+1,\ n)=\frac{1}{n}P(j,\ 1)+\frac{n-1}{n}P(j,\ n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

(i)(ii)より，どんな l に対しても $P(k,\ l)=\frac{1}{n}$ ……①である。

(3)　k 回の試行の後に，C_2 が上から数えて l 番目にある確率を $Q(k,\ l)$ とする。

(a)　1 回の試行の後，C_1 がいちばん上にあるとき

1 回目の試行で C_1 をいちばん上に戻すときで，このときの確率は $\dfrac{1}{n}$ である。そして，初めと積み上げの順番は変わらず，C_2 は上から 2 番目である。

(b)　1 回の試行の後，C_1 がいちばん上にないとき

1 回目の試行で C_1 を C_2 より下に入れるときで，このときの確率は $\dfrac{n-1}{n}$ である。そして，いちばん上は C_2 になっている。

(a)(b)より，$k+1$ 回の試行の後に C_2 が l 番目にある確率 $Q(k+1,\ l)$ は，①から，

$$Q(k+1,\ l)=\frac{1}{n}Q(k,\ l)+\frac{n-1}{n}P(k,\ l)=\frac{1}{n}Q(k,\ l)+\frac{n-1}{n^2}\cdots\cdots\cdots②$$

②を，$Q(k+1,\ l)-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}\left\{Q(k,\ l)-\dfrac{1}{n}\right\}$ と変形すると，

$$Q(k,\ l)-\frac{1}{n}=\left\{Q(1,\ l)-\frac{1}{n}\right\}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$l=1$ のとき　(b)より $Q(1,\ 1)=\dfrac{n-1}{n}$ となるので，③から，

$$Q(k,\ l)=\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}=\frac{1}{n}+(n-2)\left(\frac{1}{n}\right)^{k}$$

(ii)　$l=2$ のとき　(a)より $Q(1,\ 2)=\dfrac{1}{n}$ となるので，③から，

$$Q(k,\ l)=\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}=\frac{1}{n}$$

(iii)　$l\geqq 3$ のとき　$Q(1,\ l)=0$ となるので，③から，

$$Q(k,\ l)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{k}$$

［解　説］

確率と漸化式の問題ですが，かなり難しめの内容です。まず，題意を把握するために具体的に考え，予測をつけたうえで計算に取りかかりました。なお，(3)は初めの操作で場合分けをして漸化式を立式しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ のとき，$z^9=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z^8=\frac{1}{z}=\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)=\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}$$

すると，$\alpha=z+z^8=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となり，$\cos\dfrac{2\pi}{9}=\dfrac{\alpha}{2}$ ………①

ここで，3 倍角の公式より，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=4\cos^3\dfrac{2\pi}{9}-3\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，①より，

$$-\frac{1}{2}=4\cdot\frac{\alpha^3}{8}-3\cdot\frac{\alpha}{2},\ \ -1=\alpha^3-3\alpha,\ \ \alpha^3-3\alpha+1=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，α は $x^3-3x+1=0$ の解なので，$f(x)=x^3-3x+1$ となる。

(2)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ると，②から，$f(x)=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3)$

すると，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，

$$x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4(\alpha^2-3)}}{2}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{12-3\alpha^2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，①から，$12-3\alpha^2=12-3\cdot4\cos^2\dfrac{2\pi}{9}=12\sin^2\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，③より，

$$x=-\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}=2\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{9}\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{9}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\mp\frac{2\pi}{9}\right)$$

よって，$x=2\cos\dfrac{4\pi}{9}$ または $x=2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ となり，①②より，

$$2\cos\frac{4\pi}{9}=2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{9}-1\right)=4\cdot\frac{\alpha^2}{4}-2=\alpha^2-2$$
$$2\cos\frac{8\pi}{9}=2\left(2\cos^2\frac{4\pi}{9}-1\right)=(\alpha^2-2)^2-2=\alpha^4-4\alpha^2+2$$
$$=\alpha(3\alpha-1)-4\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+2$$

以上より，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，α^2-2，$-\alpha^2-\alpha+2$ である。

［解　説］

複素数の極形式についての問題です。3 倍角の公式がポイントになりますが，問題文にその利用が暗示されています。また，解と係数の関係を併用すると，解答例が少し簡略になります。