

《2019 入試対策》

千葉大学

文系数学



電送数学舎

まえがき

本書には、1998年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお、複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

また、利便性の向上のため、対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字がリンク元です。

本書の構成について

- 1 本書は2部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
 - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
 - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
 - (3) 1つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
 - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
 - (5) 出題の流れをウェブサイトの入試直前に確認する。

注 「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	21
関 数	22
微分と積分	27
図形と式	48
図形と計量	58
ベクトル	68
整数と数列	80
確 率	97
論 証	116

分野別問題一覧

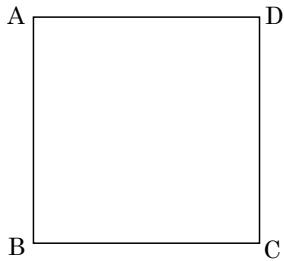
関数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

■ 関数 |||||

1 右図のような 1 辺の長さ 10cm の正方形 ABCD がある。A 点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し、正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 1cm 進む。また、点 R は時刻 0 に B を出発し、正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 2cm 進む。点 R が A に達するまでに $\triangle PQR$ の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。 [2014]



2 a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x - 2| + \frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。 [2010]

3 a を実数とする。 x についての方程式 $|x^2 + ax + 2a| = a + 1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。 [2007]

4 実数 a に対し、2 次関数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$ を考える。
 (1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。
 (2) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ を通り、 $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$ となるような a の範囲を求めよ。 [2006]

5 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について以下の問いに答えよ。ただし、 $a < 0$ とする。
 (1) $f(x)$ を x で割った余りと $x + 1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき、 $a = b$ になることを示せ。
 (2) (1) の関数が、さらに次の (i), (ii) を満たすとき、 $f(x)$ を求めよ。
 (i) 曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = x$ と接する。
 (ii) 曲線 $y = f(x)$ と 3 直線 $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$ で囲まれた部分の面積は $\frac{5}{6}$ である。 [2000]

■ 微分と積分 |||

1 a を正の数とし, t は $0 \leq t < a$ を満たす数とする。点 $(t, (t-a)^2)$ における曲線 $y = (x-a)^2$ の接線と, x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

- (1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。
- (2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値, およびそのときの t の値を a を用いて表せ。
- (3) s は $0 \leq s \leq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値, およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。 [2018]

2 座標平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を n とする。

- (1) $n = 3$ を満たすような点 (a, b) の範囲を図示せよ。
- (2) $-3a < b$ かつ $n \leq 2$ を満たすように点 (a, b) が動くとき, $b - 3a$ の最小値を求めよ。 [2017]

3 a は $0 < a < 2$ を満たす定数とする。 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して, 座標平面上の 4 点 $A(t, 0)$, $B(2, t^2)$, $C(2-t, 2)$, $D(0, 2-at)$ を考える。このとき, 四角形 $ABCD$ の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。 [2016]

4 m を実数とする。 x に関する方程式 $x^3 - 3x - |x - m| = 0$ の実数解の個数を求めよ。 [2015]

5 実数 a に対し, 関数 $f(x) = \int_x^{x+1} |t+1| dt + a$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2014]

6 a と k を正の実数とする。 $y = \frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y = -\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が、ともに原点 $O(0, 0)$ で直線 $y = kx$ に接するものとする。原点 O を通り、直線 $y = kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1 、放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき、 $S = S_1 + S_2$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) S を a と k を用いて表せ。
- (2) $k = \sqrt{2} - 1$ とする。 S を最小にする a の値と、そのときの S の値を求めよ。

[2009]

7 2 次関数 $f(x)$ は、 $xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + (x^2 + x)\int_0^1 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$ を満たすとす
る。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $xf(x)$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ。

[2008]

8 関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

また、 $g(x) = -x^2 + ax + b$ とする。 $y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点
で接するとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。

[2006]

9 a は実数とする。 2 つの曲線 $y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4$ と $y = ax^2 - 2a^2x - 3a$ は、
ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。

[2005]

10 3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を、 $f(x) = x^3$ 、 $g(x) = ax^2 + bx + c$ とし、
 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ で共通の接線をもつとする。このとき以
下の問いに答えよ。

- (1) b, c を a を用いて表せ。
- (2) $f(x) - g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を a を用いて表せ。

[2004]

11 実数 t に対して、 $f(t)$ を $f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx| dx$ と定める。 $0 \leq t \leq 1$ のとき、 $f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2002]

12 実数 a に対して、 $f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 + 1$ とおく。

(1) 定積分 $I(a) = \int_1^2 f(x) dx$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ が条件 $f(1) \leq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲を動くとき、 $I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2001]

13 a, b を整数とする。3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ が、 $0 < x < 2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき、 a, b の値を求めよ。 [2001]

14 三角形 ABC において、辺 BC 上に点 D があり、 $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$ である。 $AB = p, AC = q$ とおく。

(1) AD の長さを p, q で表せ。

(2) $p + q = 1$ を満たすとき、 $\triangle ABD$ の面積と $\triangle ACD$ の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。 [2000]

15 与えられた実数 a, b のうち、大きくない方を $\min\{a, b\}$ で表すことにする。関数 $f(x) = x^3 - 7x$ に対して $g(x) = \min\{f(x+1), f(x-1)\}$ とおく。

(1) $0 \leq x \leq 3$ のとき、 $y = g(x)$ が最大となる x の値、および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 2つのグラフ $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 [1998]

■ 図形と式 |||

1 座標平面上に 5 点 $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$, $E(0, \frac{2}{3})$ がある。
 点 E と点 $P_1(s, 1)$ ($0 < s < 1$) を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし, l_2 と直線 $x=1$ の交点を P_2 とする。さらに, 直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は, x 軸と線分 AD 上で交わるとし, その交点を P_3 とする。
 (1) 直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。
 (2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。
 (3) $EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ。 [2016]

2 座標平面上に, 原点を中心とする半径 1 の円と, その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ (ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また, その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。 [2014]

3 a, b を実数とし, $a > 0$ とする。放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $A(a, \frac{a^2}{4})$, $B(b, \frac{b^2}{4})$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_A と n_A , 点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_B と n_B とおいたとき, l_A と l_B が直交しているものとする。2 つの接線 l_A, l_B の交点を P とし, 2 つの法線 n_A, n_B の交点を Q とする。
 (1) b を a を用いて表せ。
 (2) P, Q の座標を a を用いて表せ。
 (3) 長方形 $AQBP$ の面積が最小となるような a の値と, そのときの面積を求めよ。 [2013]

4 放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を l_a とする。
 (1) 直線 l_a が不等式 $y > -x^2 + 2x - 5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。
 (2) a が(1)で求めた範囲を動くとき, 直線 l_a が通らない点 (x, y) 全体の領域 D を図示せよ。
 (3) 連立不等式 $(y - x^2)(y + x^2 - 2x + 5) \leq 0$, $y(y + 5) \leq 0$ の表す領域を E とする。
 D と E の共通部分の面積を求めよ。 [2012]

5 a は正の実数とし、座標平面上の直線 $l: y = x$ と放物線 $C: y = ax^2$ を考える。 C 上の点 (x, y) (ただし $0 < x < \frac{1}{a}$) で l との距離を最大にする点を $P(s, t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) d, s, t をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。
- (2) 実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき、点 $P(s, t)$ の軌跡を求め、図示せよ。

[2011]

6 放物線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 A, B は、直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\frac{1}{6}$ になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき、直線 AB が通りうる点の範囲を求め、図示せよ。

[2003]

7 座標平面上に、中心がそれぞれ点 $(0, 1)$ 、点 $(2, 1)$ で、同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

- (1) 2 円 C_1, C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。
- (2) さらに、2 円 C_1, C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。

[2002]

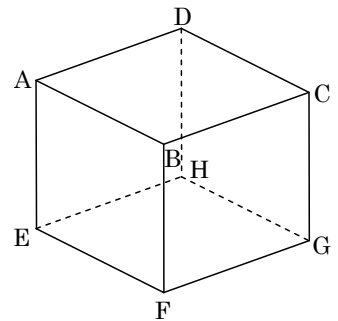
8 直線 $y = -x$ と放物線 $y = x^2 + 2x$ とで囲まれた図形を D とする。

- (1) D の面積 S_1 を求めよ。
- (2) D を x 軸の正の方向に m だけ平行移動して、不等式 $y \geq -2x + 3$ の表す領域に含まれるように移す。 m の最小値 m_1 を求めよ。
- (3) m_1 を(2)で求めた最小値とする。 D を x 軸の正の方向に m_1 だけ平行移動するとき、 D が通過する範囲を図示し、その面積 S_2 を求めよ。

[1999]

■ 図形と計量 |||||

1 右図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して、対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $OQ = 2AP - 1$ を満たしながら動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。ただし、点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。



[2018]

2 座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(9, 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle PAQ = 90^\circ$ となるようにとる。ただし、点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。 $\angle APQ = \theta$ とし、 $\triangle APQ$ の面積を S とする。

- (1) S を θ を用いて表せ。
- (2) S の最小値, およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。
- (3) S が $\triangle AOB$ の面積の $\frac{2}{3}$ 倍となるとき, 点 P と点 Q の x 座標を求めよ。 [2017]

3 1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において、BC を 1:2 に内分する点を D, CA を 1:2 に内分する点を E, AB を 1:2 に内分する点を F とし、さらに BE と CF の交点を P, CF と AD の交点を Q, AD と BE の交点を R とする。このとき、 $\triangle PQR$ の面積を求めよ。 [2015]

4 1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において、辺 BC を 1:2 に内分する点を D とする。また、辺 OC 上に点 E をとり、 $CE = t$ とする。

- (1) AD の長さを求めよ。
- (2) $\cos \angle DAE$ を t を用いて表せ。
- (3) $\triangle ADE$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。 [2013]

5 三角形 ABC の面積は $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$, 外接円の半径は 1, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB > AC$ である。このとき、三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。 [2011]

〔6〕 $\triangle ABC$ において、頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1、頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$ 、頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき、 $\triangle ABC$ の面積と、内接円の半径、および、外接円の半径を求めよ。 [2010]

〔7〕 $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形とする。 $\angle A$ 、 $\angle B$ の大きさをそれぞれ A 、 B とおく。 $A = 30^\circ$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし、 H は辺 BC 上の点である。このとき $\frac{AH}{BC}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。 [2009]

〔8〕 $\triangle ABC$ において、 $AB = 5$ 、 $BC = 5\sin A$ 、 $CA = 3$ であるとする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ。 [2006]

〔9〕 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき、 AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし、 AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1) AD の長さが $\frac{3}{4}$ であるとき、 r の値を求めよ。

(2) AD の長さを x とおくと、 r^2 を x の式で表せ。

(3) $\angle DME = \theta$ とおくと、 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。 [2004]

4 平面上の $\triangle ABC$ において、辺 AB を $4:3$ に内分する点を D 、辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし、線分 AE と CD の交点を O とする。

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$ とするとき、ベクトル \overrightarrow{AO} を \vec{p} 、 \vec{q} で表せ。

(2) 点 O が $\triangle ABC$ の外接円の中心になるとき、3 辺 AB 、 BC 、 CA の長さの 2 乗の比を求めよ。 [2008]

5 平面上で $AB = 3$ となる 2 点 A 、 B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし、点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C 、 D は円 S 上を動き、2 点 E 、 F は円 T 上を動く。ただし、線分 CD は点 A を通り、線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DF}$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

6 xyz 空間内に点 $A(1, 1, 2)$ と点 $B(-5, 4, 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき、三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。 [2004]

7 R を平面上の凸六角形とし、その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ とおく。 R が $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ であることを示せ。

(2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき、 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} の間の関係を求めよ。

(3) R が(2)の条件を満たし、さらに内積に関して $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ を満たすとき、 R の面積を求めよ。 [2003]

8 三辺の長さが $OA = 2$ 、 $OB = 3$ 、 $AB = \sqrt{7}$ の三角形 OAB がある。 OA の中点を M とし、 B を始点とする半直線 BM 上に $BP = tBM$ となる点 P をとり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

(1) \overrightarrow{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} と t を用いて表せ。

(2) \vec{a} と \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(3) $AP \perp BM$ となるときの t の値を求めよ。 [1999]

9 空間に、同一直線上にない 3 点 O, A, B と 1 点 P がある。 O, A, B を通る平面を α とし、点 P は α 上にないとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とおき、 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, $\vec{p} \cdot \vec{a} = 2$, $\vec{p} \cdot \vec{b} = -2$ とする。

- (1) $\vec{p} - s\vec{a} - t\vec{b}$ が平面 α に垂直になるように実数 s, t を定めよ。
- (2) 平面 α に関して点 P と対称な点を Q とするとき、ベクトル \overrightarrow{OQ} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ を用いて表せ。
- (3) 三角形 OPQ の面積が $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき、 \vec{p} の大きさ $|\vec{p}|$ を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列 |||||

1 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1, 7, 13, \dots$ の第 n 項を a_n とし、また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3, 7, 11, \dots$ の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通して現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし、2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり、また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は $1, 3, 7, 11, 13$ となる。

- (1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。
- (2) d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。 [2018]

2 k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき、 k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。
- (2) $4m + 5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき、 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。 [2015]

3 整数 $p, q (p \geq q \geq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_pC_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお、 $0! = 1$ とする。

- (1) n, k が 0 以上の整数のとき、 ${}_{n+k+1}C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}C_k} \right)$ を計算し、 n によらない値になることを示せ。
- (2) m が 3 以上の整数のとき、和 $\frac{1}{{}_3C_3} + \frac{1}{{}_4C_3} + \frac{1}{{}_5C_3} + \dots + \frac{1}{{}_mC_3}$ を求めよ。 [2013]

4 p, q を互いに素な 2 以上の整数, m, n は $m < n$ なる正の整数とする。このとき、分母が p^2q^2 で、分子が p でも q でも割り切れない分数のうち、 m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。 [2012]

5 1 より小さい正の実数 a に対して、円 $C(a) : (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$ と定める。そのうえで、数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i) $n=1$ のときは、円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに、円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし、円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii) $n \geq 2$ のときは、円 $C(a)$ が直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに、円 $C(a_n)$ と直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ との接点を P_n とし、円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_2 を求めよ。

(3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2012]

6 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq ax + b\}$$

とし、 D の面積が $\frac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で、 x 座標、 y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1) $a = 0$ のとき、 D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) a, b がともに整数であるとき、 D に含まれる格子点の個数は、 a, b の値によらず一定であることを示せ。 [2010]

7 以下の問いに答えよ。

(1) x を有理数とする。 $7x^2$ が整数ならば、 x は整数であることを示せ。

(2) a, b を整数とする。 $a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば、 a と b はともに偶数であることを示せ。

(3) r は整数、 s は有理数とする。 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば、 s は整数であることを示せ。 [2008]

8 n を奇数とする。

- (1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを証明せよ。
- (2) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを証明せよ。
- (3) $n^5 - n$ は 120 の倍数であることを証明せよ。

[2007]

9 数列 $\{a_n\}$ において, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ である。 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくとき, $\{b_n\}$ は正の公比をもつ等比数列とする。

- (1) $\frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}}$ を, b_n, b_{n+1} を用いて表せ。
- (2) $\sum_{n=1}^6 \frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = -1456$ が成り立つとき
 - (i) 一般項 b_n を求めよ。
 - (ii) 一般項 a_n を求めよ。

[2005]

10 数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$) で定める。

- (1) 一般項 a_n を求めよ。
- (2) $\sum_{k=1}^n k^2 a_k$ を求めよ。

[2003]

11 以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とする。このとき, n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ。
- (2) 3 つの自然数 a, b, c が, $a^2 + b^2 = c^2$ を満たしている。このとき, a, b の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。

[2001]

12 数列 $\{a_n\}$ は次の(i), (ii)を満たすとする。

$$(i) \quad a_1 = \frac{1}{2} \qquad (ii) \quad n \geq 2 \text{ について, } a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$$

ただし, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ である。

- (1) a_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ に対して, S_n を S_{n-1} で表せ。
- (3) S_n を求めよ。
- (4) $n \geq 2$ に対して, a_n を求めよ。

[2000]

13 $a_1 = 1, a_n \neq 0, a_n = S_n^2 - S_{n-1}^2 (n = 2, 3, 4, \dots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。ただし、 S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和である。

- (1) a_2 を求めよ。
- (2) S_n を求めよ。
- (3) a_n を求めよ。

[1999]

14 座標平面において、2 点 P, Q をそれぞれ直線 $x = -1, x = 2$ 上の点とし、直線 PQ が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するように動くものとする。このとき、2 点 P, Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。

[1998]

■ 確率 |||||

1 箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色、1 枚は銀色、残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し、その色が金なら 50 点、銀なら 10 点、白なら 0 点と記録し、カードを箱に戻す。この操作を繰り返し、記録した点の合計が k 回目にはじめて 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

- (1) 確率 $P(4)$ を求めよ。
- (2) 確率 $P(6)$ を求めよ。
- (3) 確率 $P(11)$ を求めよ。

[2018]

2 1 個のさいころを 3 回投げて、以下のルールで各回の得点を決める。

- ・ 1 回目は、出た目が得点になる。
- ・ 2 回目は、出た目が 1 回目と同じならば得点は 0、異なれば出た目が得点になる。
- ・ 3 回目は、出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0、どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし、総得点が n となる確率を p_n とする。

- (1) 総得点 n の最大値、最小値と、それらの n に対する p_n を求めよ。
- (2) p_6 を求めよ。

[2017]

3 1個のさいころを2回投げ、最初に出た目を a 、2回目に出た目を b とする。2次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 実数解は存在すれば正であることを示せ。
- (2) 実数解の個数が1となる確率を求めよ。
- (3) 実数解の個数が2となる確率を求めよ。 [2016]

4 さいころを5回振るとき、初めの4回においては6の目が偶数回出て、しかも最後の2回においては6の目がちょうど1回出る確率を求めよ。ただし、6の目が一度も出ない場合も6の目が出る回数を偶数回とみなす。 [2015]

5 A、Bふたりは、それぞれ1から4までの番号のついた4枚のカードを持ち、それを用いて何回かの勝負からなる次のゲームをする。

- ・初めにA、Bはそれぞれ4枚のカードを自分の袋に入れ、よくかきまぜる。
- ・A、Bはそれぞれ自分の袋から無作為に1枚ずつカードを取り出し、そのカードを比較して1回の勝負を行う。すなわち、大きい番号のついたカードを取り出した方がこの回は勝ちとし、番号が等しいときはこの回は引き分けとする。
- ・袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。
- ・A、Bどちらかが2回勝てば、カードの取り出しはやめて、2回勝った方をゲームの勝者とする。4枚すべてのカードを取り出してもいずれも2回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) Aが0勝0敗4引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
- (2) Aが1勝1敗2引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
- (3) Aがゲームの勝者になる確率を求めよ。 [2014]

6 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。これらは無作為に1列に並べる試行を行う。

- (1) 下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。
- (2) 下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 条件(A)、(B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし、条件(A)、(B)は次のとおりである。

(A) 番号1のカードと番号2のカードは隣り合わない。

(B) 番号8のカードと番号9のカードの間には、ちょうど1枚のカードがある。

[2013]

7 さいころを 7 回投げ、 k 回目 ($1 \leq k \leq 7$) に出る目を X_k とする。

- (1) 積 $X_1 X_2$ が 18 以下である確率を求めよ。
- (2) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。
- (3) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。
- (4) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。 [2012]

8 1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1 、2 回目に出る目を a_2 、3 回目に出る目を a_3 とし、整数 n を、 $n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$ と定める。

- (1) $n = 0$ である確率を求めよ。
- (2) $|n| = 30$ である確率を求めよ。 [2011]

9 1 辺の長さが 2 の正六角形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ を考える。さいころを 3 回投げ、出た目を順に i, j, k とするとき、 $\triangle A_i A_j A_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし、 i, j, k の中に互いに等しい数があるときは、得点は 0 であるとする。

- (1) 得点が 0 となる確率を求めよ。
- (2) 得点が 27 となる確率を求めよ。
- (3) 得点の期待値を求めよ。 [2010]

10 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

- (1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 10 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が 6 の倍数になる確率を求めよ。 [2009]

11 n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ、1 回目に出た目の数を x 、2 回目に出た目の数を y とする。 $|x - n| + |y - n| \leq n$ となる確率を P_n で表すとき、次の問いに答えよ。

- (1) P_1 を求めよ。
- (2) P_n が最大となる n を求め、そのときの P_n を求めよ。
- (3) $P_n = \frac{1}{36}$ となる n を求めよ。 [2008]

12 1 から 5 までの数字が書かれたカードが、それぞれ 2 枚ずつ、合わせて 10 枚ある。この中からカードを 2 枚同時に取り出し、その数字を X, Y とする。ただし、 $X \leq Y$ とする。

- (1) $X = Y$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = 3$ となる確率を求めよ。
- (3) X の期待値を求めよ。

[2005]

13 n 枚のカードの表に 1, 2, ..., n の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして、よくまぜ、重ねて、上から順に 1, 2, ..., n の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

- (1) p_3 を求めよ。
- (2) $n = 4$ のとき、表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。
- (3) p_5 を求めよ。

[2003]

14 次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし、空の箱があってもよいとする。

- (1) 赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。
- (2) 赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。
- (3) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

[2002]

■ 論証 |||||

1 n を自然数とするととき、次の問いに答えよ。

- (1) k を $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数とするととき、 $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_n C_k \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n C_k$ は二項係数である。
- (2) 不等式 $\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。
- (3) 不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

[2009]

分野別問題と解答例

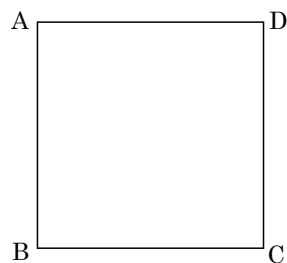
関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

右図のような 1 辺の長さ 10cm の正方形 ABCD がある。点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し、正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 1cm 進む。また、点 R は時刻 0 に B を出発し、正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 2cm 進む。点 R が A に達するまでに $\triangle PQR$ の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。 [2014]



解答例

点 R が C, D, A に達するのは、それぞれ 5 秒後、10 秒後、15 秒後である。そして、出発してから t 秒後の $\triangle PQR$ の面積を S とし、 $S = 35$ となる t を求める。

(i) $0 \leq t \leq 5$ のとき

$PB = 10 - t$, $QR = 2t - t = t$ より、

$$S = \frac{1}{2}t(10 - t) = -\frac{1}{2}(t - 5)^2 + \frac{25}{2}$$

$S \leq \frac{25}{2}$ より、 $S = 35$ となる場合はない。

(ii) $5 \leq t \leq 10$ のとき

$PB = QC = 10 - t$, $BQ = t$, $CR = 2t - 10$ より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2t - 10 + 10 - t) \cdot 10 - \frac{1}{2}(10 - t)(t + 2t - 10) \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 15t + 50 \end{aligned}$$

ここで、 $S = 35$ とすると、 $t^2 - 10t + 10 = 0$ となり、 $5 \leq t \leq 10$ から、 $t = 5 + \sqrt{15}$

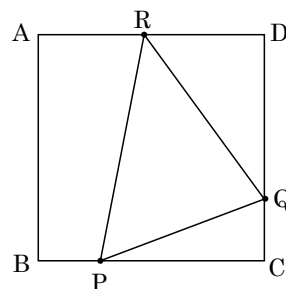
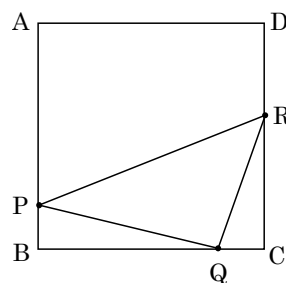
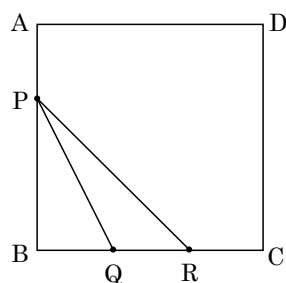
(iii) $10 \leq t \leq 15$ のとき

$PC = QD = 20 - t$, $CQ = t - 10$, $DR = 2t - 20$ より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2t - 20 + 20 - t) \cdot 10 \\ &\quad - \frac{1}{2}(20 - t)(t - 10 + 2t - 20) \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 40t + 300 \end{aligned}$$

ここで、 $S = 35$ とすると、 $3t^2 - 80t + 530 = 0$ となり、 $10 \leq t \leq 15$ から、 $t = \frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}$

(i)~(iii)より、 $t = 5 + \sqrt{15}$, $\frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}$ である。



コメント

高校入試に出題されるようなタイプです。場合分けも難しくありません。

問題

a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x-2| + \frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

解答例

関数 $f(x) = x^2 - a|x-2| + \frac{a^2}{4}$ に対して、

$$f(x) = x^2 - a(x-2) + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2a \quad (x \geq 2)$$

$$f(x) = x^2 + a(x-2) + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - 2a \quad (x \leq 2)$$

(i) $\frac{a}{2} \geq 2$ かつ $-\frac{a}{2} \leq 2$ ($a \geq 4$) のとき

$x \geq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{a}{2}\right) = 2a$ 、 $x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$ となり、 $2a > -2a$ から、 $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$ である。

(ii) $\frac{a}{2} \leq 2$ かつ $-\frac{a}{2} \geq 2$ ($a \leq -4$) のとき

$x \geq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2) = 4 + \frac{a^2}{4}$ 、 $x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2) = 4 + \frac{a^2}{4}$ となり、 $f(x)$ の最小値は $f(2) = 4 + \frac{a^2}{4}$ である。

(iii) $\frac{a}{2} \leq 2$ かつ $-\frac{a}{2} \leq 2$ ($-4 \leq a \leq 4$) のとき

$x \geq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2) = 4 + \frac{a^2}{4}$ 、 $x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$ となり、

$$4 + \frac{a^2}{4} - (-2a) = \frac{1}{4}(a+4)^2 \geq 0, \quad 4 + \frac{a^2}{4} \geq -2a$$

よって、 $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$ である。

(i)~(iii)より、 $f(x)$ の最小値は、 $a \leq -4$ のとき $4 + \frac{a^2}{4}$ 、 $a \geq -4$ のとき $-2a$ である。

コメント

放物線の軸 $x = \frac{a}{2}$ が $x \geq 2$ の範囲に入っているかどうか、また $x = -\frac{a}{2}$ が $x \leq 2$ の範囲に入っているかどうかで場合分けをしています。なお、 $\frac{a}{2} \geq 2$ かつ $-\frac{a}{2} \geq 2$ のときは、 a の値が存在しないので、記述を省きました。

問題

a を実数とする。 x についての方程式 $|x^2 + ax + 2a| = a + 1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。 [2007]

解答例

$$|x^2 + ax + 2a| = a + 1 \text{ に対して, } \left| \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a \right| = a + 1 \dots\dots\dots (*)$$

(i) $-\frac{a^2}{4} + 2a \geq 0$ ($0 \leq a \leq 8$) のとき

(*)が異なる実数解を 2 個もつ条件は, $a + 1 > -\frac{a^2}{4} + 2a$

$$a^2 - 4a + 4 > 0, (a - 2)^2 > 0, a \neq 2$$

よって, $0 \leq a < 2, 2 < a \leq 8$

(ii) $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$ ($a < 0, 8 < a$) のとき

(*)が異なる実数解を 2 個もつ条件は, $a + 1 = 0$ または $a + 1 > -\left(-\frac{a^2}{4} + 2a\right)$

(ii-i) $a + 1 = 0$ のとき $a = -1$

(ii-ii) $a + 1 > -\left(-\frac{a^2}{4} + 2a\right)$ のとき

$$a^2 - 12a - 4 < 0, 6 - 2\sqrt{10} < a < 6 + 2\sqrt{10}$$

よって, $a = -1, 6 - 2\sqrt{10} < a < 0, 8 < a < 6 + 2\sqrt{10}$

(i)(ii)より, (*)が異なる実数解を 2 個もつ条件は,

$$a = -1, 6 - 2\sqrt{10} < a < 2, 2 < a < 6 + 2\sqrt{10}$$

コメント

グラフをイメージしながら解いています。 x 軸に関して折り返しのない場合が(i), ある場合が(ii)です。

問題

実数 a に対し、2 次関数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$ を考える。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。
 (2) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ を通り、 $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$ となるような a の範囲を求めよ。 [2006]

解答例

- (1) $f(x) = 0$ すなわち $x^2 - ax - a^2 + 5a = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は、

$$D = a^2 - 4(-a^2 + 5a) > 0$$
 まとめると、 $5a(a - 4) > 0$ より、 $a < 0$, $4 < a$
 (2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点 $x = \alpha$, β が $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$ を満たす条件は、まず
 (1) から、 $a < 0$, $4 < a$ ……①
 また、 $y = f(x)$ のグラフの軸が $x = \frac{a}{2}$ なので、 $1 < \frac{a}{2} < 3$ より、

$$2 < a < 6$$
 ……②
 さらに、 $f(1) = 1 - a - a^2 + 5a \geq 0$ より、 $a^2 - 4a - 1 \leq 0$

$$2 - \sqrt{5} \leq a \leq 2 + \sqrt{5}$$
 ……③
 $f(3) = 9 - 3a - a^2 + 5a \geq 0$ より、 $a^2 - 2a - 9 \leq 0$

$$1 - \sqrt{10} \leq a \leq 1 + \sqrt{10}$$
 ……④
 ①~④の共通範囲をとって、 $4 < a \leq 1 + \sqrt{10}$

コメント

解の配置の基本問題です。共通範囲をとるところでミスをしないようにしましょう。

問題

2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について以下の問いに答えよ。ただし、 $a < 0$ とする。

- (1) $f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき、 $a = b$ になることを示せ。
- (2) (1)の関数が、さらに次の(i), (ii)を満たすとき、 $f(x)$ を求めよ。
- (i) 曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = x$ と接する。
- (ii) 曲線 $y = f(x)$ と 3 直線 $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$ で囲まれた部分の面積は $\frac{5}{6}$ である。
- [2000]

解答例

(1) 剰余の定理を利用して、 $f(0) = f(-1)$, $c = a - b + c$ から、 $a = b$

(2) (1)より、 $f(x) = ax^2 + ax + c$

ここで、条件(i)より、 $y = f(x)$ と $y = x$ と接するので、

$$ax^2 + ax + c = x, \quad ax^2 + (a-1)x + c = 0$$

$$D = (a-1)^2 - 4ac = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

条件(ii)より、 $-\int_{-1}^0 (ax^2 + ax + c) dx = \frac{5}{6}$

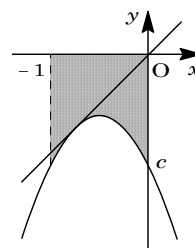
$$-\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + cx \right]_{-1}^0 = \frac{5}{6}$$

$$-\frac{a}{3} + \frac{a}{2} - c = \frac{5}{6}, \quad c = \frac{a}{6} - \frac{5}{6} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①②より、 $(a-1)^2 - 4a\left(\frac{a}{6} - \frac{5}{6}\right) = 0$, $a^2 + 4a + 3 = 0$ から、 $a = -1, -3$

$a = -1$ のとき、②より $c = -1$ となり、 $f(x) = -x^2 - x - 1$

$a = -3$ のとき、②より $c = -\frac{4}{3}$ となり、 $f(x) = -3x^2 - 3x - \frac{4}{3}$



コメント

(1)の条件から、 $y = f(x)$ の軸が $x = -\frac{1}{2}$ であることを見抜けば、場合分けなしに $f(x)$ が決定できます。

問題

a を正の数とし、 t は $0 \leq t < a$ を満たす数とする。点 $(t, (t-a)^2)$ における曲線 $y = (x-a)^2$ の接線と、 x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

- (1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。
- (2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値、およびそのときの t の値を a を用いて表せ。
- (3) s は $0 \leq s \leq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値、およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

[2018]

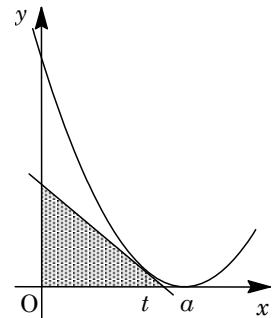
解答例

(1) 曲線 $y = (x-a)^2$ に対し $y' = 2(x-a)$ となり、 $0 \leq t < a$ において、点 $(t, (t-a)^2)$ における接線の方程式は、

$$y - (t-a)^2 = 2(t-a)(x-t)$$

$$y = 2(t-a)x - t^2 + a^2 \dots\dots\dots ①$$

すると、①と y 軸との交点は $(0, -t^2 + a^2)$ となり、また x 軸との交点は $(\frac{t+a}{2}, 0)$ である。



そこで、接線①と x 軸および y 軸で囲まれた領域 $D(t)$ の面積を $S(t)$ とおくと、

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t+a}{2} (-t^2 + a^2) = \frac{1}{4} (-t^3 - at^2 + a^2t + a^3) \dots\dots\dots ②$$

(2) ②より、 $S'(t) = \frac{1}{4} (-3t^2 - 2at + a^2) = -\frac{1}{4} (3t-a)(t+a)$

すると、 $0 \leq t < a$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。これより、 $S(t)$ は $t = \frac{a}{3}$ のとき最大となり、最大値は、

t	0	...	$\frac{a}{3}$...	a
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗		↘	

$$S\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{3} + a^3\right) = \frac{8}{27} a^3$$

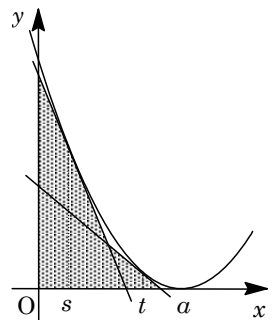
(3) $0 \leq s \leq t < a$ のとき、点 $(s, (s-a)^2)$ における接線の方程式は、①より、

$$y = 2(s-a)x - s^2 + a^2 \dots\dots\dots ③$$

さて、2つの領域 $D(t)$ と $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の面積を $T(t, s)$ とすると、

(i) $0 \leq s = t < a$ のとき

$T(t, s) = S(t)$ より、(2)から最大値は $\frac{8}{27} a^3$ である。



(ii) $0 \leq s < t < a$ のとき

①③を連立すると、 $2(t-a)x - t^2 + a^2 = 2(s-a)x - s^2 + a^2$ から、

$$2(t-s)x = t^2 - s^2, \quad x = \frac{t+s}{2}$$

よって、 $T(t, s) = S(t) + \frac{1}{2}\{(-s^2 + a^2) - (-t^2 + a^2)\} \cdot \frac{t+s}{2}$ となり、

$$T(t, s) = \frac{1}{4}(-t^3 - at^2 + a^2t + a^3) + \frac{1}{4}(t^3 + st^2 - s^2t - s^3) \dots\dots\dots ④$$

ここで、 t を $t = t_0$ ($0 < t_0 < a$) で固定し、 s を $0 \leq s < t_0$ で動かすと考え、

$$T(t_0, s) = \frac{1}{4}(-t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3) + \frac{1}{4}(t_0^3 + t_0^2s - t_0s^2 - s^3)$$

$$T'(t_0, s) = -\frac{1}{4}(3s^2 + 2t_0s - t_0^2) \\ = -\frac{1}{4}(3s - t_0)(s + t_0)$$

s	0	...	$\frac{t_0}{3}$...	t_0
$T'(t_0, s)$		+	0	-	
$T(t_0, s)$		↗		↘	

すると、 $0 \leq s < t_0$ における $T(t_0, s)$ の増減は右表のようになる。これより、

$T(t_0, s)$ は $s = \frac{t_0}{3}$ のとき最大となり、最大値は、

$$T\left(t_0, \frac{t_0}{3}\right) = \frac{1}{4}(-t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3) + \frac{1}{4}\left(t_0^3 + \frac{t_0^3}{3} - \frac{t_0^3}{9} - \frac{t_0^3}{27}\right) \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3\right)$$

さらに、この状態を保ったまま t_0 を $0 < t_0 < a$ で動かすと考え、変数を t_0 から t に戻し $U(t) = T\left(t, \frac{t}{3}\right)$ とおき直すと、 $U(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}t^3 - at^2 + a^2t + a^3\right)$ から、

$$U'(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{9}t^2 - 2at + a^2\right) \\ = \frac{1}{36}(5t - 3a)(t - 3a)$$

t	0	...	$\frac{3}{5}a$...	a
$U'(t)$		+	0	-	
$U(t)$		↗		↘	

すると、 $0 < t < a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

これより、 $U(t)$ は $t = \frac{3}{5}a$ のとき最大となり、最大値は、

$$U\left(\frac{3}{5}a\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27} \cdot \frac{27}{125}a^3 - \frac{9}{25}a^3 + \frac{3}{5}a^3 + a^3\right) = \frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より、 $T(t, s)$ は、 $t = \frac{3}{5}a$ 、 $s = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}a = \frac{a}{5}$ のとき、最大値 $\frac{8}{25}a^3$ をとる。

コメント

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は2変数関数が対象の設定で、1文字を固定して処理しています。ただ、重複をいとわず丁寧に記述したところ、かなりの分量になってしまいました。

問 題

座標平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を n とする。

- (1) $n = 3$ を満たすような点 (a, b) の範囲を図示せよ。
 - (2) $-3a < b$ かつ $n \leq 2$ を満たすように点 (a, b) が動くとき、 $b - 3a$ の最小値を求めよ。
- [2017]

解答例

(1) 曲線 $y = x^3 - 3x$ に対して、 $y' = 3x^2 - 3$ となり、点 $(t, t^3 - 3t)$ における接線は、

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t), \quad y = (3t^2 - 3)x - 2t^3$$

この接線が点 (a, b) を通ることより、 $b = (3t^2 - 3)a - 2t^3$ となり、

$$-2t^3 + 3at^2 - 3a = b \cdots \cdots \textcircled{1}$$

接線が 3 本引ける条件は、複接線が存在しないことより、接点が 3 個すなわち $\textcircled{1}$ の異なる実数解が 3 個ある条件に等しい。

そこで、 $f(t) = -2t^3 + 3at^2 - 3a$ とおくと、 $\textcircled{1}$ は $f(t) = b$ となり、

$$f'(t) = -6t^2 + 6at = -6t(t - a)$$

(i) $a > 0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表のようになり、

$\textcircled{1}$ が 3 個の実数解をもつ条件は、

$$-3a < b < a^3 - 3a$$

t	...	0	...	a	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	$-3a$	↗	$a^3 - 3a$	↘

(ii) $a = 0$ のとき

$f'(t) = -6t^2 \leq 0$ となり、 $f(t)$ は単調減少するので、 $\textcircled{1}$ が 3 個の異なる実数解をもつことはない。

(iii) $a < 0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表のようになり、

$\textcircled{1}$ が 3 個の実数解をもつ条件は、

$$a^3 - 3a < b < -3a$$

t	...	a	...	0	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	$a^3 - 3a$	↗	$-3a$	↘

(i)~(iii)より、点 (a, b) の範囲を図示する。

そこで、境界線 $b = a^3 - 3a$ に対して、

$$b' = 3a^2 - 3 = 3(a+1)(a-1)$$

すると、 b の値の変化は右表のようになる。

a	...	-1	...	1	...
b'	+	0	-	0	+
b	↗	2	↘	-2	↗

以上より、点 (a, b) の範囲は右図の網点部となる。ただし、境界線は含まない。

(2) まず、 $-3a < b$ のもとで、接線の本数が 2 本以下、すなわち ① の異なる実数解が 2 個以下となる (a, b) の条件を求める。

(i) $a > 0$ のとき

$-3a < b$ なので、① の実数解が 2 個以下となる条件は、

$$b \geq a^3 - 3a$$

(ii) $a = 0$ のとき

つねに① の実数解は 1 個となるので、 $-3a < b$ から、

$$b > 0$$

(iii) $a < 0$ のとき

$-3a < b$ のとき、① の実数解は 1 個なので、

$$b > -3a$$

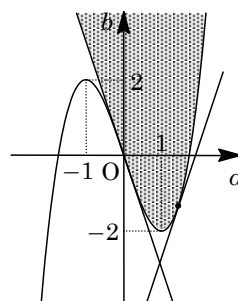
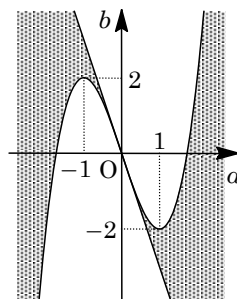
(i)~(iii) より、点 (a, b) の範囲は右図の網点部となる。

ただし、境界線は $a > 0$ の部分のみを含む。

さて、このとき $b - 3a = k$ ($b = 3a + k$) が最小となるのは、右図から、曲線 $b = a^3 - 3a$ が傾き 3 の接線をもつときなので、 $b' = 3a^2 - 3 = 3$ から、 $a = \sqrt{2}$ となる。

すると、 $b = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ から、接点の座標は $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ となる。

以上より、 $b - 3a = k$ の最小値は、 $-\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$ である。



コメント

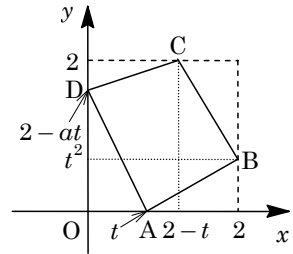
超頻出の 3 次曲線の接線の本数の問題に、領域と最大・最小の問題が付け加えられています。なお、(1)の結果を補集合として利用すると、(2)の記述量はやや減少します。

問題

a は $0 < a < 2$ を満たす定数とする。 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して、座標平面上の 4 点 $A(t, 0)$, $B(2, t^2)$, $C(2-t, 2)$, $D(0, 2-at)$ を考える。このとき、四角形 $ABCD$ の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。 [2016]

解答例

定数 $a(0 < a < 2)$, および実数 $t(0 \leq t \leq 1)$ に対して、4 点 $A(t, 0)$, $B(2, t^2)$, $C(2-t, 2)$, $D(0, 2-at)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ の面積を $S(t)$ とおく。



$$\begin{aligned} S(t) &= 2^2 - \frac{1}{2}(2-t)t^2 - \frac{1}{2}(2-2+t)(2-t^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(2-t)(2-2+at) - \frac{1}{2}t(2-at) \\ &= 4 - \frac{1}{2}\{-2t^3 - 2(a-1)t^2 + 2(a+2)t\} \\ &= t^3 + (a-1)t^2 - (a+2)t + 4 \end{aligned}$$

すると、 $S'(t) = 3t^2 + 2(a-1)t - (a+2)$ となり、 $S'(t) = 0$ を満たす正の解は、 $S'(0) = -(a+2) < 0$ から $t = \frac{-a+1 + \sqrt{a^2+a+7}}{3}$ であり、これを $t = \alpha$ とおく。

(i) $0 < \alpha < 1$ のとき

このとき $S'(1) = a-1 > 0$ より、 $1 < a < 2$ となる。そして、 $0 \leq t \leq 1$ における $S(t)$ の増減は右表のようになり、 $t = \alpha$ で最小となる。

t	0	...	α	...	1
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$		↘		↗	

(ii) $\alpha \geq 1$ のとき

このとき $S'(1) = a-1 \leq 0$ より、 $0 < a \leq 1$ となる。そして、 $0 \leq t \leq 1$ において $S'(t) \leq 0$ から $S(t)$ は単調に減少し、 $t = 1$ で最小となる。

(i)(ii)より、 $S(t)$ が最小となるような t の値は、

$$t = \frac{-a+1 + \sqrt{a^2+a+7}}{3} \quad (1 < a < 2), \quad t = 1 \quad (0 < a \leq 1)$$

コメント

微分と最大・最小に関する標準的な問題です。なお、 $S(t)$ の立式については、位置関係に場合分けが生じないので、普通に正方形から 4 つの直角三角形を除きました。

問題

m を実数とする。 x に関する方程式 $x^3 - 3x - |x - m| = 0$ の実数解の個数を求めよ。

[2015]

解答例

方程式 $x^3 - 3x - |x - m| = 0$ ……①に対して、 $x^3 - 3x = |x - m|$ から、

$$y = x^3 - 3x \dots\dots\dots②, \quad y = |x - m| \dots\dots\dots③$$

すると、①の異なる実数解の個数は、②と③のグラフの共有点の個数に一致する。

さて、②より、 $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

これより、②の増減は右表のようになる。

x	…	-1	…	1	…
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗

また、③は $y \geq 0$ で、点 $(m, 0)$ を頂点とする折

れ線で、その傾きは 1 と -1 である。

ここで、点 $(\alpha, \alpha^3 - 3\alpha)$ において、②のグラフの

接線の傾きが 1 になるとすると、 $\alpha < 0$ として、

$$3\alpha^2 - 3 = 1, \quad \alpha^2 = \frac{4}{3}, \quad \alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

すると、 $\alpha^3 - 3\alpha = \frac{10}{3\sqrt{3}} = \frac{10}{9}\sqrt{3}$ となり、

$$\alpha^3 - 3\alpha = \alpha - m_1$$

$$\text{よって、} m_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{10}{9}\sqrt{3} = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$$

また、点 $(\beta, \beta^3 - 3\beta)$ において、②のグラフの接線の傾きが -1 になるとすると、 $\beta < 0$ として、

$$3\beta^2 - 3 = -1, \quad \beta^2 = \frac{2}{3}, \quad \beta = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

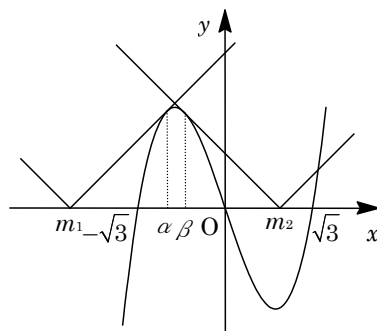
すると、 $\beta^3 - 3\beta = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{7}{9}\sqrt{6}$ となり、 $\beta^3 - 3\beta = -\beta + m_2$

$$\text{よって、} m_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{7}{9}\sqrt{6} = \frac{4}{9}\sqrt{6}$$

以上より、②と③のグラフの共有点の個数、すなわち方程式①の異なる実数解の個数は、右上図から、

$m < -\frac{16}{9}\sqrt{3}$, $\frac{4}{9}\sqrt{6} < m$ のとき 1 個、 $m = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$, $\frac{4}{9}\sqrt{6}$ のとき 2 個

$-\frac{16}{9}\sqrt{3} < m < \frac{4}{9}\sqrt{6}$ のとき 3 個



コメント

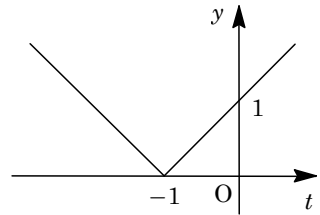
初めからグラフを用いて処理をしましたが、詰めの作業がやや煩雑です。まず、方程式①を同値変形した方がよかったかもしれません。

問題

実数 a に対し、関数 $f(x) = \int_x^{x+1} |t+1| dt + a$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2014]

解答例

$f(x) = \int_x^{x+1} |t+1| dt + a$ に対し、右図は $y = |t+1|$ のグラフであり、さらに $g(x) = \int_x^{x+1} |t+1| dt$ とおくと、



(i) $x < -2$ のとき

$$g(x) = \frac{1}{2}(-x-1-x-2) \cdot 1 = -x - \frac{3}{2}$$

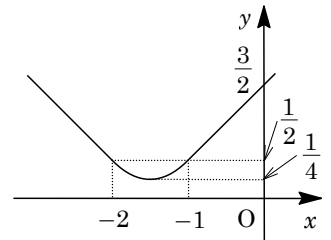
(ii) $-2 \leq x < -1$ のとき

$$g(x) = \frac{1}{2}(-x-1)^2 + \frac{1}{2}(x+2)^2 = x^2 + 3x + \frac{5}{2} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

(iii) $x \geq -1$ のとき

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1+x+2) \cdot 1 = x + \frac{3}{2}$$

(i)~(iii)より、 $y = g(x)$ のグラフは右図のようになる。



すると、曲線 $C: y = f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつ条件は、 $f(x) = 0$ すなわち $g(x) = -a$ が異なる 2 実数解をもつことに対応し、 $-a > \frac{1}{4}$ すなわち $a < -\frac{1}{4}$ である。曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積 S は、 $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = -a$ で囲まれる部分の面積に等しいので、

(a) $\frac{1}{4} < -a \leq \frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2} \leq a < -\frac{1}{4}$) のとき

$$y = g(x) \quad (-2 \leq x \leq -1) \text{ と } y = -a \text{ を連立すると、 } x^2 + 3x + \frac{5}{2} + a = 0 \text{ となり、}$$

この解 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{-4a-1}}{2}$ を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと、

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{-4a-1})^3$$

(b) $-a > \frac{1}{2}$ ($a < -\frac{1}{2}$) のとき

$$y = g(x) \quad (x < -2) \text{ と } y = -a \text{ を連立すると } x = a - \frac{3}{2}, \quad y = g(x) \quad (x > -1) \text{ と}$$

$$y = -a \text{ を連立すると } x = -a - \frac{3}{2} \text{ となり、}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}\{-1-(-2)\}^3 + \frac{1}{2}\left[\{-1-(-2)\} + \left(-a-\frac{3}{2}\right) - \left(a-\frac{3}{2}\right)\right]\left(-a-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4}(-2a+1)(-2a-1) = a^2 - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

コメント

絶対値付きの関数の定積分は、グラフを利用して、台形や三角形の面積を対応させて計算しています。

問題

a と k を正の実数とする。 $y = \frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y = -\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が、ともに原点 $O(0, 0)$ で直線 $y = kx$ に接するものとする。原点 O を通り、直線 $y = kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1 、放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき、 $S = S_1 + S_2$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) S を a と k を用いて表せ。
- (2) $k = \sqrt{2} - 1$ とする。 S を最小にする a の値と、そのときの S の値を求めよ。

[2009]

解答例

- (1) 原点を通る放物線 C_1 の方程式を、 $y = \frac{a}{2}x^2 + px$ とおくと、 $y' = ax + p$ となる。

条件より、 $x = 0$ のとき $y' = k$ から、 $p = k$ となり、

$$y = \frac{a}{2}x^2 + kx \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、同様にして、原点を通る放物線 C_2 の方程式を、 $y = -\frac{2}{a}x^2 + qx$ とおくと、 $y' = -\frac{4}{a}x + q$ となる。

条件より、 $x = 0$ のとき $y' = k$ から、 $q = k$ となり、

$$y = -\frac{2}{a}x^2 + kx \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

さらに、直線 $y = kx$ に垂直な直線 l は、 $y = -\frac{1}{k}x \dots\dots\dots \textcircled{3}$ である。

①③の交点 $x = \alpha \neq 0$ は、 $\frac{a}{2}x^2 + kx = -\frac{1}{k}x$ から、 $\alpha = -\frac{2}{a}\left(k + \frac{1}{k}\right)$ となり、

$$S_1 = \int_{\alpha}^0 \left(-\frac{1}{k}x - \frac{a}{2}x^2 - kx\right) dx = -\frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (-\alpha)^3 = \frac{2}{3a^2} \left(k + \frac{1}{k}\right)^3$$

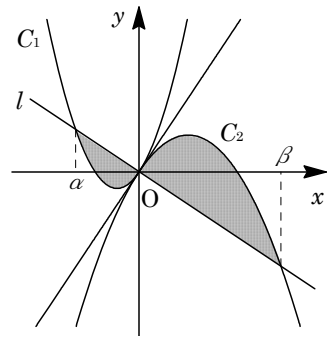
②③の交点 $x = \beta \neq 0$ は、 $-\frac{2}{a}x^2 + kx = -\frac{1}{k}x$ から、 $\beta = \frac{a}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$ となり、

$$S_2 = \int_0^{\beta} \left(-\frac{2}{a}x^2 + kx + \frac{1}{k}x\right) dx = -\frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \beta^3 = \frac{a^2}{24} \left(k + \frac{1}{k}\right)^3$$

よって、 $S = S_1 + S_2 = \frac{2}{3a^2} \left(k + \frac{1}{k}\right)^3 + \frac{a^2}{24} \left(k + \frac{1}{k}\right)^3 = \frac{1}{24} \left(a^2 + \frac{16}{a^2}\right) \left(k + \frac{1}{k}\right)^3$

- (2) $k = \sqrt{2} - 1$ のとき、 $k + \frac{1}{k} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}$ より、

$$S = \frac{1}{24} \left(a^2 + \frac{16}{a^2}\right) (2\sqrt{2})^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(a^2 + \frac{16}{a^2}\right)$$



ここで、 $a^2 > 0$ より、相加平均と相乗平均の関係を用いると、

$$a^2 + \frac{16}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{16}{a^2}} = 8$$

なお、等号は、 $a^2 = \frac{16}{a^2}$ すなわち $a = 2$ のときに成立し、このとき S は最小値

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 8 = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ をとる。}$$

コメント

放物線とその法線で囲まれる部分の面積について、その最小値を求めるという頻出問題です。

問題

2次関数 $f(x)$ は、 $xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + (x^2 + x)\int_0^1 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$ を満たすとする。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
 (2) 関数 $xf(x)$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ。 [2008]

解答例

(1) $xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + (x^2 + x)\int_0^1 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$ に対し、 $\int_0^1 f(t)dt = a$ とおくと、

$$xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + a(x^2 + x) + \int_0^x f(t)dt \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①は $x = 0$ のとき成立し、そこで両辺を微分すると、

$$f(x) + xf'(x) = 2x^2 + a(2x + 1) + f(x), \quad xf'(x) = 2x^2 + a(2x + 1) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$f(x)$ は 2 次関数なので、②の両辺の定数項を比較すると、 $a = 0$ である。

②より、 $xf'(x) = 2x^2$ 、 $f'(x) = 2x$ となり、 C を定数として、

$$f(x) = x^2 + C$$

すると、 $\int_0^1 f(t)dt = 0$ より、 $\frac{1}{3} + C = 0$ となり、 $C = -\frac{1}{3}$

以上より、 $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ である。

(2) $g(x) = xf(x) = x^3 - \frac{1}{3}x$ とおくと、

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(3x + 1)(3x - 1)$$

$x \geq 0$ における $g(x)$ の増減は右表のようになり、最

x	0	...	$\frac{1}{3}$...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		↘		↗

小値は、 $g(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27}$ である。

コメント

計算量を減少させるために、数Ⅱの範囲外ですが、積の微分法を利用して解いています。

問題

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

また、 $g(x) = -x^2 + ax + b$ とする。 $y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, b の値を求めよ。
 (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。 [2006]

解答例

- (1) $y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点で接す

ることより、 $p > 1$ とし、

$$g(x) = -(x - p)^2 + 1$$

すると、 $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = x$ との共有点は、

$$x = -(x - p)^2 + 1, \quad x^2 - (2p - 1)x + p^2 - 1 = 0$$

$x < 1$ において接することより、

$$D = (2p - 1)^2 - 4(p^2 - 1) = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}, \quad x = \frac{2p - 1}{2} < 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より, } 1 - 4p + 4 = 0, \quad p = \frac{5}{4}$$

この値は $p > 1$ を満たし、しかも $\textcircled{2}$ は $x = \frac{3}{4} < 1$ となり、成立しているの、

$$g(x) = -\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 1 = -x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16}$$

$$\text{よって, } a = \frac{5}{2}, \quad b = -\frac{9}{16}$$

- (2) $x < 1$ における接点は $\textcircled{2}$ より $x = \frac{3}{4}$ 、 $x > 1$ における接点は $x = p = \frac{5}{4}$ から、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3}{4}}^1 \left\{ x - \left(-x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16}\right) \right\} dx + \int_1^{\frac{5}{4}} \left\{ 1 - \left(-x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16}\right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{3}{4}}^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 dx + \int_1^{\frac{5}{4}} \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^3 \right]_{\frac{3}{4}}^1 + \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^3 \right]_1^{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

コメント

微積分の基本問題です。 $y = f(x)$ のグラフが複雑ではないので、直感に依存した解となっています。

問題

a は実数とする。2 つの曲線 $y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4$ と $y = ax^2 - 2a^2x - 3a$ は、ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。 [2005]

解答例

$y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = ax^2 - 2a^2x - 3a \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して、

$\textcircled{1}$ より $y' = 3x^2 + 4ax - 3a^2$, $\textcircled{2}$ より $y' = 2ax - 2a^2$

ここで、 $x = t$ において、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が共通の接線をもつとき、

$$t^3 + 2at^2 - 3a^2t - 4 = at^2 - 2a^2t - 3a \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$3t^2 + 4at - 3a^2 = 2at - 2a^2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$ より、 $t^3 + at^2 - a^2t + 3a - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}'$

$\textcircled{4}$ より、 $3t^2 + 2at - a^2 = 0$, $(3t - a)(t + a) = 0$ となり、 $t = \frac{a}{3}$, $-a$

(i) $t = \frac{a}{3}$ のとき

$$\textcircled{3}' \text{ より、} \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{3} + 3a - 4 = 0, \quad 5a^3 - 81a + 108 = 0$$

$$(a - 3)(5a^2 + 15a - 36) = 0$$

$$\text{よって、} a = 3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$$

(ii) $t = -a$ のとき

$$\textcircled{3}' \text{ より、} -a^3 + a^3 + a^3 + 3a - 4 = 0, \quad a^3 + 3a - 4 = 0$$

$$(a - 1)(a^2 + a + 4) = 0$$

a は実数より、 $a = 1$

(i)(ii)より、 $a = 1, 3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$

コメント

微分法の基本問題です。(i)は係数の大きい3次方程式が出現し、計算ミスを疑ってしまいました。

問題

3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を, $f(x) = x^3$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ とし, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) b, c を a を用いて表せ。
 (2) $f(x) - g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を a を用いて表せ。 [2004]

解答例

(1) $f(x) = x^3$ より $f'(x) = 3x^2$ となり, $f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ である。

また, $g(x) = ax^2 + bx + c$ より, $g'(x) = 2ax + b$ となる。

条件より, $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ かつ $g'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ となるので,

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = \frac{1}{8}, \quad a + b = \frac{3}{4}$$

よって, $b = \frac{3}{4} - a$, $c = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}(\frac{3}{4} - a) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}a$

(2) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと, (1)より, $h(x) = x^3 - ax^2 - (\frac{3}{4} - a)x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$

$$h'(x) = 3x^2 - 2ax - (\frac{3}{4} - a) = \frac{1}{4}(2x - 1)(6x - 4a + 3)$$

$h'(x) = 0$ の解は, $x = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$ となり,

$$h(\frac{1}{2}) = 0, \quad h(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}) = -\frac{4}{27}a^3 + \frac{2}{3}a^2 - a + \frac{1}{2}$$

また, $h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$, $h(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}a$ から, $0 \leq x \leq 1$ における $h(x)$ の最小値を

m とおくと,

(i) $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2} < 0$ ($a < \frac{3}{4}$) のとき

右表より, $m = h(\frac{1}{2}) = 0$

(ii) $0 \leq \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ ($\frac{3}{4} \leq a < \frac{3}{2}$) のとき

(ii-i) $\frac{1}{4} - \frac{a}{4} > 0$ ($a < 1$) のとき

右表より, $m = h(\frac{1}{2}) = 0$

(ii-ii) $\frac{1}{4} - \frac{a}{4} \leq 0$ ($a \geq 1$) のとき

右表より, $m = h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$

x	0	...	$\frac{1}{2}$...	1
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$		↘	0	↗	

x	0	...	$\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$...	$\frac{1}{2}$...	1
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$		↗		↘	0	↗	

(iii) $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} < 1$ ($\frac{3}{2} \leq a < \frac{9}{4}$) のとき

$h(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2})$ と $h(0)$ の大小関係

x	0	...	$\frac{1}{2}$...	$\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$...	1
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$		↗	0	↘		↗	

を調べるために、差をとり、

$$d(a) = h\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right) - h(0)$$

すると、 $d(a) = -\frac{4}{27}a^3 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}$ となり、

$$d'(a) = -\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{3}a - \frac{3}{4} = -\frac{1}{36}(4a-9)(4a-3)$$

このとき、 $\frac{3}{2} \leq a < \frac{9}{4}$ において、 $d'(a) > 0$ より、 $d(a) \geq d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$

よって、 $h\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right) > h(0)$ となり、 $m = h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$ である。

(iv) $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2} \geq 1$ ($a \geq \frac{9}{4}$) のとき

$$h(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}a > \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a = h(0) \text{ より、}$$

$$m = h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$$

x	0	...	$\frac{1}{2}$...	1
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$		↗	0	↘	

(i)~(iv)より、 $a < 1$ のとき $m = 0$ 、 $a \geq 1$ のとき $m = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$ である。

コメント

とにかく朴訥に場合分けをし、それぞれの場合について $h(x)$ の増減を調べました。難問ではないものの、かなりの時間を要します。

問題

実数 t に対して、 $f(t)$ を $f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx| dx$ と定める。 $0 \leq t \leq 1$ のとき、 $f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2002]

解答例

$0 \leq t \leq 1$ において、 $x^2 - tx = x(x-t)$ より、

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 |x^2 - tx| dx = \int_0^t |x^2 - tx| dx + \int_t^1 |x^2 - tx| dx \\ &= \int_0^t -(x^2 - tx) dx + \int_t^1 (x^2 - tx) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - t \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - t \cdot \frac{x^2}{2}\right]_t^1 \\ &= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2} + \frac{1}{3}(1-t^3) - \frac{t}{2}(1-t^2) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$f'(t) = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$f(t)$ の値の増減は右表のようになるので、最大値は $f(0) = \frac{1}{3}$ 、最小値は $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$ となる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	\searrow	$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$	\nearrow	$\frac{1}{6}$

コメント

$0 \leq t \leq 1$ という条件があるために、場合分けは必要ありません。微積分の基本問題です。

問題

実数 a に対して、 $f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 + 1$ とおく。

- (1) 定積分 $I(a) = \int_1^2 f(x) dx$ を a を用いて表せ。
- (2) $f(x)$ が条件 $f(1) \leq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。
- (3) a が(2)の範囲を動くとき、 $I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2001]

解答例

- (1)
$$I(a) = \int_1^2 (ax^2 - 2ax + a^2 + 1) dx = \left[\frac{a}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 + 1)x \right]_1^2$$

$$= \frac{7a}{3} - 3a + a^2 + 1 = a^2 - \frac{2}{3}a + 1$$
- (2) $f(1) = a - 2a + a^2 + 1 = a^2 - a + 1$ なので、 $f(1) \leq 1$ より、 $a^2 - a + 1 \leq 1$
 $a^2 - a \leq 0, 0 \leq a \leq 1$
- (3) (1)より、 $I(a) = \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}$

すると、(2)より $0 \leq a \leq 1$ なので、 $I(a)$ の最大値は $I(1) = \frac{4}{3}$ であり、最小値は $I\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$ である。

コメント

計算がすべてという超基本レベルの問題です。

問 題

a, b を整数とする。3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ が、 $0 < x < 2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき、 a, b の値を求めよ。 [2001]

解答例

$f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ より、 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2b$

3 次関数 $f(x)$ が $0 < x < 2$ の範囲に極大値と極小値をもつ条件は、2 次方程式 $f'(x) = 0$ が $0 < x < 2$ の範囲に異なる 2 実数解をもつ条件に一致する。

まず、 $f'(x) = 0$ の判別式 $D > 0$ より、 $a^2 - 6b > 0$ 、 $b < \frac{1}{6}a^2 \dots\dots\dots ①$

$y = f'(x)$ のグラフの軸が $x = -\frac{a}{3}$ より、

$0 < -\frac{a}{3} < 2$ 、 $-6 < a < 0 \dots\dots\dots ②$

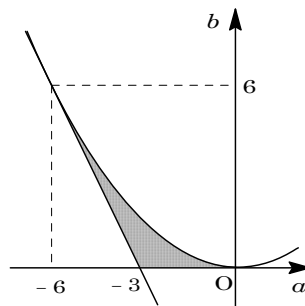
また、 $f'(0) = 2b > 0$ より、 $b > 0 \dots\dots\dots ③$

$f'(2) = 12 + 4a + 2b > 0$ より、 $b > -2a - 6 \dots\dots\dots ④$

①~④を満たす領域を図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は含まない。

条件より、 a, b は整数なので、この領域内の格子点が求める a, b の値となる。

よって、 $(a, b) = (-3, 1)$ である。



コメント

①から④までの不等式は、簡単に求められます。しかし、この不等式を a, b 平面上に図示して、領域内の格子点をさがす過程には時間がかかります。上の解ではその記述を省略しましたが。

問題

三角形 ABC において、辺 BC 上に点 D があり、 $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$ である。
 $AB = p$, $AC = q$ とおく。

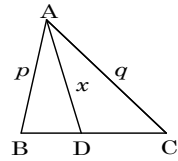
- (1) AD の長さを p, q で表せ。
- (2) $p + q = 1$ を満たすとき、 $\triangle ABD$ の面積と $\triangle ACD$ の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $AD = x$ とすると、 $\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ となるので、

$$\frac{1}{2} px \sin 30^\circ + \frac{1}{2} qx \sin 30^\circ = \frac{1}{2} pq \sin 60^\circ$$

$$px + qx = \sqrt{3} pq, \quad x = \frac{\sqrt{3} pq}{p + q}$$



(2) $S = |\triangle ABD - \triangle ACD|$ とおくと、(1)より、

$$S = \left| \frac{1}{2} px \sin 30^\circ - \frac{1}{2} qx \sin 30^\circ \right| = \frac{1}{4} |p - q| x = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{|pq(p - q)|}{p + q}$$

条件より、 $q = 1 - p$ なので、 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} |p(1 - p)(2p - 1)|$

ここで、 $0 < p < 1$ で $f(p) = p(1 - p)(2p - 1) = -2p^3 + 3p^2 - p$ とすると、

$$f'(p) = -6p^2 + 6p - 1$$

$$f'(p) = 0 \text{ の解は、 } p = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$

p	0	...	α	...	β	...	1
$f'(p)$		-	0	+	0	-	
$f(p)$	0	↘		↗		↘	0

この解を $p = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと、

$0 < \alpha < \beta < 1$ となり、 $f(p)$ の増減は上表ようになる。

さて、 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ であり、 $f(1 - p) = (1 - p)p(1 - 2p) = -f(p)$ より、 $y = f(p)$

のグラフは点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ に関して対称となり、 $-f(\alpha) = f(\beta)$ である。

すると、 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} |f(p)|$ のグラフは、直線 $p = \frac{1}{2}$ に関して対称となるので、 S の最

大値は $\frac{\sqrt{3}}{4} |f(\alpha)| = \frac{\sqrt{3}}{4} |f(\beta)|$ である。

したがって、 S が最大となる p は $p = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$ となる。

コメント

S の最大値は求める必要がないので、対称性を利用した解を書きました。もし最大値を求めるのであれば、 $f(p)$ を $f'(p)$ で割った余りを利用します。

問題

与えられた実数 a, b のうち、大きくない方を $\min\{a, b\}$ で表すことにする。関数 $f(x) = x^3 - 7x$ に対して $g(x) = \min\{f(x+1), f(x-1)\}$ とおく。

- (1) $0 \leq x \leq 3$ のとき、 $y = g(x)$ が最大となる x の値、および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 2つのグラフ $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $f(x) = x^3 - 7x, f'(x) = 3x^2 - 7 = 3\left(x - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{21}}{3}\right)$

$y = f(x+1)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので、 $y = f(x-1)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

x	...	$-\frac{\sqrt{21}}{3}$...	$\frac{\sqrt{21}}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

ここで、 $f(x+1) = f(x-1)$ とすると、 $(x+1)^3 - 7(x+1) = (x-1)^3 - 7(x-1)$
 $x^2 - 2 = 0, x = \sqrt{2} (x \geq 0)$

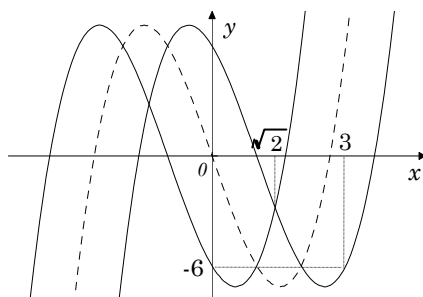
したがって、

$0 \leq x \leq \sqrt{2}$ のとき、 $g(x) = f(x+1)$

$\sqrt{2} \leq x \leq 3$ のとき、 $g(x) = f(x-1)$

また、 $0 < \frac{\sqrt{21}}{3} - 1 < \sqrt{2} < \frac{\sqrt{21}}{3} + 1 < 3$ より、

$0 \leq x \leq 3$ における $y = g(x)$ が最小となる x は、 $x = \frac{\sqrt{21}}{3} \pm 1$ となる。



最大となる x は、 $x = 0, \sqrt{2}, 3$ のいずれかである。

ここで、 $g(0) = f(1) = -6, g(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}-7) = -2\sqrt{2},$
 $g(3) = f(2) = -6$ となることより、最大となる x は、 $x = \sqrt{2}$ である。

(2) $f(x) = f(x+1)$ とすると、 $x^3 - 7x = (x+1)^3 - 7(x+1)$ より、

$3x^2 + 3x - 6 = 0, x = 1 (x \geq 0)$

また、 $f(x) = f(x-1)$ とすると、 $x^3 - 7x = (x-1)^3 - 7(x-1)$ より、

$-3x^2 + 3x + 6 = 0, x = 2 (x \geq 0)$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分は、 $1 \leq x \leq 2$ の範囲だけなので、

$S_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \{f(x+1) - f(x)\} dx = \int_1^{\sqrt{2}} (3x^2 + 3x - 6) dx = -4\sqrt{2} + \frac{13}{2}$

$$S_2 = \int_{\sqrt{2}}^2 \{f(x-1) - f(x)\} dx = \int_{\sqrt{2}}^2 (-3x^2 + 3x + 6) dx = -4\sqrt{2} + 7$$

$$\text{求める面積は, } S_1 + S_2 = -8\sqrt{2} + \frac{27}{2}$$

コメント

$y = f(x)$ のグラフを丁寧に書いて、 x 軸方向に $+1$ 、および -1 だけ平行移動すれば、結論は出てきます。後はそれを計算で補うだけです。

問題

座標平面上に 5 点 $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$, $E(0, \frac{2}{3})$ がある。点 E と点 $P_1(s, 1)$ ($0 < s < 1$) を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし、 l_2 と直線 $x=1$ の交点を P_2 とする。さらに、直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は、 x 軸と線分 AD 上で交わり、その交点を P_3 とする。

- (1) 直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。
- (2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。
- (3) $EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ。 [2016]

解答例

- (1) 点 $E(0, \frac{2}{3})$ と点 $P_1(s, 1)$ ($0 < s < 1$) を通る直線 l_1 を、

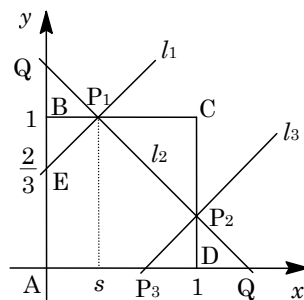
$y=1$ に関して対称移動した直線を l_2 とする。

すると、 l_2 は P_1 と E を $y=1$ に関して対称移動した点

$Q_1(0, \frac{4}{3})$ を通ることより、その傾きが $-\frac{1}{3s}$ となり、

$$l_2 : y = -\frac{1}{3s}x + \frac{4}{3}$$

l_2 が $D(1, 0)$ を通るとき、 $0 = -\frac{1}{3s} + \frac{4}{3}$ から、 $s = \frac{1}{4}$



- (2) l_2 と x 軸との交点 Q_2 は、 $0 = -\frac{1}{3s}x + \frac{4}{3}$ から $x = 4s$ となり、 $Q_2(4s, 0)$ から、

$$DP_3 = DQ_2 = 4s - 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

- (3) P_3 は線分 AD 上にあることから、 $\textcircled{1}$ より $0 \leq 4s - 1 \leq 1$ となり、 $\frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{2}$

このとき、 P_2 は線分 CD 上にある。そこで、 $EP_1 = Q_1P_1$, $P_2P_3 = P_2Q_2$ から、 $F = EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3$ とおくと、

$$F = Q_1P_1 + P_1P_2 + P_2Q_2 = Q_1Q_2 = \sqrt{(4s)^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{4}{3}\sqrt{9s^2 + 1}$$

すると、 $\textcircled{2}$ より $\frac{25}{16} \leq 9s^2 + 1 \leq \frac{13}{4}$ となるので、 F の最大値は $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{13}$, 最小値は $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{3}$ である。

コメント

折れ線の長さの和に関する問題です。線対称移動がポイントですが、その誘導は問題文中に示されています。

問題

座標平面上に、原点を中心とする半径 1 の円と、その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ (ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。 [2014]

解答例

原点を中心とする半径 1 の円周上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線の方程式は、

$$x \cos\theta + y \sin\theta = 1$$

直線 $x = 1$ と連立して、 $y \sin\theta = 1 - \cos\theta$, $y = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$

そこで、 $L = AP + PB + BA$ とすると、 $\angle PAB = \theta$ となることを用いて、

$$\begin{aligned} L &= \left(1 - \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right) \left(1 + \tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta + 1}{\cos\theta} \\ &= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{\sin\theta \cos\theta} = \frac{1 + 2\sin\theta \cos\theta - 1}{\sin\theta \cos\theta} = 2 \end{aligned}$$

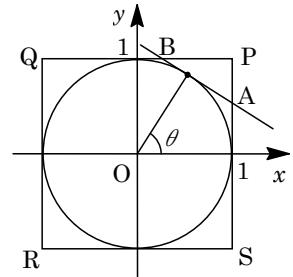
また、 $\triangle APB$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \tan\theta = \frac{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}{2\sin^2\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}{2\sin\theta \cos\theta} = \frac{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1} \dots\dots(*) \end{aligned}$$

ここで、 $t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $1 < t \leq \sqrt{2}$ となり、(*)から、

$$S = \frac{(t-1)^2}{t^2-1} = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}$$

よって、 S が最大となるのは、 $t = \sqrt{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときである。



コメント

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと、円と正方形の位置関係について、ミスをしてしまいそうです。

問 題

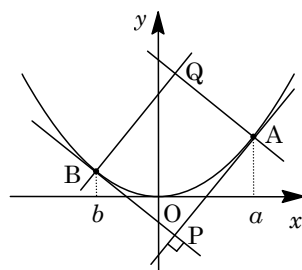
a, b を実数とし、 $a > 0$ とする。放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $A(a, \frac{a^2}{4})$, $B(b, \frac{b^2}{4})$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_A と n_A , 点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_B と n_B とおいたとき、 l_A と l_B が直交しているものとする。2 つの接線 l_A, l_B の交点を P とし、2 つの法線 n_A, n_B の交点を Q とする。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) P, Q の座標を a を用いて表せ。
- (3) 長方形 $AQBP$ の面積が最小となるような a の値と、そのときの面積を求めよ。

[2013]

解答例

- (1) $y = \frac{x^2}{4}$ より $y' = \frac{x}{2}$ となり、点 $A(a, \frac{a^2}{4})$ における接線 l_A , $B(b, \frac{b^2}{4})$ における接線 l_B の傾きは、それぞれ $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ である。



ここで、 l_A と l_B が直交していることより、

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = -1, \quad b = -\frac{4}{a} \dots\dots\dots \text{①}$$

- (2) まず、 $l_A : y - \frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}(x - a)$ より、 $y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} \dots\dots\dots \text{②}$

$$l_B : y = \frac{b}{2}x - \frac{b^2}{4} \dots\dots\dots \text{③}$$

②③を連立すると、 $\frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} = \frac{b}{2}x - \frac{b^2}{4}$ より、 $(a - b)x = \frac{a^2 - b^2}{2}$ となり、

$$x = \frac{a + b}{2}, \quad y = \frac{a}{2} \cdot \frac{a + b}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{ab}{4}$$

①を代入すると、 $x = \frac{a}{2} - \frac{2}{a}$, $y = -1$ より、 $P(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}, -1)$ となる。

また、四角形 $AQBP$ は長方形なので、対角線 AB の中点 $(\frac{a + b}{2}, \frac{a^2 + b^2}{8})$ と対角線 PQ の中点が一致することより、 $Q(x, y)$ とおくと、①から、

$$x = \frac{a + b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{2}{a}, \quad y = 2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{8} - (-1) = \frac{1}{4}(a^2 + \frac{16}{a^2}) + 1 = \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + 1$$

よって、 $Q(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}, \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + 1)$ となる。

(3) 長方形 AQBP の面積を S とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + 1 - (-1) \right\} (a-b) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + 2 \right) \left(a + \frac{4}{a} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(a^2 + \frac{16}{a^2} + 8 \right) \left(a + \frac{4}{a} \right) = \frac{1}{8} \left(a + \frac{4}{a} \right)^3 \end{aligned}$$

ここで、相加平均と相乗平均の関係より、 $a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{4} = 4$

なお、等号は、 $a = \frac{4}{a}$ すなわち $a = 2$ のとき成立する。

以上より、 S は $a = 2$ のとき最小値 $\frac{1}{8} \cdot 4^3 = 8$ をとる。

コメント

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが、長方形の性質を利用して、計算量を減らしています。

問題

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を l_a とする。

- (1) 直線 l_a が不等式 $y > -x^2 + 2x - 5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。
- (2) a が(1)で求めた範囲を動くとき、直線 l_a が通らない点 (x, y) 全体の領域 D を図示せよ。
- (3) 連立不等式 $(y - x^2)(y + x^2 - 2x + 5) \leq 0$, $y(y + 5) \leq 0$ の表す領域を E とする。
 D と E の共通部分の面積を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $y = x^2$ に対して、 $y' = 2x$ となり、点 (a, a^2) における接線 l_a の方程式は、

$$y - a^2 = 2a(x - a), \quad y = 2ax - a^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

直線 l_a が不等式 $y > -x^2 + 2x - 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$ の表す領域に含まれることより、 $\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入して、

$$2ax - a^2 > -x^2 + 2x - 5, \quad x^2 + 2(a-1)x - a^2 + 5 > 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ が任意の x に対して成立することより、

$$D/4 = (a-1)^2 - (-a^2 + 5) = 2(a^2 - a - 2) < 0$$

すると、 $(a-2)(a+1) < 0$ より、 $-1 < a < 2$ である。

(2) 直線 l_a が通らない点 (x, y) は、 $\textcircled{1}$ より、 $a^2 - 2xa + y = 0$ が $-1 < a < 2$ に実数解をもたない条件として求めることができる。

ここで、 $f(a) = a^2 - 2xa + y = (a-x)^2 - x^2 + y$ とおくと、

(i) $x \leq -1$ のとき

(a) $f(-1) = 1 + 2x + y \geq 0$ より、 $y \geq -2x - 1$

(b) $f(2) = 4 - 4x + y \leq 0$ より、 $y \leq 4x - 4$

(ii) $-1 < x < 2$ のとき

(a) $f(x) = -x^2 + y > 0$ より、 $y > x^2$

(b) $f(-1) = 1 + 2x + y \leq 0$, $f(2) = 4 - 4x + y \leq 0$ より、

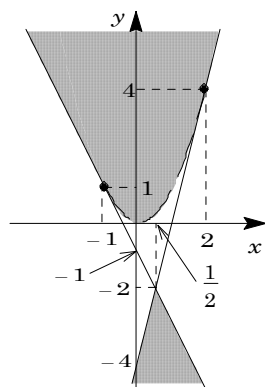
$$y \leq -2x - 1, \quad y \leq 4x - 4$$

(iii) $x \geq 2$ のとき

(a) $f(-1) = 1 + 2x + y \leq 0$ より、 $y \leq -2x - 1$

(b) $f(2) = 4 - 4x + y \geq 0$ より、 $y \geq 4x - 4$

(i)~(iii)より、点 (x, y) 全体の領域 D は右図の網点部となる。ただし、破線の境界線のみ領域に含まない。



(3) 不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5) \leq 0$ を変形すると、

$$x^2 > -x^2 + 2x - 5 \text{ より、}$$

$$-x^2 + 2x - 5 \leq y \leq x^2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

また、 $y(y+5) \leq 0$ より、

$$-5 \leq y \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

よって、連立不等式④⑤の表す領域 E は右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。

さて、直線 $y = -2x - 1$ と放物線 $y = -x^2 + 2x - 5$ を連立すると、

$$-2x - 1 = -x^2 + 2x - 5, \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

重解 $x = 2$ をもつことより、 $x = 2$ で接する。

また、直線 $y = 4x - 4$ と放物線 $y = -x^2 + 2x - 5$ を連立すると、

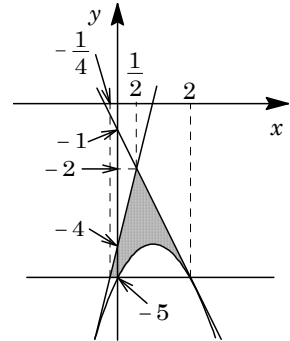
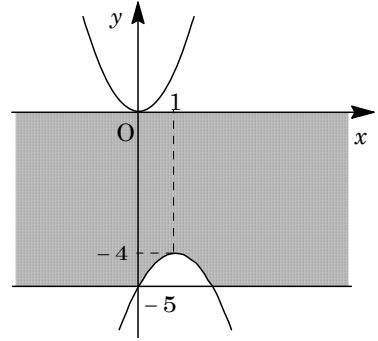
$$4x - 4 = -x^2 + 2x - 5, \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

重解 $x = -1$ をもつことより、 $x = -1$ で接する。

これより、領域 D と E の共通部分を図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。

そこで、この共通部分の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{4} \right) (-2 + 5) - \int_0^2 (-x^2 + 2x - 5 + 5) dx \\ &= \frac{27}{8} - \int_0^2 -x(x-2) dx = \frac{27}{8} - \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{49}{24} \end{aligned}$$



コメント

計算量の多い問題で、時間はかなり必要です。(2)はオーソドックスに解きましたが、図形的に解くのが出題者の意図かもしれません。

問題

a は正の実数とし、座標平面上の直線 $l: y = x$ と放物線 $C: y = ax^2$ を考える。 C 上の点 (x, y) (ただし $0 < x < \frac{1}{a}$) で l との距離を最大にする点を $P(s, t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) d, s, t をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。
- (2) 実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき、点 $P(s, t)$ の軌跡を求め、図示せよ。

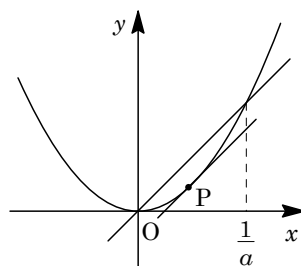
[2011]

解答例

(1) 直線 $l: y = x$ と放物線 $C: y = ax^2$ ……①の交点は、

$$ax^2 = x, \quad x = 0, \quad \frac{1}{a}$$

さて、 $0 < x < \frac{1}{a}$ において、 C 上の点 $P(s, t)$ と l との距離が最大になるのは、 P における C の接線が l と平行になるときである。



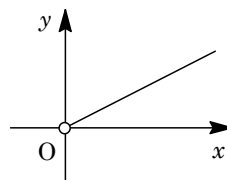
すなわち、 C の接線の傾きが 1 であるときより、①から、 $2ax = 1, x = \frac{1}{2a}$ となり、

$$s = \frac{1}{2a} \text{ ……②}, \quad t = a\left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a} \text{ ……③}$$

このとき、 P と l との距離 d は、 $d = \frac{\left|\frac{1}{2a} - \frac{1}{4a}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{8a}$

(2) ②③より、 $t = \frac{1}{2}s$ となり、 $a > 0$ から $s > 0$ である。

よって、点 P の軌跡は、半直線 $y = \frac{1}{2}x$ ($x > 0$) である。また、これを図示すると、右図のようになる。



コメント

(1)は図形的に解きましたが、問題文から推測すると、出題者の意向に沿った解法とは言えないでしょう。

問題

放物線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 A, B は、直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\frac{1}{6}$ になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき、直線 AB が通りうる点の範囲を求め、図示せよ。 [2003]

解答例

$A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2) (\alpha < \beta)$ とおくと、直線 AB の方程式は、

$$y - \alpha^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha), \quad y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件より、 $\int_{\alpha}^{\beta} \{(\alpha + \beta)x - \alpha\beta - x^2\} dx = \frac{1}{6}, \quad -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}$

$$-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}, \quad \beta - \alpha = 1, \quad \beta = \alpha + 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{を} \textcircled{1} \text{に代入して、} y = (2\alpha + 1)x - \alpha(\alpha + 1) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

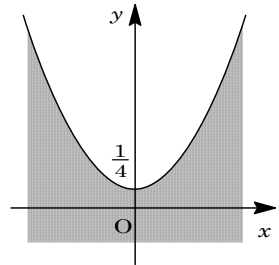
α が任意の実数値をとるとき、直線 $\textcircled{3}$ が通過する点 (x, y) は、 $\textcircled{3}$ を α についての 2 次方程式としてみたとき、実数解をもつ (x, y) の条件として求められる。

$$\textcircled{3} \text{から、} y = 2\alpha x + x - \alpha^2 - \alpha, \quad \alpha^2 + (1 - 2x)\alpha - x + y = 0$$

$$D = (1 - 2x)^2 - 4(-x + y) = 1 + 4x^2 - 4y \geq 0$$

よって、 $y \leq x^2 + \frac{1}{4}$ より、直線 AB が通りうる点の領域は

右図の網点部である。ただし、境界は領域に含む。



コメント

直線の通過領域を求める頻出問題です。なお、 $\textcircled{3}$ で x の値を固定して y の値の範囲を考えると、 $\textcircled{3}$ を $y = -\alpha^2 + (2x - 1)\alpha + x = -\left(\alpha - \frac{2x - 1}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{1}{4}$ と変形をして、 $y \leq x^2 + \frac{1}{4}$ を導きます。

問題

座標平面上に、中心がそれぞれ点(0, 1), 点(2, 1)で、同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

- (1) 2 円 C_1, C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。
- (2) さらに、2 円 C_1, C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。 [2002]

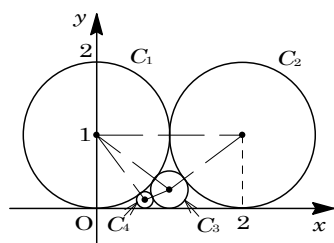
解答例

- (1) 円 C_3 の半径を r とすると、2 円 C_1, C_2 は同じ半径なので、 C_3 の中心の座標は $(1, r)$ となる。

円 C_1 と C_3 が接することより、

$$(1+r)^2 = (1-r)^2 + 1^2, \quad 2r = -2r + 1$$

よって、 $r = \frac{1}{4}$ より、円 C_3 の中心の座標は $(1, \frac{1}{4})$



である。

- (2) 円 C_4 の中心の座標を (s, t) とおくと、半径は t となる。

円 C_1 と C_4 が接することより、

$$(1+t)^2 = (1-t)^2 + s^2, \quad 4t = s^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

円 C_3 と C_4 が接することより、

$$\left(\frac{1}{4} + t\right)^2 = \left(\frac{1}{4} - t\right)^2 + (1-s)^2, \quad t = 1 - 2s + s^2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } 4 - 8s + 4s^2 = s^2, \quad 3s^2 - 8s + 4 = 0, \quad (3s - 2)(s - 2) = 0$$

$$0 < s < 1 \text{ より } s = \frac{2}{3} \text{ となり, } \textcircled{1} \text{ より } t = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

よって、円 C_4 の中心の座標は $(\frac{2}{3}, \frac{1}{9})$ である。

コメント

頻出問題です。本年度は、名大・文系で同様な問題が出ています。

問題

直線 $y = -x$ と放物線 $y = x^2 + 2x$ とで囲まれた図形を D とする。

- (1) D の面積 S_1 を求めよ。
- (2) D を x 軸の正の方向に m だけ平行移動して、不等式 $y \geq -2x + 3$ の表す領域に含まれるように移す。 m の最小値 m_1 を求めよ。
- (3) m_1 を(2)で求めた最小値とする。 D を x 軸の正の方向に m_1 だけ平行移動するとき、 D が通過する範囲を図示し、その面積 S_2 を求めよ。 [1999]

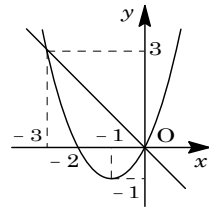
解答例

- (1) 直線 $y = -x$ ……①, 放物線 $y = x^2 + 2x$ ……②

①②の交点は、 $-x = x^2 + 2x$ より、 $x = 0, -3$

$$S_1 = \int_{-3}^0 (-x - x^2 - 2x) dx = - \int_{-3}^0 x(x+3) dx$$

$$= - \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot 3^3 = \frac{9}{2}$$



- (2) ②を x 軸方向に m だけ平行移動すると、

$$y = (x - m)^2 + 2(x - m) = x^2 - (2m - 2)x + m^2 - 2m \dots\dots\dots③$$

③と $y = -2x + 3$ ……④が接するとき、

$$x^2 - (2m - 2)x + m^2 - 2m = -2x + 3$$

$$x^2 - (2m - 4)x + m^2 - 2m - 3 = 0 \dots\dots\dots⑤$$

重解条件より $D/4 = (m - 2)^2 - (m^2 - 2m - 3) = 0$ なので、 $m = \frac{7}{2}$ となる。

⑤の重解は $x = m - 2 = \frac{3}{2}$ となり、またこのとき④より $y = 0$ なので、③と④の接

点は図形 D の境界線上にある。

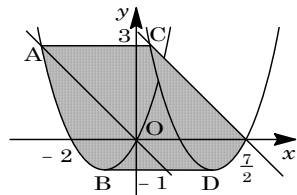
よって、 m の最小値 m_1 は、 $m_1 = \frac{7}{2}$ である。

- (3) 図形 D が通過する範囲の面積 S_2 は、 D の面積 S_1 に線分 AC , BD と弧 AB , CD によって囲まれた図形の面積を加えたものである。

この図形 $ABDC$ の面積は、平行四辺形 $ABDC$ の面積に等しいので、

$$m_1 \times \{3 - (-1)\} = \frac{7}{2} \cdot 4 = 14$$

よって、 $S_2 = S_1 + 14 = \frac{37}{2}$



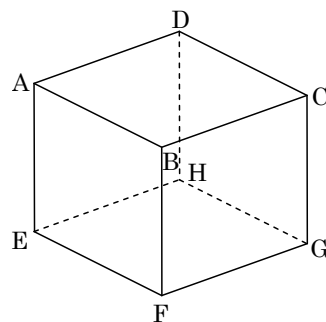
コメント

(3)の通過範囲の面積は、移動距離に注目すると、積分するまでもありません。

問題

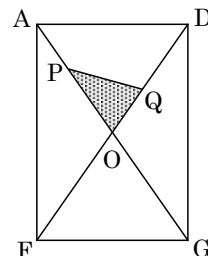
右図のような1辺の長さが2の立方体 ABCD-EFGH に対して、対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $OQ = 2AP - 1$ を満たしながら動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。ただし、点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。

[2018]



解答例

1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して、対角線 AG と DF を含む断面は、右図の長方形 AFGD である。



ここで、 $AD = FG = 2$, $AF = DG = 2\sqrt{2}$ から、

$$AG = DF = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}, \quad OA = OD = \sqrt{3}$$

また、 $\angle AOD = 2\angle AFD$ であり、

$$\sin \angle AFD = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \angle AFD = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

これより、 $\sin \angle AOD = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ となる。

さて、 $OP = x$ ($0 < x \leq \sqrt{3}$) とおくと、条件より、

$$OQ = 2AP - 1 = 2(\sqrt{3} - x) - 1 = -2x + 2\sqrt{3} - 1$$

すると、 $0 < -2x + 2\sqrt{3} - 1 \leq \sqrt{3}$ から $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq x < \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ となり、 $0 < x \leq \sqrt{3}$ と

合わせて $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq x < \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ……(*)となる。

そこで、 $\triangle OPQ$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OP \cdot OQ \sin \angle AOD = \frac{1}{2} x (-2x + 2\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(x^2 - \frac{2\sqrt{3}-1}{2} x \right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(x - \frac{2\sqrt{3}-1}{4} \right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{24} (2\sqrt{3}-1)^2 \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(x - \frac{2\sqrt{3}-1}{4} \right)^2 + \frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24} \end{aligned}$$

よって、(*)から、 $\triangle OPQ$ の面積 S は $x = \frac{2\sqrt{3}-1}{4}$ のとき最大値 $\frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24}$ をとる。

コメント

図形の計量に関する基本的な問題です。ただ、最後の平方完成はやや難ですが。

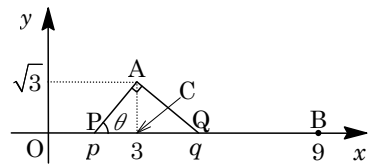
問題

座標平面上に3点 $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(9, 0)$ がある。線分 OB 上に2点 P, Q を $\angle PAQ = 90^\circ$ となるようにとる。ただし、点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。 $\angle APQ = \theta$ とし、 $\triangle APQ$ の面積を S とする。

- (1) S を θ を用いて表せ。
- (2) S の最小値、およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。
- (3) S が $\triangle AOB$ の面積の $\frac{2}{3}$ 倍となるとき、点 P と点 Q の x 座標を求めよ。 [2017]

解答例

- (1) $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(9, 0)$ に対し、線分 OB 上に点 $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$ があり、 $\angle PAQ = 90^\circ$ を満たしている。ただし、 $0 \leq p < 3 < q \leq 9$ である。



$$\angle APQ = \theta \text{ とすると, } AP \sin \theta = \sqrt{3} \dots\dots\dots ①$$

$$AQ \sin(90^\circ - \theta) = \sqrt{3}, \quad AQ \cos \theta = \sqrt{3} \dots\dots\dots ②$$

ここで、 $\triangle APQ$ の面積を S とすると、①②から、

$$S = \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sin \theta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta} = \frac{3}{\sin 2\theta}$$

- (2) まず、(1)から $S = \frac{3}{\sin 2\theta} \geq 3$ である。ここで、等号が成立するのは $\sin 2\theta = 1$, すなわち θ は鋭角から $\theta = 45^\circ$ のときである。

このとき、 $\triangle APQ$ は直角二等辺三角形となり、 $C(3, 0)$ とおくと $PC = QC = \sqrt{3}$ から、 P, Q はともに線分 OB 上にある。

よって、 S の最小値は 3 であり、このとき P の x 座標は $3 - \sqrt{3}$, Q の x 座標は $3 + \sqrt{3}$ となる。

- (3) まず、 $\triangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2} \sqrt{3}$ となり、条件より $S = \frac{2}{3} \triangle AOB$ から、

$$\frac{3}{\sin 2\theta} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} \sqrt{3}, \quad \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \dots\dots\dots ③$$

ここで、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ なので、③と合わせると、

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2\sqrt{3}, \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2\sqrt{3}, \quad \tan^2 \theta - 2\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$$

よって、 $\tan \theta = \sqrt{3} \pm \sqrt{2} \dots\dots\dots ④$ となる。

さて、 $PC = \sqrt{3} \tan(90^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta}$, $QC = \sqrt{3} \tan \theta$ で、条件から、 $0 < PC \leq 3$,

$0 < QC \leq 6$ であるので、

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta} \leq 3 \dots\dots\dots ⑤, \quad 0 < \sqrt{3} \tan \theta \leq 6 \dots\dots\dots ⑥$$

⑤より $\tan \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, ⑥より $0 < \tan \theta \leq 2\sqrt{3}$ となり $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan \theta \leq 2\sqrt{3}$

すると, ④から $\tan \theta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ となり, このとき,

$$PC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 3 - \sqrt{6}, \quad QC = \sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 + \sqrt{6}$$

よって, P の x 座標 $3 - (3 - \sqrt{6}) = \sqrt{6}$, Q の x 座標 $3 + (3 + \sqrt{6}) = 6 + \sqrt{6}$ である。

コメント

三角関数の図形への応用問題で, いろいろな解法が考えられます。