《2019 入試対策》

一橋大学

数　学

1998—2018

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された一橋大学（前期日程）の数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

なお，映像解説の一覧は，下記のページに掲載しています。

PC サイト トップページ ≫ 一橋大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 実数 a, b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす。

(1) $\log_3 a+\log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\log_2 a+\log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ。　[2017]

2 $P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。　[2017]

3 (1) 任意の角 θ に対して，$-2 \leqq x\cos\theta+y\sin\theta \leqq y+1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2) 任意の角 α，β に対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha+y\sin\beta \leqq 1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2009]

4 k を正の整数とする。$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n が，ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。　[2008]

5 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は異なる 3 つの解 p，q，r をもつ。さらに，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$ も同じ方程式の異なる 3 つの解である。a, b, c, p, q, r の組をすべて求めよ。　[2008]

6 $0° \leqq \theta < 360°$ を満たす θ と正の整数 m に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める。

$$f_m(\theta)=\sum_{k=0}^{m}\sin(\theta+60°\times k)$$

(1) $f_5(\theta)$ を求めよ。

(2) θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) m がすべての正の整数を動き，θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ。　[2005]

7 a, b を整数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 α，β，γ をもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α，β，γ のうちどれかは整数である。a, b を求めよ。　[2001]

■ 微分と積分

1 a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点をもつ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。 [2018]

2 a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2016]

3 $0<t<1$ とし，放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を l とする。C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，C と l と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1+S_2 の最小値を求めよ。 [2014]

4 原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。 [2013]

5 a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。 [2012]

6 xy 平面上に放物線 $C: y=-3x^2+3$ と 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ 3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

(1) 定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2) S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。 [2011]

7 a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が，曲線 $y=x^3-3ax^2$ とそれぞれ点 A, 点 B で接している。

(1) 線分 AB の中点を C とすると, C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線 AB の方程式が $y=-x-1$ であるとき, a, m の値を求めよ。 [2010]

8　a を定数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+a$ とする。$x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。　[2007]

9　k は整数であり，3 次方程式 $x^3-13x+k=0$ は 3 つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。　[2005]

10　a は実数とし，$f(x)=x^3+ax^2-8a^2x$，$g(x)=3ax^2-9a^2x$ とおく。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する直線が存在する。このとき P の座標を a で表せ。

(2)　次の条件(i)および(ii)を満たす直線 l が 3 本存在するような点 $(u,\ v)$ の範囲を図示せよ。

(i)　l は点 $(u,\ v)$ を通る。

(ii)　l は曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する。

[2004]

11　$f(x)=x^3-x^2-x-1$，$g(x)=x^2-x-1$ とする。

(1)　方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解 α をもつことを示せ。また，$1<\alpha<2$ であることを示せ。

(2)　方程式 $g(x)=0$ の正の解を β とする。α と β の大小を比較せよ。

(3)　α^2 と β^3 の大小を比較せよ。　[2003]

12　c を正の定数とし，$f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=x^3+3x^2+c$ とする。直線 l は点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ で曲線 $y=f(x)$ と接し，点 $\mathrm{Q}(q,\ g(q))$ で曲線 $y=g(x)$ と接する。

(1)　c を p で表せ。

(2)　直線 l と曲線 $y=f(x)$ の P 以外の交点を R とする。2 つの線分の長さの比 $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}$ を求めよ。　[2000]

13　(1)　曲線 $y=x^3$ と直線 $y=3x+a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲を動くとき，3 つの交点を A, B, C とし，点 $(a,\ 4a)$ を D とする。3 つの線分の長さの積 $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値を求めよ。　[1999]

14　放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく。ただし，$a<b$ とする。

(1)　2 直線 $l,\ m$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ。

(2)　点 C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ。

[1998]

■ 図形と式

1　$-1\leqq t\leqq 1$ とし，曲線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線を l とする。半円 $x^2+y^2=1$　$(y\leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積を S とする。S のとりうる値の範囲を求めよ。　[2018]

2　正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $|ax+by|\leqq 1$，$|cx-by|\leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。[2017]

3　座標平面上の原点を O とする。点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ および点 C が，$\mathrm{OC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ を満たしながら動く。

(1)　$s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2)　△ABC の面積のとりうる値の範囲を求めよ。　[2015]

4　円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 P における接線を l とする。点 $(1,\ 0)$ を通り l と平行な直線を m とする。直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点を P' とする。ただし，m が直線 $x=1$ のときは P' を $(1,\ 0)$ とする。円 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から点 $\mathrm{P}'(s',\ t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ。

(1)　s'，t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ。

(2)　点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく。P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，P_1，P_2，P_3 を図示せよ。

(3)　正の整数 n について，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となるような点 P の個数を求めよ。　[2014]

5 定数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，平面上の点 $(p,\ q)$ を点 $(ap+bq,\ cp+dq)$ に移す操作を考える。ただし，$(a,\ b,\ c,\ d)\neq(1,\ 0,\ 0,\ 1)$ である。k を 0 でない定数とする。放物線 $C: y=x^2-x+k$ 上のすべての点は，この操作によって C 上に移る。

(1) a, b, c, d を求めよ。

(2) C 上の点 A における C の接線と，点 A をこの操作によって移した点 A$'$ における C の接線は，原点で直交する。このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ。

[2012]

6 $p,\ q$ を実数とする。放物線 $y=x^2-2px+q$ が，中心 $(p,\ 2q)$ で半径 1 の円と中心 $(p,\ p)$ で半径 1 の円の両方と共有点をもつ。この放物線の頂点が存在しうる領域を xy 平面上に図示せよ。 [2009]

7 a を正の実数とする。点 $(x,\ y)$ が，不等式 $x^2\leqq y\leqq x$ の定める領域を動くとき，つねに $\dfrac{1}{2}\leqq(x-a)^2+y\leqq 2$ となる。a の値の範囲を求めよ。 [2008]

8 放物線 $y=ax^2+bx\ (a>0)$ を C とする。C 上に異なる 2 点 P, Q をとり，その x 座標をそれぞれ $p, q\ (0<p<q)$ とする。

(1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が，△OPQ の面積の $\dfrac{3}{2}$ 倍であるとき，p と q の関係を求めよ。ただし, O は原点を表す。

(2) Q を固定して P を動かす。△OPQ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また，そのときの△OPQ の面積と，線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。

[2007]

9 $a,\ b$ を正の定数とする。関数 $y=x^3-ax$ のグラフと，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし，P の x 座標は負，Q の x 座標は正である。

(1) 直線 PQ の方程式を a と b で表せ。

(2) P および Q の座標を a と b で表せ。

(3) $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ。ただし，O は原点である。

[2006]

10 原点を中心とする半径 1 の円を C とし, $0<a<1$, $b>1$ とする。$\mathrm{A}(a,\ 0)$ と $\mathrm{N}(0,\ 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく。また, $\mathrm{B}(b,\ 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく。

(1) P の座標を a で表せ。

(2) $\mathrm{AQ} \,/\!/\, \mathrm{PB}$ のとき, $\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$ となることを示せ。

(3) $\mathrm{AQ} \,/\!/\, \mathrm{PB}$, $\angle\mathrm{ANB}=45^\circ$ のとき, a の値を求めよ。 [2005]

11 a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\quad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1) 2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた範囲に属する a に対して, 2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くとき, 少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。 [2005]

12 a, b, c は 0 以上の実数とする。3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(1,\ c)$ は, $\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ を満たす。

(1) c を求めよ。

(2) AB の長さの最大値と最小値を求めよ。 [2002]

13 放物線 $y=x^2$ 上に, 直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。 [2001]

■ 図形と計量

1 半径 1 の球が直円錐に内接している。この直円錐の底面の半径を r とし, 表面積を S とする。

(1) S を r を用いて表せ。

(2) S の最小値を求めよ。 [2014]

2　平面上の 4 点 O, A, B, C が，OA$=4$，OB$=3$，OC$=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，△ABC の面積の最大値を求めよ。 [2013]

3　点 O を中心とする半径 r の円周上に，2 点 A, B を $\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとり，$\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とおく。この円周上に点 C を，線分 OC が線分 AB と交わるようにとり，線分 AB 上に点 D をとる。また，点 P は線分 OA 上を，点 Q は線分 OB 上を，それぞれ動くとする。

(1)　$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$ の最小値を r と θ で表せ。

(2)　$a=\mathrm{OD}$ とおく。$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を a と θ で表せ。

(3)　さらに，点 D が線分 AB 上を動くときの $\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を r と θ で表せ。

[2011]

4　座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし，△ABC の重心は原点の位置にあり，辺 BC は x 軸と平行である。また，頂点 A は y 軸上にあって y 座標は正であり，頂点 C の x 座標は正である。直線 $y=x$ に関して 3 点 A, B, C と対称な点を，それぞれ A′，B′，C′ とする。

(1)　C′ の座標を求めよ。

(2)　△ABC と △A′B′C′ が重なる部分の面積を求めよ。 [2006]

5　H を 1 辺の長さが 1 の正六角形とする。

(1)　H の中にある正方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

(2)　H の中にある長方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。 [2004]

6　頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1)　円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2)　円錐の体積の最小値を求めよ。 [2002]

7　四面体 OAPQ において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle\mathrm{PAQ}=30^\circ$ である。

(1)　$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ のとりうる範囲を求めよ。

(3)　四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ。　[2001]

8　三角形 ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ である。辺 AB 上に $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点 D をとる。辺 AC 上に $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を満たす点 P が 2 つ存在するための k の条件を求めよ。ただし，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ はベクトルの長さを表し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトルの内積を表す。　[2000]

9　三角すい ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である。$\mathrm{AB}=3$ で，辺 AB 上の 2 点 E，F は，$\mathrm{AE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FB}=1$ を満たし，$\angle\mathrm{DAC}=30^\circ$，$\angle\mathrm{DEC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{DBC}=60^\circ$ である。

(1)　辺 CD の長さを求めよ。

(2)　$\theta=\angle\mathrm{DFC}$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ。　[2000]

■ ベクトル

1　p，q を正の実数とする。原点を O とする座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 1)$ は $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{6}$ を満たす。四面体 OPQR の体積の最大値を求めよ。　[2018]

2　xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k，yz 平面上の直線 $y=z+1$ を l，xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする。直線 k 上に点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる。l 上の点 P_2 を $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\perp l$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\perp k$ となるように定める。以下，同様の手順で l，m，k，l，m，k，…上の点 P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}，…を定める。

(1)　点 P_2，P_3 の座標を求めよ。

(2)　線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを n を用いて表せ。　[2017]

3　平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は $60°$ である。このとき，$r=\dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$ のとり得る値の範囲を求めよ。　[2016]

4　xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1)　線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2)　線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。　[2015]

5　t を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 $\mathrm{A}(2t,\ 2t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。　[2013]

6　xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり，平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1)　$\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$ とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　平面 $z=1$ 上に，4 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{D}(-1,\ 1,\ 1)$ をとる。点 P が平面 $z=2$ で点 $(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2012]

7　$a,\ b,\ c$ を正の定数とする。空間内に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ がある。

(1)　辺 AB を底辺とするとき，△ABC の高さを $a,\ b,\ c$ で表せ。

(2)　△ABC，△OAB，△OBC，△OCA の面積をそれぞれ S，S_1，S_2，S_3 とする。ただし，O は原点である。このとき，不等式 $\sqrt{3}S \geqq S_1+S_2+S_3$ が成り立つことを示せ。

(3)　(2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。　[2011]

8　原点を O とする xyz 空間内で，x 軸上の点 A，xy 平面上の点 B，z 軸上の点 C を次を満たすように定める。$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OBC}=\theta$，$\angle\mathrm{AOB}=2\theta$，$\mathrm{OC}=3$

ただし，A の x 座標，B の y 座標，C の z 座標はいずれも正であるとする。さらに，$\triangle\mathrm{ABC}$ 内の点のうち，O からの距離が最小の点を H とする。また，$t=\tan\theta$ とおく。

(1)　線分 OH の長さを t の式で表せ。

(2)　H の z 座標を t の式で表せ。　[2010]

9　正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を $2:1$ に内分する点を P，辺 OB を $1:2$ に内分する点を Q とし，$0<t<1$ を満たす t に対して，辺 OC を $t:1-t$ に内分する点を R とする。

(1)　PQ の長さを求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が最小となるときの t の値を求めよ。　[2008]

10　大きさがそれぞれ 5，3，1 の平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対して，$\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\vec{a}$ を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ を満たすように $\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。　[2006]

11　a，c を実数とする。空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ a)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ 5)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ c)$ は同一平面上にある。

(1)　c を a で表せ。

(2)　四角形 OABC の面積の最小値を求めよ。　[2003]

12　三角形 ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$ である。辺 AC 上の点 D は $\mathrm{BD}\perp\mathrm{AC}$ を満たし，辺 AB 上の点 E は $\mathrm{CE}\perp\mathrm{AB}$ を満たす。CE と BD の交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 r を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t を求めよ。　[1999]

13　△ABC の 3 辺 BC, CA, AB を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_1，B_1，C_1 とおき，△$A_1B_1C_1$ の 3 辺 B_1C_1，C_1A_1，A_1B_1 を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とおく。ただし，$0<t<1$ とする。

(1)　△$A_2B_2C_2$ の辺 B_2C_2 が△ABC のいずれかの辺と平行となる t の値を求めよ。

(2)　(1)のとき，△$A_2B_2C_2$ は△ABC に相似であることを示し，その相似比を求めよ。

[1998]

■ 整数と数列

1　正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す。たとえば

$$S(3)=3,\ S(10)=1+0=1,\ S(516)=5+1+6=12$$

である。

(1)　$n \geqq 10000$ のとき，不等式 $n>30S(n)+2018$ を示せ。

(2)　$n=30S(n)+2018$ を満たす n を求めよ。　[2018]

2　連立方程式 $x^2=yz+7$，$y^2=zx+7$，$z^2=xy+7$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ。　[2017]

3　$6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。　[2016]

4　θ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=\cos\theta,\ a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。すべての n について $a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ。

[2016]

5　n を 2 以上の整数とする。n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す。たとえば，$E(2)=1$，$E(3)=2$，$E(4)=2$，$\cdots$，$E(10)=4$，$\cdots$ である。

(1)　$E(1024)$ を求めよ。

(2)　$E(2015)$ を求めよ。

(3)　m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする。$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。　[2015]

6　数列$\{a_k\}$を$a_k=k+\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$で定める。$n$を正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}a_k$を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2$を求めよ。　[2015]

7　$a-b-8$と$b-c-8$が素数となるような素数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。

[2014]

8　$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$を満たす正の整数p,qの組をすべて求めよ。

[2013]

9　1つの角が120°の三角形がある。この三角形の3辺の長さ$x,\ y,\ z$は$x<y<z$を満たす整数である。

(1)　$x+y-z=2$を満たすx,y,zの組をすべて求めよ。

(2)　$x+y-z=3$を満たすx,y,zの組をすべて求めよ。

(3)　$a,\ b$を0以上の整数とする。$x+y-z=2^a3^b$を満たす$x,\ y,\ z$の組の個数をaとbの式で表せ。　[2012]

10　(1)　自然数x,yは，$1<x<y$および$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$を満たす。$x,y$の組をすべて求めよ。

(2)　自然数$x,\ y,\ z$は，$1<x<y<z$および$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$を満たす。$x,\ y,\ z$の組をすべて求めよ。　[2011]

11　実数 p, q, r に対して, 3 次多項式 $f(x)$ を $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ と定める。実数 a, c, および 0 でない実数 b に対して, $a+bi$ と c はいずれも方程式 $f(x)=0$ の解であるとする。ただし, i は虚数単位を表す。

(1)　$y=f(x)$ のグラフにおいて, 点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし, 点 $(c,\ f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。$a\neq c$ のとき, $s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2)　さらに, a, c は整数であり, b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i)　p, q, r はすべて整数である。

(ii)　p が 2 の倍数であり, q が 4 の倍数であるならば, a, b, c はすべて 2 の倍数である。　[2010]

12　0 以上の整数 a_1, a_2 が与えられたとき, 数列 $\{a_n\}$ を, $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ により定める。

(1)　$a_1=1$, $a_2=2$ のとき, a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　$a_2=3a_1$ のとき, $a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。　[2010]

13　2 以上の整数 m, n は $m^3+1^3=n^3+10^3$ を満たす。m, n を求めよ。　[2009]

14　m を整数とし, $f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ とする。

(1)　整数 a と, 0 ではない整数 b で, $f(a+bi)=0$ を満たすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし, i は虚数単位である。

(2)　(1)で求めたすべての m に対して, 方程式 $f(x)=0$ を解け。　[2007]

15　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を, $a_1=2$, $a_{n+1}=4a_n$, $b_1=3$, $b_{n+1}=b_n+2a_n$, $c_1=4$, $c_{n+1}=\dfrac{c_n}{4}+a_n+b_n$ と順に定める。放物線 $y=a_nx^2+2b_nx+c_n$ を H_n とする。

(1)　H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ。

(2)　H_n と x 軸の交点を P_n, Q_n とする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ を求めよ。　[2007]

16 次の条件(a), (b)をともに満たす直角三角形を考える。ただし, 斜辺の長さを p, その他の 2 辺の長さを q, r とする。

(a) p, q, r は自然数で, そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b) $p+q+r=132$

(1) q, r のどちらかは偶数であることを示せ。

(2) p, q, r の組をすべて求めよ。 [2006]

17 a, b, c は整数で, $a<b<c$ を満たす。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$, $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ をとる。

(1) $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし, $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。

(2) $a=-3$ のとき, $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ となる組$(b,\ c)$をすべて求めよ。 [2004]

18 (1) 正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

(2) 正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。 [2003]

19 k, x, y は正の整数とする。三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x}$, $\dfrac{k}{y}$, $\dfrac{1}{xy}$ で, 周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である。k, x, y を求めよ。 [2002]

20 a, b, c, d を正の整数とする。複素数 $w=a+bi$, $z=c+di$ が $w^2z=1+18i$ を満たす。a, b, c, d を求めよ。 [2000]

21 p, q は素数で, $p<q$ とする。

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは, $p=2$, $q=3$ のときに限ることを示せ。 [1999]

22 正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく。正の整数の組$(a,\ b)$は, 条件 $0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$, $0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ をみたすとする。

(1) $a-r(a)$ と $r(b)$ を求めよ。

(2) a と b を求めよ。 [1998]

23　数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=2a_n+3^n$　$(n=1,\ 2,\cdots\cdots)$で定める。

(1)　$b_n=a_n-3^n$とおく。b_{n+1}をb_nで表せ。

(2)　a_nを求めよ。

(3)　$a_n<10^{10}$をみたす最大の正の整数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$としてよい。　[1998]

■ 確率

1　3個のさいころを投げる。

(1)　出た目の積が6となる確率を求めよ。

(2)　出た目の積がkとなる確率が$\dfrac{1}{36}$であるようなkをすべて求めよ。　[2018]

2　硬貨が2枚ある。最初は2枚とも表の状態で置かれている。次の操作をn回行ったあと，硬貨が2枚とも裏になっている確率を求めよ。

［操作］2枚とも表，または2枚とも裏のときには，2枚の硬貨両方を投げる。表と裏が1枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる。　[2016]

3　xは0以上の整数である。右の表は2つの科目XとYの試験を受けた5人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤
科目Xの得点	x	6	4	7	4
科目Yの得点	9	7	5	10	9

(1)　$2n$ 個の実数a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_nについて，$a=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$，$b=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k$とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ。

(2)　科目Xの得点と科目Yの得点の相関係数r_{XY}をxで表せ。

(3)　xの値を2増やしてr_{XY}を計算しても値は同じであった。このとき，r_{XY}の値を四捨五入して小数第1位まで求めよ。　[2016]

4　nを4以上の整数とする。正n角形の2つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線をlとする。さらに，残りの$n-2$個の頂点から2つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線をmとする。直線lとmが平行になる確率を求めよ。　[2015]

5　$a,\ b,\ c$ は異なる 3 つの正の整数とする。次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする。

(1)　科目 X の得点の分散を ${s_{\mathrm{X}}}^2$，科目 Y の得点の分散を ${s_{\mathrm{Y}}}^2$ とする。$\dfrac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}$ を求めよ。

(2)　科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を，四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

(3)　科目 X の得点の中央値が 65，科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき，$a,\ b,\ c$ の組を求めよ。　[2015]

6　数直線上の点 P を次の規則で移動させる。1 枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる。P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする。

(1)　$a_3=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_4=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ。　[2014]

7　サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1)　s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。　[2013]

8　最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている。その後，4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び，その面が上面となるように置き直す操作を n 回繰り返す。なお，サイコロの向かい合う面の目の数の和は 7 である。

(1)　最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ。

(2)　最後に上面にある目の数の期待値を求めよ。　[2012]

9　A と B の 2 人が, 1 個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1 回めは A が投げる。

1, 2, 3 の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4, 5 の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6 の目が出たら，投げた人を勝ちとし，それ以降は投げない。

(1)　n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ。

(2)　ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ。

(3)　n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ。　[2011]

10　n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ，出た目の数をそれぞれ順に X_1，X_2，…，X_n とする。$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して $X_i=X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

(1)　A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。

(2)　A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。　[2010]

11　X, Y, Z と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。この中から 1 枚のカードが選ばれたとき, xy 平面上の点 P を次の規則にしたがって移動する。

・X のカードが選ばれたとき, P を x 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

・Y のカードが選ばれたとき, P を y 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

・Z のカードが選ばれたとき, P は移動せずそのままの位置にとどまる。

(1)　n を正の整数とする。最初，点 P を原点の位置におく。X のカードと Y のカードの 2 枚から無作為に 1 枚を選び，P を，上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i)　n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)　P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。

(2)　n を正の 3 の倍数とする。最初，点 P を原点の位置におく。X のカード，Y のカード, Z のカードの 3 枚のカードから無作為に 1 枚を選び, P を，上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i)　n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)　P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。　[2009]

12　n を 3 以上の整数とする。$2n$ 枚のカードがあり，そのうち赤いカードの枚数は 6，白いカードの枚数は $2n-6$ である。これら $2n$ 枚のカードを，箱 A と箱 B に n 枚ずつ無作為に入れる。2 つの箱の少なくとも一方に赤いカードがちょうど k 枚入っている確率を p_k とする。

(1)　p_2 を n の式で表せ。さらに，p_2 を最大にする n をすべて求めよ。

(2)　$p_1+p_2<p_0+p_3$ を満たす n をすべて求めよ。　[2008]

13　1 が書かれたカードが 1 枚，2 が書かれたカードが 1 枚，…，n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出して元に戻す操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a，b，c とするとき，得点 X を次の規則(i)，(ii)に従って定める。

(i)　a，b，c がすべて異なるとき，X は a，b，c のうちの最大でも最小でもない値とする。

(ii)　a，b，c のうちに重複しているものがあるとき，X はその重複した値とする。

$1\leqq k\leqq n$ を満たす k に対して，$X=k$ となる確率を p_k とする。

(1)　p_k を n と k で表せ。

(2)　p_k が最大となる k を n で表せ。　[2007]

14　1，2，3，4 が 1 つずつ記された 4 枚のカードがある。これらのカードから 1 枚を抜き出し元に戻すという試行を n 回繰り返す。抜き出した n 個の数の和を X_n とし，積を Y_n とする。

(1)　$X_n\leqq n+3$ となる確率を n で表せ。

(2)　Y_n が 8 で割り切れる確率を n で表せ。　[2006]

15　A と B の 2 人があるゲームを繰り返し行う。1 回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は p，B が A に勝つ確率は $1-p$ であるとする。n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になる確率を x_n とする。

(1)　x_n を p と n で表せ。

(2)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，x_n を最大にする n を求めよ。　[2005]

16　n 枚のカードがあり, 1 枚目のカードに 1, 2 枚目のカードに 2, …, n 枚目のカードに n が書かれている。これらの n 枚のカードのから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し, もう一度無作為に 1 枚を取り出す。取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x, y とする。また, k を n の約数とする。

(1)　$x+y$ が k の倍数となる確率を求めよ。

(2)　さらに, $k=pq$ とする。ただし, p, q は異なる素数である。xy が k の倍数となる確率を求めよ。　[2004]

17　1 が書かれたカードが 2 枚, 2 が書かれたカードが 2 枚, …, n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1 枚ずつ左から順に並べる。このとき, カードに書かれている数の列を, a_1, a_2, …, a_{2n} とする。$a_k \geqq a_{k+1}$ $(1 \leqq k < 2n)$ となる最小の k を X とする。

(1)　$X=1$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=n$ となる確率を求めよ。

(3)　m は $1 \leqq m < n$ を満たす整数とする。$X \geqq m$ となる確率を求めよ。　[2003]

18　最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ, 裏が出た硬貨を取り除く。次の試行で残った硬貨を同時に投げ, 裏が出た硬貨を取り除く。以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまでくり返す。

(1)　試行が 1 回目で終了する確率 p_1, および 2 回目で終了する確率 p_2 を求めよ。

(2)　試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ。　[2002]

19　1 個のサイコロを n 回投げる。

(1)　$n \geqq 2$ のとき, 1 の目が少なくとも 1 回出て, かつ 2 の目も少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ のとき, 1 の目が少なくとも 2 回出て, かつ 2 の目が少なくとも 1 回出る確率を求めよ。　[2000]

20　箱 A, 箱 B のそれぞれに赤玉が 1 個, 白玉が 3 個, 合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後, 箱 A に赤玉が 1 個, 白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。　[1999]

21　H 大学には 4 つの食堂があり，A 君と B さんは，それぞれ毎日正午に，前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている。最初の日，二人は別々の食堂で食事をしたとして，以下の確率を求めよ。

(1)　n 日後に，はじめて二人が食堂で出会う確率。ただし $n \geqq 1$ とする。

(2)　n 日後に，二人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率。ただし $n \geqq 2$ とする。　[1998]

■ 論証

1　1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC を平面上におく。△ABC を 1 つの辺に関して 180° 折り返すという操作を繰り返し行う。辺 BC に関する折り返しを T_A，辺 CA に関する折り返しを T_B，辺 AB に関する折り返しを T_C とする。△ABC は，最初 3 点 A, B, C がそれぞれ平面上の 3 点 O，B′，C′ の上に置かれているとする。

(1)　T_A，T_C，T_B，T_C，T_A の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を P とする。また，T_A，T_C，T_B，T_A，T_C，T_B，T_A の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を Q とする。$\theta = \angle \mathrm{POQ}$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　整数 k, l に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 3k\overrightarrow{\mathrm{OB'}} + 3l\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ により定められる点 R は，T_A，T_B，T_C の折り返し操作を組み合わせることにより，点 A の移り先になることを示せ。

[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

実数 a, b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす。

(1)　$\log_3 a+\log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\log_2 a+\log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　実数 a，b は，$a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ より，$b=9-a$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ であるので，$P=\log_3 a+\log_3 b$ とおくと，

$$P=\log_3 a+\log_3(9-a)=\log_3 a(9-a)=\log_3(-a^2+9a)$$

さらに，$f(a)=-a^2+9a$ とおくと，$f(a)=-\left(a-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{81}{4}$ より，$f(a)$ は最大値 $\dfrac{81}{4}\left(a=\dfrac{9}{2}\right)$，最小値 $8(a=1,\ 8)$ をとる。

すると，$P=\log_3 f(a)$ から，P は最大値 $\log_3\dfrac{81}{4}=\log_3 3^4-\log_3 2^2=4-2\log_3 2$，最小値 $\log_3 8=\log_3 2^3=3\log_3 2$ をとる。

(2)　$Q=\log_2 a+\log_4 b=\log_2 a+\dfrac{1}{2}\log_2 b$ とおくと，

$$Q=\frac{1}{2}\log_2 a^2+\frac{1}{2}\log_2(9-a)=\frac{1}{2}\log_2 a^2(9-a)=\frac{1}{2}\log_2(-a^3+9a^2)$$

さらに，$g(a)=-a^3+9a^2$ とおくと，

$$g'(a)=-3a^2+18a=-3a(a-6)$$

すると，$g(a)$ の増減は右表のようになり，$g(a)$ は最大値 $108(a=6)$，最小値 $8(a=1)$ をとる。

a	1	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	8	$\nearrow$	108	$\searrow$	64

すると，$Q=\dfrac{1}{2}\log_2 g(a)$ から，Q は最大値 $\dfrac{1}{2}\log_2 108=\dfrac{1}{2}\log_2 2^2 3^3=1+\dfrac{3}{2}\log_2 3$，最小値 $\dfrac{1}{2}\log_2 8=\dfrac{1}{2}\log_2 2^3=\dfrac{3}{2}$ をとる。

コメント

対数関数の最大と最小についての基本題です。何か裏があるのかと勘繰ってしまいそうなレベルです。

問　題

$P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。 [2017]

解答例＋映像解説

まず, 整式 $P(x)$ が定数または 1 次式の場合, $P(x+1)-P(x)=2x$ ……(∗)は明らかに成立しない。よって, $P(x)$ を n 次式とすると $n \geqq 2$ であり, $P(0)=1$ から,

$$P(x)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

すると, $P(x+1)=1+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_n(x+1)^n$ となり,

$$P(x+1)-P(x)={}_n\mathrm{C}_1a_nx^{n-1}+q(x)$$ （$q(x)$ は $n-2$ 次以下の整式）

これより, $P(x+1)-P(x)$ は $n-1$ 次式となるので, (∗)から,

$$n-1=1,\ n=2$$

そこで, $P(x)=1+ax+bx^2\ (b\neq 0)$ とおき, (∗)に代入すると,

$$1+a(x+1)+b(x+1)^2-(1+ax+bx^2)=2x,\ (a+b)+2bx=2x$$

よって, $a+b=0$, $2b=2$ から, $a=-1$, $b=1$ となり, $P(x)=1-x+x^2$ である。

コメント

整式 $P(x)$ に対し, $P(x+1)-P(x)$ は $P(x)$ より次数が 1 つ下がるという知識があれば, すぐに結論が導けます。つまり, 経験がものをいうわけです。

問　題

(1)　任意の角θに対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角α，βに対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　不等式$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$……①に対して，

(i)　$x = y = 0$のとき　①は$-2 \leqq 0 \leqq 1$となり，任意θに対して成立する。

(ii)　$x \neq 0$または$y \neq 0$のとき

φを$\sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$と決めると，①より，

$$-2 \leqq \sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta+\varphi) \leqq y+1$$

任意のθに対して成立する条件は，

$$-2 \leqq -\sqrt{x^2+y^2}\ \cdots\cdots\cdots ②,\quad \sqrt{x^2+y^2} \leqq y+1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2$，$x^2+y^2 \leqq 4$………④

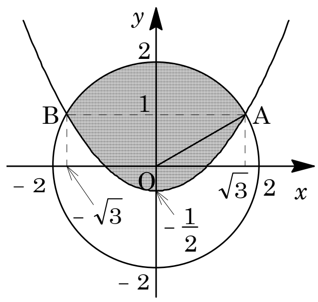
③より，$y+1 \geqq 0$のもとで，$x^2+y^2 \leqq (y+1)^2$

$$x^2 \leqq 2y+1,\quad y \geqq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

さて，領域④と⑤の境界線の2つの交点A, Bは，

$$(2y+1)+y^2 = 4,\quad (y-1)(y+3) = 0$$

$y \geqq -\dfrac{1}{2}$から$y = 1$となり，$x = \pm\sqrt{3}$である。



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

さて，直線OAの方程式が$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$で，OAとy軸のなす角が$\dfrac{\pi}{3}$より，網点部の面積をSとすると，

$$S = 2\times\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} + 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

(2)　不等式$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$……⑥に対し，独立に値をとる任意の$\alpha$，$\beta$では，$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$，$-1 \leqq \sin\beta \leqq 1$なので，⑥より，

(i)　$y \geqq 0$のとき

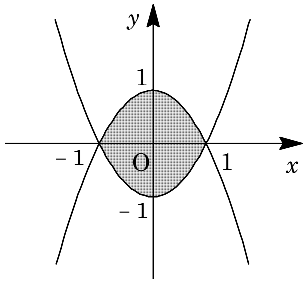
$$-1 \leqq -x^2 - y\ \cdots\cdots\cdots ⑦,\quad x^2 + y \leqq 1\ \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦⑧より，$y \leqq -x^2+1$

(ii)　$y<0$ のとき

$$-1 \leqq -x^2+y \cdots\cdots\cdots ⑨,\quad x^2-y \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ⑩$$

⑨⑩より，$y \geqq x^2-1$



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

そこで，網点部の面積を S とすると，

$$S=2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx=-2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{3}(1+1)^3=\frac{8}{3}$$

コメント

三角不等式の問題です。(1)では任意の θ でとりうる最大値・最小値，(2)では任意の α，β でとる最大値・最小値をもとに，$(x,\ y)$ の条件が定まります。

問　題

k を正の整数とする。$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n が，ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。 [2008]

解答例

与えられた不等式 $5n^2-2kn+1<0$ を変形して，$\dfrac{5}{2}n^2+\dfrac{1}{2}<kn$ ………①

ここで, $k>0$ なので，①から $n>0$ である。

さて，①を満たす正の整数 n が 1 個である条件は，$y=\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ ……②のグラフが, $y=kx$ ……③のグラフの下方にある $x>0$ の範囲に，整数が 1 個のみ存在することを意味する。

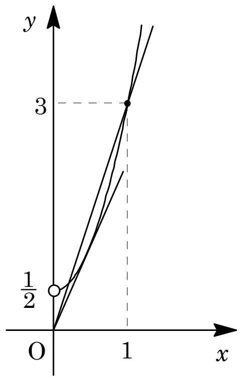
さて，②と③のグラフが接するのは，$5x^2-2kx+1=0$ から,

$$D/4=k^2-5=0,\ \ k=\sqrt{5}$$

このとき，$x=\dfrac{k}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}<1$

これより，①を満たす整数が 1 個となる n の値は，$n=1$ のみである。

そこで，右図から，③が点 $(1,\ 3)$ を通るとき $k=3$，また点 $\left(2,\ \dfrac{21}{2}\right)$ を通るとき $k=\dfrac{21}{4}$ である。



よって，条件を満たす k の範囲は $3<k\leqq\dfrac{21}{4}$ となり，求める整数 k は，$k=4,\ 5$ である。

コメント

頻出タイプの問題です。放物線と直線の位置関係で，不等式の解をとらえています。

問　題

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は異なる 3 つの解 $p,\ q,\ r$ をもつ。さらに，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$ も同じ方程式の異なる 3 つの解である。$a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r$ の組をすべて求めよ。 [2008]

解答例

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ ……①の異なる 3 つの解が $p,\ q,\ r$ より，

$$a=-p-q-r,\ b=pq+qr+rp,\ c=-pqr\ \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$ も①の異なる 3 つの解であることより，

(i)　$2p^2-1=p$ のとき

(i-i)　$2q-1=q$，$2r-1=r$ のとき　$q=r=1$ となり不適。

(i-ii)　$2q-1=r$，$2r-1=q$ のとき　$q=r=1$ となり不適。

(ii)　$2p^2-1=q$ のとき

(ii-i)　$2q-1=p$，$2r-1=r$ のとき

まず，$r=1$ となり，$2p^2-1=q$ を $2q-1=p$ に代入して，$2(2p^2-1)-1=p$

$$4p^2-p-3=0,\ (4p+3)(p-1)=0$$

$p\neq r=1$ から $p=-\dfrac{3}{4}$，$q=\dfrac{1}{8}$ となり，条件に適する。

このとき，②より，$a=-\dfrac{3}{8}$，$b=-\dfrac{23}{32}$，$c=\dfrac{3}{32}$

(ii-ii)　$2q-1=r$，$2r-1=p$ のとき

まず，$2p^2-1=q$ を $2q-1=r$ に代入して，$2(2p^2-1)-1=r$，$4p^2-r-3=0$

さらに，$2r-1=p$ を代入すると，$4(2r-1)^2-r-3=0$

$$16r^2-17r+1=0,\ (16r-1)(r-1)=0$$

$r=1$ のときは，$p=1$ となり不適。

$r=\dfrac{1}{16}$ のときは，$p=-\dfrac{7}{8}$，$q=\dfrac{17}{32}$ であり，条件に適する。

このとき，②より，$a=\dfrac{9}{32}$，$b=-\dfrac{249}{512}$，$c=\dfrac{119}{4096}$

(iii)　$2p^2-1=r$ のとき

(iii-i)　$2q-1=q$，$2r-1=p$ のとき

(ii-i)と同様にして，$p=-\dfrac{3}{4}$，$q=1$，$r=\dfrac{1}{8}$，$a=-\dfrac{3}{8}$，$b=-\dfrac{23}{32}$，$c=\dfrac{3}{32}$

(iii-ii)　$2q-1=p$，$2r-1=q$ のとき

(ii-ii)と同様にして，$p=-\dfrac{7}{8}$，$q=\dfrac{1}{16}$，$r=\dfrac{17}{32}$，$a=\dfrac{9}{32}$，$b=-\dfrac{249}{512}$，$c=\dfrac{119}{4096}$

コメント

まず，6 通りの場合を考え，連立方程式を解く問題と見極めるのがポイントです。ただ，その後も，数値計算の量は半端ではなく，多量のエネルギーと時間を費やしてしまいます。

問　題

$0° \leqq \theta < 360°$ を満たす θ と正の整数 m に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める。

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \sin(\theta + 60° \times k)$$

(1)　$f_5(\theta)$ を求めよ。

(2)　θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　m がすべての正の整数を動き，θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$f_5(\theta) = \sum_{k=0}^{5} \sin(\theta + 60° \times k) = \sin\theta + \sin(\theta + 60°) + \sin(\theta + 120°) + \sin(\theta + 180°)$

$$+ \sin(\theta + 240°) + \sin(\theta + 300°)$$

ここで，$\sin(\theta + 180°) = -\sin\theta$ より，

$$\sin(\theta + 240°) = -\sin(\theta + 60°),\ \sin(\theta + 300°) = -\sin(\theta + 120°)$$

よって，$f_5(\theta) = 0$

(2)　(1)より，$f_4(\theta) = f_5(\theta) - \sin(\theta + 300°) = \sin(\theta + 120°)$

$0° \leqq \theta < 360°$ より，$f_4(\theta)$ は，$\theta + 120° = 360° + 90°$ $(\theta = 330°)$ のとき，最大値 1 をとる。

(3)　(1)より, k を 0 以上の整数として, m の値を場合分けする。

(i)　$m = 6k + 6$ のとき　$f_m(\theta) = \sin\theta$

よって，$\theta = 90°$ のとき，最大値 1 をとる。

(ii)　$m = 6k + 5$ のとき　(1)より，$f_m(\theta) = 0$

(iii)　$m = 6k + 4$ のとき　(2)より，$f_m(\theta) = \sin(\theta + 120°)$

よって，$\theta = 330°$ のとき，最大値 1 をとる。

(iv)　$m = 6k + 3$ のとき

$$f_m(\theta) = \sin(\theta + 60°) + \sin(\theta + 120°) = 2\sin(\theta + 90°)\cos 30° = \sqrt{3}\cos\theta$$

よって，$\theta = 0°$ のとき，最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(v)　$m = 6k + 2$ のとき

$$f_m(\theta) = \sin\theta + \sin(\theta + 60°) + \sin(\theta + 120°) = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$$
$$= 2\sin(\theta + 60°)$$

よって，$\theta + 60° = 90°$ $(\theta = 30°)$ のとき，最大値 2 をとる。

(vi)　$m = 6k + 1$ のとき

$$f_m(\theta) = \sin\theta + \sin(\theta + 60°) = 2\sin(\theta + 30°)\cos 30° = \sqrt{3}\sin(\theta + 30°)$$

　よって，$\theta+30^\circ=90^\circ$ $(\theta=60^\circ)$ のとき，最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(i)～(vi)より，$f_m(\theta)$ の最大値は 2 である。

コメント

設問はハッタリのきいたものでしたが，(1)から周期性が発見できますので，後は記述力です。

問　題

$a,\ b$ を整数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のうちどれかは整数である。a, b を求めよ。　[2001]

解答例

$x^3+ax^2+bx-1=0$ ……①に対して，

(i)　$x=1$ を解にもつとき

$1+a+b-1=0$ より $b=-a$ となるので，①は $x^3+ax^2-ax-1=0$

$$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0$$

$$x=1,\ x^2+(a+1)x+1=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

②の解が $x\neq1$ で，ともに $0<x<3$ にある条件は，

$f(x)=x^2+(a+1)x+1=\left(x+\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)^2}{4}+1$ とすると，

$$0<-\frac{a+1}{2}<3 \cdots\cdots\cdots ③,\ -\frac{(a+1)^2}{4}+1<0 \cdots\cdots\cdots ④$$

$$f(3)=9+3(a+1)+1>0 \cdots\cdots\cdots ⑤,\ f(1)=1+(a+1)+1\neq0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

③より $-7<a<-1$，④より $a<-3,\ 1<a$，⑤より $a>-\dfrac{13}{3}$，⑥より $a\neq-3$

以上まとめて，$-\dfrac{13}{3}<a<-3$

a は整数なので $a=-4$ となり，$b=4$ である。

(ii)　$x=2$ を解にもつとき

$8+4a+2b-1=0$ より，$b=-2a-\dfrac{7}{2}$ となるが, a, b は整数より適さない。

(i)(ii)より，$a=-4$，$b=4$

コメント

実質的には 2 次方程式の解の配置の問題です。

問　題

a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点をもつ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=x-x^3$ ……①，$g(x)=a(x-x^2)$ ……②に対して，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点は，$f(x)=g(x)$ から，

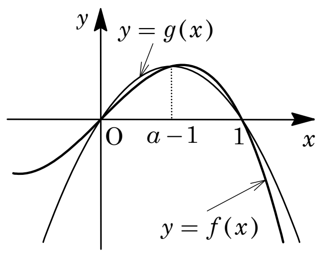
$$x(1+x)(1-x)=ax(1-x)$$

よって，$x=0,\ 1,\ a-1$ となる。

そして，$0<x<1$ の範囲に共有点をもつことより，$0<a-1<1$ となり，

$$1<a<2$$

(2)　$0<a-1<1$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなることより，



$$\int_0^{a-1}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

右辺から左辺を引き，

$$\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_0^{a-1}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{a-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^{a-1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx$$

よって，$\displaystyle\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=0$………(*)

(*)から，$\displaystyle\int_0^1-\{x^3-ax^2+(a-1)x\}dx=0$ となり，

$$\frac{1}{4}-\frac{a}{3}+\frac{a-1}{2}=0,\ 2a-3=0$$

よって，$a=\dfrac{3}{2}$ となり，この値は $1<a<2$ を満たしている。

コメント

定積分と面積に関する超有名問題です。要点は(*)だけです。

問　題

a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2016]

解答例＋映像解説

$f(x)=x^3-3ax$ に対し，$f(-x)=-f(x)$ から，$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$

すると，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値は，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値に等しい。以下，$0\leqq x\leqq 1$ で考える。

さて，$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$ より，

(i)　$a\leqq 0$ のとき

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1-3a$

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a$$

(ii)　$a>0$ のとき

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ となり，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a\sqrt{a}$	$\nearrow$

(ii-i)　$0<\sqrt{a}<1\ (0<a<1)$ のとき

まず一般的に，X と Y の小さくない方を $\max\{X,\ Y\}$ と表すと，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=\max\{|f(\sqrt{a})|,\ |f(1)|\}=\max\{2a\sqrt{a},\ |1-3a|\}$$

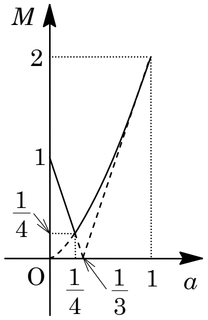
ここで，$2a\sqrt{a}=|1-3a|$ として，両辺を 2 乗すると，

$$4a^3=(1-3a)^2,\ 4a^3-9a^2+6a-1=0$$

すると，$(4a-1)(a-1)^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{4},\ 1$

これより，a と M の関係は右図の実線のようになり，

$$M=1-3a\left(0<a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right)$$



(ii-ii)　$\sqrt{a}\geqq 1\ (a\geqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調減少し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a$$

(i)(ii)より，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=1-3a\left(a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right),\ M=-1+3a\ (a\geqq 1)$$

以上より，M は $a=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

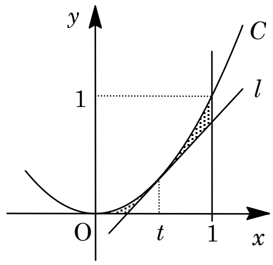
コメント

関数の最大・最小に関する有名問題です。 ポイントは偶関数に気付くことです。

問　題

$0<t<1$ とし，放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を l とする。C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，C と l と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1+S_2 の最小値を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説



$C: y=x^2$ より $y'=2x$ となり，$0<t<1$ において，点 $(t,\ t^2)$ における接線 l は,

$$y-t^2=2t(x-t),\quad y=2tx-t^2\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, l と x 軸の交点は, $(*)$より,

$$2tx-t^2=0,\quad x=\frac{t}{2}$$

また, l と直線 $x=1$ との交点は, $(*)$より, $y=2t-t^2$

すると, C と l と x 軸で囲まれる部分の面積 S_1, C と l と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積 S_2 に対して, $S=S_1+S_2$ とおくと,

$$S=\int_0^1 x^2\,dx-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{t}{2}\Big)(2t-t^2)=-\frac{1}{4}t(t-2)^2+\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}t^3+t^2-t+\frac{1}{3}$$

$$S'=-\frac{3}{4}t^2+2t-1=-\frac{1}{4}(3t-2)(t-2)$$

すると，$0<t<1$ における $S=S_1+S_2$ の増減は右表のようになり，S は $t=\frac{2}{3}$ のとき最小値 $\frac{1}{27}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	$\frac{1}{27}$	↗	

コメント

微積分の超基本かつ超頻出題です。

問　題

原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説

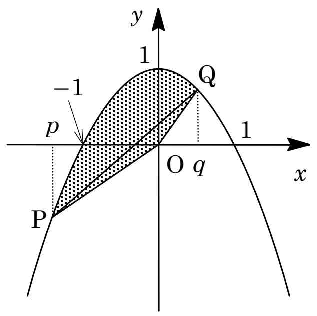
(1) 放物線 $C: y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ $(p<q)$ に対して,直線 PQ の方程式は,

$$y-(1-p^2)=\frac{(1-q^2)-(1-p^2)}{q-p}(x-p),\quad y=-(p+q)x+1+pq$$

さて, C と直線 PQ に囲まれた部分の面積を S_1 とすると,

$$S_1=\int_p^q\{1-x^2+(p+q)x-1-pq\}dx=\int_p^q\{-x^2+(p+q)x-pq\}dx$$

$$=-\int_p^q(x-p)(x-q)\,dx=\frac{1}{6}(q-p)^3$$



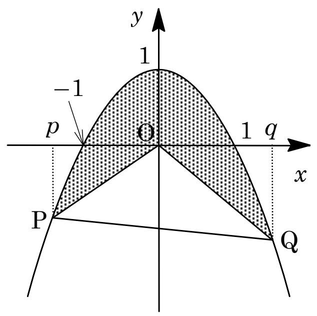
また, $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S_2 とすると,

$$S_2=\frac{1}{2}\left|q(1-p^2)-p(1-q^2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)+pq(q-p)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)(1+pq)\right|=\frac{1}{2}(q-p)\left|1+pq\right|$$

すると, 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S は, 直線 PQ の y 切片に注目し,



(i) $1+pq\geqq 0$ のとき

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(ii) $1+pq<0$ のとき

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(i)(ii)より，$S=\dfrac{1}{6}(q-p)^3+\dfrac{1}{2}(q-p)(1+pq)=\dfrac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)$

(2) $q=p+1$ のとき, (1)より，$S=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\{1+p(p+1)\}$ となり,

$$S=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

よって，$p=-\dfrac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\dfrac{13}{24}$ をとる。

(3)　$pq=-1$ のとき，$p<q$ から，$p<0<q$ であり，(1)より，

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3 \geqq \frac{1}{6}\left(2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}\right)^3=\frac{4}{3}$$

等号は $q=\dfrac{1}{q}$　$(q=1)$ のとき成立するので，このとき S は最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

コメント

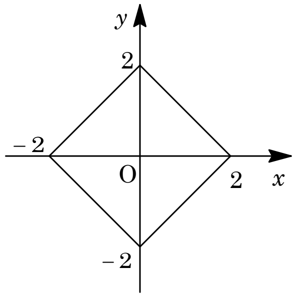
面積の標準的な問題ですが，場合分けをなるべく後回しにしていく工夫が必要です。

問　題

a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。　[2012]

解答例＋映像解説

まず，方程式 $|x|+|y|=2$ ……①で表される図形は，対称性を考えると，右図の正方形となる。



また，$y=x^3-3a^2x$ ……②に対して，

(i)　$a=0$ のとき

②が，$y=x^3$ となることより，①の図形と②のグラフの共有点は明らかに 2 個である。

(ii)　$a>0$ のとき

$$y'=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$$

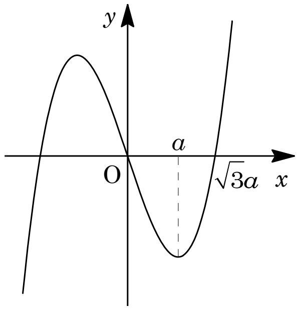
グラフが原点対称であることを考え，$x\geqq 0$ における増減について調べると，右表のようになる。

x	0	…	a	…
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘		↗

$x>0$ における②のグラフと x 軸との交点は，

$$x^3-3a^2x=0\,,\ \ x=\sqrt{3}a$$

これより，②のグラフの概形は右図のようになる。



さて，①の図形と②のグラフの共有点の個数について，まず，第 1 象限には，$\sqrt{3}a<2\left(0<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

次に，x 軸の正の部分には，$\sqrt{3}a=2\left(a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

さらに，第 4 象限での共有点の個数を調べるために，②と $y=x-2\ (0<x<2)$ とを連立して，

$$x^3-3a^2x=x-2\,,\ \ x^3-(3a^2+1)x+2=0\ \cdots\cdots③$$

ここで，$f(x)=x^3-(3a^2+1)x+2$ とおくと，③は $f(x)=0$ となり，

$$f'(x)=3x^2-(3a^2+1)$$

すると，$x>0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	0	…	$\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}$	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}\right)=-\frac{2(3a^2+1)}{3}\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}+2$$

そこで，$f\left(\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}\right)<0$ とすると，$\dfrac{3a^2+1}{3}\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}=\left(\dfrac{3a^2+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}>1$ となり，

$$\frac{3a^2+1}{3}>1,\ a>\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すなわち，第 4 象限での共有点の個数は，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ に注意すると，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，また $a\geqq\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。それ以外のときは存在しない。

よって，$a>0$ では，$0<a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 2 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 3 個，$a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。

(i)(ii)より，①の図形と②のグラフが，ともに原点対称であることを考え合わせると，求める共有点の個数は以下のようになる。

$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 4 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 6 個である。

コメント

a の変化に伴う②のグラフの動きを視覚的にとらえて解く問題です。この下書きの段階で計算の手順が決まります。

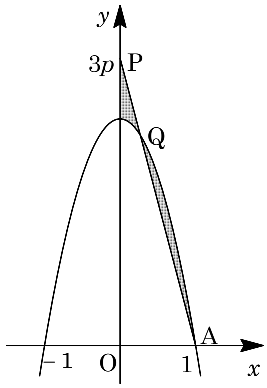
問　題

xy 平面上に放物線 $C: y=-3x^2+3$ と 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ 3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

(1)　定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2)　S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。　[2011]

解答例＋映像解説



(1)　$C: y=-3x^2+3$ ……①と $\mathrm{AP}: y=-3p(x-1)$ ……②を連立すると,

$$-3x^2+3=-3p(x-1),\quad -3(x-1)(x+1-p)=0$$

よって，$x=1,\ p-1$ となり，線分 AP と C が A とは異なる点 Q を共有していることから,

$$0 \leqq p-1 < 1,\quad 1 \leqq p < 2$$

(2)　C と線分 AQ で囲まれた領域 S_1 の面積 T_1 は,

$$T_1=\int_{p-1}^{1}\left\{-3x^2+3+3p(x-1)\right\}dx$$

$$=-3\int_{p-1}^{1}(x-1)(x+1-p)dx=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(1-p+1)^3=\frac{1}{2}(2-p)^3$$

また, C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域 S_2 の面積 T_2 は,

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3p+T_1-\int_0^1(-3x^2+3)dx=\frac{3}{2}p+T_1-\Big[-x^3+3x\Big]_0^1$$

$$=T_1+\frac{3}{2}p-2$$

ここで，S_1 と S_2 の面積の和を T とおくと,

$$T=T_1+T_2=2\cdot\frac{1}{2}(2-p)^3+\frac{3}{2}p-2=-p^3+6p^2-\frac{21}{2}p+6$$

$$T'=-3p^2+12p-\frac{21}{2}=-\frac{3}{2}(2p^2-8p+7)$$

$1 \leqq p < 2$ における $T'=0$ の解は，$p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ であり, T の増減は右表のようになる。

p	1	$\cdots$	$\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	2
T'		$-$	0	$+$	
T		↘		↗	

よって，$p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ のとき T は最小となる。

コメント

T_2 は，普通に 0 から $p-1$ までの積分計算でも求められます。ただ, 所要時間が 2 倍ほどになります。

問　題

a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が，曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点 A，点 B で接している。

(1) 線分 AB の中点を C とすると，C は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線 AB の方程式が $y = -x - 1$ であるとき，a，m の値を求めよ。　[2010]

解答例＋映像解説

(1) 曲線 $y = x^3 - 3ax^2$……①上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^3 - 3a\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^3 - 3a\beta^2)$ とおく。

すると，$y' = 3x^2 - 6ax$ から，

$$m = 3\alpha^2 - 6a\alpha \cdots\cdots ②,\quad m = 3\beta^2 - 6a\beta \cdots\cdots ③$$

②③より，$3(\alpha^2 - \beta^2) - 6a(\alpha - \beta) = 0$ となり，$\alpha \neq \beta$ から，$\alpha + \beta = 2a$ ………④

さて，線分 AB の中点 C は，$\mathrm{C}\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^3 + \beta^3 - 3a(\alpha^2 + \beta^2)}{2}\Big)$から，④より，

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 - 3a(\alpha^2 + \beta^2) &= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) - 3a\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}\\ &= 8a^3 - 6a\alpha\beta - 12a^3 + 6a\alpha\beta = -4a^3\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{C}(a,\ -2a^3)$ となり，点 C は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にある。

(2) 条件より，点 C が直線 $y = -x - 1$……⑤上にあるので，$-2a^3 = -a - 1$ となり，

$$2a^3 - a - 1 = 0,\ (a-1)(2a^2 + 2a + 1) = 0$$

a は実数より，$a = 1$

このとき，①は $y = x^3 - 3x^2$ となり，⑤との交点は，

$$x^3 - 3x^2 = -x - 1,\ x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0,\ (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

よって，$x = 1,\ 1 \pm \sqrt{2}$ となる。

これより，A，B の x 座標は $1 \pm \sqrt{2}$ となるので，②③より，複号同順で，

$$m = 3(1 \pm \sqrt{2})^2 - 6(1 \pm \sqrt{2}) = 3$$

コメント

3 次曲線が点対称であることを題材とした問題です。

問　題

a を定数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+a$ とする。$x\leqq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。 [2007]

解答例

$f(x)=x^3-3ax^2+a$ に対して，$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$ となり，

$$f(0)=a,\ f(2a)=-4a^3+a,\ f(2)=8-11a$$

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x\leqq 2$ における最大値は，$f(2a)$ または $f(2)$ であり，

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(2a)-f(2)=-4a^3+a-8+11a=-4(a-1)^2(a+2)$$

(i-i)　$a<-2$ のとき

最大値は $f(2a)$ となり，条件より，$-4a^3+a=105$

$$4a^3-a+105=0,\ (a+3)(4a^2-12a+35)=0$$

$a<-2$ より，$a=-3$

(i-ii)　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき

最大値は $f(2)$ となり，条件より，$8-11a=105$

すると，$a=-\dfrac{97}{11}$ となるが，$-2\leqq a\leqq 0$ を満たさない。

(ii)　$a>0$ のとき

$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x\leqq 2$ における最大値は，$f(0)$ または $f(2)$ であり，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(0)-f(2)=a-8+11a=12a-8$$

(ii-i)　$0<a<\dfrac{2}{3}$ のとき

最大値は $f(2)$ となり，条件より，$8-11a=105$

すると，$a=-\dfrac{97}{11}$ となるが，$0<a<\dfrac{2}{3}$ を満たさない。

(ii-ii)　$a\geqq\dfrac{2}{3}$ のとき

最大値は $f(0)$ となり，条件より $a=105$ である。この値は $a\geqq\dfrac{2}{3}$ を満たす。

(i)(ii)より，$a=-3,\ 105$

コメント

3 次関数の最大・最小という典型的な問題です。

問　題

k は整数であり，3 次方程式 $x^3-13x+k=0$ は 3 つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。 [2005]

解答例

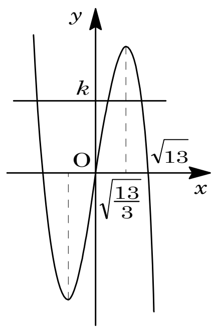
$x^3-13x+k=0\cdots\cdots(*)$より，$k=-x^3+13x$ となる。

ここで，$f(x)=-x^3+13x$ とおくと，

$$f'(x)=-3x^2+13$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{13}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{13}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

さて，$y=f(x)$ のグラフは原点対称なので，まず $k\geqq 0$ のとき，$(*)$の整数解を考える。



さて，$2<\sqrt{\dfrac{13}{3}}<3$，$3<\sqrt{13}<4$ なので，右図より$(*)$の最大の整数解は $x=3$ である。

このとき，$k=-27+39=12$ となり，$(*)$は，

$$x^3-13x+12=0,\ (x-3)(x+4)(x-1)=0$$

よって，整数解は $x=-4,\ 1,\ 3$

また，$k<0$ のときは，対称性から，$k=-12$ のとき，整数解 $x=4,\ -1,\ -3$ をもつ。

以上より，$(*)$は，$k=12$ のとき $x=-4,\ 1,\ 3$，$k=-12$ のとき $x=4,\ -1,\ -3$ を整数解としてもつ。

コメント

$k\geqq 0$ のとき，最大の整数解の候補が 1 つだけでしたので，場合分けは不要でした。

問　題

a は実数とし，$f(x)=x^3+ax^2-8a^2x$，$g(x)=3ax^2-9a^2x$ とおく。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する直線が存在する。このとき P の座標を a で表せ。

(2)　次の条件(i)および(ii)を満たす直線 l が 3 本存在するような点 $(u,\ v)$ の範囲を図示せよ。

(i)　l は点 $(u,\ v)$ を通る。

(ii)　l は曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する。

[2004]

解答例

(1)　曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接点 P の x 座標を $x=t$ とおくと，

$$f(t)=g(t)\cdots\cdots\cdots①,\quad f'(t)=g'(t)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$t^3+at^2-8a^2t=3at^2-9a^2t$，$t^3-2at^2+a^2t=0$

すると，$t(t-a)^2=0$ から，$t=0,\ a\cdots\cdots\cdots③$

②より，$3t^2+2at-8a^2=6at-9a^2$，$3t^2-4at+a^2=0$

すると，$(3t-a)(t-a)=0$ から，$t=\dfrac{a}{3},\ a\cdots\cdots\cdots④$

(i)　$t=a$ のとき　③④をともに満たす。

(ii)　$t\neq a$ のとき　③より $t=0$，④より $t=\dfrac{a}{3}$ で $a=0$ となるが，$t\neq a$ に反する。

(i)(ii)より，$t=a$ から，$\mathrm{P}(a,\ -6a^3)$ となる。

(2)　(1)より $\mathrm{P}(a,\ -6a^3)$ なので，$f'(a)=-3a^2$ から，直線 l の方程式は，

$$y+6a^3=-3a^2(x-a),\quad y=-3a^2x-3a^3$$

点 $(u,\ v)$ を通ることより，$v=-3a^2u-3a^3\cdots\cdots\cdots⑤$

直線 l が 3 本存在する条件は，⑤が異なる 3 個の実数解 a をもつことである。

さて，$h(a)=-3a^3-3ua^2$ とおくと，$h'(a)=-9a^2-6ua=-3a(3a+2u)$ より，

(i)　$0<-\dfrac{2}{3}u\ (u<0)$ のとき

$h(a)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，$0<v<-\dfrac{4}{9}u^3$ である。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}u$	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\dfrac{4}{9}u^3$	$\searrow$

(ii)　$0=-\dfrac{2}{3}u\ (u=0)$ のとき

$h'(a)=-9a^2\leqq 0$ となり，$h(a)$ は単調減少するので不適である。

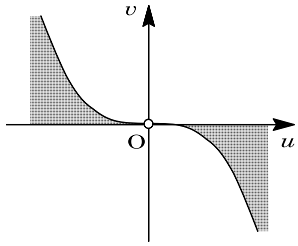
(iii) $0 > -\frac{2}{3}u\ (u > 0)$ のとき

$h(a)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，$-\frac{4}{9}u^3 < v < 0$ である。

a	$\cdots$	$-\frac{2}{3}u$	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(a)$	$\searrow$	$-\frac{4}{9}u^3$	$\nearrow$	0	$\searrow$

(i)(ii)(iii) より，点 $(u,\ v)$ の範囲を図示すると，右図の網点部のようになる。

ただし，境界は領域に含まない。



コメント

題意に一ひねりがありますが，接線の本数を接点の個数に言い換えるという頻出の問題です。

問　題

$f(x)=x^3-x^2-x-1$，$g(x)=x^2-x-1$とする。

(1)　方程式$f(x)=0$はただ 1 つの実数解αをもつことを示せ。また，$1<\alpha<2$ であることを示せ。

(2)　方程式$g(x)=0$の正の解をβとする。αとβの大小を比較せよ。

(3)　α^2とβ^3の大小を比較せよ。　[2003]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-x^2-x-1$より，

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

極大値$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{22}{27}<0$なので，右表より方程式$f(x)=0$はただ 1 つの実数解をもつ。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

さらに，$f(1)=-2$，$f(2)=1$より，その実数解αは$1<\alpha<2$である。

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$とおくと，

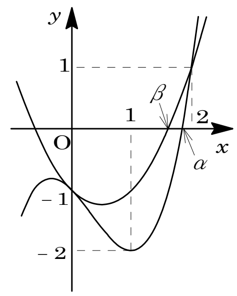
$$h(x)=(x^3-x^2-x-1)-(x^2-x-1)$$
$$=x^3-2x^2=x^2(x-2)$$

すると，$0<x<2$において，$f(x)<g(x)$

さて，$\beta^2-\beta-1=0\ (\beta>0)$より，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$なので，

$$f(\beta)<g(\beta)=0$$

よって，$f(\beta)<f(\alpha)=0$から$\beta<\alpha$である。



(3)　まず，$\beta^2=\beta+1$から，

$$\beta^3=\beta(\beta+1)=\beta^2+\beta=2\beta+1=2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=2+\sqrt{5}$$

すると，$1<\alpha<2$より，$\beta^3-\alpha^2=2+\sqrt{5}-\alpha^2>2+\sqrt{5}-4=\sqrt{5}-2>0$

よって，$\beta^3>\alpha^2$

コメント

βの値が具体的にわかるため，それを利用すると，方針が立てやすくなります。

問　題

c を正の定数とし，$f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=x^3+3x^2+c$ とする。直線 l は点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ で曲線 $y=f(x)$ と接し，点 $\mathrm{Q}(q,\ g(q))$ で曲線 $y=g(x)$ と接する。

(1)　c を p で表せ。

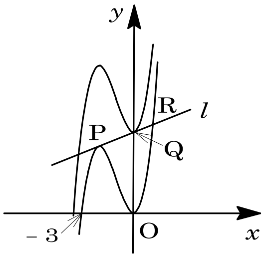
(2)　直線 l と曲線 $y=f(x)$ の P 以外の交点を R とする。2 つの線分の長さの比 $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}$ を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=x^3+3x^2+c$ より，$f'(x)=g'(x)=3x^2+6x$

点 P における接線は,

$$y=(3p^2+6p)(x-p)+p^3+3p^2$$
$$=(3p^2+6p)x-2p^3-3p^2\cdots\cdots\cdots①$$



点 Q における接線は,

$$y=(3q^2+6q)(x-q)+q^3+3q^2+c$$
$$=(3q^2+6q)x-2q^3-3q^2+c\cdots\cdots\cdots②$$

①と②が一致することより,

$$3p^2+6p=3q^2+6q\cdots\cdots③,\quad -2p^3-3p^2=-2q^3-3q^2+c\cdots\cdots④$$

③より，$p^2-q^2+2(p-q)=0$，$(p-q)(p+q+2)=0$

$p=q$ とすると，④より $c=0$ となり, $c>0$ に反する。

よって，$p+q+2=0$，$q=-p-2\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$c=2q^3+3q^2-2p^3-3p^2=2(-p-2)^3+3(-p-2)^2-2p^3-3p^2$

$$=-4p^3-12p^2-12p-4=-4(p+1)^3\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2)　$y=f(x)$ と①を連立すると，$x^3+3x^2=(3p^2+6p)x-2p^3-3p^2$

$$x^3+3x^2-(3p^2+6p)x+2p^3+3p^2=0,\ (x-p)^2(x+2p+3)=0$$

$x\neq p$ より，点 R の x 座標は，$x=-2p-3$

ここで, ⑥より $c>0$ なので，$p<-1$ となり，$p<-p-2<-2p-3$

以上より，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=(-p-2-p):(-2p-3+p+2)$

$$=(-2p-2):(-p-1)=2:1$$

コメント

2 つの 3 次曲線の共通接線を題材にした頻出題です。正確な計算がすべてです。

問　題

(1)　曲線 $y = x^3$ と直線 $y = 3x + a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲を動くとき，3 つの交点を A, B, C とし，点 $(a,\ 4a)$ を D とする。3 つの線分の長さの積 $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$y = x^3$ ……①，$y = 3x + a$ ……②とし，①②より，$x^3 - 3x = a$ ………③

①と②が異なる 3 点で交わる条件は，曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = a$ が異なる 3 点で交わる条件と同値である。

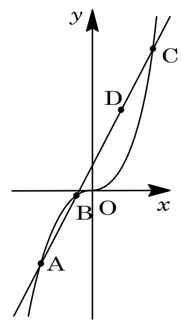
ここで，$f(x) = x^3 - 3x$ とおくと，

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右表より，求める条件は $-2 < a < 2$

(2)　③の解を $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma$ （$\alpha < \beta < \gamma$）として，$\mathrm{A}(\alpha,\ 3\alpha + a)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 3\beta + a)$，$\mathrm{C}(\gamma,\ 3\gamma + a)$ とおく。



このとき，③を $x^3 - 3x - a = 0$ と変形すると，

$$x^3 - 3x - a = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \text{………④}$$

このとき，$\mathrm{DA} = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (3\alpha + a - 4a)^2}$

$$= \sqrt{10(\alpha - a)^2} = \sqrt{10}\,|\alpha - a|$$

同様にして，$\mathrm{DB} = \sqrt{10}\,|\beta - a|$，$\mathrm{DC} = \sqrt{10}\,|\gamma - a|$

$$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC} = 10\sqrt{10}\,|\alpha - a||\beta - a||\gamma - a|$$
$$= 10\sqrt{10}\,|(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)| = 10\sqrt{10}\,|a^3 - 3a - a|$$
$$= 10\sqrt{10}\,|a^3 - 4a|$$

ここで，$g(a) = a^3 - 4a$ とおくと，$g'(a) = 3a^2 - 4 = (\sqrt{3}a + 2)(\sqrt{3}a - 2)$

a	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

右表より，$|g(a)|$ は $a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$ をとる。

よって，$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値は $10\sqrt{10}\cdot\dfrac{16}{9}\sqrt{3} = \dfrac{160}{9}\sqrt{30}$ となる。

コメント

微分法の応用に関する問題です。本問のポイントは，強いて言えば，(2)で④式に注目することです。

問　題

放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく。ただし，$a<b$ とする。

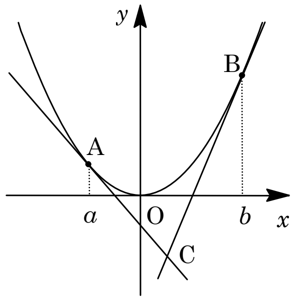
(1)　2 直線 $l,\ m$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ。

(2)　点 C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ。

[1998]

解答例

(1)　$l: y=m_1x+n_1$，$m: y=m_2x+n_2$ とおくと，



条件より，

$x^2-(m_1x+n_1)=(x-a)^2$ ………①

$x^2-(m_2x+n_2)=(x-b)^2$ ………②

l と m の交点 C の x 座標は,

$m_1x+n_1=m_2x+n_2$

①②を代入して，$x^2-(x-a)^2=x^2-(x-b)^2$

よって，$x-a=-(x-b)$ より，$x=\dfrac{a+b}{2}$

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-a)^3\Big]_a^{\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-b)^3\Big]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

(2)　点 C の y 座標は，①より $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a+b}{2}-a\right)^2=ab$ となり，$\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

条件より，点 C は放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ 上にあるので,

$ab=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\dfrac{a+b}{2}-2$，すなわち $8ab=(a+b)^2-4(a+b)-16$ ………③

ここで，$b-a=k$　$(k>0)$ とおき，$b=a+k$ として③に代入する。

$8a(a+k)=(2a+k)^2-4(2a+k)-16$

$4a^2+4(k+2)a-(k^2-4k-16)=0$

a が実数より，$D/4=4(k+2)^2+4(k^2-4k-16)\geqq 0$ から，$k^2-6\geqq 0$

$k>0$ なので，$k\geqq\sqrt{6}$

(1)から, S の最小値は $\dfrac{1}{12}\left(\sqrt{6}\right)^3$,すなわち $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ となる。

コメント

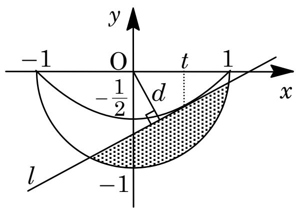
(1)では，2 本の接線の交点の x 座標が 2 つの接点の x 座標の相加平均になることを一般的に示しました。また, (2)は対称式に着目する解法もあります。

問　題

$-1 \leqq t \leqq 1$ とし，曲線 $y = \dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線を l とする。半円 $x^2+y^2=1\ \ (y \leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積を S とする。S のとりうる値の範囲を求めよ。 [2018]

解答例＋映像解説

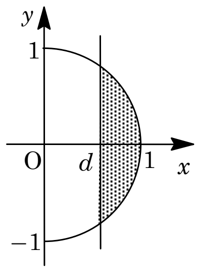
曲線 $y = \dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は，$y' = x$ から，



$$y - \frac{t^2-1}{2} = t(x-t),\ \ 2tx - 2y - t^2 - 1 = 0$$

すると，l と原点との距離 d は，

$$d = \frac{|-t^2-1|}{\sqrt{4t^2+4}} = \frac{t^2+1}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{2}$$



ここで，半円 $x^2+y^2=1\ (y \leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積 S は，右図の網点部の面積に等しく，$-1 \leqq t \leqq 1$ のとき $\dfrac{1}{2} \leqq d \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となることに注意すると，

(i)　$d = \dfrac{1}{2}\ (t=0)$ のとき

単位円と直線 $x = d$ との交点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となり，

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(ii)　$d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (t = \pm 1)$ のとき

単位円と直線 $x = d$ との交点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ となり，

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(i)(ii)より，S のとりうる値の範囲は，$\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \leqq S \leqq \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ である。

コメント

放物線の接線と円を題材にした基本的な問題です。ポイントは d の値を用いて処理をする点です。

問　題

正の実数 a, b, c は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $|ax+by|\leqq 1$，$|cx-by|\leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。 [2017]

解答例＋映像解説

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=1$ に対し，$|ax+by|\leqq 1$ ……①より，

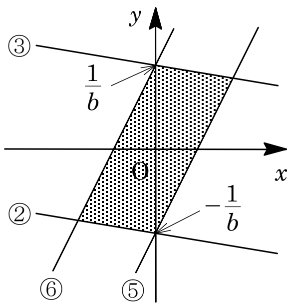
$$-1\leqq ax+by\leqq 1,\ -\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq -\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……②，$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……③

また，$|cx-by|\leqq 1$ ……④より，

$$-1\leqq cx-by\leqq 1,\ \frac{c}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq \frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……⑤，$y=\dfrac{c}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……⑥



①かつ④の表す領域 D は，直線②と③，および直線⑤と⑥が，平行で，しかも原点対称であることより，右上図の平行四辺形の内部または辺上となる。

そして，直線③と⑤を連立すると，$-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ より，

$$(a+c)x=2,\ x=\frac{2}{a+c}$$

よって，領域 D の面積を S とおくと，対称性より，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{2}{a+c}\right)=\frac{4}{b(a+c)}=\frac{4}{b(1-b)}=\frac{4}{-b^2+b}$$

ここで，$f(b)=-b^2+b$ とおくと，$f(b)=-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より，$0<b<1$ において，

$$0<f(b)\leqq\frac{1}{4}\ \left(\text{等号は } b=\frac{1}{2} \text{ のとき成立}\right)$$

したがって，S は $b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 16 をとる。

コメント

領域についての問題です。ただ，平行四辺形の 1 つの対角線が y 軸上にあったり，また面積が 1 文字で表せたり，かなり解きやすい設定になっています。

問　題

座標平面上の原点を O とする。点 $A(a,\ 0)$，点 $B(0,\ b)$ および点 C が，$OC=1$，$AB=BC=CA$ を満たしながら動く。

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2015]

解答例＋映像解説

(1) $C(p,\ q)$ とおくと，$OC=1$ から，$p^2+q^2=1$ ………①

また，$A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$ に対し，$AB=BC=CA$ より，

$$a^2+b^2=p^2+(q-b)^2\ \cdots\cdots\text{②},\quad a^2+b^2=(p-a)^2+q^2\ \cdots\cdots\text{③}$$

①②より，$a^2=1-2bq$ となり，$b\neq 0$ のとき $q=\dfrac{1-a^2}{2b}$ ………④

①③より，$b^2=1-2ap$ となり，$a\neq 0$ のとき $p=\dfrac{1-b^2}{2a}$ ………⑤

④⑤を①に代入すると，$\dfrac{(1-b^2)^2}{4a^2}+\dfrac{(1-a^2)^2}{4b^2}=1$ となり，

$$b^2(1-b^2)^2+a^2(1-a^2)^2=4a^2b^2\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

なお，$b=0$ のときは $a=\pm1$，$a=0$ のときは $b=\pm1$ となるが，この場合も⑥はともに成立し，左辺を展開すると，

$$a^6+b^6-2(a^4+b^4)+a^2+b^2=4a^2b^2$$

ここで，$s=a^2+b^2$，$t=ab$ とすると，

$$s^3-3t^2s-2(s^2-2t^2)+s=4t^2,\quad s(s^2-3t^2-2s+1)=0$$

$s=0$ のとき $a=b=0$，そして②から $p=q=0$ となり不適なので，$s\neq 0$ から，

$$s^2-3t^2-2s+1=0\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

(2) $\triangle ABC$ は正三角形なので，その面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}s\ \cdots\cdots\text{⑧}$$

さて，⑦より $(s-1)^2-3t^2=0$ から，$s=1\pm\sqrt{3}t$ ………⑨

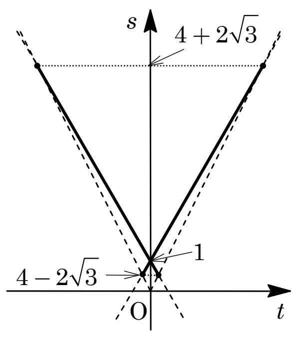
また，$s=(a+b)^2-2ab$ から，$(a+b)^2=s+2t$ となり，$s+2t\geqq 0$ ……⑩で，

$$a+b=\pm\sqrt{s+2t}$$

すると，a，b は，2 次方程式 $x^2\mp\sqrt{s+2t}\,x+t=0$ の 2 つの解となり，

$$D=(s+2t)-4t=s-2t\geqq 0\ \cdots\cdots\text{⑪}$$

⑨かつ⑩かつ⑪を ts 平面上に図示すると，右図の実線部となる。



これより，$4-2\sqrt{3}\leqq s\leqq 4+2\sqrt{3}$ となり，⑧から，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2\sqrt{3})\leqq S\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}(4+2\sqrt{3}),\ \ \sqrt{3}-\frac{3}{2}\leqq S\leqq\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

コメント

(2)では図をかいて s の範囲を求めましたが，⑨より t を消去しても可能です。

問　題

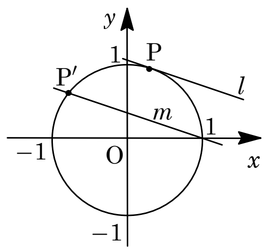
円$C: x^2+y^2=1$上の点 P における接線を l とする。点$(1,\ 0)$を通り l と平行な直線を m とする。直線 m と円 C の$(1,\ 0)$以外の共有点をP'とする。ただし, m が直線$x=1$のときはP'を$(1,\ 0)$とする。円 C 上の点$\mathrm{P}(s,\ t)$から点$\mathrm{P}'(s',\ t')$を得る上記の操作を T と呼ぶ。

(1) s', t'をそれぞれ s と t の多項式として表せ。

(2) 点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点をP_nとおく。P が$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$のとき, P_1, P_2, P_3を図示せよ。

(3) 正の整数 n について, $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$となるような点 P の個数を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説



(1) 円$x^2+y^2=1$……①上の点$\mathrm{P}(s,\ t)$における接線 l と平行で, 点$(1,\ 0)$を通る直線 m の方程式は, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s,\ t)$より,

$$s(x-1)+ty=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで, $t\neq0$のときは, ②より$y=-\dfrac{s}{t}(x-1)$となり, ①に代入すると,

$$x^2+\frac{s^2}{t^2}(x-1)^2=1,\ \ t^2(x^2-1)+s^2(x-1)^2=0$$

$$(x-1)\{(s^2+t^2)x-(s^2-t^2)\}=0$$

$x\neq1$のとき, $x=\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$となり, $y=-\dfrac{s}{t}\left(\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}-1\right)=\dfrac{2st}{s^2+t^2}$

すると, $s^2+t^2=1$から, $x=s^2-t^2$, $y=2st$となり, $\mathrm{P}'(s',\ t')$は,

$$s'=s^2-t^2,\ \ t'=2st\ \cdots\cdots\cdots③$$

なお, $t=0$のときは$s=\pm1$から, $(s',\ t')=(1,\ 0)$となり条件を満たす。

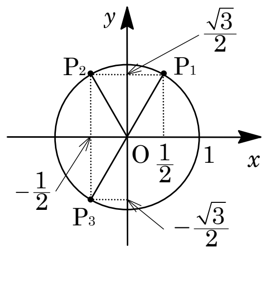
(2) まず, $s=\cos\theta$, $t=\sin\theta$とおくと, ③より,

$$s'=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta,\ \ t'=2\cos\theta\sin\theta=\sin2\theta$$

点 P が$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$のとき,

$$\mathrm{P}_1\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right),\ \mathrm{P}_2\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\mathrm{P}_3\left(\cos\frac{4}{3}\pi,\ \sin\frac{4}{3}\pi\right)$$



よって, P_1, P_2, P_3を図示すると, 右図のようになる。

(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，(2)から $P_1(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ となり，さらに $P_2(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$，$P_3(\cos 8\theta,\ \sin 8\theta)$ から，帰納的に $P_n(\cos 2^n\theta,\ \sin 2^n\theta)$ と表すことができる。

ここで，$P_n = P$ のとき，k を整数として，$2^n\theta = \theta + 2k\pi$ なので，

$$(2^n - 1)\theta = 2k\pi\ ,\ \ \theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$$

すると，$0 \leqq \dfrac{2k\pi}{2^n - 1} < 2\pi$ より，$0 \leqq 2k\pi < 2\pi(2^n - 1)$，$0 \leqq k < 2^n - 1$

よって，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n - 2$ から，$P_n = P$ となる点 P は $2^n - 1$ 個ある。

コメント

図形的な条件を三角関数の列へとつなぐ問題です。(3)は題意が把握しにくいので，$n = 1,\ 2,\ \cdots$ と具体例を考え，方針を立てました。

問　題

定数 a, b, c, d に対して，平面上の点$(p,\ q)$を点$(ap+bq,\ cp+dq)$に移す操作を考える。ただし，$(a,\ b,\ c,\ d)\neq(1,\ 0,\ 0,\ 1)$である。$k$ を 0 でない定数とする。放物線$C : y=x^2-x+k$上のすべての点は，この操作によって C 上に移る。

(1)　a, b, c, d を求めよ。

(2)　C 上の点 A における C の接線と，点 A をこの操作によって移した点 A$'$ における C の接線は，原点で直交する。このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ。

[2012]

解答例＋映像解説

(1)　$C : y=x^2-x+k$ 上の任意の点$(t,\ t^2-t+k)$は，条件で与えられた操作によって，$(at+b(t^2-t+k),\ ct+d(t^2-t+k))$に移る。この点が C 上にあることより，

$$ct+d(t^2-t+k)=\{at+b(t^2-t+k)\}^2-\{at+b(t^2-t+k)\}+k \cdots\cdots\cdots①$$

任意の t に対して①が成立するので，両辺の t^4 の係数を比べると $b=0$ が必要となる。これを①に代入して整理すると，

$$dt^2+(c-d)t+dk=a^2t^2-at+k \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，任意の t に対して②が成立するので，

$$d=a^2 \cdots\cdots\cdots③,\ c-d=-a \cdots\cdots\cdots④,\ dk=k \cdots\cdots\cdots⑤$$

$k\neq0$ なので，⑤より $d=1$ となり，③から $a=\pm1$

$a=1$ のとき，④から $c=0$ となるが，$(a,\ b,\ c,\ d)\neq(1,\ 0,\ 0,\ 1)$ より不適である。また，$a=-1$ のとき，④から $c=2$ となる。

以上より，$(a,\ b,\ c,\ d)=(-1,\ 0,\ 2,\ 1)$

(2)　点 $\mathrm{A}(p,\ p^2-p+k)$ とおくと，(1)から，$\mathrm{A}'(-p,\ p^2+p+k)$ となる。

ここで，$y=x^2-x+k$ に対し，$y'=2x-1$ となるので，点 A における接線は，

$$y-(p^2-p+k)=(2p-1)(x-p),\ y=(2p-1)x-p^2+k \cdots\cdots\cdots⑥$$

また，点 A$'$ における接線は，

$$y-(p^2+p+k)=(-2p-1)(x+p),\ y=-(2p+1)x-p^2+k \cdots\cdots\cdots⑦$$

直線⑥と⑦が原点で直交することより，

$$-p^2+k=0 \cdots\cdots\cdots⑧,\ -(2p-1)(2p+1)=-1 \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑨より，$4p^2-1=1$ から $p=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，⑧より $k=\dfrac{1}{2}$

すると，点 A の y 座標は，$y=\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}=1\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（複号同順）となり，

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \mathrm{A}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

コメント

1 次変換の問題ですが，その知識は必要ではありません。なお，①は複雑なので，いったん必要条件を求めて整理しています。

問　題

p, q を実数とする。放物線 $y=x^2-2px+q$ が，中心 $(p,\ 2q)$ で半径 1 の円と中心 $(p,\ p)$ で半径 1 の円の両方と共有点をもつ。この放物線の頂点が存在しうる領域を xy 平面上に図示せよ。 [2009]

解答例

まず，与えられた放物線 $y=x^2-2px+q$ を変形すると，

$$y=(x-p)^2-p^2+q \cdots\cdots\cdots ①$$

また，中心が $(p,\ 2q)$ で，半径が 1 の円の方程式は，

$$(x-p)^2+(y-2q)^2=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$y+p^2-q+(y-2q)^2=1$

$$y^2-(4q-1)y+p^2+4q^2-q-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②が共有点をもつ条件は，$D=(4q-1)^2-4(p^2+4q^2-q-1)\geqq 0$

$$-4q-4p^2+5\geqq 0\ ,\ \ p^2+q\leqq \frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots ④$$

③の解がともに $y<-p^2+q$ にある条件は，④に加えて，

$$\frac{4q-1}{2}<-p^2+q\ ,\ \ p^2+q<\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$(-p^2+q)+p^2-q+(-p^2+q-2q)^2-1>0\ ,\ \ (p^2+q)^2>1 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④⑤⑥をまとめると，$p^2+q<-1$ となる。

すると，③の少なくとも 1 つの解が $y\geqq -p^2+q$ である条件は，

$$-1\leqq p^2+q\leqq \frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots ⑦$$

同様にして，中心が $(p,\ p)$ で，半径が 1 の円の方程式は，

$$(x-p)^2+(y-p)^2=1 \cdots\cdots\cdots ⑧$$

①⑧を連立して，$y+p^2-q+(y-p)^2=1$

$$y^2-(2p-1)y+2p^2-q-1=0 \cdots\cdots\cdots ⑨$$

①⑧が共有点をもつ条件は，$D=(2p-1)^2-4(2p^2-q-1)\geqq 0$

$$4q-4p^2-4p+5\geqq 0\ ,\ \ p^2+p-q\leqq \frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots ⑩$$

⑨の解がともに $y<-p^2+q$ にある条件は，⑩に加えて，

$$\frac{2p-1}{2}<-p^2+q\ ,\ \ p^2+p-q<\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ⑪$$

$$(-p^2+q)+p^2-q+(-p^2+q-p)^2-1>0\ ,\ \ (p^2+p-q)^2>1 \cdots\cdots\cdots ⑫$$

⑩⑪⑫をまとめると，$p^2+p-q<-1$ となる。

すると，⑨の少なくとも 1 つの解が $y \geqq -p^2+q$ である条件は,

$$-1 \leqq p^2+p-q \leqq \frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots ⑬$$

さて，放物線①の頂点を $(x,\ y)$ とおくと，①より，$x=p$，$y=-p^2+q$ となり，

$$p=x\,,\ \ q=y+x^2 \cdots\cdots\cdots ⑭$$

⑦⑭より，$-1 \leqq y+2x^2 \leqq \dfrac{5}{4}$ となり，

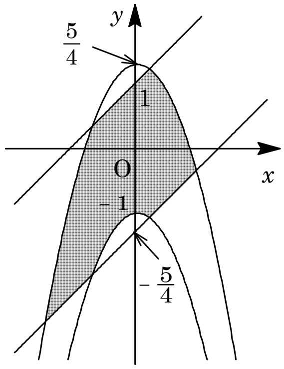
$$-2x^2-1 \leqq y \leqq -2x^2+\frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots ⑮$$

⑬⑭より，$-1 \leqq x-y \leqq \dfrac{5}{4}$ となり，

$$x-\frac{5}{4} \leqq y \leqq x+1 \cdots\cdots\cdots ⑯$$

⑮⑯をまとめて図示すると，放物線①の頂点が存在しうる領域は，右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含まれる。



コメント

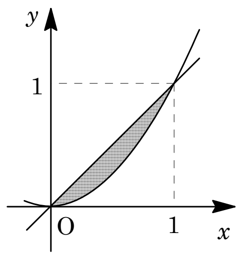
放物線と円の方程式の中にある $(x-p)^2$ に注目した解法で，最初に考えたものです。置換えをすれば，2 回同じ計算をすることもなかったのですが。

問　題

a を正の実数とする。点 $(x,\ y)$ が，不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ の定める領域を動くとき，つねに $\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ となる。a の値の範囲を求めよ。 [2008]

解答例

不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ ……①の定める領域は右図の網点部である。



さて，$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ より，

$$-(x-a)^2 + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -(x-a)^2 + 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

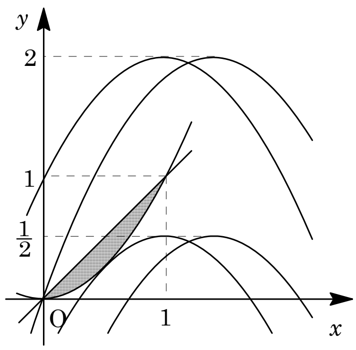
すると，②で表される領域は，$y = -(x-a)^2 + \dfrac{1}{2}$ ……③と $y = -(x-a)^2 + 2$ ……④のグラフに挟まれた領域である。

ここで，③と $y = x^2$ を連立して，

$$x^2 = -(x-a)^2 + \frac{1}{2},\ 2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{2} = 0$$

すると，③のグラフが $y = x^2$ に接するのは，

$$D/4 = a^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$



$a>0$ から，$a=1$ となる。

また，④のグラフが原点を通るのは，

$$0 = -a^2 + 2$$

$a>0$ から，$a = \sqrt{2}$ となる。

よって，領域①が領域②に含まれる a の値の範囲は，

$$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$$

コメント

図を見ながら必要な計算をしていきます。ただ，2 つの放物線の頂点の y 座標はそれぞれ固定されており，しかも x 座標は等しくなっています。このため，a の値の変化に伴う 2 つの放物線の動きは，複雑ではありません。

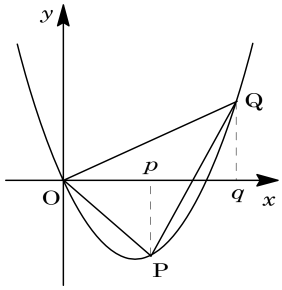
問　題

放物線 $y=ax^2+bx\ (a>0)$ を C とする。C 上に異なる 2 点 P，Q をとり，その x 座標をそれぞれ $p,\ q\ (0<p<q)$ とする。

(1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が，△OPQ の面積の $\dfrac{3}{2}$ 倍であるとき，p と q の関係を求めよ。ただし，O は原点を表す。

(2) Q を固定して P を動かす。△OPQ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また，そのときの△OPQ の面積と，線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。 [2007]

解答例



(1) 線分 OQ と放物線 $C: y=ax^2+bx$ で囲まれた部分の面積を S とおく。また，OQ の傾きを m とすると，OQ と C との交点が $x=0,\ q$ より，

$$S=\int_0^q (mx-ax^2-bx)\,dx=\int_0^q -ax(x-q)\,dx$$
$$=\frac{a}{6}q^3$$

ここで，$\mathrm{P}(p,\ ap^2+bp)$，$\mathrm{Q}(q,\ aq^2+bq)$ より，

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\,p(aq^2+bq)-q(ap^2+bp)\,\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\,apq(q-p)\,\right|=\frac{1}{2}apq(q-p)$$

条件より，$S=\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{OPQ}$ なので，$\dfrac{a}{6}q^3=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}apq(q-p)$

$$2q^2-9pq+9p^2=0,\ (2q-3p)(q-3p)=0$$

よって，$q=\dfrac{3}{2}p$ または $q=3p$

(2) (1)より，$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}aq(qp-p^2)=-\dfrac{1}{2}aq\left(p-\dfrac{q}{2}\right)^2+\dfrac{1}{8}aq^3$

よって，$p=\dfrac{q}{2}$ のとき，△OPQ の面積は最大となり，その値は $\dfrac{1}{8}aq^3$ である。

このとき，$\triangle\mathrm{OPQ}:S=\dfrac{1}{8}aq^3:\dfrac{1}{6}aq^3=3:4$ となる。

コメント

b の符号にかかわらず，放物線は下に凸なので，場合分けは必要ありませんでした。(2)では，(1)を誘導とし，平方完成を用いて最大値を求めました。図形的に，P における接線が OQ に平行な場合として，結論を導くこともできます。

問　題

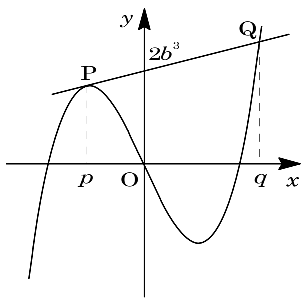
a, b を正の定数とする。関数 $y = x^3 - ax$ のグラフと，点$(0,\ 2b^3)$を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし, P の x 座標は負, Q の x 座標は正である。

(1) 直線 PQ の方程式を a と b で表せ。

(2) P および Q の座標を a と b で表せ。

(3) $\angle \mathrm{POQ} = 90°$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ。ただし, O は原点である。 [2006]

解答例



(1) 曲線 $y = x^3 - ax$ ……①上の点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q ($p<0<q$) とし，点$(0,\ 2b^3)$を通る直線を $y = mx + 2b^3$ ……②とおく。

また, 条件より, 点 P, Q の一方は①と②の接点, 他方は交点である。

(i) 点 P が交点, 点 Q が接点のとき

$x^3 - ax - (mx + 2b^3) = 0$ は解 $x = p$ と重解 $x = q$ をもつことより,

$$x^3 - ax - (mx + 2b^3) = (x - p)(x - q)^2$$

定数項を比べると，$-2b^3 = -pq^2$ となり, $b>0$, $p<0<q$ に反する。

(ii) 点 P が接点, 点 Q が交点のとき

$x^3 - ax - (mx + 2b^3) = 0$ は重解 $x = p$ と解 $x = q$ をもつことより,

$$x^3 - ax - (mx + 2b^3) = (x - p)^2(x - q)$$

係数を比べると,

$$0 = 2p + q \text{ ………③},\quad -a - m = p^2 + 2pq \text{ ………④},\quad -2b^3 = -p^2 q \text{ ………⑤}$$

③から $q = -2p$ を④, ⑤に代入すると,

$$m = -a + 3p^2 \text{ ………⑥},\quad p = -b \text{ ………⑦}$$

⑥⑦より $m = -a + 3b^2$ となり, 直線 PQ の方程式は, ②より,

$$y = (-a + 3b^2)x + 2b^3$$

(2) ①⑦より $\mathrm{P}(-b,\ -b^3 + ab)$, ③から $q = 2b$ なので $\mathrm{Q}(2b,\ 8b^3 - 2ab)$ となる。

(3) (2)より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-b,\ -b^3 + ab)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (2b,\ 8b^3 - 2ab)$ である。

条件から $\angle \mathrm{POQ} = 90°$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 0$ となり,

$$-2b^2 + (-b^3 + ab)(8b^3 - 2ab) = 0$$

$b>0$ を用いてまとめると, $4b^4 - 5ab^2 + a^2 + 1 = 0$

ここで, $t = b^2 > 0$ とおくと, $4t^2 - 5at + a^2 + 1 = 0$ ………⑧

すると，求める条件は，⑧が $t>0$ の解をもつ a の範囲となる。

$a>0$ から，$\dfrac{5a}{4}>0$，$\dfrac{a^2+1}{4}>0$ に注意すると，

$$D=25a^2-16(a^2+1)=(3a+4)(3a-4)\geqq 0$$

よって，$a\geqq\dfrac{4}{3}$ である。

コメント

重解条件を利用して解きました。標準的で落とせない問題です。

問　題

原点を中心とする半径 1 の円を C とし，$0<a<1$，$b>1$ とする。$\mathrm{A}(a,\ 0)$ と $\mathrm{N}(0,\ 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく。また，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく。

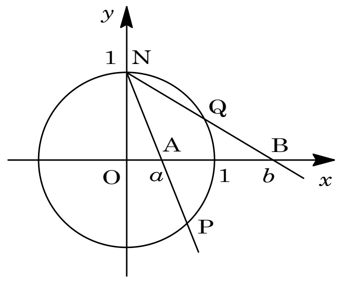
(1) P の座標を a で表せ。

(2) $\mathrm{AQ}\,/\!/\,\mathrm{PB}$ のとき，$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$ となることを示せ。

(3) $\mathrm{AQ}\,/\!/\,\mathrm{PB}$，$\angle\mathrm{ANB}=45^\circ$ のとき，a の値を求めよ。 [2005]

解答例

(1) 直線 NA の方程式は，$y=-\dfrac{1}{a}x+1$



円 $C: x^2+y^2=1$ との交点は，

$$x^2+\left(-\frac{1}{a}x+1\right)^2=1,\ (a^2+1)x^2-2ax=0$$

$x\neq 0$ より，$x=\dfrac{2a}{a^2+1}$

$$y=-\frac{1}{a}\cdot\frac{2a}{a^2+1}+1=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$ となる。

(2) (1)と同様にして，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2b}{b^2+1},\ \dfrac{b^2-1}{b^2+1}\right)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\frac{2b}{b^2+1}-a,\ \frac{b^2-1}{b^2+1}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{2a}{a^2+1}-b,\ \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\left(\dfrac{2b}{b^2+1}-a\right)-\dfrac{b^2-1}{b^2+1}\left(\dfrac{2a}{a^2+1}-b\right)=0$

$$(a^2-1)2b-a(a^2-1)(b^2+1)-(b^2-1)2a+b(b^2-1)(a^2+1)=0$$

$$ab(a-b)+3(a-b)-a^2b^2(a-b)-(a^3-b^3)=0$$

$a\neq b$ より，$ab+3-a^2b^2-(a^2+ab+b^2)=0$，$a^2b^2+a^2+b^2=3$ ………①

$$(a^2+1)(b^2+1)=4,\ \sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}=2$$

よって，$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$ となる。

(3) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{NA}}=(a,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{NB}}=(b,\ -1)$，$|\overrightarrow{\mathrm{NA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{NB}}|=2$

また，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{NA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NB}}=|\overrightarrow{\mathrm{NA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{NB}}|\cos 45^\circ$ なので，

$$ab+1=2\times\frac{\sqrt{2}}{2},\ ab=\sqrt{2}-1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$a^2b^2+(a+b)^2-2ab=3$ から，②を代入すると，

$$(a+b)^2=3+2(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)^2=4\sqrt{2}-2$$

$a+b>0$ より，$a+b=\sqrt{4\sqrt{2}-2}$ ………③

②③より, a, b は，$x^2-\sqrt{4\sqrt{2}-2}\,x+(\sqrt{2}-1)=0$ の解であり, $a<b$ から,

$$a=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2-4(\sqrt{2}-1)}}{2}=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{2}}{2}$$

この値は $0<a<1$ を満たす。

コメント

愚直に解きましたが, a の値が，答としては，ためらうものでした。

問　題

a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\quad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して, 2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき, 少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。　　[2005]

解答例

(1)　放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつとき, $f(x)=g(x)$ は異なる 2 つの実数解をもつことより,

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3},\quad 3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

①の判別式 $D/4=4a^2-3\left(\frac{5}{3}a^2-3\right)=-a^2+9>0$ から, $-3<a<3$ となる。

(2)　$-3<a<3$ のとき, ①の実数解は $x=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$ となる。これを $x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$ とおくと, 2 つの放物線によって囲まれる図形 C_a の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}-(x^2-3)\right\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{9-a^2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

(3)　$y\leqq g(x)=-2(x-a)^2+\dfrac{a^2}{3}$ から, $y\leqq-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$

ここで, $h(a)=-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$ とおくと, $h(a)=-\dfrac{5}{3}\left(a-\dfrac{6}{5}x\right)^2+\dfrac{2}{5}x^2$

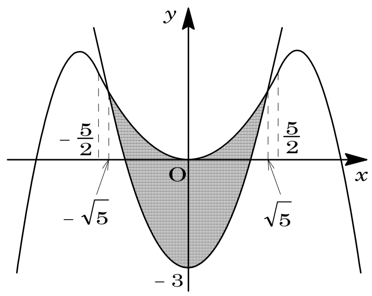
さて, $-3<a<3$ のとき, x を固定して, 領域 $y\leqq g(x)$, すなわち $y\leqq h(a)$ の動く平面上の部分を考える。

(i)　$\dfrac{6}{5}x\leqq-3$ $\left(x\leqq-\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(-3)=-15-12x-2x^2$

(ii)　$-3<\dfrac{6}{5}x<3$ $\left(-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y\leqq h\left(\dfrac{6}{5}x\right)=\dfrac{2}{5}x^2$

(iii)　$\dfrac{6}{5}x\geqq3$ $\left(x\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(3)=-15+12x-2x^2$

(i)～(iii)の部分と，領域 $y \geqq f(x)$ を合わせると，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形が得られ，図示すると右図の網点部となる。



この面積は，

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx$$
$$=-\frac{3}{5}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})\,dx$$
$$=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{5})^3=4\sqrt{5}$$

コメント

(3)では，領域の動く部分を，x の値を固定して，y のとり得る値の範囲として求めました。そこまで，やることはなかったのですが。

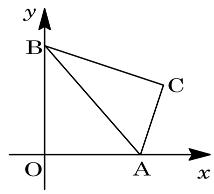
問　題

a, b, c は 0 以上の実数とする。3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(1,\ c)$ は, $\angle\mathrm{ABC} = 30^\circ$, $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ を満たす。

(1) c を求めよ。

(2) AB の長さの最大値と最小値を求めよ。　[2002]

解答例



(1) $\angle\mathrm{ACB} = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ より,

$$\frac{\mathrm{AB}}{2} = \mathrm{AC} = \frac{\mathrm{BC}}{\sqrt{3}},\ \frac{\mathrm{AB}^2}{4} = \mathrm{AC}^2 = \frac{\mathrm{BC}^2}{3}$$

すると, $\dfrac{a^2+b^2}{4} = (a-1)^2 + c^2 = \dfrac{1+(b-c)^2}{3}$

$$a^2+b^2 = 4\{(a-1)^2+c^2\}\cdots\cdots①$$

$$3(a^2+b^2) = 4\{1+(b-c)^2\}\cdots\cdots②$$

①より, $3a^2 - b^2 + 4c^2 - 8a + 4 = 0$ ………③

②より, $3a^2 - b^2 - 4c^2 + 8bc - 4 = 0$ ………④

③－④より, $c^2 - bc - a + 1 = 0$, $a = c^2 - bc + 1$ ………⑤

⑤を④に代入して, $3(c^2-bc+1)^2 - b^2 - 4c^2 + 8bc - 4 = 0$

$$3c^4 + 3b^2c^2 - 6bc^3 + 2bc + 2c^2 - b^2 - 1 = 0$$

$$(3c^2-1)b^2 - 2c(3c^2-1)b + (3c^2-1)(c^2+1) = 0$$

$$(3c^2-1)(b^2-2cb+c^2+1) = 0,\ (3c^2-1)\{(b-c)^2+1\} = 0$$

$(b-c)^2 + 1 > 0$, $c \geqq 0$ より, $c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を①に代入して, $a^2+b^2 = 4\left\{(a-1)^2 + \dfrac{1}{3}\right\}$

ここで, ⑤より, $a = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}b + 1$, $b = \sqrt{3}\left(\dfrac{4}{3} - a\right)$ であり, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ より,

$0 \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}$ となるので, $\dfrac{4}{3} \leqq a^2 + b^2 \leqq \dfrac{16}{3}$

以上より, AB の長さの最大値は $\sqrt{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, 最小値は $\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である。

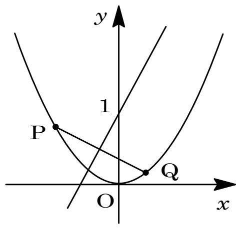
コメント

前問に続き, 本問も複素数と考えましたが, 同じ手段というのも気持ちが悪いので, 座標計算だけで処理してみました。なお, 設問から推測できるように, ③かつ④だけで c の値がうまく求まります。

問　題

放物線 $y = x^2$ 上に，直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。　[2001]

解答例



$p \neq q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ と直線 $y = ax + 1$ が直交することより，

$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} \cdot a = -1,\quad p + q = -\frac{1}{a} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，PQ の中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ が，直線 $y = ax + 1$ 上にあることより，

$$\frac{p^2 + q^2}{2} = a \cdot \frac{p+q}{2} + 1,\quad p^2 + q^2 = a(p+q) + 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①を②に代入すると，$p^2 + q^2 = 1 \cdots\cdots\cdots ③$

①③を満たす異なる p, q が存在する条件は，直線①と円③が 2 つの共有点を持つ条件に等しいので，

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}} < 1,\quad 1 < \sqrt{2}\,|a|$$

よって，$a < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a$

コメント

線対称移動を題材にした問題です。後半の a の範囲を求めるところは，図をイメージしています。

問　題

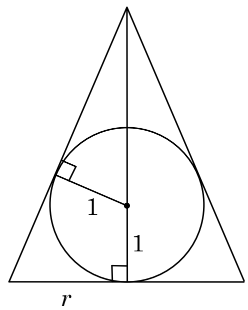
半径 1 の球が直円錐に内接している。この直円錐の底面の半径を r とし，表面積を S とする。

(1)　S を r を用いて表せ。

(2)　S の最小値を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　半径 1 の球が内接している直円錐を，軸を含む平面で切断した切り口は右図のようになる。



ここで，直円錐の高さを h とおくと，

$$\frac{1}{h-1}=\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}},\quad h^2+r^2=r^2(h-1)^2$$

すると，$(r^2-1)h=2r^2$ より，$h=\dfrac{2r^2}{r^2-1}$

これより，直円錐の表面積 S は，

$$S=\pi r^2+\frac{1}{2}\sqrt{h^2+r^2}\cdot 2\pi r=\pi r^2+r(h-1)\cdot\pi r=\pi r^2 h=\frac{2\pi r^4}{r^2-1}$$

(2)　$r>1$ より $r^2-1>0$ となり，(1)から，

$$S=2\pi\left(r^2+1+\frac{1}{r^2-1}\right)=2\pi\left(r^2-1+\frac{1}{r^2-1}+2\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$r^2-1+\dfrac{1}{r^2-1}\geqq 2$

なお，等号は $r^2-1=\dfrac{1}{r^2-1}$，すなわち $r^2=2\ (r=\sqrt{2})$ のとき成立する。

よって，S の最小値は，$2\pi(2+2)=8\pi$ である。

コメント

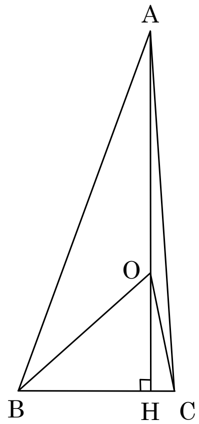
立体の基本的な問題です。(2)では分数関数が現れましたので，相加平均と相乗平均の出番です。

問　題

平面上の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，△ABC の面積の最大値を求めよ。 [2013]

解答例＋映像解説

$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ より，$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ である。



すると，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin60^\circ=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となり，

$$\mathrm{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos60^\circ=7,\ \ \mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

ここで，点 O から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とすると，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\mathrm{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \ \mathrm{OH}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

以上より，△ABC の面積が最大となるのは，点 A が HO の延長線上にあるときで，$\mathrm{OA}=4$ から，その値は，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+4\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{7}$$

コメント

△OBC は決定されるので，点 A が辺 BC からいちばん離れたところに位置する場合を求めればよいことになります。なお，OH の長さは勢いで求めてしまいましたが，必要ありませんでした。

問　題

点 O を中心とする半径 r の円周上に，2 点 A, B を $\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとり，$\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とおく。この円周上に点 C を，線分 OC が線分 AB と交わるようにとり，線分 AB 上に点 D をとる。また，点 P は線分 OA 上を，点 Q は線分 OB 上を，それぞれ動くとする。

(1)　$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$ の最小値を r と θ で表せ。

(2)　$a=\mathrm{OD}$ とおく。$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を a と θ で表せ。

(3)　さらに，点 D が線分 AB 上を動くときの $\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を r と θ で表せ。

[2011]

解答例＋映像解説

(1)　点 C の直線 OA, OB に関する対称点を，それぞれ C′，C″ とおくと，

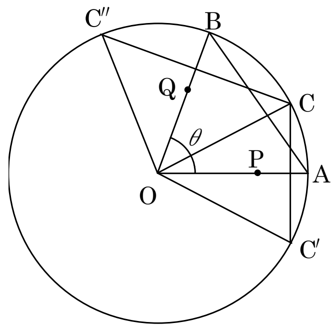
$$\mathrm{OC}=\mathrm{OC'}=\mathrm{OC''}=r$$

また，$\angle\mathrm{AOB}=\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\angle\mathrm{C'OC''}=2\theta<\pi$ となり，

$$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}=\mathrm{C'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC''}\geqq\mathrm{C'C''}$$

よって，$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$ の最小値は，

$$\mathrm{C'C''}=2r\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot2\theta\right)=2r\sin\theta$$



(2)　点 D の直線 OA, OB に関する対称点を，それぞれ D′，D″ とおくと，

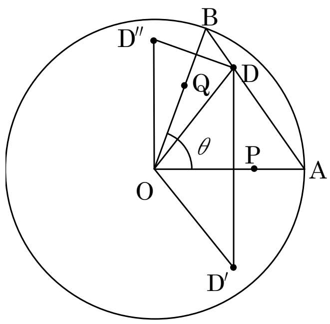
$$\mathrm{OD}=\mathrm{OD'}=\mathrm{OD''}=a$$

また，$\angle\mathrm{AOB}=\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\angle\mathrm{D'OD''}=2\theta<\pi$ となり，

$$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}=\mathrm{D'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD''}\geqq\mathrm{D'D''}$$

よって，$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値は，同様に，

$$\mathrm{D'D''}=2a\sin\theta$$



(3)　a の取り得る値の範囲は，$r\cos\dfrac{\theta}{2}\leqq a\leqq r$

よって，$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値は, (2)より，$2r\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$ である。

コメント

折り返しを利用して最短経路を求める有名問題です。ただ, (2)は(1)の繰り返しなので，不気味な感じがします。

問　題

座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし，△ABC の重心は原点の位置にあり，辺 BC は x 軸と平行である。また，頂点 A は y 軸上にあって y 座標は正であり，頂点 C の x 座標は正である。直線 $y=x$ に関して 3 点 A，B，C と対称な点を，それぞれ A′，B′，C′ とする。

(1)　C′ の座標を求めよ。

(2)　△ABC と △A′B′C′ が重なる部分の面積を求めよ。　[2006]

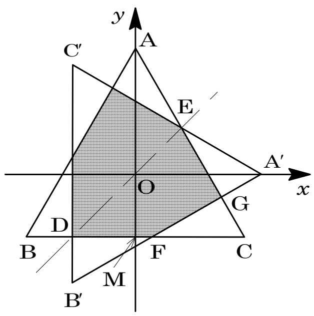
解答例

(1)　BC の中点を M とすると，CM $=1$ となり，

$$\mathrm{AM}=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$$

OM : OA $=1:2$ から，$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，$\mathrm{C}\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$となり，直線 $y=x$ に関して対称移動すると，$\mathrm{C}'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right)$となる。



(2)　BC と B′C′ は直線 $y=x$ に関して対称なので，その交点 D は $y=x$ 上にあり，$\mathrm{D}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$となる。

ここで，直線 AC は傾きが $\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$，点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$から，その方程式は，

$$y=-\sqrt{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

同様に，AC と A′C′ の交点 E も直線 $y=x$ 上にあり，その座標は，

$$x=-\sqrt{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3},\quad x=\frac{2\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{3})}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

よって，$\mathrm{E}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$となり，

$$\triangle\mathrm{CDE}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

また，直線 A′B′ は傾きが $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，点 $\mathrm{A}'\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3},\ 0\right)$から，その方程式は，

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

すると，A′B′ と BC の交点 F は，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$，$x=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-1$

そこで, AC と A′B′ は直交することより,

$$\triangle\mathrm{CFG}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CF}\cos 60^\circ\cdot\mathrm{CF}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{3}+1\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

以上より，求める図形は直線 $y=x$ に関して対称なので，その面積 S は,

$$S=2(\triangle\mathrm{CDE}-\triangle\mathrm{CFG})=2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}-\frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)=3-\sqrt{3}$$

コメント

頂点や交点の座標を求め，三角形の面積へとつなぎました。計算量はやや多めです。なお，回転に注目する方法もあります。

問　題

H を 1 辺の長さが 1 の正六角形とする。

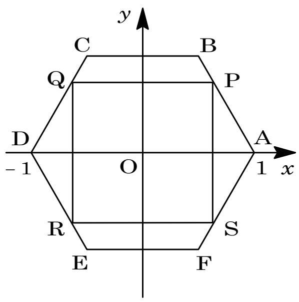
(1) H の中にある正方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

(2) H の中にある長方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。 [2004]

解答例

(1) 原点を正六角形の中心とし，右図のように座標軸を設定して，両軸に平行な正方形 PQRS を考える。

すると，対称性から正方形の面積が最大となるのは，頂点 P, Q, R, S が各象限に配置され，正方形の中心が原点となるときである。すると，4 つの頂点は辺 AB, CD, DE, FA 上にあることになる。



さて，辺 AB を表す直線は，$y=-\sqrt{3}(x-1)$ であり，直線 $y=x$ との交点が，右図の頂点 P の位置なので，

$$x=-\sqrt{3}(x-1),\ \ x=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$となり，求める正方形の面積の最大値は，

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 4=12-6\sqrt{3}$$

(2) (1)と同様に考えて，第 1 象限にある頂点 P の位置を考える。

まず，辺 BC 上にあるとき，長方形の面積が最大になるのは，明らかに頂点 P が六角形の頂点$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$に一致する場合である。また，点 P が辺 AB 上にあるとき，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$として，$\mathrm{P}(t,\ -\sqrt{3}(t-1))$とおくと，長方形の面積 S は，

$$S=-\sqrt{3}t(t-1)\times 4=-4\sqrt{3}(t^2-t)=-4\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{3}$$

よって，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，S は最大値をとる。

以上より，点 P が辺 BC 上，辺 CA 上のいずれでも，点 B に一致するとき長方形の面積は最大となり，その最大値は$\sqrt{3}$である。

コメント

適当な大きさの正方形をかき，その後，選択マークをドラッグして最大の大きさのものに拡大するという手法で，解答例をかいています。

問　題

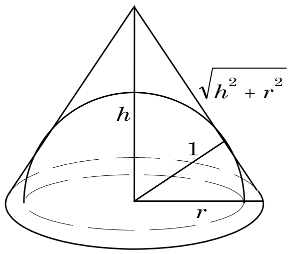
頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1)　円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2)　円錐の体積の最小値を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　円錐の底面の半径を r，高さを h とすると，母線の長さは $\sqrt{h^2+r^2}$ となる。



このとき，右図の断面に注目して，

$$1 : r = h : \sqrt{h^2+r^2}\,,\ \ \sqrt{h^2+r^2} = rh$$

$$h^2+r^2 = r^2h^2\,,\ \ r^2 = \frac{h^2}{h^2-1}$$

ここで，円錐の表面積を S とすると，

$$S = \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi r^2 + \pi r^2 h = \pi(1+h)r^2$$

$$= \pi(1+h)\cdot\frac{h^2}{h^2-1} = \pi\cdot\frac{h^2}{h-1} = \pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^2}}$$

ここで，$\frac{1}{h} = t$ とおくと，$h>1$ より $0<t<1$ となり，さらに $f(t) = t-t^2$ とすると，$S = \frac{\pi}{f(t)}$ である。$f(t) = -\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4}$ より $S \geqq 4\pi$ となり，S の最小値は 4π 。

(2)　円錐の体積を V とすると，$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^3}{h^2-1} = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^3}}$

(1)と同様にして，$g(t) = t-t^3$ とおくと，$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{g(t)}$

$$g'(t) = 1-3t^2$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

右表より，$g(t) \leqq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ となる。これより，$V \geqq \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ となり，V の最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ である。

コメント

S の最小値は相加平均と相乗平均の関係を用いて求められましたが，V の最小値についてはうまくいきません。そこで，考え直して作ったのが上の解です。

問　題

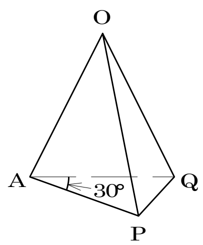
四面体 OAPQ において，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OQ}$ で，$\angle PAQ=30°$ である。

(1) $\triangle APQ$ の面積 S を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{OP}|$ のとりうる範囲を求めよ。

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ。 [2001]

解答例



(1) $|\overrightarrow{OP}|=p$，$|\overrightarrow{OQ}|=q$ とおくと，条件より，

$$AP=\sqrt{p^2+1},\ AQ=\sqrt{q^2+1},\ PQ=\sqrt{p^2+q^2}$$

ここで，$\triangle APQ$ に余弦定理を適用して，

$$p^2+q^2=(p^2+1)+(q^2+1)-2\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\cos 30°$$

$$\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots①$$

①より，$S=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\sin 30°=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(2) ①より，$(p^2+1)(q^2+1)=\frac{4}{3}$，$q^2=\frac{4}{3(p^2+1)}-1=\frac{1-3p^2}{3(p^2+1)}\cdots\cdots\cdots②$

$q>0$ より $q^2>0$ なので $1-3p^2>0$ となり，$p>0$ と合わせて $0<p<\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots③$

(3) $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot p\right)\cdot q=\frac{1}{6}pq$ となるので，

②より，$p^2q^2=\frac{p^2-3p^4}{3(p^2+1)}=-p^2+\frac{4}{3}+\frac{-4}{3p^2+3}=-\left(p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\right)+\frac{7}{3}$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，

$$p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\geqq 2\sqrt{(p^2+1)\cdot\frac{4}{3p^2+3}}=2\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

等号が成立するのは，$p^2+1=\frac{4}{3p^2+3}$，$(p^2+1)^2=\frac{4}{3}$，すなわち $p^2=\frac{2}{\sqrt{3}}-1$ のときであるが，この値は③を満たので，$p^2q^2\leqq-\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{3}$ となり，

$$pq\leqq\sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

以上より，V の最大値は $\frac{1}{6}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3}=\frac{2\sqrt{3}-3}{18}$ である。

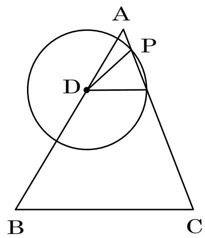
コメント

最大・最小問題に分数式が絡んでくると，相加平均・相乗平均の出番です。

問　題

三角形 ABC において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ である。辺 AB 上に $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点 D をとる。辺 AC 上に $\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|=\dfrac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ を満たす点 P が 2 つ存在するための k の条件を求めよ。ただし，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ はベクトルの長さを表し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトルの内積を表す。 [2000]

解答例



$\mathrm{AB}=a$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ より，

$$a\cdot1\cdot\cos A=k,\ k=a\cos A\cdots\cdots\cdots①$$

△ABC に余弦定理を適用すると，①より，

$$\mathrm{BC}^2=a^2+1^2-2a\cdot1\cdot\cos A=a^2+1-2k\cdots\cdots\cdots②$$

次に，$\mathrm{AP}=x$ とおき，△ADP に余弦定理を適用すると，$\mathrm{DP}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BC}$，$\mathrm{AD}=\dfrac{1}{3}a$ より，

$$\left(\frac{1}{3}\mathrm{BC}\right)^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2+x^2-2\cdot\frac{1}{3}a\cdot x\cdot\cos A$$

①②より，$\dfrac{1}{9}(a^2+1-2k)=\dfrac{1}{9}a^2+x^2-\dfrac{2}{3}kx$

$$9x^2-6kx+2k-1=0,\ (3x-1)(3x-2k+1)=0$$

よって，$x=\dfrac{1}{3}$，$x=\dfrac{2k-1}{3}$

P が AC 上に 2 つ存在する条件は，$0\leqq\dfrac{2k-1}{3}\leqq1$ かつ $\dfrac{2k-1}{3}\neq\dfrac{1}{3}$

すなわち，$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq2$ かつ $k\neq1$ より，$\dfrac{1}{2}\leqq k<1$，$1<k\leqq2$

コメント

$\mathrm{AP}=x$ とおき，x についての 2 次方程式が $0\leqq x\leqq1$ に異なる 2 解をもつ条件を求める問題です。しかし，いわゆる解の配置の常套手段で解くのではなく，$x=\dfrac{1}{3}$ が 1 つの解であることを読み取り，これを利用することがポイントです。

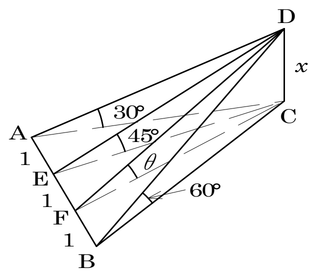
問　題

三角すい ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である。$AB=3$ で，辺 AB 上の 2 点 E，F は，$AE=EF=FB=1$ を満たし，$\angle DAC=30^\circ$，$\angle DEC=45^\circ$，$\angle DBC=60^\circ$ である。

(1) 辺 CD の長さを求めよ。

(2) $\theta=\angle DFC$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ。 [2000]

解答例



(1) $CD=x$ とおくと，$\angle ADC=60^\circ$，$\angle EDC=45^\circ$，$\angle BDC=30^\circ$ より，

$$AC=x\tan 60^\circ=\sqrt{3}x,\quad EC=x\tan 45^\circ=x$$
$$BC=x\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

底面の△ACE に余弦定理を適用して，

$$\cos A=\frac{1+3x^2-x^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{3}x}=\frac{1+2x^2}{2\sqrt{3}x}\cdots\cdots\text{①}$$

底面の△ACB に余弦定理を適用し，$\cos A=\dfrac{9+3x^2-\frac{1}{3}x^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}x}=\dfrac{27+8x^2}{18\sqrt{3}x}\cdots\cdots\text{②}$

①②より，$\dfrac{1+2x^2}{2\sqrt{3}x}=\dfrac{27+8x^2}{18\sqrt{3}x}$，$9+18x^2=27+8x^2$，$10x^2=18$

よって，$x^2=\dfrac{9}{5}$ から，$CD=x=\sqrt{\dfrac{9}{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

(2) ①より $\cos A=\dfrac{1+2\cdot\frac{9}{5}}{2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}}=\dfrac{23}{6\sqrt{15}}$ となり，$AC=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ より，

底面の△ACF に余弦定理を適用して，

$$CF^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2+2^2-2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot 2\cdot\frac{23}{6\sqrt{15}}=\frac{1}{5}$$

よって，$CF=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となり，$\tan\theta=\dfrac{CD}{CF}=3$ となる。

したがって，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=10$ で $\cos\theta>0$ より，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ である。

コメント

測量との関連から，教科書の章末問題あたりで類題をよく見かけるものです。底面の三角形に注目して三角比の定理を適用していきます。