《2019 入試対策》

北海道大学

理系数学

1998―2018

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された北海道大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

なお，映像解説の一覧は，下記のページに掲載しています。

PC サイト　トップページ ≫ 北大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　座標平面上に 3 点 $O(0,\ 0)$，$A\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$，$B(11,\ 11)$ がある。条件 $BQ \geqq OQ \geqq 2AQ$ を満たす点 $Q(x,\ y)$ の全体を D とする。

(1)　D を座標平面上に図示せよ。また，$BQ = OQ = 2AQ$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。

(2)　$0 < p \leqq 11$ とし，P を点 $(p,\ 11)$ とする。条件 $OQ \geqq PQ$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。　[2018]

2　座標平面上の 3 点 $A(1,\ 0)$，$B(3,\ 1)$，$C(2,\ 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の内部および境界を T とおく。実数 a に対して，条件 $AP^2 + BP^2 + CP^2 \leqq a$ を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする。ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1)　D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ。

(2)　D が T を含むような a の値の範囲を求めよ。

(3)　(1)のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ。　[2017]

3　実数 $x,\ y,\ s,\ t$ に対し，$z = x + yi$，$w = s + ti$ とおいたとき，$z = \dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。

(1)　w を z で表し，$s,\ t$ を $x,\ y$ で表せ。

(2)　$0 \leqq s \leqq 1$ かつ $0 \leqq t \leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 D を座標平面上に図示せよ。

(3)　点 $P(x,\ y)$ が D を動いたとき，$-5x + y$ の最小値を求めよ。　[2013]

4　実数 $a,\ b$ に対して，$f(x) = x^2 - 2ax + b$，$g(x) = x^2 - 2bx + a$ とおく。

(1)　$a \neq b$ のとき，$f(c) = g(c)$ を満たす実数 c を求めよ。

(2)　(1)で求めた c について，$a,\ b$ が条件 $a < c < b$ を満たすとする。このとき，連立不等式 $f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ が解をもつための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　一般に $a < b$ のとき，連立不等式 $f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。[2012]

5　実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1)　$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2)　$[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3)　x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ。　[2011]

6　$t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を l_1 とする。$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく。C と l_1 の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を l_2 とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　l_1 と l_2 のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2)　l_1 を l_2 に関して対称移動させた直線を l_3 とおくとき，l_3 の方程式を求めよ。

(3)　l_3 は t によらない定点を通ることを示せ。

(4)　l_3 と C の 2 つの共有点を P，Q とする。線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ。　[2009]

7　α，β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を，$f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする。

(1)　$f(x)$ の最大値を M とする。$f(x)=M$ となる x がちょうど 3 つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた α，β について，$f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。　[2008]

8　実数 x, y, z は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする。

(1)　x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2)　$3x-y+z$ の値の範囲を求めよ。　[2006]

9　xy 平面上の放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする。

(1)　$x_1-x_2=2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2)　$x_1-x_2=2$ を満たしながら $a,\ b$ が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$ を満たしながら $a,\ b$ が変化するとき，線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ。　[2003]

10　不等式 $\cos 2x+cx^2\geqq 1$ がすべての x について成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。　[2001]

11　xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A, B とし，線分 AB の中点を Q とする。

(1)　点 Q の座標を a, b を用いて表せ。

(2)　点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2001]

12　(1)　次の不等式の表す領域 D を図示せよ。$|x|\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$

(2)　点 A を $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3)　領域 D の点 $(x,\ y)$ について，$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。　[2000]

13　xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 を，$L_1: y=0$ （x 軸），$L_2: y=\sqrt{3}x$ で定める。P を xy 平面上の点とする。直線 L_1 に関して P と対称な点を Q，直線 L_2 に関して P と対称な点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　P の座標を $(a,\ b)$ とするとき, R の座標を a, b を用いて表せ。

(2)　2 点 Q, R の距離が 2 になるような P の軌跡 C を求めよ。

(3)　点 P が C 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ。　[1999]

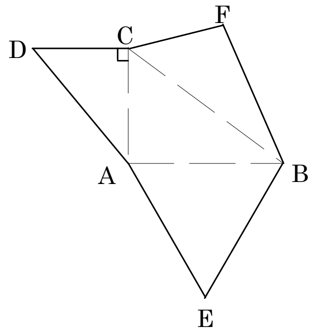
14 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点$(a,\ b)$の集合を式で表し，図示せよ。

$x-y<0,\ \ x+y<2,\ \ ax+by<1$ [1998]

■ 図形と計量

1 図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ で，$\triangle\mathrm{ABE}$ は正三角形である。このとき，Vの体積を求めよ。

[2009]



2 方程式$x^2+y^2-4y+2=0$で定義される円 C を考える。

(1) 点$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$と点$\mathrm{O}(0,\ 0)$を通り，円 C に接する円の中心の座標を求めよ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

3 半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。 [2005]

4 三角形 ABC において，面積が 1 で$\mathrm{AB}=2$であるとき，$\mathrm{BC}^2+(2\sqrt{3}-1)\mathrm{AC}^2$の値を最小にするような$\angle\mathrm{BAC}$の大きさを求めよ。 [1999]

■ ベクトル

1 座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$に対し，$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく。ただし，O は原点，s と t は実数とする。

(1) $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を $s,\ t$ で表せ。

(2) $t=\frac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ。

(3) s と t が実数を動くとき，$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値を求めよ。 [2018]

2 空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線を l とし，2 点 $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線を m とする。a を定数として，l 上にも m 上にもない点 $\mathrm{P}(s,\ t,\ a)$ を考える。

(1) P から l に下ろした垂線と l の交点を Q とし，P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする。Q, R の座標をそれぞれ $s,\ t,\ a$ を用いて表せ。

(2) P を中心とし，l と m がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ。

(3) $s,\ t$ と定数 a が(2)の条件を満たすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を a を用いて表せ。 [2016]

3 空間の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$ の定める平面を α とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。α 上の点 C があり，その x 座標が正であるとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1) C の座標を求めよ。

(2) $\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3) α 上にない点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から α に垂線を下ろし，α との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ を満たす実数 $k,\ l$ を $x,\ y,\ z$ で表せ。 [2015]

4 四面体 OABC は，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ を満たす。辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を $\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$pq=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる。$p+q=t$ とし，△CPQ の面積を S とする。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) S を t で表せ。

(3) S の最小値，およびそのときの p, q を求めよ。 [2014]

5 次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を l とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，a, b, c の満たす条件を求めよ。 [2011]

6 xyz 空間の原点 O と，O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A, B, C, D を考える。点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2},\ \sin\dfrac{\alpha}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ 0\right)$ $(0<\alpha<\pi)$ とする。点 C, D は $\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{DOA}=\angle\mathrm{DOB}$ を満たし，点 C の z 座標は正，点 D の z 座標は負とする。

(1) 点 C の座標を α と $\theta=\angle\mathrm{COA}$ $(0<\theta<\pi)$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき，点 C の座標を求めよ。 [2008]

7 空間内に，3 点 $\mathrm{A}_0(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}_1(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 α と，3 点 $\mathrm{B}_0(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}_1(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 β を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$ を $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ で表せ。ただし，O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P′ も通っているとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}+a\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}+b\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}+p\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}+q\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$$

とおくとき，a, b を p, q で表せ。

(3) 点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき，点 P′ が動いてできる図形 C' の方程式を(2)の p, q で表し，C' が楕円であることを示せ。

[2006]

8　2 点$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 2,\ 0)$を通る直線を l とし，中心が$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$で半径が 1 の球面を C とする。点 P が l 上にあり点 Q が C 上にあるとし，線分 PQ は直線 l と線分 RQ に垂直であるとする。

(1)　点 P の存在する範囲を求めよ。

(2)　線分 PQ の長さを最小にする点 P の座標を求めよ。　[2002]

9　空間内の 4 点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 1)$をとる。

(1)　直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする。H の座標を求めよ。$\angle\mathrm{CHC}'=\theta$として$\cos\theta$の値を求めよ。ただし，$\mathrm{C}'=(0,\ 1,\ 0)$とする。

(2)　直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離$\overline{\mathrm{PQ}}$が最小となる P，Q の座標を求めよ。　[2000]

■ 整数と数列

1　自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1)　自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a\geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2)　$n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。　[2017]

2　(1)　次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ。

$$x^3+x^2-2x-1=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　方程式①の 3 つの実数解を s, t, u とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　(2)の a_n がすべて整数であることを示せ。　[2016]

3 p, q は正の実数とし，$a_1=0$，$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列$\{a_n\}$がある。

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とする。数列$\{b_n\}$の一般項を p, q, n で表せ。

(2) $q=1$ とする。すべての自然数 n について $a_{n+1}\geqq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ。 [2015]

4 次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1=1,\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。ただし，i は虚数単位である。

(1) z_2，z_3 を求めよ。

(2) 上の漸化式を $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ。

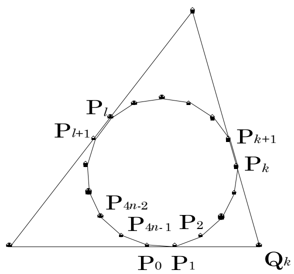
(3) 一般項 z_n を求めよ。

(4) $z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。 [2004]

5 n を自然数とし，正 $4n$ 角形 $\mathrm{P}_0\cdots\mathrm{P}_{4n-1}$ を考える。

(1) 辺 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ と辺 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ $(1\leqq k\leqq 2n-1)$ を延長した直線の交点を Q_k とする。このとき，$\angle\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の大きさを求めよ。

(2) 3 辺 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$，$\mathrm{P}_l\mathrm{P}_{l+1}$ $(k<l)$ を延長したとき，正 $4n$ 角形 $\mathrm{P}_0\cdots\mathrm{P}_{4n-1}$ を含む鋭角三角形ができるような k と l の組は何通りあるか。 [2000]



■ 確率

1 数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0，1，8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある。これから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば，左から順に 0，0，1，1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。

(1) a，b，c，d は整数とする。$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。

(3) n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ。 [2018]

2 さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1) $p_{10}=\left(\frac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2) p_9 の値を求めよ。

(3) p_3 の値を求めよ。 [2017]

3 机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである。

(1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(2) ひきだし A, B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(3) ひきだし A，B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。 [2016]

4　初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

(i)　まず同時に 2 個の玉を取り出す。

(ii)　その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。

(iii)　最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える。

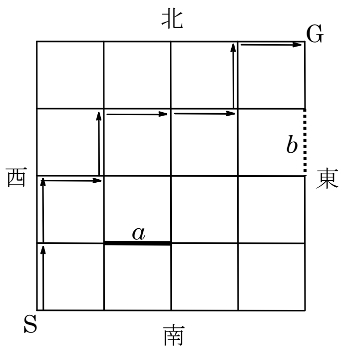
n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする。

(1)　$X_1 = 3$ となる確率を求めよ。

(2)　$X_2 = 3$ となる確率を求めよ。

(3)　$X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ。　[2015]

5　図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1)　a を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2)　a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。　[2014]

6 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i) X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点$(0,\ 0)$を出発点とする。

(1) 2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が$(-1,\ 0)$にある確率を求めよ。

(2) 2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が$(2,\ 1)$にある確率を求めよ。

(3) 2 個のサイコロを 4 回投げて，点 P が$(1,\ 1)$にある確率を求めよ。 [2013]

7 A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする。A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

(1) P_2 を p と q で表せ。

(2) P_3 を p と q で表せ。

(3) P_4 を p と q で表せ。

(4) $\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_4<P_3$ であることを示せ。 [2012]

8　n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　a_2, a_3 を求めよ。

(2)　s_n を求めよ。

(3)　$a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(4)　a_n を求めよ。　[2011]

9　2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを, 1 回に 1 本ずつ, くじがなくなるまで引き続けることにする。

(1)　n 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ。

(2)　A, B, C の 3 人が, A, B, C, A, B, C, A, …の順に, このくじ引きを行うとする。1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ。B と C についても, 1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ。　[2010]

10　4 枚のカードがあって, 1 から 4 までの整数が 1 つずつ書かれている。このカードをよく混ぜて, 1 枚引いては数字を記録し, カードを元に戻す。この試行を n 回繰り返し, 記録した順に数字を並べて得られる数列を, a_1, a_2, …, a_n とする。

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ とする。

(i)　$A_n(1)$, $A_n(2)$ を求めよ。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき, $A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$ を $A_{n-1}(1)$, $A_{n-1}(2)$, …, $A_{n-1}(j)$ で表し, $A_n(3)$, $A_n(4)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき, 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

[2007]

11　1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

(1)　4 回目以内（4 回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(2)　r 回目以内（r 回目も含む）に終了する確率を求めよ。ただし，$r\geqq 2$ とする。

[2006]

12　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A，B を移動する。サイコロの目の数が 1，3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果，部屋 A，B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ。

(4)　第 n 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ。　[2004]

13　点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

[2003]

14　(1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち，1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。　[2002]

$\boxed{15}$ A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが 2 連勝するか，または 100 回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々 $\dfrac{1}{2}$ である。

(1) 4 回以内の勝負で A が 2 連勝する確率を求めよ。

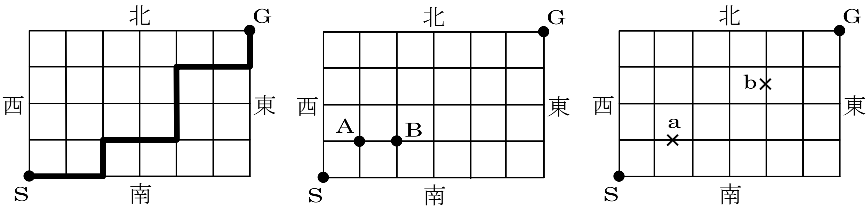
(2) $n=2,\ 3,\ \cdots,\ 100$ とする。n 回以内の勝負で，A, B, C のうち誰かが 2 連勝する確率を求めよ。 [2001]

$\boxed{16}$ 図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の一例である。）

(1) S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。

(2) S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。

(3) 図 3 の a, b の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



（図1）　（図2）　（図3）

[1999]

$\boxed{17}$ ある駅の待合室に，n 個のいすが横一列に並んでいる。k 人が，どの二人も隣り合わないように，いすにすわる場合の数を，$f(n,\ k)$ とする。$n \geqq 2k-1$ のとき，次を証明せよ。

$$f(n,\ k)={}_{n-k+1}\mathrm{C}_k \times (k!)$$

[1998]

18　無作為に 13 人を選ぶとき，日曜日生まれの人の数を X，土曜日生まれの人の数を Y とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，どの曜日に生まれる確率も $\dfrac{1}{7}$ とする。

(1)　$X=k$，$Y=m$ となる確率 $P(X=k,\ Y=m)$ を k，m の式として表せ。ただし，$0\leqq k$，$0\leqq m$，$k+m\leqq 13$ とする。

(2)　$P(X=k,\ Y=2)$ が最大となる k を求めよ。　[1998]

■ 複素数 |||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1　$z+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1)　D を複素数平面上に図示せよ。

(2)　k を実数とする。D に属する z で方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし，i は虚数単位を表す。　[2018]

2　複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする△OAB がある。ただし，O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，$\alpha\beta=z$ が成り立つとする。

(1)　複素数 α の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2)　点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。　[2017]

3　複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある。a を実数の定数とし，$w=z^2-2az+1$ とおく。

(1)　$|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ。

(2)　点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ。　[2016]

4　複素数 a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める。

$$a_1=1+i,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，i は虚数単位である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上の 3 点 0，a_1，a_2 を通る円の方程式を求めよ。

(2)　すべての a_n は(1)で求めた円上にあることを示せ。　[2005]

5 zを複素数とし，iを虚数単位とする。

(1) $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$が実数となる点$z$全体の描く図形$P$を複素数平面上に図示せよ。

(2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに$w=\dfrac{z+i}{z-i}$の描く図形を複素数平面上に図示せよ。 [2003]

6 n を 3 以上の自然数とするとき，次を示せ。ただし，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$とし，$i$を虚数単位とする。

(1) $\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\dfrac{2\pi k}{n}$

ただし,kは自然数とし，$\overline{\alpha}$はαに共役な複素数とする。

(2) $n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3) $\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$ [2002]

7 $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数$z$（$z\neq0$）を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ。 [1998]

■ 曲線

1 楕円C_1：$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$と双曲線$C_2$：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$を考える。$C_1$と$C_2$の焦点が一致しているならば，$C_1$と$C_2$の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。 [2007]

2 xy 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_2\neq0)$に対して，点$\mathrm{C}(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\mathrm{D}(x_2,\ 0)$をとり，直線 AC と y 軸の交点を E とする。ただし，原点 O は直線 AB 上にはないとする。

(1) 直角三角形 ODE の面積をSとするとき,Sをx_1，y_1，x_2，y_2で表せ。

(2) A, B が楕円L：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$上を動くとき，Sの最大値をa, bで表せ。

(3) A, B が L 上にあって(2)で求めた S の最大値を与えるとき，点 C は楕円$\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}b}\right)^2=1$上にあることを示せ。 [2002]

3　中心がそれぞれ$(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$である半径 1 の円 A, B を考える。円 C が, A を内側に含み, B の外側にあり，しかも, A, B の両方に接しながら動くとき, 次の問いに答えよ。

(1)　円 C の中心の軌跡を求めよ。

(2)　円 C が直線 $y=2$ に接するとき, C の半径を求めよ。　[1998]

■ 極限

1　次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$x-\dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$ を示せ。

(2)　$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30} \leqq \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt \leqq \dfrac{x^3}{3}$ を示せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ を求めよ。　[2012]

2　正の実数 r と $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ とおく。a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を漸化式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2)　$\dfrac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3)　$\theta \neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。　[2010]

3　直角三角形△ABC において∠B は直角であるとし, 辺 AC の長さを α とする。辺 AC を n 等分し, その分点を A に近い方から順に D_1，D_2，D_3，…，D_{n-1} とおく。$1 \leqq k \leqq n-1$ に対し, 線分 BD_k の長さを L_k とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2$ を α と n で表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を α で表せ。　[2009]

4 自然数 n に対して，$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}dx$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n で表せ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。 [2009]

5 関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ とする。

(1) $0<x<1$ ならば, $0<f(x)<1$ となることを示せ。

(2) $f(x)-x=0$ となる x をすべて求めよ。

(3) $0<\alpha<1$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\alpha\ ,\ \ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とする。α の値に応じて，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。 [2008]

6 $f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1) 自然数 $n,\ m$ に対し，$\int_0^n t^m dt\leqq\sum\limits_{k=1}^{n}k^m\leqq\int_0^n(t+1)^m dt$ を示せ。

(2) $f(x)$ の次数を r とするとき，次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{r+1}$$

(3) すべての自然数 n に対して $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{2}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

[2005]

7 $-1<a<1$ とする。

(1) 積分 $\int_0^a\dfrac{1}{1-x^2}dx$ を求めよ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，次の等式を示せ。$\int_0^a\dfrac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+a}{1-a}-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a^{2k+1}}{2k+1}$

(3) 次の等式を示せ。$\log\dfrac{1+a}{1-a}=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{a^{2k+1}}{2k+1}$ [2001]

■ 微分法

1　a は実数とし, 2 つの曲線 $C_1 : y=(x-1)e^x$, $C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ がある。ただし, e は自然対数の底である。C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

(1)　a を t で表せ。

(2)　t が実数全体を動くとき, a の極小値, およびそのときの t の値を求めよ。[2015]

2　$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値, およびそのときの x を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$ $(a<b)$ で接する直線の方程式を求めよ。[2014]

3　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x=\sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ。

(3)　方程式 $f(\theta)=k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

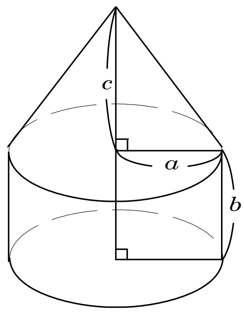
[2012]

4　$0<a<1$, $0<\theta<\pi$ とする。4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が条件 $\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}=\mathrm{PQ}$ を満たすとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を a と θ で表せ。

(2)　a を固定する。$0<\theta<\pi$ の範囲で θ が動くとき, y の最小値を求めよ。[2009]

5　図のような，半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に，同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。



(1)　V をこの建物の体積，S をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする。V と S を a, b, c で表せ。

(2)　Vを一定に保ちながら $a,\ b,\ c$ を動かして，S を最小にしたい。

(i)　$b = xa$，$c = ya$ とおき，V と a を一定としたとき，S の最小値 T を V と a で表せ。

(ii)　T が最小になるときの比 $a : b : c$ を求めよ。　[2007]

6　y 軸上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ と x 軸上の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を考える。$\theta = \angle\mathrm{APB}$ とおく。

(1)　$\cos\theta$ を a で表せ。

(2)　θ が最大になる a を求めよ。　[2006]

7　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $e^{2a} - 2e^{a} - 1 = 0$ を満たす実数 a を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(2)　$t \geqq 0$ に対して $F(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{e^x}{e^x + e^{2t}}\,dx$ を求めよ。

(3)　$t \geqq 0$ の範囲での $F(t)$ の最大値と，最大値を与える t の値を求めよ。　[2005]

8　a を 1 以上の実数，b を正の実数とする。

(1)　0 以上のすべての実数 x について，不等式 $e^x - a(x + 2b) \geqq 0$ が成り立つための，a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(2)　$a,\ b$ が(1)で求めた範囲を動くとき，定積分 $\displaystyle\frac{1}{ae^b}\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$ の値を最小にする $a,\ b$ と，その最小値を求めよ。　[2004]

9　次の問いに答えよ。

(1)　正の数 t, 実数 p, q に対して関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ は, 条件

$$f(0)=1,\ f'(0)=2,\ f(t)=p,\ f'(t)=q\cdots\cdots\cdots(*)$$

を満たすとする。このとき, c, d を求め, a, b を t, p, q で表せ。

(2)　上の条件$(*)$を満たす $f(x)$ について, 3 つの不等式 $a\leqq 0$, $b\leqq 0$, $p\geqq 0$ を同時に満たすような p, q によって定まる点$(p,\ q)$のなす領域を座標平面上に図示し, その面積 S を t を用いて表せ。

(3)　t を $t>0$ なる範囲を動くとき, S の値が最小となる t の値と S の最小値を求めよ。

[2000]

10　関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-px}}-ax$ が極値をもつように, 定数 a の値の範囲を定めよ。ただし, p は正の定数で, e は自然対数の底である。　[1999]

■ 積分法

1　関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について, 以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減を調べ, 最大値と最小値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3)　次の定積分の値を求めよ。　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$　[2017]

2　$a>0$ に対し, 関数 $f(x)$ が, $f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$0<a\leqq 2\pi$ において, $g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

[2016]

3　n は自然数，a は $a>\dfrac{3}{2}$ を満たす実数とし，実数 x の関数

$$f(x)=\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)\,d\theta$$

を考える。ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$ を示せ。

(2)　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ を満たす n と a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。　[2015]

4　$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta$ とおく。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ。

[2014]

5　区間 $-\infty<x<\infty$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_0^{2x} t\,f(2x-t)\,dt$$

とおく。

(1)　$F\left(\dfrac{x}{2}\right)=\displaystyle\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$ となることを示せ。

(2)　2 次導関数 F'' を f で表せ。

(3)　F が 3 次多項式で $F(1)=f(1)=1$ となるとき，f と F を求めよ。　[2013]

6　$0<a<2\pi$ とする。$0<x<2\pi$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める。

(1)　$F'(x)$ を求めよ。

(2)　$F'(x)\leqq 0$ となる x の範囲を求めよ。

(3)　$F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。　[2011]

7　$0 \leqq x \leqq 1$ に対して，$f(x)=\int_0^1 e^{-|t-x|}t(1-t)\,dt$ と定める。ただし，$e=2.718\cdots$ は自然対数の底である。

(1)　不定積分 $I_1=\int te^t dt$，$I_2=\int t^2e^t dt$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ を x の指数関数と多項式を用いて表せ。

(3)　$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極大となることを示せ。　[2010]

8　関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で定義された連続関数とする。

(1)　$f(x)=\int_0^1 e^{x+t}f(t)\,dt$ を満たす $f(x)$ は定数関数 $f(x)=0$ のみであることを示せ。

(2)　$g(x)=\int_0^1 e^{x+t}g(t)\,dt+x$ を満たす $g(x)$ を求めよ。　[2008]

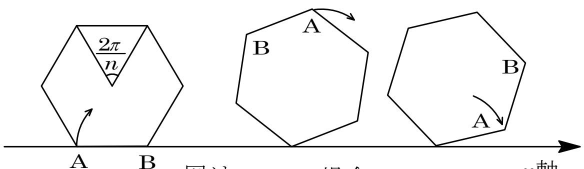
9　(1)　整数 $m,\ n$ に対して積分 $I_{m,\,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ。

(2)　自然数 n に対して積分 $J_n=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\right)^2 dx$ を求めよ。　[2006]

10　半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。ひとつの辺 AB が x 軸含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける。点 A の描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。

(1)　$L(6)$ を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty}L(n)$ を求めよ。



図は $n=6$ の場合

[2003]

11　$f(x)$ を微分可能な関数とする。

(1)　n を自然数とするとき，等式 $\dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt=x^n\ (x\neq 1)$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　任意の実数 $x,\ a$ に対して，等式 $\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}\ (x\neq a)$ を満たし，かつ条件 $f(0)=1$ および $f'(0)=2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　[2002]

12 次の問いに答えよ。

(1) 方程式$Ae^x - x = 0$が $0<x<3$ の範囲で異なる 2 つの解をもつための実数 A の範囲を求めよ。ただし$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。

(2) 定積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t\,dt$の値を求めよ。

(3) $\log f(x) = x - 3 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$，$f(0)<1$を満たす関数$f(x)$が 2 つ存在することを示せ。ただし, log は自然対数とする。 [2000]

13 $f(x)$を周期 1 の周期関数とする。すなわち$f(x+1) = f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$とする。aを実数とし，$p = \int_0^1 e^{ax} f(x)\,dx$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) nを自然数とするとき，$\int_n^{n+1} e^{ax} f(x)\,dx$を$p$を用いて表せ。

(2) nを自然数とするとき，$\int_0^n e^{ax} f(x)\,dx$をpを用いて表せ。

(3) 周期 1 の周期関数$f(x)$が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で$f(x) = -\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{2}$であるとき，$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x} f(x)\,dx$を求めよ。 [1999]

■ 積分の応用

1 2 つの関数 $f(x) = \cos x$，$g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$がある。

(1) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$のとき，不等式 $\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x$が成り立つことを示せ。

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$のとき，不等式 $g(x) \leqq f(x)$が成り立つことを示せ。

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$の範囲において，2 つの曲線$y = f(x)$，$y = g(x)$および$y$軸が囲む部分の面積を求めよ。 [2018]

2　a と b を正の実数とする。$y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_1，$y = b\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_2 とし，C_1 と C_2 の交点を P とする。

(1)　P の x 座標を t とする。このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ。

(2)　C_1，C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ。

(3)　C_1，C_2 と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とする。このとき，$T = 2S$ となるための条件を a と b で表せ。　[2013]

3　a を正の実数とし, 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

4　xy 平面上の曲線 $y = xe^x$ と x 軸および 2 直線 $x = n$，$x = n+1$ で囲まれる図形を D_n とする。ただし, n を自然数とする。

(1)　図形 D_n の面積を S_n として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ。

(2)　図形 D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ。　[2007]

5　a, b を正の実数とする。空間内の 2 点 A$(0,\ a,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を l とする。直線 l を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする。

(1)　x 座標の値が t であるような直線 l 上の点 P の座標を求めよ。

(2)　図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ。

(3)　図形 M と 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。　[2004]

6　曲線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h, 体積を V とする。V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

(1)　水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2)　容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。　[2003]

7 関数 $y=\sqrt{1-(\log x)^2}$ $\left(\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq e\right)$のグラフを C とする。次の問いに答えよ。

ただし，対数は自然対数とし，e はその底とする。

(1) C 上の点 A における C の接線が原点 O$(0,\ 0)$ を通るものとする。このとき，点 A の x 座標を求めよ。

(2) C と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。 [1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

座標平面上に 3 点 $O(0,\ 0)$，$A\left(\frac{15}{2},\ 0\right)$，$B(11,\ 11)$ がある。条件 $BQ \geqq OQ \geqq 2AQ$ を満たす点 $Q(x,\ y)$ の全体を D とする。

(1) D を座標平面上に図示せよ。また，$BQ = OQ = 2AQ$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。

(2) $0 < p \leqq 11$ とし，P を点 $(p,\ 11)$ とする。条件 $OQ \geqq PQ$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。 [2018]

解答例＋映像解説

(1) 点 $O(0,\ 0)$，$A\left(\frac{15}{2},\ 0\right)$，$B(11,\ 11)$，$Q(x,\ y)$ に対して，まず $BQ \geqq OQ$ から，

$$(x-11)^2+(y-11)^2 \geqq x^2+y^2,\ x+y \leqq 11 \cdots\cdots\cdots①$$

次に，$OQ \geqq 2AQ$ より，$x^2+y^2 \geqq 4\left\{\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+y^2\right\}$ となり，

$$x^2+y^2-20x+75 \leqq 0,\ (x-10)^2+y^2 \leqq 25 \cdots\cdots\cdots②$$

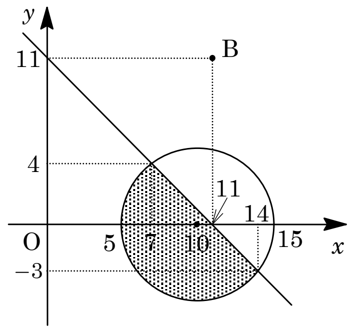
そして，①②の境界線の交点は，$x+y=11$ と $x^2+y^2-20x+75=0$ を連立し，

$$x^2+(11-x)^2-20x+75=0,\ x^2-21x+98=0$$

すると，$(x-7)(x-14)=0$ から，$x=7,\ 14$ となり，

$$(x,\ y)=(7,\ 4),\ (14,\ -3)$$

よって，$BQ \geqq OQ \geqq 2AQ$ を満たす点 Q の全体 D は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

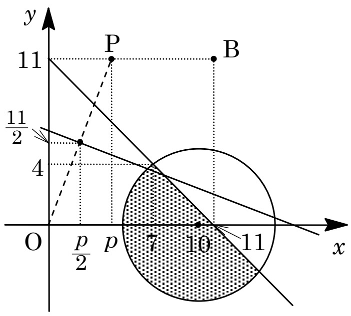


また，$BQ = OQ = 2AQ$ となる点 Q の座標は，$(7,\ 4)$，$(14,\ -3)$ である。

(2) $0 < p \leqq 11$ で点 $P(p,\ 11)$ に対し，$OQ \geqq PQ$ より，

$$x^2+y^2 \geqq (x-p)^2+(y-11)^2,\ 2px+22y \geqq p^2+121 \cdots\cdots\cdots③$$

すると，領域③の境界線は線分 OP の垂直二等分線，すなわち点 $\left(\frac{p}{2},\ \frac{11}{2}\right)$ を通る傾き $-\frac{p}{11}$ の直線であり，領域③はこの直線について O と反対側である。



ここで，$-1 \leqq -\frac{p}{11} < 0$ より，領域③を満たす D の点 Q が存在する条件は，点 $(7,\ 4)$ が③に含まれることであり，

$$14p+88 \geqq p^2+121,\ p^2-14p+33 \leqq 0$$

すると，$(p-3)(p-11) \leqq 0$ となり，$3 \leqq p \leqq 11$ である。

なお，この値の範囲は $0 < p \leqq 11$ を満たしている。

コメント

　不等式と領域が題材の問題です。(2)は数式処理だけでなく，その意味も加味して記述した方がよいでしょう。直感的な部分は残ってしまいますが。

問　題

座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 1)$，$\mathrm{C}(2,\ 2)$を頂点とする$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部および境界を T とおく。実数 a に対して，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\leqq a$ を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする。ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ。

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ。

(3) (1)のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1) 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 1)$，$\mathrm{C}(2,\ 2)$に対して，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\leqq a$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 全体を D とすると，

$$(x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2\leqq a$$

$$3x^2+3y^2-12x-6y\leqq a-19,\ x^2+y^2-4x-2y\leqq\frac{a-19}{3}$$

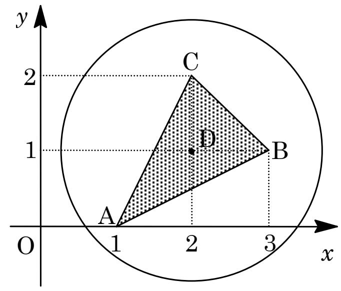
変形すると，$D:(x-2)^2+(y-1)^2\leqq\dfrac{a-4}{3}$………①

すると，D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲は，$\dfrac{a-4}{3}\geqq 0$ より $a\geqq 4$ である。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部および境界 T を図示すると，右図の網点部となる。また，$a\geqq 4$ のとき，①から D は中心 $\mathrm{D}(2,\ 1)$ で半径 $\sqrt{\dfrac{a-4}{3}}$ の内部または周上である。

すると，D が T を含む条件は，$\mathrm{AD}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BD}=1$，$\mathrm{CD}=1$ より，

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\geqq\sqrt{2},\ a\geqq 10$$



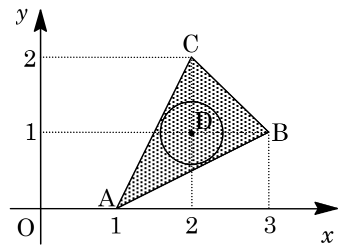
(3) 点 D と直線 AB, BC, CA の距離をそれぞれ d_1，d_2，d_3 とおく。このとき，$\mathrm{AB}:x-2y-1=0$ より，

$$d_1=\frac{|2-2-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

また，対称性より，$d_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$d_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

すると，$a\geqq 4$ のとき D が T に含まれる条件は，

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\leqq\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\leqq a-4\leqq\frac{3}{5},\ 4\leqq a\leqq\frac{23}{5}$$



コメント

領域が題材の基本題です。図形に対称性が設定されているので，計算も簡単です。

問　題

実数 $x,\ y,\ s,\ t$ に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし, i は虚数単位である。

(1) w を z で表し, s, t を x, y で表せ。

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 D を座標平面上に図示せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ。 [2013]

解答例＋映像解説

(1) $z=\dfrac{w-1}{w+1}$ より，$z(w+1)=w-1$ から，$(z-1)w=-z-1$ ………①

$z=1$ のとき①は成立しないので，$z\neq 1$ となり，$w=\dfrac{-z-1}{z-1}$ ………②

ここで，$z=x+yi$，$w=s+ti$ より，②から，

$$s+ti=\frac{-(x+1)-yi}{(x-1)+yi}=\frac{\{-(x+1)-yi\}\{(x-1)-yi\}}{(x-1)^2+y^2}=\frac{-(x^2-1)-y^2+2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

よって，$s=\dfrac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$ ……③，$t=\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$ ……④

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ より，③④から，

$$0\leqq\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1 \text{ ………⑤，} \quad 0\leqq\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1 \text{ ………⑥}$$

⑤より，$0\leqq -x^2-y^2+1$ となり，$x^2+y^2\leqq 1$ ………⑦

また，$-x^2-y^2+1\leqq(x-1)^2+y^2$ となり，$x^2+y^2-x\geqq 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqq\frac{1}{4} \text{ ………⑧}$$

⑥より，$0\leqq 2y$ となり，$y\geqq 0$ ………⑨

また，$2y\leqq(x-1)^2+y^2$ となり，$(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 1$ ………⑩

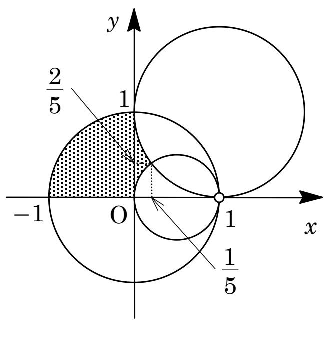
なお，⑧の境界線 $x^2+y^2-x=0$ と，⑩の境界線 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の点 $(1,\ 0)$ 以外の交点は，両式を連立して，

$-x-2y+1=0$，$x=-2y+1$

すると，$(-2y+1)^2+y^2-(-2y+1)=0$ から，

$5y^2-2y=0$

よって，$y=\dfrac{2}{5}$，$x=-2\cdot\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{1}{5}$



$z\neq 1$ のもとで，⑦～⑩より，求める範囲 D は右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

(3)　$-5x+y=k$ とおくと，$y=5x+k$ から，傾き 5 で y 切片 k の直線を表す。

すると，k が最小となるのは，(2)の図を利用すると，この直線が点$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$を通るときであり，その最小値は，

$$k=-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=-\frac{3}{5}$$

コメント

複素数が題材ですが，内容的には xy 平面での不等式と領域の問題です。

問　題

実数 a, b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ とおく。

(1)　$a\neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$ を満たす実数 c を求めよ。

(2)　(1)で求めた c について，a, b が条件 $a<c<b$ を満たすとする。このとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

(3)　一般に $a<b$ のとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。[2012]

解答例

(1)　$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ に対して，$f(c)=g(c)$ より，

$$c^2-2ac+b=c^2-2bc+a,\quad 2(a-b)c=-a+b$$

$a\neq b$ より，$c=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$ より，$f(x)<0$ が解をもつ条件は，$-a^2+b<0$ ……①であり，このとき，$f(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<a<\beta)$ とおくと，$f(x)<0$ の解は，$\alpha<x<\beta$ となる。

$g(x)=(x-b)^2-b^2+a$ より，$g(x)<0$ が解をもつ条件は，$-b^2+a<0$ ……②であり，このとき，$g(x)=0$ の解を $x=\gamma,\ \delta\ (\gamma<b<\delta)$ とおくと，$g(x)<0$ の解は，$\gamma<x<\delta$ となる。

さて，$a<-\dfrac{1}{2}<b$ のとき，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+a+b$ であり，①②のもとで，

(i)　$\dfrac{1}{4}+a+b>0$ のとき

$\alpha<a<\beta<-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}<\gamma<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもたない。

(ii)　$\dfrac{1}{4}+a+b=0$ のとき

$\alpha<a<\beta=-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}=\gamma<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもたない。

(iii)　$\dfrac{1}{4}+a+b<0$ のとき

$\alpha<a<-\dfrac{1}{2}<\beta$，$\gamma<-\dfrac{1}{2}<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもち，その解は $\gamma<x<\beta$ である。

(i)～(iii)より，求める条件は，$\dfrac{1}{4}+a+b<0$ である。

(3)　$a<b$ のとき，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつ条件は，

(i)　$a<-\dfrac{1}{2}<b$ のとき　(2)より，$\dfrac{1}{4}+a+b<0$

(ii)　$-\frac{1}{2} \leqq a < b$ のとき

まず，①より，$b < a^2$ が必要である。逆に，このとき，

$$f(a) - g(a) = -a^2 + b - (a^2 - 2ab + a) = 2a(-a + b) + b - a$$
$$= (b - a)(2a + 1) \geqq 0$$

これより，$g(a) \leqq f(a) < 0$ となり，$f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ は，解 $x = a$ をもつ。

よって，求める条件は，$b < a^2$ である。

(iii)　$a < b \leqq -\frac{1}{2}$ のとき

まず，②より，$a < b^2$ が必要である。逆に，このとき，

$$g(b) - f(b) = -b^2 + a - (b^2 - 2ab + b) = 2b(-b + a) + a - b$$
$$= (a - b)(2b + 1) \geqq 0$$

これより，$f(b) \leqq g(b) < 0$ となり，$f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ は，解 $x = b$ をもつ。

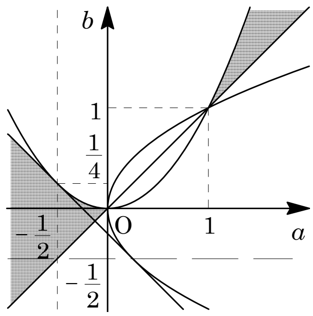
よって，求める条件は，$a < b^2$ である。

(i)(ii)(iii)より，求める条件は，

$$\frac{1}{4} + a + b < 0 \quad \left(a < -\frac{1}{2} < b\right)$$

$$b < a^2 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq a < b\right)$$

$$a < b^2 \quad \left(a < b \leqq -\frac{1}{2}\right)$$



図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

コメント

$f(x)$ と $g(x)$ のグラフをかき，結論を図から判断して解答例を記述しています。この図は省いていますが，方針を立てるうえでは最も重要なものです。

問　題

実数 x に対して $k\leqq x<k+1$ を満たす整数 k を $[\,x\,]$ で表す。たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[\,-2.1\,]=-3$ である。

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2) $[\,x\,]^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ。 [2011]

解答例

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ ……①より，$\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$ となり，$2<\sqrt{6}<3$ から，

$$-1<\frac{1-\sqrt{6}}{2}<-\frac{1}{2},\ \ \frac{3}{2}<\frac{1+\sqrt{6}}{2}<2$$

よって，①を満たす整数 n は，$n=0,\ 1$

(2) $[\,x\,]=n$ とおくと，$[\,x\,]^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}<0$ は①と一致するので，(1)より，$[\,x\,]=0,\ 1$

よって，$0\leqq x<2$

(3) $0\leqq x<2$ のとき，$x^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}=0$ ……②に対して，

(i) $[\,x\,]=0$ $(0\leqq x<1)$ のとき

②より，$x^2-\dfrac{5}{4}=0$ となるが，$0\leqq x<1$ から解なし。

(ii) $[\,x\,]=1$ $(1\leqq x<2)$ のとき

②より，$x^2-\dfrac{9}{4}=0$ となり，$1\leqq x<2$ から，$x=\dfrac{3}{2}$

(i)(ii)より，$x=\dfrac{3}{2}$

コメント

ガウス記号を題材としていますが，内容は与えられた定義の理解を問うものです。

問　題

$t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を l_1 とする。$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく。C と l_1 の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を l_2 とする。このとき，以下の問いに答えよ。

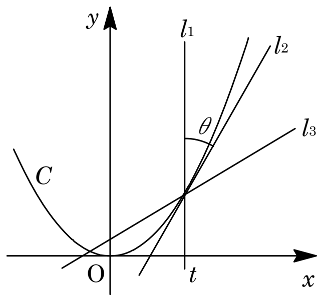
(1)　l_1 と l_2 のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2)　l_1 を l_2 に関して対称移動させた直線を l_3 とおくとき，l_3 の方程式を求めよ。

(3)　l_3 は t によらない定点を通ることを示せ。

(4)　l_3 と C の 2 つの共有点を P，Q とする。線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ。　[2009]

解答例



(1)　まず，$l_1: x=t$ の方向ベクトル $\overrightarrow{u_1}$ は，$\overrightarrow{u_1}=(0,\ 1)$ とおくことができる。

また，$C: y=\dfrac{x^2}{4}$ ……①より $y'=\dfrac{x}{2}$ となるので，点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における接線 l_2 の方向ベクトル $\overrightarrow{u_2}$ は，$\left(1,\ \dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(2,\ t)$ から，$\overrightarrow{u_2}=(2,\ t)$ とおける。

すると，l_1 と l_2 のなす角 θ は，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{t}{1\times\sqrt{4+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　直線 l_3 の方向ベクトル $\overrightarrow{u_3}$ を，$\overrightarrow{u_3}=(1,\ m)$ とおくと，l_2 と l_3 のなす角が θ より，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{u_3}}{|\overrightarrow{u_2}||\overrightarrow{u_3}|}=\frac{2+tm}{\sqrt{4+t^2}\sqrt{1+m^2}}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$\dfrac{t}{\sqrt{4+t^2}}=\dfrac{2+tm}{\sqrt{4+t^2}\sqrt{1+m^2}}$，$t^2(1+m^2)=(2+tm)^2$ となり，

$$4tm=t^2-4,\ m=\frac{t^2-4}{4t}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

よって，l_3 の方程式は，$y-\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{t^2-4}{4t}(x-t)$，$y=\dfrac{t^2-4}{4t}x+1\ \cdots\cdots\cdots ⑤$

(3)　⑤より，l_3 は t の値によらず，点 $(0,\ 1)$ を通る。

(4)　④⑤より，l_3 は $y=mx+1$ ……⑥と表せ，①と連立して，

$$\frac{x^2}{4}-mx-1=0,\ x^2-4mx-4=0\ \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦は異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha$，β とおく。すると，l_3 と C の 2 つの共有点は，$\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha+1)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta+1)$ と表され，

$$\mathrm{PQ}^2=(\alpha-\beta)^2+(m\alpha+1-m\beta-1)^2=(1+m^2)(\alpha-\beta)^2$$
$$=(1+m^2)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=(1+m^2)\{(4m)^2+16\}=16(1+m^2)^2$$

これより，線分 PQ の長さが最小になるのは $m=0$ のとき，すなわち $t>0$ に注意すると，④から $t=2$ の場合である。

コメント

いろいろな解法が考えられる問題です。(4)では，(3)の結果を用いて，l_3 の式をいったんリセットしています。

問　題

α，β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を，$f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする。

(1) $f(x)$ の最大値を M とする。$f(x)=M$ となる x がちょうど 3 つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ。

(2) (1)で求めた α，β について，$f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。 [2008]

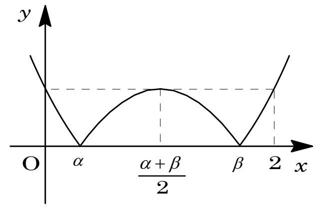
解答例

(1) $f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ に対し，次の区間における $f(x)$ の最大値 M を考えると，

$0\leqq x\leqq\alpha$ における最大値は，$M=f(0)=\alpha\beta$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ における最大値は，

$$M=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left|\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$$



$\beta\leqq x\leqq 2$ における最大値は，

$$M=f(2)=(2-\alpha)(2-\beta)$$

これより，$0\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)=M$ となる x がちょうど 3 つある条件は，

$$\alpha\beta=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\cdots\cdots\cdots①,\ \ \alpha\beta=(2-\alpha)(2-\beta)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2=0$，$(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta=0\cdots\cdots\cdots③$

②より，$4-2\alpha-2\beta=0$，$\alpha+\beta=2\cdots\cdots\cdots④$

③④から $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，α，β は 2 次方程式 $t^2-2t+\dfrac{1}{2}=0$ の 2 つの解より，$t=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ であり，$0<\alpha<\beta<2$ から，

$$\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \ \beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ \ M=\alpha\beta=\frac{1}{2}$$

(2) $f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ が異なる 3 つの共有点をもつことである。

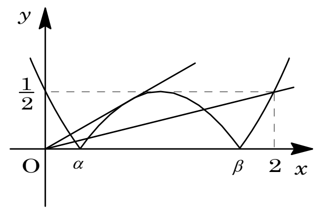
まず，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において，④⑤より，

$$f(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)=-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta=-x^2+2x-\frac{1}{2}$$

そこで，$y=f(x)$ と $y=mx$ の共有点の条件は，

$$-x^2+2x-\frac{1}{2}=mx,\ \ x^2+(m-2)x+\frac{1}{2}=0$$

重解をもつことより，$D=(m-2)^2-2=0$ となり，右図から，$m=2-\sqrt{2}$



また，直線 $y = mx$ が点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき，$m = \dfrac{1}{4}$ である。

よって，求める m の範囲は，右図より，$\dfrac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{2}$ である。

コメント

絶対値つきの関数を題材にした文系風の頻出問題です。

問　題

実数 x, y, z は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする。

(1)　x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2)　$3x-y+z$ の値の範囲を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　条件より, $x \leqq y \leqq z \leqq 1$……①，$4x+3y+2z=1$……②に対して,

②から $z=-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$ となり，①に代入すると，

$$x \leqq y \text{……③},\quad y \leqq -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \text{……④},\quad -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \leqq 1 \text{……⑤}$$

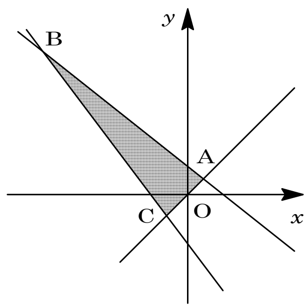
すると，④より $y \leqq -\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$，⑤より $y \geqq -\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ となる。

③④の境界線の交点を A とすると，$x=-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$ から，$x=\frac{1}{9}$，$y=\frac{1}{9}$

④⑤の境界線の交点を B とすると，$-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ から，$x=-1$，$y=1$

③⑤の境界線の交点を C とすると，$x=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ から，$x=-\frac{1}{7}$，$y=-\frac{1}{7}$

よって，③④⑤を満たす領域は右図の網点部となり，x の最大値は点 A の x 座標から $\frac{1}{9}$，y の最小値は点 C の y 座標より $-\frac{1}{7}$ である。



(2)　$P=3x-y+z$ とおくと，②より，

$$P=3x-y-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$$

これより，$y=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}P$ となり，傾き $\frac{2}{5}$ の直線群を表す。

よって，点 B を通るとき P は最小となり，最小値は,

$$P=-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-3$$

また, 点 C を通るとき, P は最大となり，最大値は,

$$P=-\frac{1}{7}+\frac{5}{14}+\frac{1}{2}=\frac{5}{7}$$

以上より，$-3 \leqq 3x-y+z \leqq \frac{5}{7}$ である。

コメント

(1)の問題文で示唆されているように，z を消去すれば，領域と最大・最小の典型題となります。

問　題

xy 平面上の放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1-x_2=2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

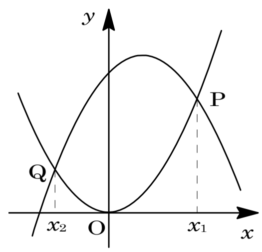
(2) $x_1-x_2=2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ。　[2003]

解答例

(1) $A: y=x^2$ ……①, $B: y=-(x-a)^2+b$ ……②の交点は,

$$x^2=-(x-a)^2+b,\ 2x^2-2ax+a^2-b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$



よって, $D/4=a^2-2(a^2-b)=-a^2+2b>0$ のもとで, ③の解が x_1, x_2 $(x_1>x_2)$ より,

$$x_1+x_2=a,\ x_1x_2=\frac{a^2-b}{2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

条件より, $x_1-x_2=2$ なので, $\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2$

④より, $\sqrt{-a^2+2b}=2$, $-a^2+2b=4$, $b=\frac{1}{2}a^2+2$ ………⑤

(2) $\mathrm{P}(x_1,\ x_1^2)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ x_2^2)$ から, 直線 PQ は, 傾きが $\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2$ なので,

$$y-x_1^2=(x_1+x_2)(x-x_1),\ y=(x_1+x_2)x-x_1x_2$$

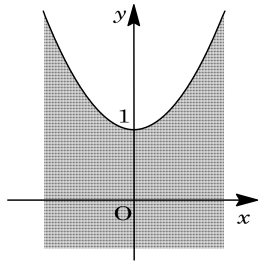
④⑤より, 直線 PQ は, $y=ax-\frac{a^2-b}{2}=ax-\frac{a^2-4}{4}$ ……⑥となる。

ここで, 直線 PQ が通過する領域は, ⑥を a についての方程式としてみたとき, 実数解をもつ条件として表される。

$$4y=4ax-a^2+4,\ a^2-4xa+4y-4=0$$

よって, $D/4=4x^2-(4y-4)\geqq 0$ から, $y\leqq x^2+1$

この領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



(3) ④より, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(x_1-x_2)^2+(x_1^2-x_2^2)^2$

$$=(x_1-x_2)^2\{1+(x_1+x_2)^2\}=(-a^2+2b)(1+a^2)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$ より, $(-a^2+2b)(1+a^2)=4$, $b=\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{a^2+1}$ ………⑦

ここで，PQ の中点の y 座標は，$y=\dfrac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}$ であり，④を用いると，$y=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2-b}{2}=\dfrac{b}{2}$ となるので，⑦より，

$$y=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{4}(a^2+1)+\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{4}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

等号は $\dfrac{1}{4}(a^2+1)=\dfrac{1}{a^2+1}$ のとき，すなわち $(a^2+1)^2=4$，$a=\pm1$ で成立する。

よって，線分 PQ の中点の y 座標の最小値は $\dfrac{3}{4}$ である。

コメント

有名な直線の通過領域の問題です。a の範囲に制限がないため，実数解条件だけで一件落着です。(3)は，相加・相乗平均の関係を利用します。

問　題

不等式$\cos 2x + cx^2 \geqq 1$がすべての x について成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。 [2001]

解答例

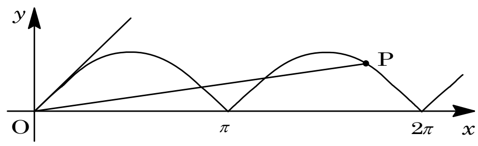
不等式$\cos 2x + cx^2 \geqq 1$……①がすべてのxについて成り立つ条件は,

(i)　$x = 0$のとき　①は$1 + c\times 0 \geqq 1$となるので，任意のcで成立する。

(ii)　$x \neq 0$のとき　①より，$c \geqq \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$………②

ここで，$f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|^2$は，$f(-x) = f(x)$なので, $x>0$としても一般性を失わない。

さて，曲線$y = |\sin x|$ $(x>0)$上の任意の点を$\mathrm{P}(x,\ |\sin x|)$とおくとき，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$は直線OPの傾きとなる。



ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$となるので，$0 \leqq \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < 1$

これより，$0 \leqq f(x) < 2$となる。

よって，どんなxに対しても②が成立するのは，$c \geqq 2$のときである。

(i)(ii)より，求めるcの範囲は$c \geqq 2$である。

コメント

定数を分離したあと，分数関数のとる値の範囲を直線の傾きで考えるという有名なテクニックを用いました。

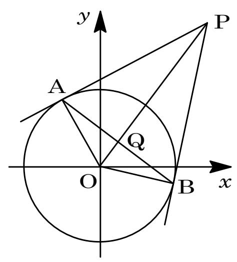
問　題

xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A, B とし，線分 AB の中点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) 点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2001]

解答例



(1) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ より，AB の中点 Q は直線 AB と OP の交点となり，しかも $\mathrm{OP}\perp\mathrm{AB}$ である。

すると，$\triangle\mathrm{OAQ}\backsim\triangle\mathrm{OPA}$ より，$\mathrm{OQ}:\mathrm{OA}=\mathrm{OA}:\mathrm{OP}$ となるので，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OA}^2=1\cdots\cdots\text{①}$$

ここで，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$ より，

$$x=ka,\quad y=kb\cdots\cdots\text{②}$$

①から，$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}=1$，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=1\cdots\cdots$③

②を③に代入して，$k^2(a^2+b^2)=1$，$k>0$ より $k=\dfrac{1}{a^2+b^2}$

②より，$x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{b}{a^2+b^2}\cdots\cdots$④なので，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ \dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

(2) ③④より，$a=(a^2+b^2)x=\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdots\cdots$⑤

$$b=(a^2+b^2)y=\frac{y}{x^2+y^2}\cdots\cdots\text{⑥}$$

条件より $\mathrm{P}(a,\ b)$ が $(x-3)^2+y^2=1$ 上を動くので，

$$(a-3)^2+b^2=1\cdots\cdots\text{⑦}$$

⑤⑥を⑦に代入して，$\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}-3\right)^2+\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2=1$

$$\{x-3(x^2+y^2)\}^2+y^2=(x^2+y^2)^2$$

$$x^2-6x(x^2+y^2)+8(x^2+y^2)^2+y^2=0$$

$x^2+y^2\neq 0$ より，$1-6x+8(x^2+y^2)=0$

よって，$x^2+y^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$（この式は $x^2+y^2\neq 0$ を満たす）

以上より，点 Q は円 $x^2+y^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$ を描く。

コメント

有名問題です。そして，①の式を導くには，経験が必要となります。

問　題

(1)　次の不等式の表す領域 D を図示せよ。$|x| \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$

(2)　点 A を $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3)　領域 D の点 $(x,\ y)$ について，$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。　[2000]

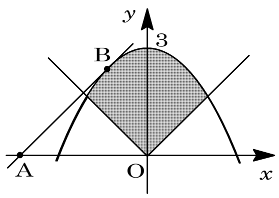
解答例

(1)　$y=|x|$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ ……①を連立して，$y=-\dfrac{1}{2}y^2+3$，$y^2+2y-6=0$

$y\geqq 0$ より $y=-1+\sqrt{7}$ となり，このとき $x=\pm(-1+\sqrt{7})$

よって，2 交点 $\left(\pm(-1+\sqrt{7}),\ -1+\sqrt{7}\right)$ となる。

これより，不等式 $|x| \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$ の表す領域 D は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　点 $\text{A}\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線は，$y=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ………②

①②が接する条件は，$-\dfrac{1}{2}x^2+3=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$，$x^2+2mx+7m-6=0$ ………③

$$D/4=m^2-(7m-6)=0,\ m=1,\ 6$$

ここで，接点の x 座標は③より $x=-m$ となるので，$m=1$ である。

このとき，$\text{B}\left(-1,\ \dfrac{5}{2}\right)$ となり，$\text{AB}=\sqrt{\left(-1+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

さて，直線 AB と直線 $y=x$ は平行なので，点 P が $y=x$ 上にあるとき，△ABP の面積は最大となる。

直線 AB と直線 $y=x$ との距離は，$\dfrac{7}{2}\cos 45^\circ=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ より，△ABP の面積の最大値は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{4}=\dfrac{35}{8}$ である。

(3)　$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}=k$ とおくと，$y=k\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ……④となり，点 A を通り傾き k の直線を表す。すると，k のとる範囲は，④と領域 D が共有点をもつ条件より求まるので，(2)から $0\leqq k\leqq 1$ となる。

コメント

(2)が(3)の誘導となっており，(3)では計算の必要がありません。

問　題

xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 を，$L_1 : y = 0$ （x 軸），$L_2 : y = \sqrt{3}x$ で定める。P を xy 平面上の点とする。直線 L_1 に関して P と対称な点を Q，直線 L_2 に関して P と対称な点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P の座標を $(a,\ b)$ とするとき，R の座標を a, b を用いて表せ。

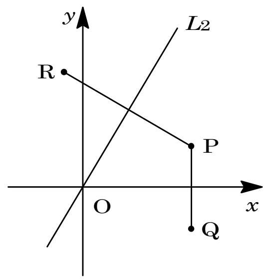
(2) 2 点 Q, R の距離が 2 になるような P の軌跡 C を求めよ。

(3) 点 P が C 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ。 [1999]

解答例

(1) L_2 の法線ベクトルを $\vec{n} = (-\sqrt{3},\ 1)$ とすることができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\vec{n} = (a - \sqrt{3}k,\ b + k) \cdots\cdots\cdots ①$$



PR の中点が直線 $L_2 : y = \sqrt{3}x$ 上にあるので，

$$\frac{b + (b + k)}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{a + (a - \sqrt{3}k)}{2}$$

$$2b + k = 2\sqrt{3}a - 3k,\quad k = \frac{1}{2}(\sqrt{3}a - b)$$

①に代入し，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$

よって，$\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\right)$

(2) $\mathrm{Q}(a,\ -b)$ で，条件より $\mathrm{QR} = 2$ なので，

$$\left(-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + b\right)^2 = 4$$

$$\frac{3}{4}\left\{(-\sqrt{3}a + b)^2 + (a + \sqrt{3}b)^2\right\} = 4$$

まとめると，$a^2 + b^2 = \frac{4}{3}$ より，点 P は円 $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$ を描く。

(3) $\triangle$PQR の面積を S として，$S = \frac{1}{2} \cdot |2b| \cdot \left|-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - a\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|b(-\sqrt{3}a + b)\right|$

(2)より，$a = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$，$b = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ とおくことができるので，

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\left(-2\cos\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}\left|\sin^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1 - (\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1 - 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right|$$

よって，$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ のとき，S は最大値 $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ をとる。

このとき，n を整数として，$2\theta + \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$，$\theta = n\pi + \frac{2}{3}\pi$

よって，$(a,\ b)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi,\ \sin\dfrac{2}{3}\pi\right)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$

$$(a,\ b)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5}{3}\pi,\ \sin\frac{5}{3}\pi\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right)$$

コメント

問題の流れに乗っていけば，(3)の結論まで到達できます。特別な技法などは必要ありません。

問　題

次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点$(a,\ b)$の集合を式で表し，図示せよ。

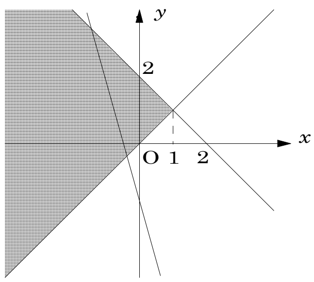
$$x-y<0,\ \ x+y<2,\ \ ax+by<1$$ [1998]

解答例

$x-y<0$ ………①

$x+y<2$ ………②

$ax+by<1$ ………③



①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③に$(x,\ y)=(0,\ 0)$を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，直線$ax+by=1$ ……④を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線$x-y=0$と④との交点は，

$$(a+b)x=1,\ \ x=\frac{1}{a+b}\quad (a\neq -b)$$

また，直線$x+y=2$と④との交点は，

$$ax+b(2-x)=1,\ \ x=\frac{1-2b}{a-b}\quad (a\neq b)$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{a+b}<0\ \text{……⑤かつ}\ \frac{1-2b}{a-b}<1\ \text{……⑥}$$

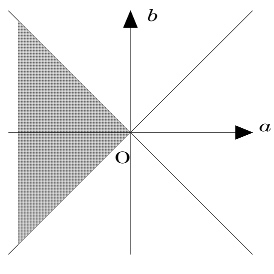
⑤より，$a+b<0,\ \ b<-a$ ………⑦

⑥より，$(1-2b)(a-b)<(a-b)^2$

$(a-b)(a-b-1+2b)>0$，$(a-b)(a+b-1)>0$

⑦から$a+b-1<0$なので，$a-b<0$，$b>a$ ………⑦

⑥⑦より，$a<b<-a$



点$(a,\ b)$の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

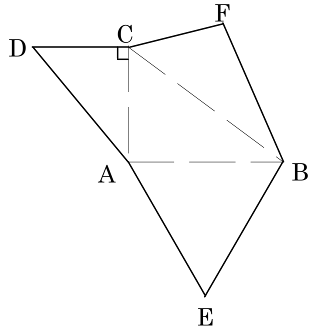
コメント

③の領域については，直線④を境界とし，原点を含むか否かで決定しました。また，直線④と直線$y=x$および$y=-x+2$との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。

問　題

図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ で，$\triangle\mathrm{ABE}$ は正三角形である。このとき, Vの体積を求めよ。

[2009]



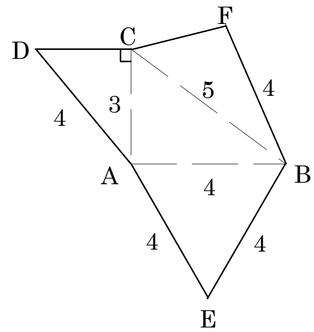
解答例

右図において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$より，

$$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$$

また，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{CD}=\mathrm{CF}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$



さて，三角錐 V の底面$\triangle\mathrm{ABC}$ を xy 平面上にとり，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ 0)$とする。さらに, Vのもう 1 つの頂点を$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$ とおく。

すると，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=4$，$\mathrm{PC}=\sqrt{7}$ から,

$$x^2+y^2+z^2=16 \cdots\cdots\cdots ①,\ (x-4)^2+y^2+z^2=16 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$x^2+(y-3)^2+z^2=7 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②より，$8x-16=0$，$x=2 \cdots\cdots\cdots$④

②③より，$-4x+3y=1$となり，④を代入すると，$y=3 \cdots\cdots\cdots$⑤

④⑤を①に代入すると，$z^2=3$ となり, $z>0$ から $z=\sqrt{3}$ である。

以上より，三角錐 Vの体積は,

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

コメント

底面が直角三角形であることに着目し，座標系を設定して処理しています。この解法がいちばん確実でしょう。

問　題

方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，円 C に接する円の中心の座標を求めよ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

解答例

(1) $C: x^2+y^2-4y+2=0$ より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円 C の中心は $\mathrm{C}(0,\ 2)$，半径は $r=\sqrt{2}$ となる。

さて，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円の中心は，線分 AO の垂直二等分線上にあるので，その座標を $\mathrm{B}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ t\right)$ とおくことができる。

すると，半径は，$\mathrm{BO}=\sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+t^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+t^2}$

また，中心間距離は，$\mathrm{BC}=\sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(t-2)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+(t-2)^2}$

条件より，半径の和または差が中心間距離に等しいので，

$$\left|\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\pm\sqrt{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}+(t-2)^2},\quad \left(\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\pm\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{2}+(t-2)^2$$

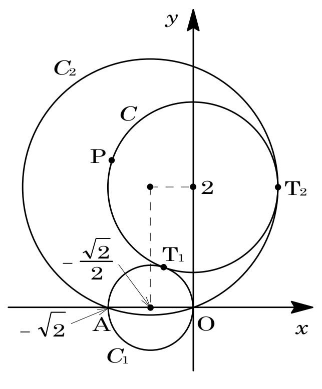
$$\pm\sqrt{1+2t^2}=-2t+1,\quad 1+2t^2=(-2t+1)^2,\quad t^2-2t=0$$

よって，$t=0,\ 2$ となり，中心の座標は $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である。

(2) C に外接する円を C_1，C を内接する円を C_2 とし，C と C_1，C_2 の接点をそれぞれ T_1，T_2 とおく。

この 2 つの接点以外は，C 上の点 P は円 C_1 の外部，円 C_2 の内部にあり，$\angle\mathrm{AT_2O}\leqq\angle\mathrm{APO}\leqq\angle\mathrm{AT_1O}$

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}\leqq\cos\angle\mathrm{APO}\leqq\cos\angle\mathrm{AT_2O}$$



さて，AO は C_1 の直径なので $\angle\mathrm{AT_1O}=90^\circ$ となり，

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}=0$$

C_2 の中心を B_2 とおくと，$\angle\mathrm{AT_2O}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AB_2O}$ より，

$$\cos\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{2}{\mathrm{B_2O}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}+2^2}}=\frac{2}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最小値は 0，最大値は $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

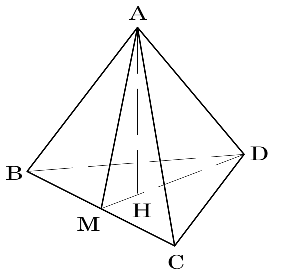
コメント

(1)の巧みな誘導により，(2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると，計算の海に溺れてしまいます。

問　題

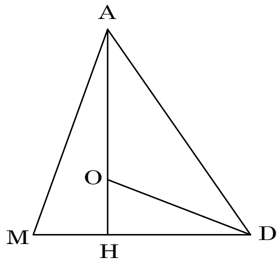
半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。 [2005]

解答例



半径 1 の球に内接する正四面体 ABCD において，点 A から面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，対称性から H は△BCD の重心となり，また球の中心 O は線分 AH 上にある。

さて，辺 BC の中点を M とし，3 点 A, M, D を含む平面で，正四面体 ABCD を切断したとき，その切り口は右図のようになる。



ここで，正四面体の 1 辺の長さを x とすると，

$$AD = x\,,\ \ AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$MH : HD = 1 : 2$ より，$\cos\angle AMH = \dfrac{1}{3}$ となり，

$$AH = AM\sin\angle AMH = \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

また，$HD = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ なので，△OHD に三平方の定理を適用すると，

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 1\,,\ \ x^2-\frac{2}{3}\sqrt{6}\,x = 0$$

$x>0$ より，$x = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ となる。

コメント

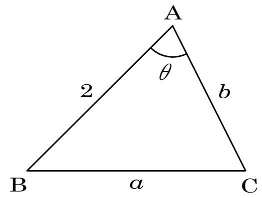
参考書などの例題に，そっくりそのまま載っている有名問題です。

問　題

三角形 ABC において，面積が 1 で $\mathrm{AB}=2$ であるとき，$\mathrm{BC}^2+(2\sqrt{3}-1)\mathrm{AC}^2$ の値を最小にするような $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。　[1999]

解答例

$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおくと，



条件より，$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot b\sin\theta=1$，$b\sin\theta=1$ ………①

余弦定理より，$a^2=4+b^2-4b\cos\theta$ ………②

ここで，$l=a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2$ とおくと，①②より，

$$l=4+b^2-4b\cos\theta+(2\sqrt{3}-1)b^2$$
$$=2\sqrt{3}b^2-4b\cos\theta+4$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{\sin^2\theta}-\frac{4\cos\theta}{\sin\theta}+4$$
$$l'=2\sqrt{3}\cdot\frac{-2\cos\theta}{\sin^3\theta}-4\cdot\frac{-1}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{-4\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta}{\sin^3\theta}$$
$$=\frac{8}{\sin^3\theta}\cdot\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
l'		$-$	0	$+$	
l		↘		↗	

増減表より, l が最小になるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のときである。

コメント

文系に誘導つきで同じ問題が出ています。理系では誘導がありませんので，異なった解法となりました。

問　題

座標空間の 4 点 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$B(0,\ 0,\ 1)$，$C\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，$D\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$に対し，$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$\vec{q}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OD}$とおく。ただし，O は原点，$s$ と t は実数とする。

(1) $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$と内積$\vec{p}\cdot\vec{q}$を s, t で表せ。

(2) $t=\frac{1}{2}$のとき，ベクトル$\vec{p}$と$\vec{q}$のなす角が$\frac{3}{4}\pi$となるような s の値を求めよ。

(3) s と t が実数を動くとき，$|\vec{p}-\vec{q}|$の最小値を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1) 条件より，$\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OB}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，$\overrightarrow{OD}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$なので，$|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2=1$，$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OD}|^2=2$となり，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=-1$$

ここで，$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$\vec{q}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OD}$から，

$$|\vec{p}|^2=(1-t)^2\cdot 1+2t(1-t)\cdot 0+t^2\cdot 1=2t^2-2t+1,\ |\vec{p}|=\sqrt{2t^2-2t+1}$$

$$|\vec{q}|^2=(1-s)^2\cdot 2+2s(1-s)\cdot 0+s^2\cdot 2=4s^2-4s+2,\ |\vec{q}|=\sqrt{4s^2-4s+2}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=(1-t)(1-s)\cdot 0+(1-t)s\cdot 0+t(1-s)\cdot(-1)+ts\cdot(-1)=-t$$

(2) $t=\frac{1}{2}$のとき，(1)より，$|\vec{p}|=\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=-\frac{1}{2}$となり，

$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4s^2-4s+2}\cdot\cos\frac{3}{4}\pi,\ \sqrt{4s^2-4s+2}=1$$

すると，$4s^2-4s+1=0$すなわち$(2s-1)^2=1$となり，$s=\frac{1}{2}$である。

(3) (1)から，$|\vec{p}-\vec{q}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=(2t^2-2t+1)+2t+(4s^2-4s+2)$となり，

$$|\vec{p}-\vec{q}|^2=2t^2+4s^2-4s+3=2t^2+4\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+2$$

これより，$t=0$，$s=\frac{1}{2}$のとき，$|\vec{p}-\vec{q}|$は最小値$\sqrt{2}$をとる。

コメント

ベクトルの内積についての成分計算という内容です。

問　題

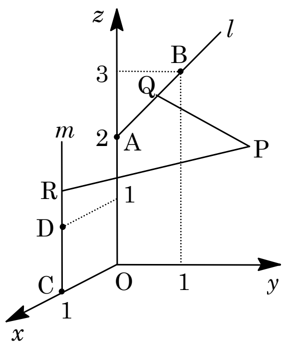
空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{B}(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線を l とし, 2 点 $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線を m とする。a を定数として, l 上にも m 上にもない点 $\mathrm{P}(s,\ t,\ a)$ を考える。

(1) P から l に下ろした垂線と l の交点を Q とし, P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする。Q, R の座標をそれぞれ s, t, a を用いて表せ。

(2) P を中心とし, l と m がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ。

(3) $s,\ t$ と定数 a が(2)の条件を満たすとき, 平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し, その焦点と準線を a を用いて表せ。 [2016]

解答例＋映像解説



(1) 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{B}(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線 l は, q を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 1)$ から,

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+q(0,\ 1,\ 1)$$

点 $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線 m は, r を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(0,\ 0,\ 1)$ から,

$$m:(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+r(0,\ 0,\ 1)$$

ここで, l 上の点 $\mathrm{Q}(0,\ q,\ 2+q)$, m 上の点 $\mathrm{R}(1,\ 0,\ r)$, l 上にも m 上にもない点 $\mathrm{P}(s,\ t,\ a)$ に対して, 条件より, $\mathrm{PQ}\perp l$ かつ $\mathrm{PR}\perp m$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-t)+(2+q-a)=0,\ \ \overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=r-a=0$$

よって, $q=\dfrac{t+a-2}{2}$, $r=a$ となり,

$$\mathrm{Q}\Big(0,\ \frac{t+a-2}{2},\ \frac{t+a+2}{2}\Big),\ \ \mathrm{R}(1,\ 0,\ a)$$

(2) (1)より, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\Big(-s,\ -\dfrac{t-a+2}{2},\ \dfrac{t-a+2}{2}\Big)$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-s+1,\ -t,\ 0)$ となり,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=s^2+\frac{(t-a+2)^2}{4}+\frac{(t-a+2)^2}{4}=s^2+\frac{1}{2}t^2-(a-2)t+\frac{1}{2}a^2-2a+2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=(-s+1)^2+t^2=s^2-2s+t^2+1$$

そして, P を中心とし, l と m がともに接するような球面が存在するための条件は, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$ から, $s^2+\frac{1}{2}t^2-(a-2)t+\frac{1}{2}a^2-2a+2=s^2-2s+t^2+1$ となり,

$$4s=t^2+2(a-2)t-a^2+4a-2\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(＊)より，$4s=(t+a-2)^2-2a^2+8a-6$ となり，

$$(t+a-2)^2=4s+2a^2-8a+6,\ (t+a-2)^2=4\Bigl(s+\frac{a^2-4a+3}{2}\Bigr)$$

すると，st 平面上で点$(s,\ t)$は放物線を描き，焦点は$\Bigl(-\dfrac{a^2-4a+3}{2}+1,\ -a+2\Bigr)$ すなわち$\Bigl(-\dfrac{a^2}{2}+2a-\dfrac{1}{2},\ -a+2\Bigr)$，また準線は $s=-\dfrac{a^2-4a+3}{2}-1$ すなわち $s=-\dfrac{a^2}{2}+2a-\dfrac{5}{2}$ である。

コメント

空間図形と 2 次曲線の融合問題です。基本事項の確認が主ですが，計算はやや面倒です。

問　題

空間の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$ の定める平面を α とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。α 上の点 C があり，その x 座標が正であるとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1) C の座標を求めよ。

(2) $\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3) α 上にない点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から α に垂線を下ろし，α との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ を満たす実数 $k,\ l$ を $x,\ y,\ z$ で表せ。 [2015]

解答例＋映像解説

(1) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 1)$ に対し，$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1+1+1=1$

さて，$p,\ q$ を実数として，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおくと，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，$|\vec{c}|=1$ から，

$$p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=1$$

よって，$3p+q=0$ ……①，$3p^2+2pq+3q^2=1$ ……②

また，$\vec{c}$ の x 成分が正より，$p-q>0$ ………③

すると，①③より，$p+3p>0$，$p>0$ となり，①②より，

$$3p^2-6p^2+27p^2=1,\quad 24p^2=1,\quad p=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$$

①より，$q=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ となり，$\vec{c}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\vec{a}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\vec{b}$ ……④から，

$$\vec{c}=\frac{\sqrt{6}}{12}(1,\ 1,\ 1)-\frac{\sqrt{6}}{4}(-1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\ -\frac{\sqrt{6}}{6},\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

よって，点 C の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ である。

(2) ④より，$\dfrac{\sqrt{6}}{4}\vec{b}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\vec{a}-\vec{c}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\vec{c}$ となり，$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$s=\frac{1}{3},\quad t=-\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\vec{a}+l\vec{c}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{c}=0$ から，

$$k|\vec{a}|^2+l\vec{a}\cdot\vec{c}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=0,\quad k\vec{a}\cdot\vec{c}+l|\vec{c}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=3k$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=l$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ から

$$k=\frac{1}{3}(x+y+z),\quad l=\frac{\sqrt{6}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{6}y-\frac{\sqrt{6}}{6}z=\frac{\sqrt{6}}{6}(2x-y-z)$$

コメント

空間ベクトルの成分表示についての標準的な問題です。(3)は，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のセットで表される平面 α を，直交する $\vec{a}$, $\vec{c}$ のセットで表現し直す内容になっています。

問　題

四面体 OABC は，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ を満たす。辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を $\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$pq=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる。$p+q=t$ とし，△CPQ の面積を S とする。

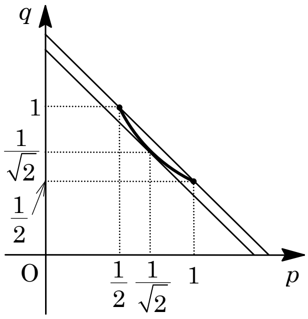
(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) S を t で表せ。

(3) S の最小値，およびそのときの p,q を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1) 条件 $0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$，$pq=\dfrac{1}{2}$ を pq 平面上に図示すると，右図の曲線（太線）となる。

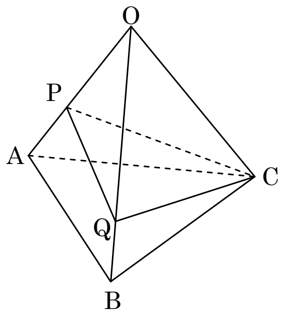


ここで，$p+q=t$ ……(＊)とおき，この曲線と直線(＊)が共有点をもつ条件を考えることにより，t のとり得る値の範囲を求めると，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1+\frac{1}{2},\quad \sqrt{2}\leqq t\leqq\frac{3}{2}$$

(2) 条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$



さて，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=p^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2p\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=p^2+1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2=q^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2q\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=q^2+1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=pq\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-p\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-q\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=1$$

これより，△CPQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)-1^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+p^2+q^2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+(p+q)^2-2pq}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+t^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-\frac{3}{4}}$$

(3) (1)の結果から，$t=\sqrt{2}$ $\left(p=q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき S は最小となり，最小値は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$ である。

コメント

空間ベクトルに関する基本的な問題です。(2)の結論が明快すぎて……。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を l とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，a, b, c の満たす条件を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円の方程式を，$x^2+y^2+ax+by=0$ ……①とおく。

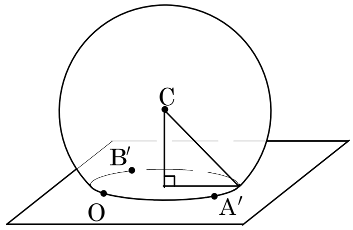
①が $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通ることより，

$$5+2a+b=0\ \cdots\cdots\text{②},\quad 5+a+2b=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

②③より，$a=b=-\dfrac{5}{3}$ となるので，3 点 O, A, B を通る円の方程式は，①より，

$$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=0,\quad \left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{18}\ \cdots\cdots\text{④}$$

(2)　3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通る球面 S は，(1)から，xy 平面との交線が④で表されることより，その中心を $\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{6},\ \dfrac{5}{6},\ c\right)$ とおくことができる。



さて，S の半径を r とすると，三平方の定理から，

$$r^2=c^2+\frac{25}{18}$$

よって，S の方程式は，$\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2+(z-c)^2=c^2+\dfrac{25}{18}$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y-2cz=0\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

そこで，直線 $l: x=t+2,\ y=t+2,\ z=t$ と S の方程式⑤を連立して，

$$(t+2)^2+(t+2)^2+t^2-\frac{5}{3}(t+2)-\frac{5}{3}(t+2)-2ct=0$$

$$3t^2-\left(2c-\frac{14}{3}\right)t+\frac{4}{3}=0\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

条件より，⑥が実数解をもつので，$D/4=\left(c-\dfrac{7}{3}\right)^2-4\geqq 0$ となり，

$$\left(c-\frac{7}{3}+2\right)\left(c-\frac{7}{3}-2\right)\geqq 0,\quad \left(c-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{13}{3}\right)\geqq 0$$

以上より，求める $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ の条件は，$a=b=\dfrac{5}{6}$ で，$c\leqq\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{13}{3}\leqq c$ である。

コメント

現行課程ではあまり重視されていない部分ですが，球面と平面や直線の交わりについての基本的な問題です。演習しておくことが望まれる一題です。

問　題

xyz 空間の原点 O と，O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A, B, C, D を考える。点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2},\ \sin\dfrac{\alpha}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ 0\right)$ $(0<\alpha<\pi)$ とする。点 C, D は $\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{DOA}=\angle\mathrm{DOB}$ を満たし，点 C の z 座標は正，点 D の z 座標は負とする。

(1) 点 C の座標を α と $\theta=\angle\mathrm{COA}$ $(0<\theta<\pi)$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき，点 C の座標を求めよ。　[2008]

解答例

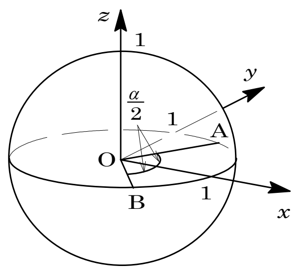
(1) $\mathrm{C}(p,\ q,\ r)$ とおくと，条件より $p^2+q^2+r^2=1$ $(r>0)$ ………①

さて，$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\theta$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり，$0<\alpha<\pi$ として，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\cos\dfrac{\alpha}{2},\ \sin\dfrac{\alpha}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\cos\dfrac{\alpha}{2},\ -\sin\dfrac{\alpha}{2},\ 0\right)$ となる。

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta$ より，

$$p\cos\frac{\alpha}{2}+q\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\theta \text{ ………②}$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\theta$ より，

$$p\cos\frac{\alpha}{2}-q\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\theta \text{ ………③}$$

②③より，$0<\alpha<\pi$ から，$q=0$，$p=\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

①より，$r=\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$ となり，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}},\ 0,\ \sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\right)$ である。

(2) まず，対称性より，$\mathrm{C}(p,\ 0,\ r)$ に対し，$\mathrm{D}(p,\ 0,\ -r)$ とおくことができる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいという条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が α から，$\theta=\alpha$ かつ $\angle\mathrm{COD}=\alpha$ と同値である。

そこで，(1)より，$p=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ ………④

また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cos\alpha$ より，$p^2-r^2=\cos\alpha$ ………⑤

①より，$q=0$ なので，$p^2+r^2=1$ ………⑥

⑤⑥より，$2p^2=1+\cos\alpha$ となり，④を代入すると，$2\cos^2\alpha=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot(1+\cos\alpha)$

$$4\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)^2,\quad 3\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$$

よって，$(3\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)=0$ から，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$ $(0<\alpha<\pi)$ となる。

すると，$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$ より，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，

$$p=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad r=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

以上より，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ である。

コメント

空間ベクトルを題材にした計算問題です。見かけよりは時間がかかります。

問　題

空間内に, 3 点 $A_0(1,\ 0,\ 0)$, $A_1(1,\ 1,\ 0)$, $A_2(1,\ 0,\ 1)$を通る平面αと, 3 点 $B_0(2,\ 0,\ 0)$, $B_1(2,\ 1,\ 0)$, $B_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$を通る平面$\beta$を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$とおくとき, ベクトル$\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{OB_0}$, $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{B_0B_2}$を$\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$で表せ。ただし, O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O とα上の点 P を通る直線がβ上の点P$'$も通っているとする。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2},\quad \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}$$

とおくとき, a, b を p, q で表せ。

(3) 点 P がα上の点A_0を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき, 点P$'$が動いてできる図形C'の方程式を(2)の p, q で表し, C'が楕円であることを示せ。

[2006]

解答例

(1) $A_0(1,\ 0,\ 0)$, $A_1(1,\ 1,\ 0)$, $A_2(1,\ 0,\ 1)$より,

$$\overrightarrow{OA_0}=(1,\ 0,\ 0)=\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{A_0A_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2},\quad \overrightarrow{A_0A_2}=(0,\ 1,\ 1)=\overrightarrow{e_3}$$

また, $B_0(2,\ 0,\ 0)$, $B_1(2,\ 1,\ 0)$, $B_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$より,

$$\overrightarrow{OB_0}=(2,\ 0,\ 0)=2\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{B_0B_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{B_0B_2}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}$$

(2) 条件より, O, P, P$'$が同一直線上にあるので, t を実数として,

$$\overrightarrow{OP'}=t\overrightarrow{OP},\quad \overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}=t\left(\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2}\right)$$

(1)より, $2\overrightarrow{e_1}+p\overrightarrow{e_2}+q\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}\right)=t\left(\overrightarrow{e_1}+a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}\right)$

$\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$は 1 次独立なので,

$$2+\frac{1}{2}q=t\ \cdots\cdots\text{①},\quad p=ta\ \cdots\cdots\text{②},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}q=tb\ \cdots\cdots\text{③}$$

①②より, $p=\left(2+\dfrac{1}{2}q\right)a$, すなわち$2p=(4+q)a$となる。

ここで, $q=-4$のときは①から$t=0$となり, ③が成立しないことより,

$$a=\frac{2p}{4+q}\ \cdots\cdots\text{④}$$

①③より, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}q=\left(2+\dfrac{1}{2}q\right)b$となり, $b=\dfrac{\sqrt{3}q}{4+q}\ \cdots\cdots\text{⑤}$

(3)　条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{A_0P}}|=1$から，$|a\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+b\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}|=1$となり，$|a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}|=1$

$a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}=(0,\ a,\ b)$なので，$a^2+b^2=1$

④⑤を代入すると，$\left(\dfrac{2p}{4+q}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}q}{4+q}\right)^2=1$，$2p^2+q^2-4q=8$

$$\frac{p^2}{6}+\frac{(q-2)^2}{12}=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{B_0P}}=p\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}+q\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}$であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}|=|\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}=0$$

そこで，$\mathrm{B_0}$を原点とし，$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}$を$p$軸の基本ベクトル，$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}$を$q$軸の基本ベクトルとして，平面$\beta$上で直交座標系をつくることができる。このとき，点$\mathrm{P'}$の座標は$(p,\ q)$となるので，⑥より，点$\mathrm{P'}$が動いてできる図形$C'$は楕円である。

コメント

大学入試に久々の登場ですが，空間内の楕円を表現する問題です。一度は演習した方がよい問題です。

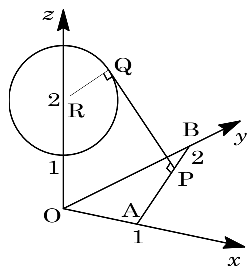
問　題

2 点$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 2,\ 0)$を通る直線を l とし，中心が$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$で半径が 1 の球面を C とする。点 P が l 上にあり点 Q が C 上にあるとし，線分 PQ は直線 l と線分 RQ に垂直であるとする。

(1) 点 P の存在する範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さを最小にする点 P の座標を求めよ。　[2002]

解答例



(1) $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$

$$l:(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+t(-1,\ 2,\ 0)$$
$$=(1-t,\ 2t,\ 0)$$

すると，l 上に点 P があるので，$\mathrm{P}(1-t,\ 2t,\ 0)$とおけ，点 P を含んで l に垂直な平面は，

$$-\{x-(1-t)\}+2(y-2t)=0\ ,\ \ x-2y+5t-1=0$$

この平面が，中心$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$で半径が 1 の球面と接する条件は，

$$\frac{|5t-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1\ ,\ \ |5t-1|=\sqrt{5}\ ,\ \ t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{5}$$

ここで，$t_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{5}$，$t_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$とし，このときの点 P をそれぞれ$\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$とおくと，$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{4+\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2-2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$，$\mathrm{P}_2\left(\dfrac{4-\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2+2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$となる。

以上より，点 P の存在する範囲は，図から線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$である。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$が直角三角形なので，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PR}^2-\mathrm{RQ}^2=\mathrm{PR}^2-1$となり，

$$\mathrm{PQ}^2=(1-t)^2+(2t)^2+(-2)^2-1=5t^2-2t+4=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{19}{5}$$

よって，$t=\dfrac{1}{5}$のとき PQ は最小値をとり，このとき$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5},\ 0\right)$である。

コメント

(1)は，l に垂直な平面で球をサンドイッチにするという考え方で解をつくりました。その際，平面の方程式や点と平面の距離の公式を利用していますが，これは，図形を xy 平面に正射影したと考えて，直線の方程式や点と直線の距離の公式を用いたとみなしても構いません。

問　題

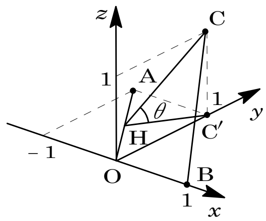
空間内の 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(-1,\ 1,\ 0)$，$B(1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 1)$をとる。

(1)　直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする。H の座標を求めよ。$\angle CHC' = \theta$として$\cos\theta$の値を求めよ。ただし，$C' = (0,\ 1,\ 0)$とする。

(2)　直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離$\overline{PQ}$が最小となる P，Q の座標を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　点 H は，直線 OA 上にあるので，



$$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OA} = (-k,\ k,\ 0)$$

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = (-k,\ k-1,\ -1)$$

条件より，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$なので，

$$-k\cdot(-1) + (k-1)\cdot 1 - 1\cdot 0 = 0\,,\ k = \frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{OH} = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$から，$H\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

ここで，$CH = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，$C'H = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle CC'H = \frac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta = \frac{C'H}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　直線 OA 上の点 P に対して，$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} = (-t,\ t,\ 0)$

直線 BC 上の点 Q に対して，$\overrightarrow{OQ} = (1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC} = (1-s,\ s,\ s)$

そこで，$\overline{PQ}$が最小となるのは，$PQ\perp OA$ かつ$PQ\perp BC$ときなので，

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1-s+t,\ s-t,\ s)$$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$から，$-(1-s+t) + (s-t) = 0$，$2s - 2t = 1$………①

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$から，$-(1-s+t) + (s-t) + s = 0$，$3s - 2t = 1$………②

①②より，$s = 0,\ t = -\frac{1}{2}$

このとき，$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OQ} = (1,\ 0,\ 0)$となるので，求める点 P，Q の座標は，$P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$Q(1,\ 0,\ 0)$である。

コメント

(2)では，ねじれの位置にある 2 直線 OA と BC の共通垂線を利用して，PQ の距離が最小になる点 P, Q の座標を求めました。

問　題

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。 [2017]

解答例＋映像解説

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき，

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n \geqq 1$，$2k-1 \geqq 1$ より，$(2k-1)n \geqq 2k-1$ となり，

$$a \geqq k^2+2k-1 \text{………②}$$

(2) n が自然数で $n(n+1)+14$ が平方数のとき，$n(n+1)+14>n^2$ より，①から，

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \text{（}k\text{ は自然数）………③}$$

すると，②から，$14 \geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-15 \leqq 0$

$$(k+5)(k-3) \leqq 0,\ -5 \leqq k \leqq 3$$

k は自然数から，$k=1,\ 2,\ 3$ となる。

(i) $k=1$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+1)^2$ となり，$n=13$

(ii) $k=2$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+2)^2$ となり，$n=\dfrac{10}{3}$ より不適

(iii) $k=3$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+3)^2$ となり，$n=1$

(i)～(iii)より，$n=1,\ 13$ である。

コメント

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

問　題

(1)　次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ。

$x^3+x^2-2x-1=0$ ………①

(2)　方程式①の 3 つの実数解を s, t, u とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3)　(2)の a_n がすべて整数であることを示せ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　$x^3+x^2-2x-1=0$ ……①に対して，$f(x)=x^3+x^2-2x-1$ とおくと，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ f(-1)=1>0,\ f(0)=-1<0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

よって，3 次方程式①は，$x<-1$，$-1<x<0$，$0<x$ に 1 つずつ実数解をもつ。

(2)　方程式①の解を s, t, u とすると，$s^3+s^2-2s-1=0$ から，n を自然数として，

$$s^{n+2}+s^{n+1}-2s^n-s^{n-1}=0,\ \frac{s^{n+2}+s^{n+1}-2s^n-s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

同様に，$\dfrac{t^{n+2}+t^{n+1}-2t^n-t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}=0$ ……③，$\dfrac{u^{n+2}+u^{n+1}-2u^n-u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}=0$ ……④

ここで，$a_n=\dfrac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\dfrac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\dfrac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}$ なので，②③④より，

$$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　a_n がすべて整数であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$a_1=\frac{1}{(s-t)(s-u)}+\frac{1}{(t-u)(t-s)}+\frac{1}{(u-s)(u-t)}$$

$$=\frac{-(t-u)-(u-s)-(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0$$

$$a_2=\frac{s}{(s-t)(s-u)}+\frac{t}{(t-u)(t-s)}+\frac{u}{(u-s)(u-t)}$$

$$=\frac{-s(t-u)-t(u-s)-u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-st+su-tu+ts-us+ut}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0$$

$$a_3=\frac{s^2}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^2}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^2}{(u-s)(u-t)}$$

$$=\frac{-s^2(t-u)-t^2(u-s)-u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-s^2t+s^2u-t^2u+t^2s-u^2s+u^2t}{(s-t)(t-u)(u-s)}$$

$$=\frac{-(s-t)u^2+(s^2-t^2)u-st(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-(s-t)(u-s)(u-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=1$$

(ii)　$n=k,\ k+1,\ k+2$ のとき

a_k，a_{k+1}，a_{k+2} が整数と仮定すると，⑤から $a_{k+3}=-a_{k+2}+2a_{k+1}+a_k$ となり，a_{k+3} も整数となる。

(i)(ii)より，a_n はすべて整数である。

コメント

漸化式と整数の融合である(3)がメインですが，(2)の誘導から方針は明快です。ただ，a_1，a_2，a_3 の計算は，その取りかかりに引くところがありました。

問　題

p，q は正の実数とし，$a_1=0$，$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定まる数列$\{a_n\}$がある。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$とする。数列$\{b_n\}$の一般項をp, q, nで表せ。

(2)　$q=1$とする。すべての自然数nについて$a_{n+1}\geqq a_n$となるようなpの値の範囲を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1)　$a_1=0$，$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$に対して，両辺$\div p^{n+1}$とすると，

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\left(-\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$とすると，$b_{n+1}=b_n+\left(-\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$となり，$n\geqq 2$で，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{q}{p}\right)^{k+1}=\frac{0}{p}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{q}{p}\right)^{k+1}$$

p, qは正の実数より，$-\dfrac{q}{p}\neq 1$となり，

$$b_n=\frac{q^2}{p^2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1+\frac{q}{p}}=\frac{q^2}{p(p+q)}\left\{1-\left(-\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

なお，この式は$n=1$のときも成立している。

(2)　$q=1$のとき，(1)より，$b_n=\dfrac{1}{p(p+1)}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}\right\}$となり，

$$a_n=p^nb_n=\frac{1}{p+1}\{p^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$$

ここで，条件から$a_{n+1}\geqq a_n$なので，$(p+1)a_{n+1}\geqq(p+1)a_n$

$$p^n-(-1)^n\geqq p^{n-1}-(-1)^{n-1},\ \ p^{n-1}(p-1)\geqq 2(-1)^n\cdots\cdots\cdots(*)$$

以下，すべての自然数nについて，$(*)$が成立する条件を求める。

まず，$n=2$のとき成立することより，$p(p-1)\geqq 2$から$p^2-p-2\geqq 0$となり，$p>0$から$p\geqq 2$が必要である。

逆に$p\geqq 2$のとき，$p^{n-1}(p-1)\geqq 2^{n-1}\cdot 1\geqq 2(-1)^n$となり$(*)$はつねに成立する。

以上より，求める条件は$p\geqq 2$である。

コメント

誘導つきの漸化式に加えて，必要十分条件についての取扱い方法が問われています。なお，(2)の後半で$n=1$の場合について記述していないのは，$p>0$に関する条件が新たに求まらないということにすぎません。

問　題

次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1=1,\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。ただし，i は虚数単位である。

(1)　z_2，z_3 を求めよ。

(2)　上の漸化式を $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ。

(3)　一般項 z_n を求めよ。

(4)　$z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。　[2004]

解答例

(1)　条件より，$z_1=1$，$z_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}z_n+1$ ………①

$$z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_1+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot 1+1=\frac{3+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_2+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{2}+1=1+\sqrt{3}i$$

(2)　①を変形して，$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}(z_n-\alpha)$ となることより，

$$z_{n+1}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_n-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha+\alpha$$

よって，$-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha+\alpha=1$，$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha=1$ から，$\alpha=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(3)　(2)より，$z_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(z_n-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$$z_n-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\left(z_1-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$z_n=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(4)　$z_n=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ より，

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=-1,\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\ \text{………②}$$

さて，$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

②より，$\cos\dfrac{n-1}{3}\pi+i\sin\dfrac{n-1}{3}\pi=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

$$\frac{n-1}{3}\pi=2k\pi+\frac{4\pi}{3},\ n-1=6k+4,\ n=6k+5$$

なお, $n \geqq 1$ より $k \geqq 0$ となるので，$n = 6k + 5$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) である。

コメント

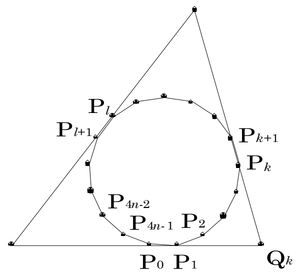
虚数係数の漸化式です。詳しすぎるほどの誘導がついています。

問　題

n を自然数とし，正 $4n$ 角形 $P_0 \cdots P_{4n-1}$ を考える。

(1)　辺 P_0P_1 と辺 P_kP_{k+1} $(1 \leqq k \leqq 2n-1)$ を延長した直線の交点を Q_k とする。このとき，$\angle P_0Q_kP_{k+1}$ の大きさを求めよ。

(2)　3 辺 P_0P_1，P_kP_{k+1}，P_lP_{l+1} $(k<l)$ を延長したとき，正 $4n$ 角形 $P_0 \cdots P_{4n-1}$ を含む鋭角三角形ができるような k と l の組は何通りあるか。　[2000]



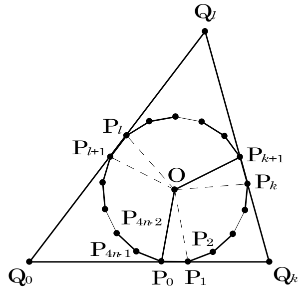
解答例

(1)　正 $4n$ 角形の中心を O とし，$\theta = \dfrac{2\pi}{4n} = \dfrac{\pi}{2n}$ とおく。

四角形 $OP_0Q_kP_{k+1}$ について，$\angle P_0OP_{k+1} = (k+1)\theta$，

$\angle OP_0Q_k = \angle OP_{k+1}Q_k = \dfrac{\pi-\theta}{2}$ より，

$$\angle P_0Q_kP_{k+1} = 2\pi - \frac{\pi-\theta}{2}\cdot 2 - (k+1)\theta$$
$$= \pi - k\theta = \left(1 - \frac{k}{2n}\right)\pi$$



(2)　(1)と同様に考えて，

$$\angle P_kQ_lP_{l+1} = \pi - (l-k)\theta = \left(1 - \frac{l-k}{2n}\right)\pi$$
$$\angle P_lQ_0P_1 = \pi - (4n-l)\theta = \left(1 - \frac{4n-l}{2n}\right)\pi$$

$\triangle Q_0Q_kQ_l$ が鋭角三角形なので，$0 < \angle P_0Q_kP_{k+1} < \dfrac{\pi}{2}$ より，

$$0 < \left(1 - \frac{k}{2n}\right)\pi < \frac{\pi}{2},\ \ \frac{1}{2} < \frac{k}{2n} < 1,\ \ n < k < 2n \cdots\cdots\cdots①$$

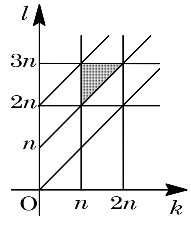
同様にして，$0 < \angle P_kQ_lP_{l+1} < \dfrac{\pi}{2}$ より，$n < l-k < 2n$，$k+n < l < k+2n \cdots\cdots\cdots②$

また，$0 < \angle P_lQ_0P_1 < \dfrac{\pi}{2}$ より，$n < 4n-l < 2n$，$2n < l < 3n \cdots\cdots\cdots③$

①②③を $k<l$ のもとで kl 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。

この領域内にある格子点 $(k,\ l)$ の個数が，鋭角三角形ができる k と l の組の数に一致するので，

$$(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+2+1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$



コメント

条件を満たす k と l の組の個数を，格子点の個数に対応させて数えました。

問　題

数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0, 1, 8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある。これから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば，左から順に 0, 0, 1, 1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。

(1) a, b, c, d は整数とする。$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。

(3) n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ。　　[2018]

解答例＋映像解説

(1) a, b, c, d を整数とするとき，

$$1000a+100b+10c+d=9(111a+11b+c)+(a+b+c+d)$$

すると，$9(111a+11b+c)$ は 9 の倍数なので，$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値である。

(2) 数字の 0, 1, 2, 8 の書かれたカードが 2 枚ずつ，あわせて 8 枚のカードから，4 枚を取り出し，横一列に並べる。そして，このときできる自然数を n とする。

まず，${}_8\mathrm{C}_4\times 4!=70\times 4!$ 通りが同様に確からしいとする。

ここで，n が 9 の倍数であるのは，(1)から各位の和は 18 または 9 である。

(i)　各位の和が 18 のとき

1, 1, 8, 8 または 0, 2, 8, 8 のカードを並べることが対応し，その確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times 4!}{70\times 4!}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times 4!}{70\times 4!}=\frac{5}{70}$$

(ii)　各位の和が 9 のとき

0, 0, 1, 8 のカードを並べることが対応し，その確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times 4!}{70\times 4!}=\frac{4}{70}$$

(i)(ii)より，n が 9 の倍数である確率は，$\dfrac{5}{70}+\dfrac{4}{70}=\dfrac{9}{70}$ である。

(3) n が偶数となるのは一の位が 0, 2, 8 のいずれかより，その確率は，

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_1\times{}_7\mathrm{P}_3}{70\times 4!}=\frac{1260}{70\times 4!}$$

また，n が偶数かつ 9 の倍数となるとき，その確率は，

(i)　1, 1, 8, 8 または 0, 2, 8, 8 のとき

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{P}_1\times 3!}{70\times 4!}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times 4!}{70\times 4!}=\frac{108}{70\times 4!}$$

(ii)　0, 0, 1, 8 のとき

$$\frac{{}_2C_2\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_3P_1\times 3!}{70\times 4!}=\frac{72}{70\times 4!}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{108}{70\times 4!}+\dfrac{72}{70\times 4!}=\dfrac{180}{70\times 4!}$ となる。

したがって，n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である条件付き確率は，

$$\frac{180}{70\times 4!}\div\frac{1260}{70\times 4!}=\frac{1}{7}$$

コメント

確率の標準的な問題です。なお，8 枚のカードはすべて異なるとして数えています。

問　題

さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1)　$p_{10}=\left(\frac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2)　p_9 の値を求めよ。

(3)　p_3 の値を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　さいころを投げ，数直線上で初め原点にいた点 P を，出た目の数だけ正の向きに移動させる。そして，点 P が 10 に達するか越えた時点で終了する。このとき，k 回目終了後の点 P の位置を X_k とおく。

さて，$X_9\geqq 9$ より，10 回目で終了する場合は，$X_9=9$ すなわち 9 回目まで 1 の目が出て，10 回目が任意なので，その確率 p_{10} は，

$$p_{10}=\left(\frac{1}{6}\right)^9\times 1=\left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(2)　$X_8\geqq 8$ より，9 回目で終了する場合は，$X_8=8,\ 9$ である。

(i)　$X_8=8$ のとき　このとき，8 回目までは 1 の目が出て，9 回目は 2 以上の目なので，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^8\times\frac{5}{6}=5\left(\frac{1}{6}\right)^9$ となる。

(ii)　$X_8=9$ のとき　このとき，8 回目までは 1 の目が 7 回，2 の目が 1 回出て，9 回目は任意なので，その確率は ${}_8\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^7\frac{1}{6}\times 1=8\left(\frac{1}{6}\right)^8$ となる。

(i)(ii)より，9 回目で終了する確率 p_9 は，

$$p_9=(5+8\cdot 6)\left(\frac{1}{6}\right)^9=53\left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(3)　$2\leqq X_2\leqq 12$ であるが，3 回目で終了する場合は，$4\leqq X_2\leqq 9$ となる。

ここで，1 回目と 2 回目の目の数とその和をまとめると右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(i)　$X_2=4$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 3 通りで，3 回目は 6 なので，その確率は $3\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=3\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(ii)　$X_2=5$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 4 通りで，3 回目は 5 または 6 なので，その確率は $4\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{2}{6}=8\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(iii)　$X_2=6$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 5 通りで，3 回目は 4 以上なので，その確率は $5\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{3}{6}=15\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(iv)　$X_2=7$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 6 通りで，3 回目は 3 以上なので，その確率は $6\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{4}{6}=24\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(v)　$X_2=8$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 5 通りで，3 回目は 2 以上なので，その確率は $5\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}=25\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(vi)　$X_2=9$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 4 通りで，3 回目は任意なので，その確率は $4\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 1=4\left(\frac{1}{6}\right)^2$ となる。

(i)〜(vi)より，3 回目で終了する確率 p_3 は，

$$p_3=(3+8+15+24+25+4\cdot 6)\left(\frac{1}{6}\right)^3=99\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{11}{24}$$

コメント

確率の基本的な問題ですが，注意力が要求されます。解答例のように，表を作った方が安心です。

問　題

机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである。

(1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(2) ひきだし A, B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(3) ひきだし A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。 [2016]

解答例＋映像解説

(1) ひきだし A のメダルの色の種類について，その組の総数は $3^3=27$ 通りである。

そして，色が 2 種類であるのは，金と銀のみ，銀と銅のみ，金と銅のみの場合があり，合わせて $(2^3-2)\times 3=18$ 通りとなるので，その確率は $\dfrac{18}{27}=\dfrac{2}{3}$ である。

(2) ひきだし A, B をあわせたとき，メダルの色の種類について，その組の総数は $3^3\times 2^2=27\times 4$ 通りである。

そして，A, B をあわせたとき，メダルの色が 2 種類であるのは，

(i) 金と銀のみのとき　(1)と同様に考えると，$2^5-2=30$ 通りの場合がある。

(ii) 金と銅のみのとき

B はともに金の場合しかなく，また A は金または銅かつ金のみでない場合となり，$(2^3-1)\times 1=7$ 通りの場合がある。

(iii) 銀と銅のみのとき　(ii)と同様に考えると，7 通りの場合がある。

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\dfrac{30+7+7}{27\times 4}=\dfrac{11}{27}$ である。

(3) ひきだし A のメダルが，金 a 枚，銀 b 枚，銅 c 枚のとき $A=(a,\ b,\ c)$，ひきだし B のメダルが，金 d 枚，銀 e 枚のとき $B=(d,\ e)$ と表す。

さて，A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っているのは，

(i) $A=(1,\ 2,\ 0)$ かつ $B=(2,\ 0)$ のとき　$3\times 1=3$ 通り

(ii) $A=(1,\ 0,\ 2)$ かつ $B=(2,\ 0)$ のとき　$3\times 1=3$ 通り

(iii) $A=(1,\ 1,\ 1)$ かつ $B=(2,\ 0)$ のとき　$3!\times 1=6$ 通り

(iv) $A=(2,\ 1,\ 0)$ かつ $B=(1,\ 1)$ のとき　$3\times 2!=6$ 通り

(v) $A=(2,\ 0,\ 1)$ かつ $B=(1,\ 1)$ のとき　$3\times 2!=6$ 通り

(vi) $A=(3,\ 0,\ 0)$ かつ $B=(0,\ 2)$ のとき　$1\times 1=1$ 通り

(i)〜(vi)より，金メダルが 3 枚の確率は，$\dfrac{3+3+6+6+6+1}{27\times 4}=\dfrac{25}{108}$

その中で A のメダルの色が 2 種類であるのは，(i)(ii)(iv)(v)のときより，その確率は $\dfrac{3+3+6+6}{27\times 4}=\dfrac{18}{108}$ である。

したがって，求める確率は，$\dfrac{18}{108}\div\dfrac{25}{108}=\dfrac{18}{25}$ となる。

コメント

注意深さの問われる確率問題です。(3)は，現行課程で出題範囲に，再度，仲間入りした「条件付き確率」の設問です。

問　題

初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

(i)　まず同時に 2 個の玉を取り出す。

(ii)　その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える。

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする。

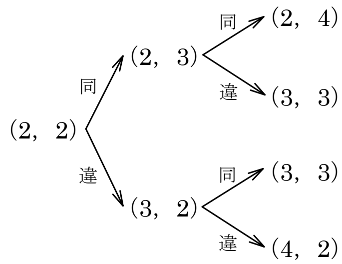
(1)　$X_1 = 3$ となる確率を求めよ。

(2)　$X_2 = 3$ となる確率を求めよ。

(3)　$X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1)　与えられた試行により，取り出した 2 個の玉の色が同じときは白玉が 1 個増え，違うときは赤玉が 1 個増える。この試行を 2 回繰り返すとき，袋の中の(赤玉，白玉)の個数は，右図のように変化する。



さて，$X_1 = 3$ となるのは，(2，2)→(3，2) の場合より，取り出した玉は色違いで，その確率は，

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

(2)　$X_2 = 3$ となるのは，(2，2)→(2，3)→(3，3) または(2，2)→(3，2)→(3，3) のいずれかより，その確率は，

$$\frac{{}_2C_2 + {}_2C_2}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} + \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_3C_2 + {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

(3)　$X_1 = 3$ かつ $X_2 = 3$ であるのは，(2，2)→(3，2)→(3，3) の場合で，その確率は $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ である。

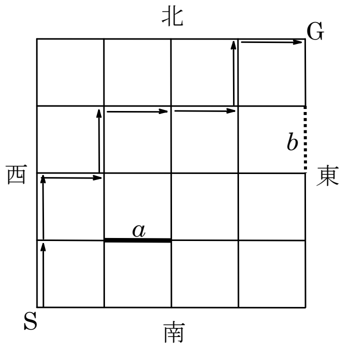
すると，(2)より $X_2 = 3$ となる確率は $\frac{7}{15}$ なので，$X_2 = 3$ であったとき $X_1 = 3$ である条件付き確率は，$\frac{4}{15} \div \frac{7}{15} = \frac{4}{7}$ である。

コメント

確率の基本問題ですが，どういう訳か，(3)で条件付き確率が必答です。

問　題

図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1)　a を通り抜ける経路は何通りあるか。

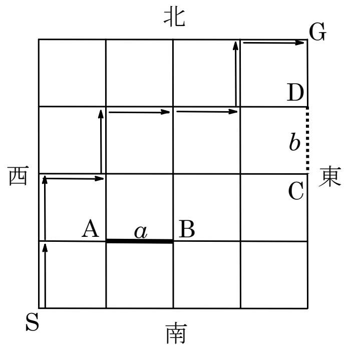
(2)　a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　まず，右図のように区間 a の両端を A と B，区間 b の両端を C と D とする。

すると，区間 a を通り抜ける経路は，S→A→B→G となり，その数は，$2\times1\times\dfrac{5!}{2!3!}=20$ である。



(2)　区間 a, b を通り抜ける経路 S→A→B→C→D→G は，$2\times1\times\dfrac{3!}{2!}\times1\times1=6$ 通りあり，区間 b を通り抜ける経路 S→C→D→G は，$\dfrac{6!}{4!2!}\times1\times1=15$ 通りある。

よって，区間 a を通り抜けずに b を通り抜ける経路数は，$15-6=9$ である。

(3)　まず，S→G の全経路数は，$\dfrac{8!}{4!4!}=70$ である。以下，区間 a, b を通り抜けるかどうかで場合分けをする。

(i)　区間 a, b をともに通り抜けるとき

かかる時間は $1+8+2\times6=21$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{6}{70}$ である。

(ii)　区間 a を通り抜けずに，b を通り抜けるとき

かかる時間は $8+2\times7=22$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{9}{70}$ である。

(iii)　区間 a を通り抜け，b を通り抜けないとき

かかる時間は $1+2\times7=15$ 分で，その確率は，(1)(2)より $\dfrac{20-6}{70}=\dfrac{14}{70}$ である。

(iv) 区間 a, b をともに通り抜けないとき

かかる時間は $2\times 8=16$ 分で，その確率は，$1-\left(\dfrac{6}{70}+\dfrac{9}{70}+\dfrac{14}{70}\right)=\dfrac{41}{70}$ である。

(i)～(iv)より，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値 E は,

$$E=21\times\frac{6}{70}+22\times\frac{9}{70}+15\times\frac{14}{70}+16\times\frac{41}{70}=17\ (\text{分})$$

コメント

センターレベルの確率の問題です。ベン図を描いてミスを防ぐのも一案です。