ま え が き

本書には，2010 年度以降に出題された熊本大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と計量

1　△ABC の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。　[2015]

■ ベクトル

1　t を実数とする。空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) △ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{BAC}$ が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

2　△ABC と，A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし，直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき，また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k，m を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}$，$m=-1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき，k の値を求めよ。　[2016]

3　p, q, r を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) q, r を p を用いて表せ。

(3) p', q', r' を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ。

(4) (3)における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。　[2015]

4 空間内の1辺の長さ1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とし，OAの中点をPとする。以下の問いに答えよ。

(1) $0<t<1$に対し，BCを$t:(1-t)$に内分する点をQとする。また，PM＋MQが最小になるOB上の点をMとし，PN＋NQが最小となるOC上の点をNとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$と$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$を，それぞれ$t$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) △QMNの面積をtを用いて表せ。

(3) tが$0<t<1$の範囲を動くとき，△QMNの面積の最大値を求めよ。 [2014]

5 Oを原点とする空間内の2点A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1,\ -2)$に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$かつ$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$を満たす平面OAB上の点Pからなる領域を$D$とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数kに対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$によって定まる点Qが領域$D$に含まれるとき，$k$の値の範囲を求めよ。

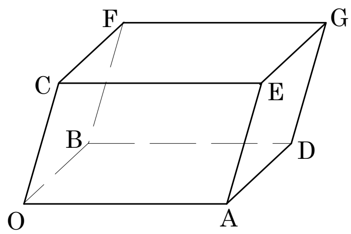
(2) 点Cを中心とする半径$\sqrt{6}$の円が領域Dに含まれるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$が最小となるCの座標を求めよ。 [2013]

6 1辺の長さが$\sqrt{2}$の正四面体OABCにおいて，辺ABの中点をM，辺BCを$1:2$に内分する点をN，辺OCの中点をLとする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 3点L，M，Nを通る平面と直線OAの交点をDとする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 辺OBの中点Kから直線DN上の点Pへ垂線KPを引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。 [2012]

7 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を $2:3$ に内分する点を N，辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k:1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

[2011]

8 原点を O とし，空間内に 3 点 $\mathrm{A}(4,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) △OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2) C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が△OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。 [2010]

■ 整数と数列

1 a と b を正の実数とする。△ABC において，∠B と∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1=a$，$\mathrm{CX}_1=b$ とする。各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b=8a$ のとき，$l_n>\dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169<\log_2 9<3.17$ を用いてよい。 [2015]

2 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 $a,\ b,\ c$ について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，$\log$ は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 [2014]

3 x, y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) x^5-x は 30 の倍数であることを示せ。

(2) x^5y-xy^5 は 30 の倍数であることを示せ。 [2011]

■ 確率

1 $m,\ n$ を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

2　$X,\ Y$ は$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする。また, n を自然数とする。A 君, B 君が以下のルールで対戦する。

(i)　1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii)　1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げたとき, $X,\ Y$ に属する目が出る確率をそれぞれ $p,\ q$ とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2)　A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組$(X,\ Y)$は何通りあるか。　[2013]

3　$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$個の 1 と 4 個の-1からなる数列a_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列$\{a_k\}$は何通りあるか求めよ。

(2)　数列$\{a_k\}$の初項から第 k 項までの積を$b_k = a_1a_2\cdots a_k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$とおく。$b_1+b_2+\cdots+b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$ の最大値および最小値を与える数列$\{a_k\}$はそれぞれ何通りあるか求めよ。　[2012]

4　赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2)　取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

[2010]

■ 複素数

1　複素数平面上で$|z+i|-|z-i|=1$を満たす点zの全体をHとおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角θの範囲は$0 \leqq \theta < 2\pi$とする。

(1)　Hの点zに対して，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　Hの点zに対して$w=\dfrac{1}{z}$とする。wの絶対値r_2と偏角θ_2のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。　[2018]

2　$s>0$，$t>0$とする。複素数平面上の$\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，△ACD が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数をzとするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　zをs, tを用いて表せ。

(2)　α，β，γが等式$4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$を満たすとき，$\gamma$と$z$をそれぞれ求めよ。

(3)　(2)で求めたγとzに対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC}=\theta$とする。このとき，$\cos\theta$の値を求めよ。　[2017]

3　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$を満たすθに対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$とする。ただし，$i$は虚数単位である。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して，$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$とするとき，z_nを極形式で表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$となる最小の$n$を求めよ。

(3)　z_{1000}が実数となるようなθの値の個数を求めよ。　[2016]

■ 曲線

1　xy平面上で，点$(1,\ 0)$までの距離とy軸までの距離の和が 2 である点の軌跡をCとする。以下の問いに答えよ。

(1)　Cで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　aを正の数とする。円$x^2+y^2=a$とCの交点の個数が，aの値によってどのように変わるかを調べよ。　[2013]

2　楕円 $C : x^2+4y^2=4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)における 2 つの交点を A, B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。　[2011]

■ 極限

1　n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1，a_2，…，a_{2n} に対して，分数の和 $\dfrac{a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{2n}}$ ……(＊)を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して(＊)がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_2 を求めよ。

(2)　S_n を与える順列 a_1，a_2，…，a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。　[2017]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　p を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 $a,\ b$ を定めよ。

(2)　$S(t)=\displaystyle\int_0^{t^2}e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx$　$(t\neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。　[2010]

■ 微分法

1　半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの $x,\ y$ を求めよ。　[2017]

2　$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ $(x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>0)$ における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1)　接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2)　(1)で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $l_k : y=k(x-a)+f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3)　(2)の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2017]

3　a を正の定数とする。条件 $\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$，$0<\theta<\pi$ を満たす θ について，以下の問いに答えよ。

(1)　条件を満たす θ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　条件を満たす θ の個数を求めよ。　[2014]

4　半径 1，中心角 θ $(0<\theta<\pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(\theta)$ を求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ。　[2013]

■ 積分法

1　関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x\geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極大値を求めよ。

(2)　$-3\leqq x\leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

[2018]

2　r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を　$a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2)　$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を r を用いて表せ。

(4)　(3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)$ を求めよ。　[2015]

3　正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-ax\cos t\right|dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。　[2012]

4　関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$　$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(0)$ の値を求めよ。

(3)　条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　[2010]

■ 積分の応用

1　$x\geqq1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3)　(2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016]

2　$a,\ b$ を実数とし，曲線 $C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値を求めよ。　[2016]

3　a を $a > 2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha < \beta)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

(2)　C と x 軸，および 2 直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

(3)　S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。　[2014]

4　xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2 - t + 1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1)　K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2)　K の体積を求めよ。　[2011]

分野別問題と解答例

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

△ABC の 3 辺の長さを BC$=a$，AC$=b$，AB$=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) aの値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle$C とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

解答例

(1) △ABC の 3 辺の長さ a, b, c について，$a>0$，$b>0$，$c>0$ ………①

$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$ ………②

条件より，$a+b+c=1$……③，$9ab=1$……④

③から $c=1-a-b$ となり，①に代入すると，$1-a-b>0$，$a+b<1$ ………⑤

また，②に代入すると，$a<1-a$，$b<1-b$，$1-a-b<a+b$ となり，

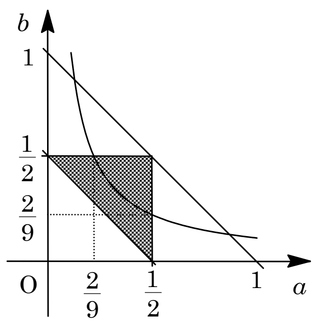
$a<\dfrac{1}{2}$，$b<\dfrac{1}{2}$，$a+b>\dfrac{1}{2}$ ………⑥

よって，①②③をまとめると，⑤⑥から，

$0<a<\dfrac{1}{2}$，$0<b<\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<a+b<1$

これを ab 平面上に図示すると右図の網点部となる。

そして，④から $b=\dfrac{1}{9a}$ となり，この領域内で a のとり得る範囲を調べると，$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$ である。



(2) $\angle$C$=\theta$ とおき，△ABC に余弦定理を適用すると，③④から，

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2\cdot\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}(-1-2ab+2a+2b)$$

$$=\frac{9}{2}\left(-1-\frac{2}{9}+2a+\frac{2}{9a}\right)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$$

ここで，$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}$ とおくと，$\cos\theta=f(a)$ となり，

$$f'(a)=9-\frac{1}{a^2}=\frac{9a^2-1}{a^2}$$

すると，$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減は右表のようになり，$\cos\theta$ のとり得る範囲は，

a	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

$$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$$

コメント

三角形を題材とした図形の計量問題です。そこに，微分と増減の内容が加えられています。(1)は，式変形だけではややこしそうだったので，図を用いています。

問　題

t を実数とする。空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3)　$\angle\mathrm{BAC}$ が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形になる場合は,

(i)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，$(t-1)-(2t-5)=0$ となり $t=4$

(ii)　$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より，$(t-4)-(2t-2)=0$ となり $t=-2$

(iii)　$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より，

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0,\ 6t^2-21t+15=0$$

よって，$(2t-5)(t-1)=0$ から，$t=\dfrac{5}{2},\ 1$

(i)～(iii)より，求める t の値は，$t=-2,\ 1,\ \dfrac{5}{2},\ 4$ となる。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ （p, q は実数）であり，

$$(t-1,\ 2t-5,\ t-1)=3p(1,\ -1,\ 0)+q(0,\ 1,\ 1)$$

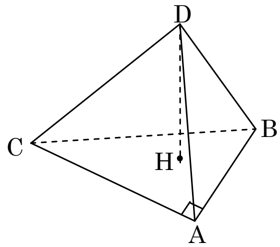
$$t-1=3p\cdots\cdots\text{①},\ 2t-5=-3p+q\cdots\cdots\text{②},\ t-1=q\cdots\cdots\text{③}$$

①③より，$3p=q$ となり，②に代入すると $2t-5=0$ から $t=\dfrac{5}{2}$ である。

(3)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき, (1)から $t=4$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3(1,\ 1,\ 1)$ である。

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3\sqrt{1+1+1}=3\sqrt{3}$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{6}$$



ここで，点 D から平面 ABC に垂線を引き，この垂線と平面 ABC の交点を H とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ に注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad(r, s\text{ は実数})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3\sqrt{2})^2r+3=18r+3=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3\sqrt{3})^2s-6=27s-6=0$$

これより，$r=-\dfrac{1}{6}$，$s=\dfrac{2}{9}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\frac{1}{6}\cdot 3(1,\ -1,\ 0)+\frac{2}{9}\cdot 3(1,\ 1,\ 1)-(0,\ 1,\ 1)=\frac{1}{6}(1,\ 1,\ -2)$$

以上より，四面体 ABCD の体積 V は，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{6}\sqrt{1+1+4}=\dfrac{3}{2}$ となる。

コメント

空間ベクトルと図形についての基本的な問題です。なお，平面の方程式などを利用すると，記述を少し短縮できます。

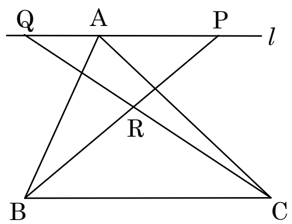
問　題

$\triangle$ABC と, A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし, 直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を, 線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき, また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, k, m を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$, $\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}$, $m=-1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき, k の値を求めよ。　[2016]

解答例



(1) $\triangle$ABC において, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

そして, l 上に点 P, Q を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k(\vec{c}-\vec{b})$ $(k>0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}=km(\vec{c}-\vec{b})$ で定めると, 線分 PB と線分 QC が 1 点で交わることより $m\leqq 1$ となり,

$$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=|(k-km)(\vec{c}-\vec{b})|=k(1-m)|\vec{c}-\vec{b}|$$

ここで, QP // BC なので,

$$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=\mathrm{BC}:\mathrm{QP}=|\vec{c}-\vec{b}|:k(1-m)|\vec{c}-\vec{b}|=1:k-km$$

すると, $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{k-km}{1+k-km}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{1+k-km}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{k-km}{1+k-km}\vec{b}+\frac{1}{1+k-km}k(\vec{c}-\vec{b})=\frac{-km}{1+k-km}\vec{b}+\frac{k}{1+k-km}\vec{c}$$

(2) $m=-1$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{c}=k\vec{b}-(k+1)\vec{c}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{b}=-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}$$

さて, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$ で, $\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0,\ -k(k+1)\cdot 1^2+\{k^2+(k+1)^2\}\cdot\frac{3}{2}-k(k+1)\cdot 2^2=0$$

まとめると, $4k^2+4k-3=0$, $(2k+3)(2k-1)=0$

よって, $k>0$ から, $k=\dfrac{1}{2}$

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は, 普通に内分比を設定し, 分点ベクトルで処理してもよいのですが, 記述量が多くなります。また, (2)は, 解答例のように(1)の結果を無視しています。

問　題

$p,\ q,\ r$ を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) $q,\ r$ を p を用いて表せ。

(3) $p',\ q',\ r'$ を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，$p',\ q',\ r'$ を p を用いて表せ。

(4) (3)における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。　[2015]

解答例

(1) $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-1,\ 1-p,\ 1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -1-p,\ r)$$

A, B, C が一直線上にあることより，k を 0 でない実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$-2=k(q-1)\cdots\cdots\cdots①,\quad -1-p=k(1-p)\cdots\cdots\cdots②,\quad r=k\cdots\cdots\cdots③$$

$p=1$ のとき，②は $0\cdot k=-2$ となり実数 k は存在しない。また，$p=-1$ のとき，②は $2k=0$ となり $k\neq 0$ に反する。よって，$p\neq\pm 1$ である。

(2) ②より，$k=\dfrac{p+1}{p-1}$ となり，③から，$r=\dfrac{p+1}{p-1}$

また，①から $-2=\dfrac{p+1}{p-1}(q-1)$ となり，$q=1+\dfrac{-2(p-1)}{p+1}=\dfrac{-p+3}{p+1}\cdots\cdots\cdots④$

(3) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{-2(p-1)}{p+1},\ 1-p,\ 1\right)=\dfrac{1}{p+1}(-2p+2,\ -p^2+1,\ p+1)$

ここで，$\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$-2p+2-(p^2-1)p'=0,\quad -2-(p+1)p'=0,\quad p'=\frac{-2}{p+1}\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$(-2p+2)q'-(p^2-1)+p+1=0,\quad -2(p-1)q'-(p^2-p-2)=0$$

よって，$q'=\dfrac{p^2-p-2}{-2(p-1)}=-\dfrac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}\cdots\cdots\cdots⑥$

さらに，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$2p-2+p^2-1+(p+1)r'=0,\quad (p+1)r'+(p^2+2p-3)=0$$

よって，$r'=-\dfrac{p^2+2p-3}{p+1}=-\dfrac{(p-1)(p+3)}{p+1}$

(4)　A′, B′, C′ が一直線上と仮定すると，④より $q' = \dfrac{-p'+3}{p'+1}$ となり，⑤⑥から，

$$-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)} = \frac{\dfrac{2}{p+1}+3}{\dfrac{-2}{p+1}+1},\quad -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)} = \frac{3p+5}{p-1}$$

まとめると，$-(p+1)(p-2) = 2(3p+5)$ から，$p^2+5p+8=0$ ………⑦

すると，⑦の判別式 $D = 5^2-4\cdot 8<0$ から実数 p は存在しない。

よって，A′, B′, C′ は一直線上にない。

コメント

空間ベクトルの成分に関する問題ですが，図形的な意味を考えず，数式の計算だけで押し通した解答例です。

問　題

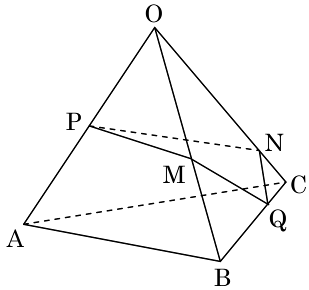
空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM＋MQ が最小になる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　△QMN の面積を t を用いて表せ。

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の面積の最大値を求めよ。　[2014]

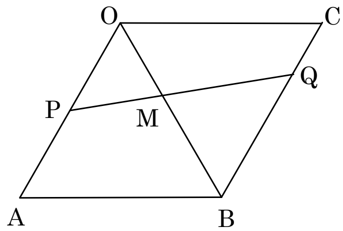
解答例



(1) 折れ線の長さ PM＋MQ が最小になる OB 上の点 M は, 右下図の正四面体 OABC の展開図において, 辺 OB と PQ の交点である。

すると，$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\dfrac{1}{2}:t=1:2t$ より，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2t+1}\vec{b}$$



また，PN＋NQ が最小となる OC 上の点 N に対して，同様に考えると，$\mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\dfrac{1}{2}:1-t=1:2-2t$ となり，$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}$ である。

(2)　まず，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ から，

$$\triangle\mathrm{OMN}=\frac{1}{2t+1}\cdot\frac{1}{3-2t}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{BQM}=\frac{2t}{2t+1}\cdot\frac{t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{2t^2}{2t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{CQN}=\frac{2-2t}{3-2t}\cdot\frac{1-t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，△QMN の面積を S とおくと，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}-\frac{2t^2}{2t+1}-\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{-4t^2+4t}{(2t+1)(3-2t)}=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)}$$

(3)　(2)より，$S=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{-4t^2+4t+3}=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{4t(1-t)+3}$ となり，$u=t(1-t)=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ とおくと，$0<t<1$ から，$0<u\leqq\dfrac{1}{4}$ となり，

$$S=\frac{\sqrt{3}u}{4u+3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big(1-\frac{3}{4u+3}\Big)$$

よって，$u=\dfrac{1}{4}\ \Big(t=\dfrac{1}{2}\Big)$のとき，$S$は最大値$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$をとる。

コメント

(3)は，普通に微分法を利用するという方法もありますが，分母・分子の形に注目して置き換えをしています。

問　題

O を原点とする空間内の 2 点 $A(-1,\ 1,\ 1)$，$B(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$|\overrightarrow{OC}|$ が最小となる C の座標を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $A(-1,\ 1,\ 1)$，$B(2,\ 1,\ -2)$，$P(x,\ y,\ z)$ に対し $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geqq 0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geqq 0$ より，

$$-x+y+z\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots①,\quad 2x+y-2z\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$ から，

$$\overrightarrow{OQ}=k(-1,\ 1,\ 1)+(1-k)(2,\ 1,\ -2)=(-3k+2,\ 1,\ 3k-2)\ \cdots\cdots\cdots③$$

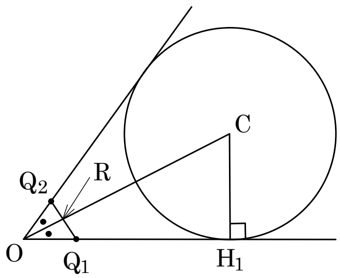
ここで，点 Q は直線 AB 上にあるので，領域 D に含まれる条件は，①②から，

$$-(-3k+2)+1+3k-2\geqq 0\ \cdots\cdots④,\quad 2(-3k+2)+1-2(3k-2)\geqq 0\ \cdots\cdots⑤$$

④から $6k-3\geqq 0$ より $k\geqq\dfrac{1}{2}$，⑤から $-12k+9\geqq 0$ より $k\leqq\dfrac{3}{4}$ なので，$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq\dfrac{3}{4}$

(2) (1)より，$k=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}$ のときの点 Q をそれぞれ Q_1，Q_2 とおくと，③より，

$$\overrightarrow{OQ_1}=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right),\quad \overrightarrow{OQ_2}=\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$$



さて，領域 D に含まれる点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円で $|\overrightarrow{OC}|$ が最小となるのは，この円が半直線 OQ_1，OQ_2 に接するときである。すなわち，半直線 OC は $\angle Q_1OQ_2$ の二等分線となり，半直線 OC と線分 Q_1Q_2 の交点を R とおくと，

$$Q_1R:Q_2R=|\overrightarrow{OQ_1}|:|\overrightarrow{OQ_2}|=\frac{\sqrt{6}}{2}:\frac{3\sqrt{2}}{4}=2:\sqrt{3}$$

これより，t を正の定数として，$\overrightarrow{OC}=t(\sqrt{3}\overrightarrow{OQ_1}+2\overrightarrow{OQ_2})$ と表せる。

さらに，円と半直線 OQ_1 の接点を H_1 とおくと，$\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OQ_2}=\dfrac{3}{4}$ から，

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OQ_1}=t(\sqrt{3}\overrightarrow{OQ_1}+2\overrightarrow{OQ_2})\cdot\overrightarrow{OQ_1}=\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)t=\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)t$$

$$\overrightarrow{OH_1}=\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OQ_1}}{|\overrightarrow{OQ_1}|^2}\overrightarrow{OQ_1}=\frac{\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)t}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}\overrightarrow{OQ_1}=(\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{OQ_1}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}-t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})$$
$$=t(\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}-2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})=t(1,\ -1,\ -1)$$

$t>0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH_1}}\right|=\sqrt{3}t$ となり，条件より $\sqrt{3}t=\sqrt{6}$ から $t=\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})=\sqrt{6}\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$$

よって，求める点 C の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{6}+2\sqrt{2},\ \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$である。

コメント

計算量が多いため，細かな説明は省略ぎみの解答例となっています。

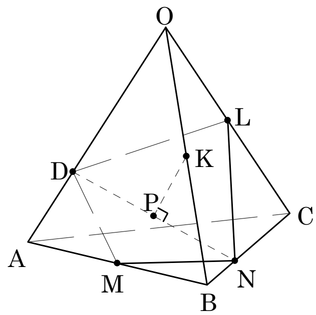
問　題

1 辺の長さが$\sqrt{2}$の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を$1:2$に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 L，M，N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。 [2012]

解答例



(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおくと，点 D は直線 OA 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{a}$ ………①

また，点 D は平面 LMN 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=r\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$
$$=r\cdot\frac{\vec{c}}{2}+s\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+t\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$
$$=\frac{s}{2}\vec{a}+\Big(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}t\Big)\vec{b}+\Big(\frac{r}{2}+\frac{t}{3}\Big)\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ただし，$r+s+t=1$ ………③

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は 1 次独立なので，①②より，

$$k=\frac{s}{2}\ \cdots\cdots\cdots④,\quad \frac{s}{2}+\frac{2}{3}t=0\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad \frac{r}{2}+\frac{t}{3}=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④より$s=2k$，⑤に代入して$t=-\frac{3}{4}s=-\frac{3}{2}k$，⑥に代入して$r=-\frac{2}{3}t=k$

すると，③から$2k-\frac{3}{2}k+k=1$となり，$k=\frac{2}{3}$より$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a}$である。

(2) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=(\sqrt{2})^2\cos 60^\circ=1$ ………⑦

まず，点 P は直線 DN 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+u\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{2}{3}(1-u)\vec{a}+\frac{2}{3}u\vec{b}+\frac{1}{3}u\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{2}{3}(1-u)\vec{a}+\Big(\frac{2}{3}u-\frac{1}{2}\Big)\vec{b}+\frac{1}{3}u\vec{c}$$
$$=\frac{1}{6}\{(4-4u)\vec{a}+(4u-3)\vec{b}+2u\vec{c}\}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}=\frac{1}{3}(-2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$となり，$\overrightarrow{\mathrm{KP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}=0$から，

$$\{(4-4u)\vec{a}+(4u-3)\vec{b}+2u\vec{c}\}\cdot(-2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=0$$

⑦より，$(4-4u)(-4+2+1)+(4u-3)(-2+4+1)+2u(-2+2+2)=0$

$$20u-13=0,\ u=\frac{13}{20}$$

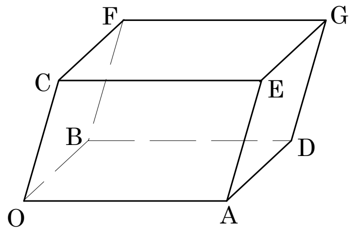
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{20}\vec{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{13}{20}\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{20}\vec{c}=\frac{7}{30}\vec{a}+\frac{13}{30}\vec{b}+\frac{13}{60}\vec{c}$

コメント

空間ベクトルの図形への応用についての基本的な問題です。

問　題

平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を $2:3$ に内分する点を N，辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k:1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。



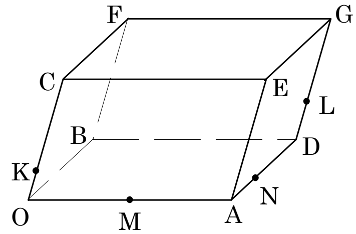
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3)　3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

[2011]

解答例



(1)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DL}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MK}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OK}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}$$

(2)　3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があることより，s, t を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=s\overrightarrow{\mathrm{MN}}+t\overrightarrow{\mathrm{MK}}$$

(1)より，$\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)$ ………①

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①より，

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\ \cdots\cdots\cdots②,\quad 1=\frac{2}{5}s\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{1}{3}=tk\ \cdots\cdots\cdots④$$

②③より，$s=\frac{5}{2}$，$t=\frac{3}{2}$ となり，④に代入すると，$k=\frac{2}{9}$ である。

(3)　辺 GF 上の点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=p\vec{a}$　$(0\leqq p\leqq 1)$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FP}}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，3 点 M, N, K の定める平面上に点 P があることより，(2)と同様にして，

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)=\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{2}{5}s\vec{b}+tk\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，⑤⑥より，

$$p-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad 1=\frac{2}{5}s\ \cdots\cdots\cdots⑧,\quad 1=tk\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑦⑧より，$s=\frac{5}{2}$，$t=\frac{7}{2}-2p$ となり，⑨に代入すると，$k=\frac{2}{7-4p}$ ………⑩

よって，$0 \leqq p \leqq 1$ から $3 \leqq 7-4p \leqq 7$ となり，⑩より $\dfrac{2}{7} \leqq k \leqq \dfrac{2}{3}$ である。

コメント

平行六面体を題材とした空間ベクトルの基本的な問題です。なお，(2)で，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ の 1 次結合で表したのは，次の設問(3)の問題文によります。

問　題

原点を O とし，空間内に 3 点 $A(4,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 2,\ 0)$，$C(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2)　C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が△OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　2 点 $B(1,\ 2,\ 0)$，$C(2,\ 1,\ 2)$ に対して，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$x=2t+(1-t)=t+1,\ \ y=t+2(1-t)=-t+2,\ \ z=2t$$

$A(4,\ 0,\ 0)$ から，△OAP の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{16\{(t+1)^2+(-t+2)^2+4t^2\}-\{4(t+1)\}^2}=2\sqrt{(-t+2)^2+4t^2}$$
$$=2\sqrt{5t^2-4t+4}=2\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$$

よって，$0<t<1$ から，$t=\dfrac{2}{5}$ のとき，△OAP の面積は最小となる。

(2)　3 点 O, A, P を通る平面に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=4a=0\cdots\cdots①,\ \ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a(t+1)+b(-t+2)+2ct=0\cdots\cdots②$$

①より $a=0$ となり，②に代入すると，$c=\dfrac{t-2}{2t}b$ となり，

$$\vec{n}=\left(0,\ b,\ \frac{t-2}{2t}b\right)=\frac{b}{2t}(0,\ 2t,\ t-2)$$

これより，点 C を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルとする直線は，u をパラメータとして，

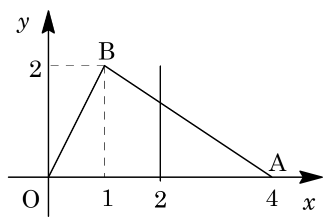
$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+u(0,\ 2t,\ t-2)$$

xy 平面との交点 D は，$z=0$ として，$2+u(t-2)=0$，$u=\dfrac{2}{2-t}$ となり，

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+\frac{2}{2-t}(0,\ 2t,\ t-2)=\left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$$

よって，$D\left(2,\ \dfrac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$ である。

さて，直線 AB の方程式は，$y=-\dfrac{2}{3}(x-4)$ となり，直線 $x=2$ との交点は，$y=\dfrac{4}{3}$ である。



これより，点 D が△OAB の内部にある条件は，

$$0<\frac{2+3t}{2-t}<\frac{4}{3}$$

すると，$0<t<1$ から，左側の不等式は成立し，右側の不等式から，

$$3(2+3t)<4(2-t)\,,\ t<\frac{2}{13}$$

以上より，$0<t<\dfrac{2}{13}$

コメント

(2)は，与えられた点の座標との相性を考え，座標計算で進めました。ベクトルを前面に出す解法も可能です。

問　題

a と b を正の実数とする。△ABC において，∠B と∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$BX_1 = a$，$CX_1 = b$ とする。各 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

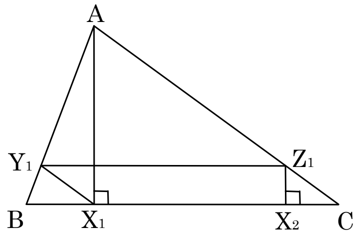
線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　l_1 を a, b を用いて表せ。

(2)　l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3)　$b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい。　[2015]

解答例

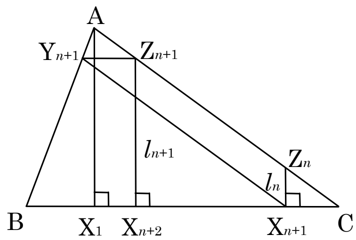


(1)　条件より，$AX_1 = 1$，$BX_1 = a$，$CX_1 = b$

そして，$X_1Y_1 /\!/ AC$，$Y_1Z_1 /\!/ BC$ より，

$$CZ_1 : Z_1A = BY_1 : Y_1A = BX_1 : X_1C = a : b$$

よって，$l_1 = Z_1X_2 = \dfrac{a}{a+b}AX_1 = \dfrac{a}{a+b}$



(2)　$Z_nX_{n+1} = l_n$，$Z_{n+1}X_{n+2} = l_{n+1}$ について，(1)と同様に考えると，

$$CZ_{n+1} : Z_{n+1}A = BY_{n+1} : Y_{n+1}A = BX_{n+1} : X_{n+1}C \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$CX_{n+1} : CX_1 = l_n : 1$ より，

$$CX_{n+1} = bl_n$$

すると，$BX_{n+1} : X_{n+1}C = (a+b-bl_n) : bl_n \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$CZ_{n+1} : Z_{n+1}A = (a+b-bl_n) : bl_n$ となり，

$$l_{n+1} = \frac{a+b-bl_n}{(a+b-bl_n)+bl_n}AX_1 = \frac{a+b-bl_n}{a+b} = -\frac{b}{a+b}l_n + 1$$

(3)　$b = 8a$ のとき，(1)(2)より，$l_1 = \dfrac{1}{9}$，$l_{n+1} = -\dfrac{8}{9}l_n + 1$ となり，

$$l_{n+1} - \frac{9}{17} = -\frac{8}{9}\left(l_n - \frac{9}{17}\right)$$

すると，$l_n - \dfrac{9}{17} = \left(l_1 - \dfrac{9}{17}\right)\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n-1} = -\dfrac{64}{17\cdot 9}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^{n-1} = \dfrac{8}{17}\left(-\dfrac{8}{9}\right)^n$ となり，

$$l_n=\frac{8}{17}\Big(-\frac{8}{9}\Big)^n+\frac{9}{17}$$

条件より，奇数 n は k を自然数として，$n=2k-1$ とおくと，$l_n>\dfrac{1}{2}$ から，

$$\frac{8}{17}\Big(-\frac{8}{9}\Big)^{2k-1}+\frac{9}{17}>\frac{1}{2},\ \frac{8}{17}\Big(-\frac{9}{8}\Big)\Big(-\frac{8}{9}\Big)^{2k}>-\frac{1}{2\cdot 17},\ \Big(\frac{8}{9}\Big)^{2k}<\frac{1}{18}$$

両辺に底 2 で対数をとると，$2k(\log_2 2^3-\log_2 3^2)<-\log_2 2\cdot 3^2$ となり，

$$2k(2\log_2 3-3)>1+2\log_2 3,\ k>\frac{1+\log_2 9}{2(\log_2 9-3)}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2(\log_2 9-3)}$$

ここで，$3.169<\log_2 9<3.17$ から，$12.2<\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2(\log_2 9-3)}<12.4$

よって，$k\geqq 13$ となり，求める最小の奇数 n は，$2\cdot 13-1=25$ となる。

コメント

漸化式の図形への応用です。平行線を利用した頻出の内容になっていますが，最後の詰めの計算は面倒です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 $a,\ b,\ c$ について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，$\log$ は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2)　自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。　[2014]

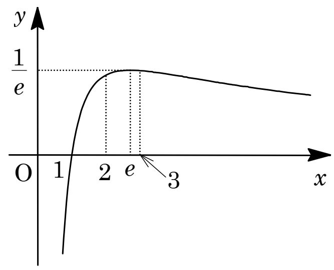
解答例

(1)　まず，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，グラフの概形は右下図である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0



これより，正の実数 a,b,c について，

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$$

$$\log 4-\frac{3}{e}=\frac{2e\log 2-3}{e}>\frac{2\times 2.7\times 0.6-3}{e}>0$$

よって，$\dfrac{3}{e}<\log 4$ から，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2)　$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$　$(a\leqq b\leqq c,\ d\geqq 3)$に対して，$\log a^{bc}b^{ca}c^{ab}=\log d^{abc}$ から，

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d,\quad \frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log d$$

すると，(1)より $\log d<\log 4$ となり，d は 3 以上の整数より，$d=3$ である。

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log 3\quad (a\leqq b\leqq c)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$を満たす 1 組の整数解として，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ がある。

ここで，$f(3)-f(2)=\dfrac{\log 3}{3}-\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{\log 9-\log 8}{6}>0$ なので，

$$0=f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots\cdots$$

すると，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq f(3)+f(3)+f(3)=3\cdot\dfrac{\log 3}{3}=\log 3$ となり，等号が成立する，すなわち$(*)$を満たす整数解は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ のみである。

コメント

(2)において，1 組の整数解はすぐに目視でわかりますので，それ以外には存在しないという形式で記しています。$f(x)$ のグラフが役に立ったわけです。

問　題

$x,\ y$ を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　x^5-x は 30 の倍数であることを示せ。

(2)　x^5y-xy^5 は 30 の倍数であることを示せ。　[2011]

解答例

(1)　整数 x に対して，$f(x)=x^5-x=x(x-1)(x+1)(x^2+1)\cdots\cdots(*)$とおく。

ここで，$x(x-1)(x+1)$ は連続する 3 整数の積なので 6 の倍数であり，$(*)$より，$f(x)$ は 6 の倍数となる。

また, k を整数として, x を分類すると,

(i)　$x=5k$ のとき　$(*)$より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(ii)　$x=5k\pm1$ のとき

$(x-1)(x+1)=5k(5k\pm2)$ なので, $(*)$より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(iii)　$x=5k\pm2$ のとき

$x^2+1=25k^2\pm20k+5=5(5k^2\pm4k+1)$ なので, $(*)$より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(i)～(iii)より，どんな整数 x に対しても，$f(x)$ は 5 の倍数である。

したがって, 6 と 5 は互いに素から，$f(x)$ は $6\times5=30$ の倍数となる。

(2)　整数 $x,\ y$ に対して,

$$g(x,\ y)=x^5y-xy^5=x^5y-xy+xy-xy^5=y(x^5-x)-x(y^5-y)$$

ここで, (1)より，x^5-x，y^5-y は，ともに 30 の倍数である。

よって，$g(x,\ y)$ は 30 の倍数となる。

コメント

整数についての基本的な問題です。(2)では，積の微分法の公式を証明するときに現れる式変形を思い浮かべ，$g(x,\ y)$ を変形しました。

問　題

m, n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$, $(m-1,\ n)$, $(m-1,\ n-1)$, $(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1)　硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2)　硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3)　硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 5 回投げた後に $R_{(3,\ 4)}$ に移るには，右に 2 回，上に 3 回だけ移動すればよい。

すなわち，硬貨の表が 2 回，裏が 3 回出ればよいので，その確率は，

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16} $$

(2)　初めに 1 の目が上で $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 2 回投げた後に 6 の目が上にあるのは，$R_{(3,\ 1)}$ または $R_{(1,\ 3)}$ に移るときである。

(i)　$R_{(1,\ 1)}\to R_{(3,\ 1)}$ のとき　右に 2 回すなわち硬貨の表が 2 回出ればよい。

(ii)　$R_{(1,\ 1)}\to R_{(1,\ 3)}$ のとき　上に 2 回すなわち硬貨の裏が 2 回出ればよい。

(i)(ii)より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ である。

次に，初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 2 回投げた後に 6 の目が上にあり，しかも 5 回投げた後に $R_{(3,\ 4)}$ に移るには，

(iii)　$R_{(1,\ 1)}\to R_{(3,\ 1)}\to R_{(3,\ 4)}$ のとき

$R_{(3,\ 1)}\to R_{(3,\ 4)}$ では，硬貨の裏が 3 回出ればよい。

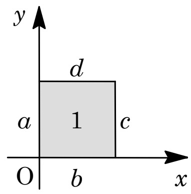
(iv)　$R_{(1,\ 1)}\to R_{(1,\ 3)}\to R_{(3,\ 4)}$ のとき

$R_{(1,\ 3)}\to R_{(3,\ 4)}$ では，硬貨の表が 2 回で裏が 1 回出ればよい。

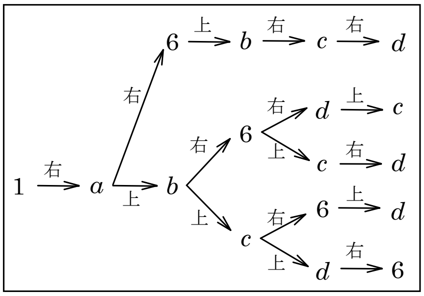
(iii)(iv)より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{2^5}=\frac{1}{8}$ である。

以上より，求める条件付き確率は，$\frac{1}{8}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ となる。

(3)　さいころの 1 と 6 以外の目を a, b, c, d $(a+c=b+d=7)$ とおき，初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあるとき，上から見た配置が右図とする。



そして，硬貨を 5 回投げたとき，5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる場合を考える。



まず，1 回目に硬貨が表で右に転がった場合，すなわち上面が $1\to a$ と，硬貨が裏で上に転がった場合，すなわち上面が $1\to b$ とは対等なので，以下，上面が $1\to a$ のときを調べる。

このとき，上面に 6 通りの目がでるのは，樹形図から，$1\to a\to 6$ のときは 1 通り，$1\to a\to b$ のときは 4 通り，合わせて 5 通りとなる。

同様に，1 回目に硬貨が裏の場合も 5 通りとなるので，求める確率は，

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}$$

コメント

前半は標準的な確率の問題ですが，(3)はかなり注意力を要します。ここでは，樹形図をもとにチェックしながら解きましたが，時間をかなり費やします。

問　題

$X,\ Y$ は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X\cap Y$ は空集合とする。また，n を自然数とする。A 君，B 君が以下のルールで対戦する。

(i)　1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii)　1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げたとき，$X,\ Y$ に属する目が出る確率をそれぞれ $p,\ q$ とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2)　A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか。　[2013]

解答例

(1)　A 君がさいころを投げて出た目が X に属するのを○，属さないのを●，B 君がさいころを投げて出た目が Y に属するのを□，属さないのを■で表す。すると，A 君が勝つ場合は，○，●■○，●■●■○，……となる。

さいころを投げたとき，$X,\ Y$ に属する目が出る確率はそれぞれ $p,\ q$ なので，A 君が勝つ確率 $P(A)$ は，$0<p<1$，$0<q<1$，$p+q\leqq 1$ ……①のもとで，

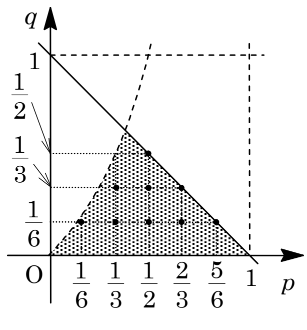
$$P(A)=p+(1-p)(1-q)p+(1-p)^2(1-q)^2p+\cdots+(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p$$
$$=p\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

(2)　B 君が勝つ場合は，●□，●■●□，●■●■●□，……となるので，その確率 $P(B)$ は，(1)と同様にして，

$$P(B)=(1-p)q+(1-p)^2(1-q)q+(1-p)^3(1-q)^2q+\cdots\cdots$$
$$+(1-p)^n(1-q)^{n-1}q=(1-p)q\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

条件より $P(A)>P(B)$ なので，$p>(1-p)q$ となり，

$$q<\frac{p}{1-p}=-1-\frac{1}{p-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$



①②を満たす領域は右図の網点部となり，$p,\ q$ のとり得る値は，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$ から，

(i)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$のとき

$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=30$

(ii)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{6}\right),\ \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$のとき

$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=150$

(iii)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{6}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$のとき

$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3=140$

(iv)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{6}\right),\ \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$のとき

$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2=45$

(v)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{5}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$のとき　$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_5\times{}_1\mathrm{C}_1=6$

(i)～(v)より，$(X,\ Y)$の組の総数は，$30+150+140+45+6=371$

コメント

プロセスは難しくないのですが，注意深さが求められる問題です。

問　題

$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおく。

$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。　[2012]

解答例

(1)　a_1，a_2，$\cdots$，a_n が，$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 で構成される数列 a_k に対して，数列 $\{a_k\}$ 全体は，

$${}_n\mathrm{C}_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \text{（通り）}$$

(2)　$b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ より，a_1，a_2，$\cdots$，a_k の中に -1 が 1 個または 3 個あると $b_k = -1$，それ以外は $b_k = 1$ である。

すなわち，$1 \leqq p < q < r < s \leqq n$ として，$a_p = a_q = a_r = a_s = -1$ とすると，

$$b_p = b_r = -1,\ b_q = b_s = 1$$

さて，$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が最大値をとるのは，$b_k = -1$ となる k が 2 個，$b_k = 1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $q = p+1$，$s = r+1$ の場合より，その値は，

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = (-1)\cdot 2 + 1\cdot(n-2) = n-4$$

また，$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が最大値をとるのは，$b_k = 1$ となる k が 2 個，$b_k = -1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $p = 1$，$r = q+1$，$s = n$ の場合より，その値は，

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1\cdot 2 + (-1)\cdot(n-2) = -n+4$$

(3)　$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が最大値 $n-4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 2 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$${}_{n-2}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{（通り）}$$

$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が最小値 $-n+4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 1 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$${}_{n-3}\mathrm{C}_1 = n-3 \text{（通り）}$$

コメント

場合の数と数列の融合問題です。題意を把握する力，さらに考えた過程を記述する力が要求されています。おもしろい問題です。

問　題

赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2)　取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

[2010]

解答例

(1)　初めに，赤球 4 個と白球 6 個の異なる 10 個の球が袋に入っているとし，この中から球を取り出す。

さて，条件の試行で，取り出した赤球の総数が 2 となる確率は，

(i)　1 回目が赤球 1 個，白球 1 個, 2 回目が赤球 1 個を取り出すとき

$$\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_3C_1}{{}_8C_1}=\frac{24}{45}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{5}$$

(ii)　1 回目が赤球 2 個, 2 回目が白球 2 個を取り出すとき

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\times\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}=\frac{6}{45}\times\frac{15}{28}=\frac{1}{14}$$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{14}=\dfrac{19}{70}$

(2)　取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる場合は，(1)の(i)以外に，次の場合がある。この確率は,

(iii) 1 回目が赤球 2 個を取り出し, 2 回目が白球 2 個を取り出す以外のとき

$$\frac{6}{45}\times\left(1-\frac{15}{28}\right)=\frac{13}{210}$$

(i)(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{5}+\dfrac{13}{210}=\dfrac{11}{42}$

コメント

確率の基本問題です。(2)は(1)のプロセスの再利用で解けます。

問　題

複素数平面上で$|z+i|-|z-i|=1$を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角θの範囲は$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(1)　Hの点zに対して，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　H の点 z に対して$w=\dfrac{1}{z}$とする。w の絶対値r_2と偏角θ_2のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。　[2018]

解答例

(1)　複素数平面上で，A(i)，B$(-i)$，P(z)とおくと，$|z+i|-|z-i|=1$より，

$$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=1$$

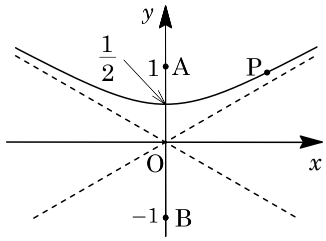
すると，点 P の描く図形Hは 2 点 A, B を焦点とする双曲線である。

ここで，$z=x+yi$とおき，$H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$とすると，$c=1$かつ$2b=1$で，

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより，$H:\dfrac{4x^2}{3}-4y^2=-1$となり，漸近線は，

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$$



ただし，BP > AP より $y>0$ であり，図形 H を図示すると右図の曲線となる。

そして，2 本の漸近線と実軸の正の向きとのなす角が$\pm\dfrac{\pi}{6}$より，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲は，$0\leqq\theta_1<2\pi$で考えると，$\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{5}{6}\pi$である。

(2)　$w=\dfrac{1}{z}$のとき，$r_2=|w|=\dfrac{1}{|z|}$となり，(1)より$|z|\geqq\dfrac{1}{2}$なので$0<r_2\leqq2$である。

また，nを整数として，$\theta_2=\arg w=\arg\dfrac{1}{z}=2n\pi-\arg z=2n\pi-\theta_1$より，

$$2n\pi-\frac{5}{6}\pi<\theta_2<2n\pi-\frac{\pi}{6}$$

$0\leqq\theta_2<2\pi$より$n=1$として，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta_2<\dfrac{11}{6}\pi$である。

コメント

双曲線の絡んだ複素数と図形の基本的な問題です。(1)は，x と y を用いて絶対値の計算を行っても構いません。

問　題

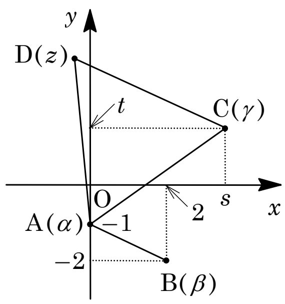
$s>0$，$t>0$とする。複素数平面上の$\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，△ACD が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) zをs, tを用いて表せ。

(2) α，β，γが等式$4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$を満たすとき，$\gamma$と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2)で求めたγとzに対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC}=\theta$とする。このとき，$\cos\theta$の値を求めよ。 [2017]

解答例



(1) $\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ $(s>0,\ t>0)$に対し，複素数平面上に$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$をとる。

ここで，△ACD が正三角形で，点 D が直線 AC に関して B と反対側にあることより，$\mathrm{D}(z)$は$\mathrm{C}(\gamma)$を$\mathrm{A}(\alpha)$のまわりに$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転した点となり，

$$z-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma-\alpha)$$

$$z=-i+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\{s+(t+1)i\}=-i+\frac{1}{2}\{s-\sqrt{3}t-\sqrt{3}+(\sqrt{3}s+t+1)i\}$$

$$=\frac{1}{2}(s-\sqrt{3}t-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(\sqrt{3}s+t-1)i\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) 与えられた条件 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$より，

$$4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0,\quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$$

ここで，AC は AB を正の向きに回転したものなので，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}i$となり，

$$\gamma=\alpha+(1+\sqrt{3}i)(\beta-\alpha)=-i+(1+\sqrt{3}i)(2-i)=2+\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i$$

すると，$s=2+\sqrt{3}$，$t=-2+2\sqrt{3}$となるので，$(*)$から，

$$z=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}-6-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3-2+2\sqrt{3}-1)i$$

$$=-2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$$

(3) まず，xy 平面を対応させて，$\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(2+\sqrt{3},\ -2+2\sqrt{3})$，$\mathrm{D}(-2+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2+\sqrt{3},\ -1+2\sqrt{3}),\ \overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-4+\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ のなす角が θ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2+(-1+2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = \sqrt{(-4+\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = (2+\sqrt{3})(-4+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3}) = 5$$

よって，$\cos\theta = \dfrac{5}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}} = \dfrac{1}{2\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$ である。

コメント

複素数平面に関する標準的な問題です。(3)は慣れ親しんでいる xy 平面を対応させ，ベクトルの内積を利用しています。

問　題

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ。

(3)　z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対し，$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}=\alpha^{n-1}(\alpha-2)$

さて，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\alpha=2\Big(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\Big)$ より，

$$\alpha^{n-1}=2^{n-1}\Big(\cos\frac{n-1}{3}\pi+i\sin\frac{n-1}{3}\pi\Big)$$

また，$\alpha=1+\sqrt{3}i$ から，$\alpha-2=-1+\sqrt{3}i=2\Big(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\Big)$ となり，

$$\begin{aligned}z_n&=2^{n-1}\Big(\cos\frac{n-1}{3}\pi+i\sin\frac{n-1}{3}\pi\Big)\cdot 2\Big(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\Big)\\&=2^n\Big\{\cos\Big(\frac{n-1}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi\Big)+i\sin\Big(\frac{n-1}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi\Big)\Big\}\\&=2^n\Big(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\Big)\end{aligned}$$

(2)　(1)から $|z_n|=2^n$ なので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|=\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$ となり，

$$2^{n+1}-2>500\,,\ \ 2^{n+1}>502\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$2^8=256$，$2^9=512$ より，①を満たす最小の n は 8 である。

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$z_{1000}=\alpha^{1000}-2\alpha^{999}$ は,

$$z_{1000}=2^{1000}(\cos1000\theta+i\sin1000\theta)-2^{1000}(\cos999\theta+i\sin999\theta)$$

z_{1000} が実数となることより，$\sin1000\theta-\sin999\theta=0$ から,

$$2\cos\frac{1999}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}=0\cdots\cdots\cdots②$$

$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ から，②は $\cos\dfrac{1999}{2}\theta=0$ となり，l を整数として，$\dfrac{1999}{2}\theta=l\pi+\dfrac{\pi}{2}$

ここで，$0<\dfrac{1999}{2}\theta<\dfrac{1999}{4}\pi$ から，$0<l\pi+\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{1999}{4}\pi$

$$0<l+\frac{1}{2}<\frac{1999}{4}\,,\ \ -\frac{1}{2}<l<\frac{1997}{4}=499+\frac{1}{4}$$

よって，$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 499$ となり，②を満たす θ の値の個数は 500 である。

コメント

複素数の極形式に関する基本的な問題です。

問　題

xy 平面上で，点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

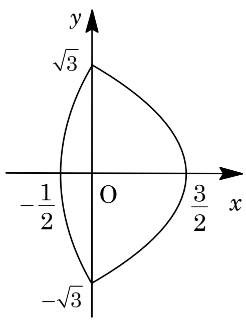
(1)　C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　a を正の数とする。円 $x^2+y^2=a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ。　[2013]

解答例

(1)　点 $(1,\ 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x|=2,\ \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2-|x|$$



ここで，$|x|\leqq 2$ のもとで，両辺を 2 乗すると，

$$(x-1)^2+y^2=4-4|x|+x^2,\ y^2=-4|x|+2x+3$$

(i)　$0\leqq x\leqq 2$ のとき

$$y^2=-2x+3,\ x=-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$-2\leqq x<0$ のとき

$$y^2=6x+3,\ x=\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

これより，点 P の軌跡 C で囲まれた部分の面積 S は，

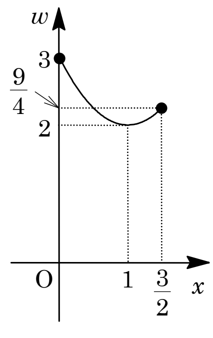
$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{2}\right)dy=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}y^2+2\right)dy$$

$$=2\left[-\frac{2}{9}y^3+2y\right]_0^{\sqrt{3}}=-\frac{4}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{3}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$$

(2)　円 $x^2+y^2=a\cdots\cdots③$と C の交点の個数は，

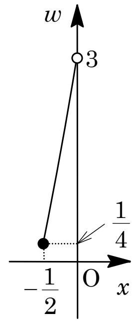
(i)　$0\leqq x\leqq\frac{3}{2}$ のとき　①③を連立して，

$$x^2-2x+3=a,\ (x-1)^2+2=a\cdots\cdots\cdots④$$



$w=(x-1)^2+2$ のグラフは右図のようになり，$w=a$ との交点の x 座標が④の解となる。さらに，④の異なる解の個数と円③と C の交点の個数は，$x=\frac{3}{2}$ のとき 1 対 1，$0\leqq x<\frac{3}{2}$ のとき 1 対 2 と対応する。

よって，円③と C の交点の個数は，$0<a<2$ のとき 0 個，$a=2$ のとき 2 個，$2<a<\frac{9}{4}$ のとき 4 個，$a=\frac{9}{4}$ のとき 3 個，$\frac{9}{4}<a\leqq 3$ のとき 2 個，$3<a$ のとき 0 個である。



(ii)　$-\frac{1}{2} \leqq x < 0$ のとき　②③を連立して，

$x^2+6x+3=a$，$(x+3)^2-6=a$ ………⑤

$w=(x+3)^2-6$ のグラフは右図のようになり，$w=a$ との交点の x 座標が⑤の解となる。さらに，⑤の異なる解の個数と円③と C の交点の個数は，$x=-\frac{1}{2}$ のとき 1 対 1，$-\frac{1}{2}<x<0$ のとき 1 対 2 と対応する。

よって，円③と C の交点の個数は，$0<a<\frac{1}{4}$ のとき 0 個，$a=\frac{1}{4}$ のとき 1 個，$\frac{1}{4}<a<3$ のとき 2 個，$3 \leqq a$ のとき 0 個である。

(i)(ii)より，円③と C の交点の個数をまとめると，$0<a<\frac{1}{4}$ または $3<a$ のとき 0 個，$a=\frac{1}{4}$ のとき 1 個，$\frac{1}{4}<a<2$ または $a=3$ のとき 2 個，$a=2$ または $\frac{9}{4}<a<3$ のとき 4 個，$a=\frac{9}{4}$ のとき 5 個，$2<a<\frac{9}{4}$ のとき 6 個である。

コメント

後半は煩雑です。難問というわけではないのですが。なお，接点も交点に含まれるという立場で，解答例を記しています。

問　題

楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)における 2 つの交点を A, B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$C: x^2+4y^2=4$ ……①と直線 $y=x+b$ ……②を連立すると，$x^2+4(x+b)^2=4$ となり，

$$5x^2+8bx+4b^2-4=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②が異なる 2 つの交点をもつことより，

$$D/4=16b^2-5(4b^2-4)=-4(b^2-5)>0$$

よって，$-\sqrt{5}<b<\sqrt{5}$ である。

(2)　③の実数解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\alpha+\beta=-\dfrac{8}{5}b$，$\alpha\beta=\dfrac{4b^2-4}{5}$ ………④

これより，$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha+b)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta+b)$ とおくことができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(\alpha-2,\ \alpha+b),\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\beta-2,\ \beta+b)$$

ここで，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left|(\alpha-2)(\beta+b)-(\beta-2)(\alpha+b)\right|=\frac{1}{2}\left|(b+2)(\alpha-\beta)\right|$$

④から，$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{64}{25}b^2-\dfrac{16b^2-16}{5}=\dfrac{16}{25}(-b^2+5)$ となり，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\left|(b+2)(-b^2+5)^{\frac{1}{2}}\right|=\frac{2}{5}\left|(b+2)^2(-b^2+5)\right|^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで，$f(b)=(b+2)^2(-b^2+5)$ とおくと，⑤より $S=\dfrac{2}{5}\left|f(b)\right|^{\frac{1}{2}}$ であり，

$$f'(b)=2(b+2)(-b^2+5)-(b+2)^2\cdot 2b=-2(b+2)(2b^2+2b-5)$$

$f'(b)=0$ の解は $b=-2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$ から，$\gamma=\dfrac{-1-\sqrt{11}}{2}$，$\delta=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$ とおく。

$-\sqrt{5}<\gamma<-2<\delta<\sqrt{5}$ となるので，$f(b)$ の増減は右表のようになる。

b	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	γ	$\cdots$	-2	$\cdots$	δ	$\cdots$	$\sqrt{5}$
$f'(b)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(b)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

さて，$f(\gamma)$ と $f(\delta)$ の大小を比べるために，$f(b)$ を $2b^2+2b-5$ で割ると，

$$f(b)=(2b^2+2b-5)\left(-\frac{1}{2}b^2-\frac{3}{2}b+\frac{3}{4}\right)+11b+\frac{95}{4}$$

これより，$f(\gamma)=11\gamma+\dfrac{95}{4}$，$f(\delta)=11\delta+\dfrac{95}{4}$ となり，$f(\gamma)<f(\delta)$

よって，$f(b)$ は $b=\delta$ で最大，すなわち S は $b=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{2}$ のとき最大となる。

コメント

計算量の非常に多い問題です。上の解答例では記述を省略しましたが，$f(b)$ を $2b^2+2b-5$ で割る計算は相当なものです。

問　題

n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1, a_2, …, a_{2n} に対して，分数の和 $\dfrac{a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{2n}}$ ……(＊)を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して(＊)がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) S_2 を求めよ。

(2) S_n を与える順列 a_1, a_2, …, a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。 [2017]

解答例

(1) 一般的に，$p_1>p_2>0$，$q_1>q_2>0$ のとき，

$$(p_1q_1+p_2q_2)-(p_1q_2+p_2q_1)=(p_1-p_2)(q_1-q_2)>0$$

よって，$p_1q_1+p_2q_2>p_1q_2+p_2q_1$ ………①

さて，$\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ より，$4>3>2>1$，$\dfrac{1}{1}>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$

すると，$\dfrac{a_1}{a_3}+\dfrac{a_2}{a_4}=a_1\cdot\dfrac{1}{a_3}+a_2\cdot\dfrac{1}{a_4}$ のとり得る値の最大値 S_2 は，①より，

$$S_2=\frac{4}{1}+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$$

(2) まず，$p_1>p_2>\cdots>p_n>0$，$q_1>q_2>\cdots>q_n>0$ とし，q_1, q_2, …, q_n を並べ替えた数列を x_1, x_2, …, x_n とおいたとき，$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$ の最大値が $p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n$ であることを示す。すなわち，

$$p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n\geqq p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n \text{ ………②}$$

(i) $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)$ のとき　②の等号が成り立つ。

(ii) $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\neq(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)$ のとき

$x_i<x_j$ $(1\leqq i<j\leqq n)$ となる x_i，x_j が存在し，この 2 数を交換すると，①より，

$$p_1x_1+\cdots+p_ix_j+\cdots+p_jx_i+\cdots+p_nx_n>p_1x_1+\cdots+p_ix_i+\cdots+p_jx_j+\cdots+p_nx_n$$

そして，$x_1>\cdots>x_j>\cdots>x_i>\cdots>x_n$ でなければ，$x_k<x_l$ $(1\leqq k<l\leqq n)$ となる x_k，x_l が存在するので，この 2 数を交換するという操作をくり返していくと，

$$p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n>p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$$

(i)(ii)より，不等式②は成立している。

さて，$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}\}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$ より，

$$2n>2n-1>\cdots>n+1>n>\cdots>2>1$$

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\cdots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\cdots>\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$$

すると，$\dfrac{a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{2n}}$ のとり得る値の最大値 S_n は，②より，

$$S_n=\frac{2n}{1}+\frac{2n-1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n}\ \cdots\cdots\cdots③$$

このとき，a_1，a_2，…，a_{2n} の 1 例は，

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ \cdots,\ a_{2n})=(2n,\ 2n-1,\ \cdots,\ n+1,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(3)　③より，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2n-(k-1)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{2n+1}{k}-1\Big)=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-n\ \cdots\cdots\cdots④$

ここで，k を自然数として，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき $\dfrac{1}{k+1}\leqq\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{k}$ が成り立ち，

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx,\ \ \frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\big[\log x\big]_1^{n+1}=\log(n+1)\ \cdots\cdots\cdots⑥$

また $n\geqq2$ のとき，⑤より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{n}\frac{1}{x}dx=\log n$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$\log(n+1)<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$ となり，④から，

$$(2n+1)\log(n+1)-n<S_n<(2n+1)(1+\log n)-n$$

$$\Big(2+\frac{1}{n}\Big)\frac{\log(n+1)}{\log n}-\frac{1}{\log n}<\frac{S_n}{n\log n}<\Big(2+\frac{1}{n}\Big)\Big(\frac{1}{\log n}+1\Big)-\frac{1}{\log n}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{\log(n+1)}{\log n}-1=\dfrac{1}{\log n}\cdot\log\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{\log n}\cdot\log\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\to0$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}\to1\quad(n\to\infty)$$

以上より，⑧から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}=2\cdot1-0=2$ となる。

コメント

数列と積分の融合問題ですが，ポイントはいわゆる「並べかえの不等式」です。これは，平たく言えば「積の和が最大になるのは大きいものどうしを掛けて足していったとき」ということだけですが。ただ，その記述方法は面倒です。また，(3)の⑥⑦式は，グラフを書いて面積を対応させた方がわかりやすいかもしれません。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1) p を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 $a,\ b$ を定めよ。

(2) $S(t)=\int_0^{t^2}e^{-x}\sin\dfrac{x}{t}\,dx\quad(t\neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。 [2010]

解答例

(1) $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ に対して，

$$f'(x)=-ae^{-x}\sin px+ape^{-x}\cos px-be^{-x}\cos px-bpe^{-x}\sin px$$
$$=-(a+bp)e^{-x}\sin px+(ap-b)e^{-x}\cos px$$

条件より，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ なので，

$$-(a+bp+1)e^{-x}\sin px+(ap-b)e^{-x}\cos px=0\cdots\cdots\cdots①$$

任意の x に対して，①が成立する条件を求める。

$x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2p}$ に対して成立することより，

$$ap-b=0\cdots\cdots\cdots②,\quad a+bp+1=0\cdots\cdots\cdots③$$

逆に，②③が成立するとき，任意の x に対して，明らかに①は成立する。

そこで，②より $b=ap$ となり，③に代入すると，$(1+p^2)a+1=0$

$$a=-\frac{1}{1+p^2},\quad b=-\frac{p}{1+p^2}$$

(2) (1)において，$p=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$a=-\dfrac{t^2}{t^2+1}$，$b=-\dfrac{t}{t^2+1}$ となり，

$$S(t)=\int_0^{t^2}e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx=\Big[-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-x}\sin\frac{x}{t}-\frac{t}{t^2+1}e^{-x}\cos\frac{x}{t}\Big]_0^{t^2}$$
$$=-\frac{t^2}{t^2+1}e^{-t^2}\sin t-\frac{t}{t^2+1}(e^{-t^2}\cos t-1)$$

(3) (2)から，$\dfrac{S(t)}{t^3}=-\dfrac{1}{t^2+1}e^{-t^2}\cdot\dfrac{\sin t}{t}-\dfrac{1}{t^2+1}\cdot\dfrac{e^{-t^2}\cos t-1}{t^2}$ となり，

$$\frac{e^{-t^2}\cos t-1}{t^2}=\frac{\cos t-e^{t^2}}{t^2e^{t^2}}=\frac{\cos t-1-(e^{t^2}-1)}{t^2e^{t^2}}=\frac{\cos t-1}{t^2e^{t^2}}-\frac{e^{t^2}-1}{t^2e^{t^2}}$$
$$=\frac{-\sin^2 t}{t^2e^{t^2}(\cos t+1)}-\frac{e^{t^2}-1}{t^2e^{t^2}}=-\Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\cdot\frac{1}{e^{t^2}(\cos t+1)}-\frac{e^{t^2}-1}{t^2}\cdot\frac{1}{e^{t^2}}$$
$$\to -1^2\cdot\frac{1}{2}-1\cdot 1=-\frac{3}{2}\quad(t\to 0)$$

よって，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}=-1-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$

コメント

見かけは，誘導つきの定積分の計算問題ですが，難所は極限の計算です。解き終えてみれば，1 を引いて 1 を足すだけの操作でしたが，この考えに至るまでには，試行錯誤が必要でした。

問　題

半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

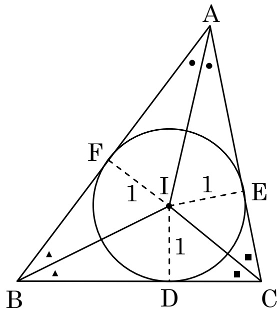
(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの $x,\ y$ を求めよ。　　[2017]

解答例

(1)　△ABC の半径 1 の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とおくと，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ から，

$$\mathrm{AF}=\mathrm{AE}=\frac{1}{\tan x},\quad \mathrm{BD}=\mathrm{BF}=\frac{1}{\tan y}$$

$$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}=\frac{1}{\tan z}$$



そこで，△ABC の内心を I，その面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABI}+\triangle\mathrm{BCI}+\triangle\mathrm{CAI}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}\Big)\cdot1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\Big)\cdot1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan z}+\frac{1}{\tan x}\Big)\cdot1\\&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\end{aligned}$$

(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$x+y=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ となり，(1)より，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\tan x}+\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}+\sqrt{3}$$

ここで，$t=\tan x$ とおくと，$0<x<\dfrac{\pi}{3}$ から $0<t<\sqrt{3}$ となり，

$$S=\frac{1}{t}+\frac{1+\sqrt{3}t}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}-\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}$$

$$\begin{aligned}S'&=-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(\sqrt{3}-t)^2}=\frac{3t^2+2\sqrt{3}t-3}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\\&=\frac{(3t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	

すると，S の増減は右表のようになり，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $3\sqrt{3}$ をとる。

このとき，$\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ から $x=\dfrac{\pi}{6}$ であり，$y=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

コメント

図形がらみの微分と増減に関する問題です。(2)では絶対不等式の利用も考えましたが，結局はオーソドックスな微分法ということに落ち着きました。

問　題

$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}\ (x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))\ (t>0)$ における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2) (1)で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $l_k : y=k(x-a)+f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3) (2)の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2017]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\ (x>0)$ に対し，$f'(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$

ここで，$C: y=f(x)$ ……①上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線 l は,

$$y-\left(1-\frac{3}{t}+\frac{2}{t^2}\right)=\left(\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}\right)(x-t),\ \ y=\left(\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}\right)x+1-\frac{6}{t}+\frac{6}{t^2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\left(\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}\right)x+1-\dfrac{6}{t}+\dfrac{6}{t^2}$ となり，

$$\left(\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}\right)x^3-\left(\frac{6}{t}-\frac{6}{t^2}\right)x^2+3x-2=0$$

左辺を因数分解して，$(x-t)^2\left\{\left(\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}\right)x-\dfrac{2}{t^2}\right\}=0\ \cdots\cdots\cdots③$

すると，③が $x=t$ 以外に正の解をもたない条件は,

(i) $\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}=0$ のとき　$t=\dfrac{4}{3}$ となり，③の解は $x=t$ のみである。

(ii) $\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}\neq 0$ のとき　$t\neq\dfrac{4}{3}$ となり，③の解は $x=t$ または $x=\dfrac{2t}{3t-4}$ である。

(ii-i) $\dfrac{2t}{3t-4}=t$ のとき　$t>0$ から $t=2$ となり，$t\neq\dfrac{4}{3}$ を満たす。

(ii-ii) $\dfrac{2t}{3t-4}\leqq 0$ のとき　$t>0$ より，$0<t<\dfrac{4}{3}$ となる。

(i)(ii)より，③が $x=t$ 以外に正の解をもたない条件は，$0<t\leqq\dfrac{4}{3}$，$t=2$ となる。

よって，l と C が点 P 以外に共有点をもたない t の最大値は $t=2$ である。

(2)　(1)より $a=2$ となり，$f(2)=0$ から直線 $l_k : y=k(x-2)$ ………④

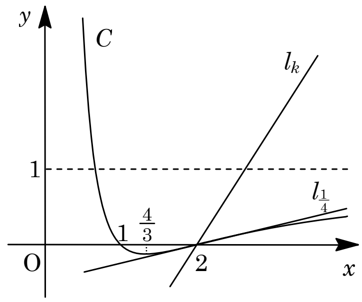
ここで，$f'(x)=\dfrac{3x-4}{x^3}$ となり，

$$f''(x)=-\frac{6}{x^3}+\frac{12}{x^4}$$
$$=-\frac{6(x-2)}{x^4}$$

すると，$f(x)$ の増減および曲線 $C : y=f(x)$ の凹凸は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$\times$	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\times$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	0	↗

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ より，C の概形は右図のようになる。



よって，l_k と C の共有点の個数は，$f'(2)=\dfrac{1}{4}$ に注意すると，$k\geqq\dfrac{1}{4}$ のとき 1 個，$0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき 3 個，$k\leqq 0$ のとき 2 個である。

(3)　l_k と C の共有点が 2 個のとき，(2)から $k\leqq 0$ である。

そして，共有点の x 座標は①④を連立して，$\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}=k(x-2)$ から，

$$(x-2)\Big(\frac{x-1}{x^2}-k\Big)=0 \text{ ………⑤}$$

⑤の $x\neq 2$ の解が $x=\dfrac{1}{3}$ なので，$k=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{1}=-6$ となり，$k\leqq 0$ を満たす。

このとき，C と l_k で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{2}\Big\{-6(x-2)-\Big(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\Big)\Big\}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{2}\Big(11-6x+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)dx$$
$$=\Big[11x-3x^2+3\log x+\frac{2}{x}\Big]_{\frac{1}{3}}^{2}=11\cdot\frac{5}{3}-3\cdot\frac{35}{9}+3\log 6-2\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{3}+3\log 6$$

コメント

微積分の総合問題です。かなりの計算量があります。(1)の $t=2$ の場合は接線が C の変曲点を通る場合です。なお，(2)ではグラフ処理をして結論を導いていますが，方程式の解の個数を調べても構いません。

問　題

a を正の定数とする。条件 $\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$，$0<\theta<\pi$ を満たす θ について，以下の問いに答えよ。

(1) 条件を満たす θ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ1つ存在することを示せ。

(2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。 [2014]

解答例

(1) $\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta\ \ (a>0)\cdots\cdots(*)$に対して，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$a=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}$$

ここで，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと，$f'(\theta)=-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}<0$

これより，$f(\theta)$ は単調減少し，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(\theta)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(\theta)=-\infty$ より，$a=f(\theta)$ すなわち$(*)$を満たす θ は，ただ1つ存在する。

(2) まず，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき$(*)$は成立しない。次に，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ において，

$$f'(\theta)=-\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta\cos\theta-1)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)(\sin2\theta-2)}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

また，$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f(\theta)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(\theta)=\infty$ である。

したがって，$0<\theta<\pi$ における$(*)$を満たす θ の個数は，(1)の結果も合わせると，$0<a<2\sqrt{2}$ のとき1個，$a=2\sqrt{2}$ のとき2個，$a>2\sqrt{2}$ のとき3個である。

コメント

定数を分離した後，その定数の値に応じた解の個数を，グラフをイメージしながら求めていくという微分の応用についての典型題です。

問　題

半径 1，中心角 θ $(0<\theta<\pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

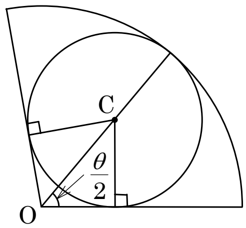
(1)　$f(\theta)$ を求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta$ を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　右図において，$\mathrm{OC}=1-f(\theta)$ より，



$$\{1-f(\theta)\}\sin\frac{\theta}{2}=f(\theta)\,,\ \left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)f(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}$$

$0<\theta<\pi$ から，$f(\theta)=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

(2)　$\varphi=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$f(\theta)=g(\varphi)=\dfrac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$ とすると，

$$f'(\theta)=g'(\varphi)\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{1}{2}g'(\varphi)\cdots\cdots①,\ f''(\theta)=\frac{1}{2}g''(\varphi)\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{1}{4}g''(\varphi)\cdots\cdots②$$

$$g'(\varphi)=\frac{\cos\varphi(1+\sin\varphi)-\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}=\frac{\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}>0$$

すると，①より $f'(\theta)>0$ となり，$f(\theta)$ は単調に増加する。

$$g''(\varphi)=\frac{-\sin\varphi(1+\sin\varphi)^2-\cos\varphi\cdot 2(1+\sin\varphi)\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^4}$$

$$=\frac{-\sin\varphi(1+\sin\varphi)-2(1-\sin^2\varphi)}{(1+\sin\varphi)^3}=\frac{\sin\varphi-2}{(1+\sin\varphi)^2}<0$$

すると，②より $f''(\theta)<0$ となり，$f'(\theta)$ は単調に減少する。

(3)　$\varphi=\dfrac{\theta}{2}$ とおき，$I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} g(\varphi)2d\varphi$ とすると，

$$I=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}d\varphi=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi(1-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\varphi\, d\varphi=2\Big[\frac{1}{\cos\varphi}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)d\varphi$$

$$=2\left(\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-2\Big[\tan\varphi-\varphi\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}-\frac{4}{\sqrt{3}}-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}$$

コメント

微分と積分の基本的な計算問題です。

問　題

関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}\ \ (x \geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極大値を求めよ。

(2)　$-3 \leqq x \leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

[2018]

解答例

(1)　関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}=|x|\sqrt{x+3}\ \ (x \geqq -3)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6x+3x^2}{\sqrt{3x^2+x^3}}=\frac{3x(x+2)}{2|x|\sqrt{x+3}}$$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
$f(x)$	0	↗	2	↘	0	↗

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $f(-2)=2$ である。

(2)　$-3 \leqq x \leqq 0$ のとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt=\int_x^{x+3}|t|\sqrt{t+3}\,dt$ ……(*)に対して，

$$F'(x)=|x+3|\sqrt{x+6}-|x|\sqrt{x+3}=(x+3)\sqrt{x+6}+x\sqrt{x+3}$$
$$=\frac{(x+3)^2(x+6)-x^2(x+3)}{(x+3)\sqrt{x+6}-x\sqrt{x+3}}=\frac{(x+3)(x^2+9x+18-x^2)}{(x+3)\sqrt{x+6}-x\sqrt{x+3}}$$
$$=\frac{9(x+3)(x+2)}{(x+3)\sqrt{x+6}-x\sqrt{x+3}}$$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘		↗	

$F(x)$ の増減は右表のようになり，以下，$F(-3)$，$F(-2)$，$F(0)$ の値を求める。

さて，(*)から，$F(x)=\displaystyle\int_x^0 -t\sqrt{t+3}\,dt+\int_0^{x+3} t\sqrt{t+3}\,dt$

ここで，$u=\sqrt{t+3}$ とおくと，$t=u^2-3$ となり，$dt=2u\,du$ から，

$$F(x)=\int_{\sqrt{x+3}}^{\sqrt{3}} -(u^2-3)u\cdot 2u\,du+\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{x+6}}(u^2-3)u\cdot 2u\,du$$
$$=-\int_{\sqrt{x+3}}^{\sqrt{3}}(2u^4-6u^2)\,du+\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{x+6}}(2u^4-6u^2)\,du$$
$$=-\Big[\frac{2}{5}u^5-2u^3\Big]_{\sqrt{x+3}}^{\sqrt{3}}+\Big[\frac{2}{5}u^5-2u^3\Big]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{x+6}}$$
$$=-\frac{2}{5}\{9\sqrt{3}-(x+3)^2\sqrt{x+3}\}+2\{3\sqrt{3}-(x+3)\sqrt{x+3}\}$$
$$+\frac{2}{5}\{(x+6)^2\sqrt{x+6}-9\sqrt{3}\}-2\{(x+6)\sqrt{x+6}-3\sqrt{3}\}$$
$$=\frac{24}{5}\sqrt{3}+\frac{2}{5}(x-2)(x+3)\sqrt{x+3}+\frac{2}{5}(x+1)(x+6)\sqrt{x+6}$$

これより，$F(-3)=\dfrac{12}{5}\sqrt{3}$，$F(-2)=\dfrac{24}{5}\sqrt{3}-\dfrac{24}{5}$，$F(0)=\dfrac{12}{5}\sqrt{3}+\dfrac{12}{5}\sqrt{6}$

よって，$F(x)$の最大値は$\dfrac{12}{5}\sqrt{3}+\dfrac{12}{5}\sqrt{6}$，最小値は$\dfrac{24}{5}\sqrt{3}-\dfrac{24}{5}$である。

コメント

定積分の計算問題ですが，内容は基本的ですが，計算がやや難です。$F(x)$を求める際に，置換の代わりに被積分関数を変形しても構いません。同じことですが。

問　題

r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を$r$を用いて表せ。

(4) (3)で求めたrの式を$f(r)$とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)$を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$に対し，$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$で$\sin x$の符号は不変なので，

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|dx=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\sin x\,dx\right|$$

ここで，$(e^{-rx}\sin x)'=-re^{-rx}\sin x+e^{-rx}\cos x$ ………①

$(e^{-rx}\cos x)'=-re^{-rx}\cos x-e^{-rx}\sin x$ ………②

①×r＋②より，$-(r^2+1)e^{-rx}\sin x=\left\{e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\right\}'$となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left|-\frac{1}{r^2+1}\Big[e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-(n+1)\pi r}\cos(n+1)\pi-e^{-n\pi r}\cos n\pi\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-n\pi r}e^{-\pi r}(-1)^{n+1}-e^{-n\pi r}(-1)^n\right|$$
$$=\frac{e^{-n\pi r}|(-1)^n|}{r^2+1}\left|-e^{-\pi r}-1\right|=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}e^{-n\pi r}$$

(2) (1)より，$a_1=\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-rx}|\sin x|dx=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}$となり，$n\geqq2$で，

$$a_n=a_1+\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi r}=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\left\{1+\frac{e^{-\pi r}(1-e^{-(n-1)\pi r})}{1-e^{-\pi r}}\right\}$$
$$=\frac{(1+e^{-\pi r})(1-e^{-n\pi r})}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$$

なお，この式は$n=1$のときも成立している。

(3) $r>0$から，$n\to\infty$のとき$e^{-n\pi r}\to0$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$

(4)　$f(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$ より，$rf(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{r^2+1}\cdot\dfrac{r}{1-e^{-\pi r}}$

ここで，$g(r)=e^{-\pi r}$ とおくと，$g'(r)=-\pi e^{-\pi r}$ となり，

$$\lim_{r\to+0}\frac{1-e^{-\pi r}}{r}=-\lim_{r\to+0}\frac{g(r)-g(0)}{r}=-g'(0)=\pi$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{1}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ である。

コメント

定積分と数列を融合した超頻出の有名問題です。このタイプの部分積分は計算ミスを犯しやすいので，いつも①②のような式を先に立式しています。

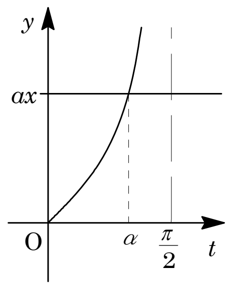
問　題

正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t-ax\cos t|\,dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。　[2012]

解答例



(1) $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t-ax\cos t|\,dt$ に対して，$0\leqq t<\frac{\pi}{2}$ では，$\sin t-ax\cos t=\cos t(\tan t-ax)$ と変形すると，$a>0$ より $x>0$ のとき $\sin\alpha-ax\cos\alpha=0$ となる α が $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ に 1 つ存在する。なお，$t=\frac{\pi}{2}$ では，$\sin t-ax\cos t=1>0$ である。

(i) $x>0$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\alpha}-(\sin t-ax\cos t)\,dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-ax\cos t)\,dt$$
$$=\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_0^{\alpha}-\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\cos\alpha+ax\sin\alpha-1-ax+\cos\alpha+ax\sin\alpha$$
$$=2ax\sin\alpha+2\cos\alpha-ax-1$$

ここで，$\sin\alpha=ax\cos\alpha$ より，$(ax\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$ より，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2x^2+1}},\quad \sin\alpha=\frac{ax}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

よって，$f(x)=\frac{2a^2x^2}{\sqrt{a^2x^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{a^2x^2+1}}-ax-1=2\sqrt{a^2x^2+1}-ax-1$

(ii) $x\leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-ax\cos t)\,dt=-\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-ax+1$$

(2) $x\leqq 0$ のときは $f'(x)=-a<0$ から $f(x)$ は単調に減少し，$x>0$ のとき，

$$f'(x)=\frac{4a^2x}{2\sqrt{a^2x^2+1}}-a$$
$$=\frac{a\left(2ax-\sqrt{a^2x^2+1}\right)}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$
$$=\frac{a\left(3a^2x^2-1\right)}{\sqrt{a^2x^2+1}\left(2ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right)}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$

すると，$f(x)$ は増減が右上表のようになり，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}a}$ で最小となる。最小値は，

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}a}\Big)=2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{3a^2}+1}-a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}a}-1=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\sqrt{3}-1$$

コメント

絶対値付きの関数を積分する標準的な問題ですが，計算力が必要です。

問　題

関数 $f(x)=\int_{x}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(0)$ の値を求めよ。

(3)　条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$f(x)=\int_{x}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$に対して，

$$f'(x)=-\log_4\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)-\log_4(1+\tan x)$$

ここで，$1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{2}{1+\tan x}$ より，

$$f'(x)=-\log_4\frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\tan x)=-\log_4\frac{2(1+\tan x)}{1+\tan x}=-\log_4 2$$

$$=-\log_4 4^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(2)　(1)より, C を定数として，$f(x)=-\frac{1}{2}x+C$

さて，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt=0$ より，$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}+C=0$ となり $C=\frac{\pi}{16}$ から，

$$f(0)=C=\frac{\pi}{16}$$

(3)　$a_1=f(0)=\frac{\pi}{16}$，$a_{n+1}=f(a_n)=-\frac{1}{2}a_n+\frac{\pi}{16}$ より，

$$a_{n+1}-\frac{\pi}{24}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{\pi}{24}\right)$$

これより，$a_n-\frac{\pi}{24}=\left(\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{24}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$a_n=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

コメント

底が 4 の対数というのは，見た目と異なり配慮の結果でした。なお，(2)の出来がポイントですが，運・不運が反映します。他学部では，この設問に誘導がついていますので，出題者は上の解法を想定したものと思われます。

問　題

$x \geqq 1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3)　(2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016]

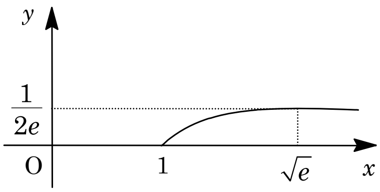
解答例

(1)　$x \geqq 1$ のとき，$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}x^2-2x\log x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

すると，$f'(x)=0$ の解は $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ であるので，$f(x)$ は増減が右表のようになり，$x=\sqrt{e}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$

(2)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=\sqrt{e}$ で囲まれた図形 D の面積を S とおくと，



$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}dx$$

ここで，$t=\log x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$ となり，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}te^{-t}dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-\Big[e^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{2\sqrt{e}}+1$$

(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\int_1^{\sqrt{e}}2\pi x\cdot\frac{\log x}{x^2}dx=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x}dx=2\pi\Big[\frac{1}{2}(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}}=\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{\pi}{4}$$

コメント

面積および体積に関する計算問題です。被積分関数は頻出タイプです。なお，(3)の解答例は円筒分割によるものです。

問　題

a, b を実数とし，曲線 $C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値を求めよ。　[2016]

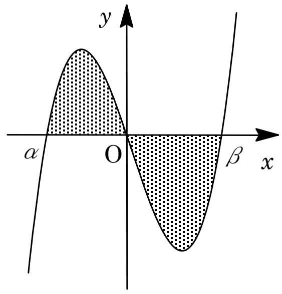
解答例

(1)　$C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ に対して，$y' = 3x^2 - 6ax + b = 3(x-a)^2 - 3a^2 + b$

ここで，C の接線の傾きの最小値が -3 なので，

$-3a^2 + b = -3$，$b = 3a^2 - 3$ ………①

(2)　$C: y = x(x^2 - 3ax + b)$ が，x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるので，方程式 $x^2 - 3ax + b = 0$ ……② は正の解と負の解を 1 つずつもつ。



この解を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < 0 < \beta)$ とおくと，条件は $\alpha\beta < 0$ すなわち $b < 0$ となり，①より，

$3a^2 - 3 < 0$，$(a+1)(a-1) < 0$，$-1 < a < 1$

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_\alpha^0 (x^3 - 3ax^2 + bx)\,dx + \int_0^\beta -(x^3 - 3ax^2 + bx)\,dx$$

$$= \Big[\frac{x^4}{4} - ax^3 + \frac{b}{2}x^2\Big]_\alpha^0 - \Big[\frac{x^4}{4} - ax^3 + \frac{b}{2}x^2\Big]_0^\beta$$

$$= -\frac{\alpha^4}{4} + a\alpha^3 - \frac{b}{2}\alpha^2 - \frac{\beta^4}{4} + a\beta^3 - \frac{b}{2}\beta^2$$

$$= -\frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) + a(\alpha^3 + \beta^3) - \frac{b}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \text{………③}$$

ここで，①②より，$\alpha + \beta = 3a$，$\alpha\beta = b = 3a^2 - 3$ であるので，

$\alpha^2 + \beta^2 = (3a)^2 - 2(3a^2 - 3) = 3a^2 + 6$

$\alpha^3 + \beta^3 = (3a)^3 - 3(3a^2 - 3)\cdot 3a = 27a$

$\alpha^4 + \beta^4 = (3a^2 + 6)^2 - 2(3a^2 - 3)^2 = 9(-a^4 + 8a^2 + 2)$

すると，③に代入して，

$$S = -\frac{9}{4}(-a^4 + 8a^2 + 2) + a\cdot 27a - \frac{3a^2 - 3}{2}(3a^2 + 6) = -\frac{9}{4}(a^4 - 2a^2 - 2)$$

$$= -\frac{9}{4}\{(a^2 - 1)^2 - 3\} = -\frac{9}{4}(a^2 - 1)^2 + \frac{27}{4}$$

よって，$-1<a<1$ より $0 \leqq a^2<1$ なので，$a^2=0$ すなわち $a=0$ のとき，S は最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。

コメント

3 次曲線を対象とした頻出題です。積分計算も，難しくはありません。

問　題

a を $a>2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=a$ の交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

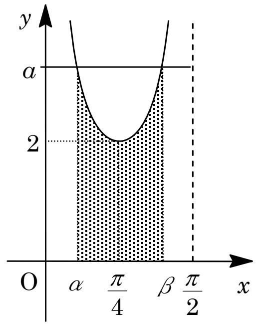
(2)　C と x 軸, および 2 直線 $x=\alpha$, $x=\beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

(3)　S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。　[2014]

解答例

(1)　$C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=a$ を連立して,

$$a=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x},\quad a=\tan x+\frac{1}{\tan x}$$



すると, $\tan^2 x-a\tan x+1=0$ となり,

$$\tan x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$$

$\alpha<\beta$ から, $\tan\alpha=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, $\tan\beta=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

(2)　C と x 軸, および 2 直線 $x=\alpha$, $x=\beta$ で囲まれた領域 S の面積を T とすると,

$$T=\int_\alpha^\beta\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)dx=\int_\alpha^\beta\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$$

$$=\Big[-\log|\cos x|+\log|\sin x|\Big]_\alpha^\beta=\Big[\log|\tan x|\Big]_\alpha^\beta=\log\left|\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right|$$

$$=\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}}\right|=\log\frac{\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2}{4}=2\log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$$

(3)　S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V は,

$$V=\pi\int_\alpha^\beta\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2dx=\pi\int_\alpha^\beta\left(\tan^2 x+2+\frac{1}{\tan^2 x}\right)dx$$

$$=\pi\int_\alpha^\beta\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1+2+\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\pi\int_\alpha^\beta\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$=\pi\Big[\tan x-\frac{1}{\tan x}\Big]_\alpha^\beta=\pi(\tan\beta-\tan\alpha)-\pi\left(\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan\alpha}\right)$$

$$=\pi\sqrt{a^2-4}-\pi\left(\frac{2}{a+\sqrt{a^2-4}}-\frac{2}{a-\sqrt{a^2-4}}\right)$$

$$=\pi\sqrt{a^2-4}-\pi\frac{-4\sqrt{a^2-4}}{a^2-(a^2-4)}=2\pi\sqrt{a^2-4}$$

コメント

(1)のポイントとなっている式変形には，いろいろな方法がありますが，解答例では $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ を利用しています。また，(2)と(3)は，三角関数の定積分の計算力が問われています。なお，C の概形については，$y=\dfrac{2}{\sin 2x}$ と変形して描いています。

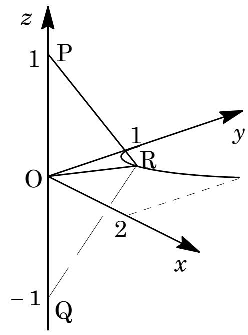
問　題

xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。　[2011]

解答例



(1) まず，$\triangle$PQR の xy 平面での切り口は，線分 OR である。すると，立体 K を xy 平面で切ったときの断面は，線分 OR の通過領域として求められる。

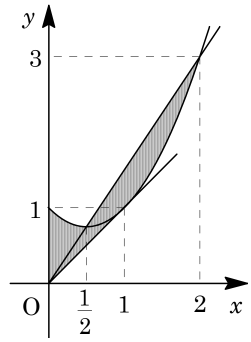
さて，$0 \leqq t \leqq 2$ のとき，点 $\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ は，xy 平面上で放物線 $y = x^2 - x + 1\ (0 \leqq x \leqq 2)$ ……①を描く。

以下，xy 平面上で考えると，①から，$y' = 2x - 1$ となり，点 $(a,\ a^2-a+1)$ における接線の方程式は，

$$y - (a^2 - a + 1) = (2a-1)(x-a) \cdots\cdots\cdots ②$$

原点を通るとき，$-(a^2-a+1) = -a(2a-1)$，$a^2 - 1 = 0$

$0 \leqq a \leqq 2$ から $a = 1$ であり，このとき②は，$y = x$ となる。



さらに，$t = 2$ のとき $\mathrm{R}(2,\ 3)$ で，直線 $\mathrm{OR} : y = \dfrac{3}{2}x$ と放物線①との交点は，$x^2 - x + 1 = \dfrac{3}{2}x$ より，

$$2x^2 - 5x + 2 = 0,\quad x = \frac{1}{2},\ 2$$

以上より，線分 OR の通過領域は，右図の網点部となり，その面積を S_0 とすると，

$$S_0 = \int_0^1 (x^2 - x + 1)\,dx - \frac{1}{2} \times 1^2 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{ \frac{3}{2}x - (x^2 - x + 1) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 - \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^2 -\left(x - \frac{1}{2} \right)(x-2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{43}{48}$$

(2) まず，立体 K を z 軸に垂直な平面で切ったときの断面は，K を xy 平面で切ったときの断面と相似である。

そこで，$0 \leqq k \leqq 1$ のとき，K を平面 $z = k$ で切ったときの断面積を S_k とおくと，相似比が $1-k : 1$ であることから，$S_k : S_0 = (1-k)^2 : 1$ となり，

$$S_k = (1-k)^2 S_0 = \frac{43}{48}(1-k)^2$$

立体 K は xy 平面について対称なので，その体積 V は，

$$V = 2\int_0^1 S_k\,dk = \frac{43}{24}\int_0^1 (k-1)^2\,dk = \frac{43}{72}\Big[\,(k-1)^3\Big]_0^1 = \frac{43}{72}$$

コメント

設問(1)の定点通過する線分 OR の通過領域は，図形的に解いています。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆