《2019 入試対策》

京都大学

文系数学

1998―2018

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された京都大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

なお，映像解説の一覧は，下記のページに掲載しています。

PC サイト トップページ ≫ 京大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。

「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分野別問題一覧 …………………………………………………………………… 3

分野別問題と解答例 ………………………………………………………………… 21

関　数 ……………………………………………………………………………… 22

微分と積分 ………………………………………………………………………… 39

図形と式 …………………………………………………………………………… 59

図形と計量 ………………………………………………………………………… 63

ベクトル …………………………………………………………………………… 74

整数と数列 ………………………………………………………………………… 95

確　率 ……………………………………………………………………………… 119

論　証 ……………………………………………………………………………… 139

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ)　方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。　[2016]

2　$0° \leqq \theta < 90°$ とする。x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも 1 つもつことを示せ。　[2014]

3　a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。　[2013]

4　実数 $x,\ y$ が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。　[2012]

5　次の条件(＊)を満たす正の実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

(＊)　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど 1 つある。　[2012]

6　$x,\ y$ は $x\neq1$，$y\neq1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

[2009]

7　定数 a は実数であるとする。方程式 $(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ を満たす実数 x はいくつあるか。a の値によって分類せよ。　[2008]

8　$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3x+\cos^3x)+3\sin x\cos x=0$ を満たす x の個数を求めよ。　[2008]

9　放物線$C: y=x^2$と 2 直線$l_1: y=px-1$，$l_2: y=-x-p+4$は 1 点で交わるという。このとき，実数pの値を求めよ。　[2006]

10　xy 平面上の原点と点$(1,\ 2)$を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線$y=x^2+ax+b$が L と共有点をもつような実数の組$(a,\ b)$の集合を ab 平面上に図示せよ。　[2005]

11　$2^{10}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301<\log_{10}2<0.3011$である。　[2005]

12　$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$とする。$0°\leqq\theta\leqq 90°$における$f(\theta)$の最大値および最小値を求めよ。　[2004]

13　$0\leqq\theta<360$とし, aは定数とする。$\cos 3\theta°-\cos 2\theta°+3\cos\theta°-1=a$を満たす$\theta$の値はいくつあるか。$a$の値によって分類せよ。　[2002]

14　a, bは実数で$a\neq b$，$ab\neq 0$とする。このとき不等式

$$\frac{x-b}{x+a}-\frac{x-a}{x+b}>\frac{x+a}{x-b}-\frac{x+b}{x-a}$$

を満たす実数xの範囲を求めよ。　[1998]

■ 微分と積分

1　aは正の実数とし，座標平面内の点$(x_0,\ y_0)$は 2 つの曲線

$$C_1: y=|x^2-1|,\quad C_2: y=x^2-2ax+2$$

の共有点であり，$|x_0|\neq 1$を満たすとする。C_1とC_2が$(x_0,\ y_0)$で共通の接線をもつとき，C_1とC_2で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2018]

2　1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P をとり，線分 AP の垂直二等分線が辺 AB, 辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q, R とする。

(1)　線分 QR の長さを$\sin\angle \mathrm{BAP}$を用いて表せ。

(2)　点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ。　[2018]

3　曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする。直線 l は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする。また，l の傾きは負であるとする。このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2017]

4　xy 平面内の領域 $x^2+y^2\leqq 2$，$|x|\leqq 1$ で，曲線 $C: y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ。　[2016]

5　t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く。

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2014]

6　α，β を実数とする。xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線

$$y=-\frac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$$

が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　α，β の値を求めよ。

(2)　円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2013]

7　2 つの曲線 $y=x^4$ と $y=x^2+2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2012]

8　実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか。a の値によって分類せよ。　[2011]

9　xy 平面上で，連立不等式 $|x|\leqq 2$，$y\geqq x$，$y\leqq\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ を満たす領域の面積を求めよ。　[2011]

10　座標平面上で，点 $(1,\ 2)$ を通り傾き a の直線と放物線 $y=x^2$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。a が $0\leqq a\leqq 6$ の範囲を変化するとき，$S(a)$ を最小にするような a の値を求めよ。　[2010]

11 座標空間内で，O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0)，D(0, 0, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 1)，G(0, 1, 1)を頂点にもつ立方体を考える。

(1) 頂点 A から対角線 OF に下ろした垂線の長さを求めよ。

(2) この立方体を対角線 OF を軸にして回転して得られる回転体の体積を求めよ。

[2010]

12 整式$f(x)$と実数Cが

$$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

を満たすとき，この$f(x)$とCを求めよ。 [2009]

13 実数$a,\ b,\ c$に対して$f(x)=ax^2+bx+c$とする。このとき

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2dx \leqq 6\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2dx$$

であることを示せ。 [2008]

14 3 次関数$y=x^3-2x^2-x+2$のグラフ上の点$(1,\ 0)$における接線をlとする。この 3 次関数のグラフと接線lで囲まれた部分をx軸のまわりに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。 [2007]

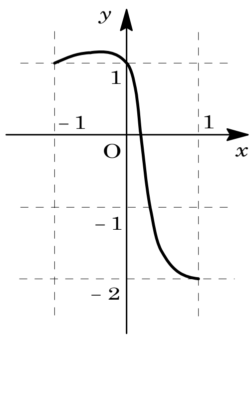
15 関数$y=f(x)$のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの$x \leqq 0$の部分は，軸がy軸に平行で，点$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき$x=-1$におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2006]

16 区間$-1 \leqq x \leqq 1$で定義された関数$f(x)$が，

$$f(-1)=f(0)=1,\quad f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx \geqq -1$を示せ。



[2004]

17　xy 平面上で，放物線 $C: y = x^2 + x$ と，直線 $l: y = kx + k - 1$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。

(2)　放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P，Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。k が(1)で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。　[2003]

18　a を実数とする。x の 2 次方程式 $x^2 - ax = 2\int_0^1 |t^2 - at|\,dt$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。　[2000]

19　xy 平面上で放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$（$a < b$）をとり，線分 AB と放物線で囲まれた図形の面積を s とする。点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を放物線上にとり，三角形 ABP の面積を $S(\mathrm{P})$ とする。t が $a < t < b$ の範囲を動くときの $S(\mathrm{P})$ の最大値を S とするとき，s と S の比を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　直線 $y = px + q$ が，$y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが，$y = |x| + |x-1| + 1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2015]

2　座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $4x + y \leqq 9$，$x + 2y \geqq 4$，$2x - 3y \geqq -6$ の範囲を動くとき，$2x + y$，$x^2 + y^2$ のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。　[2010]

3　xy 平面内の $-1 \leqq y \leqq 1$ で定められる領域 D と，中心が P で原点 O を通る円 C を考える。C が D に含まれるという条件のもとで，P が動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2001]

4　放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P，Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき，PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。　[1999]

■ 図形と計量

1　次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。　[2015]

2　辺 AB，辺 BC，辺 CA の長さがそれぞれ 12，11，10 の三角形 ABC を考える。$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。　[2011]

3　$\triangle ABC$ において $AB=2$，$AC=1$ とする。$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。$AD=BD$ となるとき，$\triangle ABC$ の面積を求めよ。　[2010]

4　点 O を中心とする正十角形において，A，B を隣接する 2 つの頂点とする。線分 OB 上に $OP^2=OB\cdot PB$ を満たす点 P をとるとき，$OP=AB$ が成立することを示せ。

[2010]

5　平面上で，鋭角三角形 $\triangle OAB$ を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を $\triangle OBC$，$\triangle OBC$ を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を $\triangle OCD$，$\triangle OCD$ を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を $\triangle ODE$ とする。$\triangle OAB$ と $\triangle OBE$ の面積比が $2:3$ のとき，$\sin\angle AOB$ の値を求めよ。　[2009]

6　$AB=AC$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を，$AN:NB=2:1$ となるようにとる。このとき $\angle BCM=\angle BCN$ となることを示せ。ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする。

[2008]

7　三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。この三角形 ABC は次の条件(イ), (ロ), (ハ)を満たすとする。

(イ)　ともに 2 以上である自然数 p と q が存在して，$a = p+q$，$b = pq+p$，$c = pq+1$ となる。

(ロ)　自然数 n が存在して a, b, c のいずれかは 2^n である。

(ハ)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C のいずれかは $60°$ である。

このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C を大きさの順に並べよ。

(2)　a, b, c を求めよ。　[2000]

8　鋭角三角形△ABC において，辺 BC の中点を M，A から BC にひいた垂線を AH とする。点 P を線分 MH 上にとるとき，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 \geqq 2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

となることを示せ。　[1999]

9　直角三角形に半径 r の円が内接していて，三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　この三角形の斜辺の長さを r で表せ。

(2)　r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき，この三角形の面積の最大値を求めよ。　[1998]

10　一辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 BC 上に点 P をとり，線分 BP の長さを x とする。

(1)　三角形 OAP の面積を x で表せ。

(2)　P が辺 BC 上を動くとき三角形 OAP の面積の最小値を求めよ。　[1998]

■ ベクトル

1　四面体 ABCD は AC＝BD，AD＝BC を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1)　辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2)　線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。　[2018]

2　座標空間において原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P, Q と，m 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき，△PQR の面積が最小となるような P, Q, R の座標を求めよ。 [2017]

3　四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016]

4　xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 P$(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。 [2015]

5　座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 A$(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 B$(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 C$(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

[2014]

6　平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}$ を求めよ。 [2013]

7　正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。[2012]

8 四面体OABCにおいて，点Oから3点A, B, Cを含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする。$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$，$|\overrightarrow{OA}| = 2$，$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 3$，$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{OH}|$ を求めよ。 [2011]

9 xyz 空間上の 2 点 $A(-3,\ -1,\ 1)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線 l に点 $C(2,\ 3,\ 3)$ から下ろした垂線の足Hの座標を求めよ。 [2009]

10 座標空間で点$(3,\ 4,\ 0)$を通りベクトル$\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$に平行な直線を l，点$(2,\ -1,\ 0)$を通りベクトル$\vec{b} = (1,\ -2,\ 0)$に平行な直線を m とする。点 P は直線 l 上を，点Qは直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき，線分PQの長さの最小値を求めよ。 [2007]

11 座標空間上に 4 点$A(2,\ 1,\ 0)$，$B(1,\ 0,\ 1)$，$C(0,\ 1,\ 2)$，$D(1,\ 3,\ 7)$がある。3点A, B, Cを通る平面に関して点Dと対称な点をEとするとき，点Eの座標を求めよ。 [2006]

12 △OAB において，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする。$|\vec{a}| = 3$，$|\vec{b}| = 5$，$\cos(\angle AOB) = \dfrac{3}{5}$とする。このとき，$\angle AOB$の二等分線と，B を中心とする半径$\sqrt{10}$の円との交点の, Oを原点とする位置ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。 [2004]

13 四面体OABCは次の2つの条件

(i)　$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$

(ii)　4つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。 [2003]

14 四角形ABCDを底面とする四角錐OABCDは$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$を満たしており, 0と異なる4つの実数$p, q, r, s$に対して4点P, Q, R, Sを

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OD}$$

によって定める。このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{s}$が成立することを示せ。 [2002]

15 xy 平面内の相異なる 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。 [2001]

16 円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$, p を用いて表せ。 [2000]

17 $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(\cos 60^\circ,\ \sin 60^\circ,\ 0)$ とする。

(1)　長さ 1 の空間ベクトル $\vec{c}$ に対し，$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$ とおく。このとき次の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

$$(＊)\quad \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta \leqq \frac{3}{4}$$

(2)　不等式(＊)を満たす $(\alpha,\ \beta)$ $(0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ,\ 0^\circ \leqq \beta \leqq 180^\circ)$ の範囲を図示せよ。

[2000]

■ 整数と数列

1 n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ。 [2018]

2 次の問いに答えよ。ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい。

(1)　100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

(2)　100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。 [2017]

3 p, q を自然数，α，β を，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　次の条件 (A) $\tan(\alpha+2\beta)=2$ を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ のうち，$q \leqq 3$ であるものをすべて求めよ。

(2)　条件(A)を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ で，$q>3$ であるものは存在しないことを示せ。

[2017]

4　n を 4 以上の自然数とする。数 2, 12, 1331 がすべて n 進法で表記されているとして，$2^{12}=1331$ が成り立っている。このとき n はいくつか。十進法で答えよ。

[2016]

5　次の式 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　次の不等式 $a_n{}^2-2a_n>10^{15}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい。　[2014]

6　n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1)　a と b は整数であることを示せ。

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。　[2013]

7　0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ。ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする。また n は正の整数とする。

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を T_n とする。T_n を n を用いて表せ。

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を S_n とする。S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか。必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$ および $0.477<\log_{10}3<0.478$ を用いてもよい。　[2011]

8　p を素数, n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。　[2009]

9　p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\quad ad-bc+p=0,\quad a\geqq b\geqq c\geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。　[2007]

10　$a^3-b^3=65$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2005]

11　n, a, b を 0 以上の整数とする。a, b を未知数とする方程式

$$(*)\quad a^2+b^2=2^n$$

を考える。

(1)　$n \geqq 2$ とする。a, b が方程式$(*)$を満たすならば，a, b はともに偶数であることを証明せよ。（ただし, 0 は偶数に含める。）

(2)　0 以上の整数 n に対して，方程式$(*)$を満たす 0 以上の整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。 [2004]

12　$\dfrac{23}{111}$ を$0.a_1a_2a_3a_4\cdots$のように小数で表す。すなわち小数第 k 位の数をa_kとする。このとき$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$を求めよ。 [2003]

13　p は 3 以上の素数であり，$x,\ y$ は $0 \leqq x \leqq p,\ 0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x=y$ であることを示せ。 [2003]

14　数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が$a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n\ (n \geqq 1)$を満たすとき，一般項$a_n$を求めよ。 [2002]

15　$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式$f(x)=0$の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。 [2002]

16　4 個の整数 1, $a,\ b,\ c$ は$1<a<b<c$を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$から$b+c$までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。 [2002]

17　任意の整数 n に対し，n^9-n^3は 9 で割り切れることを示せ。 [2001]

18　n を 2 以上の整数とする。実数$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$に対し，$S=a_1+a_2+\cdots+a_n$とおく。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$について，不等式$-1<S-a_k<1$が成り立っているとする。

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$のとき，すべての k について$|a_k|<2$が成り立つことを示せ。

[2001]

19 実数 x_1，…，x_n $(n \geqq 3)$ が条件 $x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} > 0$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ を満たすとし，x_1，…，x_n の最小値を m とする。このとき，$x_l = m$ となる $l(1 \leqq l \leqq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ。 [2000]

20 0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする。たとえば，$C(12578) = 78$，$C(6) = 6$ である。n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

(1) x, y が 0 以上の整数のとき，$C(nx) = C(ny)$ ならば，$C(x) = C(y)$ であることを示せ。

(2) $C(nx) = 1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ。 [1999]

■ 確率

1 整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える。ただし，各球に書かれている整数は 1 つのみとする。

(i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し，その球に書かれている整数を k とする。

(ii) $k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す。

(iii) $k = 0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す。

整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する。この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする。例えば X_1 はつねに 1 である。以下 $n \geqq 2$ として次の問いに答えよ。

(1) $X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ。

(2) $X_n \leqq n+1$ である確率を求めよ。 [2018]

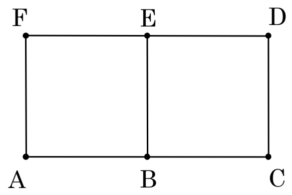
2 n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M - L$ を X とする。

(1) $X = 1$ である確率を求めよ。

(2) $X = 5$ である確率を求めよ。 [2017]

3　ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある。「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする。この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である。1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，この装置のボタンを最低何回押せばよいか。必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい。　[2016]

4　6 個の点 A, B, C, D, E, F が右図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする。各線分をそれぞれ独立に確率 $\dfrac{1}{2}$ で赤または黒で塗る。赤く塗られた線分だけを通って点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする。そのような経路がない場合は X を 0 とする。このとき，$n=0,\ 2,\ 4$ について，$X=n$ となる確率を求めよ。　[2015]



5　投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1)　石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2)　石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ。　[2013]

6　n を 3 以上の整数とする。1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある。これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする。$X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ。ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする。　[2012]

7　箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を Y とする。$X=Y$ である確率を求めよ。

[2011]

8　1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる。どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする。このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ。ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく一度ずつ用いるものとする。　[2010]

9　白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える。取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し，そうでないときは「失敗」とし，取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする。最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていたとき，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ。ただし $n \geqq 2$ とする。　[2009]

10　正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする。F 上の点 P に対して，始点と終点がともに P であるような，図形 F の一筆がきの経路の数を $N(\mathrm{P})$ で表す。正 n 角形の頂点をひとつとって A とし，$a = N(\mathrm{A})$ とおく。また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし，$b = N(\mathrm{B})$ とおく。このとき a と b を求めよ。

注：一筆がきとは，図形を，かき始めから終わりまで，筆を紙からはなさず，また同じ線上を通らずにかくことである。　[2008]

11　四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり，1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに，等しい確率で移動する。

このとき, n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。　[2007]

12　1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし，$n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする。この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号を大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ。　[2005]

13　4 チームがリーグ戦を行う。すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする。勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする。1 位のチーム数の期待値を求めよ。　[2003]

14　n, k は自然数で，$n \geqq 3$, $k \geqq 2$ を満たすものとする。いま，n 角柱の $n+2$ 個の面に 1 から $n+2$ までの番号が書いてあるものとする。この $n+2$ 個の面に 1 面ずつ，異なる k 色の中から 1 色ずつ選んでは塗っていく。このとき，どの隣り合う面の組も同一色では塗られない塗り方の数を P_k で表す。

(1)　P_2 と P_3 を求めよ。

(2)　$n=7$ のとき，P_4 を求めよ。　[1999]

15　袋の中に青色，赤色，白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている。各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1, 2, 3 の番号がついている。これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す。取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく，同番号のものも他にない玉の個数を得点とする。たとえば，青 1 番，赤 1 番，白 3 番を取り出したときの得点は 1 で，青 2 番，赤 2 番，赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　得点が n となるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき，$A(0)$，$A(1)$，$A(2)$，$A(3)$ を求めよ。

(2)　得点の期待値を求めよ。　[1998]

■ 論証

1　a, b, c, d, e を正の有理数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。　[2015]

2　次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において，$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$ ならば，これら 2 つの三角形は合同である。　[2012]

3　n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

命題 q：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。　[2007]

4　$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。

[2006]

5　n, k は自然数で, $k \leqq n$ とする。穴のあいた $2k$ 個の白玉と $2n-2k$ 個の黒玉にひもを通して輪を作る。このとき適当な 2 箇所でひもを切って n 個ずつの 2 組に分け，どちらの組も白玉 k 個，黒玉 $n-k$ 個からなるようにできることを示せ。　[2006]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ)　方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。 [2016]

解答例＋映像解説

実数係数の 3 次方程式 $f(x)=0$ の虚数解を γ とすると，その共役複素数 $\overline{\gamma}$ も解となる。そして，もう 1 つの解を β とおくと，解と係数の関係より，

$$\beta+\gamma+\overline{\gamma}=-a,\ \beta=-a-(\gamma+\overline{\gamma})$$

よって，β は実数となり，$f(x)=0$ は実数解 β，虚数解 γ，$\overline{\gamma}$ をもつ。

さて，条件から，β^3，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$ も $f(x)=0$ の解であり，$\beta^3\neq\beta$ とすると，$\beta^3\neq\gamma$，$\beta^3\neq\overline{\gamma}$ から，$f(x)=0$ の解が少なくとも 4 個存在することになり不適である。

よって，$\beta^3=\beta$ $(\beta=0,\ \pm1)$ である。また，γ は虚数より $\gamma^3\neq\gamma$ である。

(i)　$\beta=0$ のとき　$f(x)=0$ の解は $0,\ \gamma,\ \overline{\gamma},\ \gamma^3,\ (\overline{\gamma})^3$ となり，

(i-i)　$\gamma^3=0$ のとき　$\gamma=0$ となり不適である。

(i-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=\gamma$ となる。

そこで，p,q を実数として $\gamma=p+qi$ $(q\neq0)$ とおくと，

$$(p+qi)^3=p-qi,\ (p^3-3pq^2)+(3p^2q-q^3)i=p-qi$$

これより，$p^3-3pq^2=p$ ……①，$3p^2q-q^3=-q$ ……②

①より $p=0$ または $p^2-3q^2=1$，②より $3p^2-q^2=-1$ …… ②′ となる。

(a)　$p=0$ のとき　②′ から $q^2=1$ となり $q=\pm1$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=0,\ \pm i$ であり，

$$f(x)=x(x+i)(x-i)=x(x^2+1)=x^3+x$$

(b)　$p^2-3q^2=1$ のとき　②′ から $3(3q^2+1)-q^2=-1$，$8q^2+4=0$ で不適。

(ii)　$\beta=1$ のとき　$f(x)=0$ の解は $1,\ \gamma,\ \overline{\gamma},\ \gamma^3,\ (\overline{\gamma})^3$ となり，

(ii-i)　$\gamma^3=1$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=1$ となる。

すると，$(\gamma-1)(\gamma^2+\gamma+1)=0$ となり，$\gamma\neq1$ から $\gamma=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であり，

$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

(ii-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　(i-ii)と同様にすると，$f(x)=0$ の解は $x=1,\ \pm i$ であり，

$$f(x)=(x-1)(x+i)(x-i)=(x-1)(x^2+1)=x^3-x^2+x-1$$

(iii)　$\beta=-1$ のとき　$f(x)=0$ の解は -1，γ，$\overline{\gamma}$，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$ となり，

(iii-i)　$\gamma^3=-1$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=-1$ となる。

すると，$(\gamma+1)(\gamma^2-\gamma+1)=0$ となり，$\gamma\neq-1$ から $\gamma=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であり，

$$f(x)=(x+1)\Big(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)\Big(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

(iii-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　(i-ii)と同様にすると，$f(x)=0$ の解は $x=-1,\ \pm i$ であり，

$$f(x)=(x+1)(x+i)(x-i)=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$$

(i)～(iii)より，求める 3 次式は，

$$x^3+x,\ x^3-1,\ x^3+1,\ x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1$$

コメント

3 次方程式の異なる複素数解は高々3 個ということを利用した解答例です。まず，β^3 に注目し，次に γ^3 に注目して場合分けを行っています。ただ，その論理を丁寧に記述するには，時間がかなり必要でした。

問　題

$0° \leqq \theta < 90°$ とする。x についての 4 次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos\theta)x - \cos\theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan\theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも 1 つもつことを示せ。 [2014]

解答例＋映像解説

4 次方程式 $\{x^2 - 2(\cos\theta)x - \cos\theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan\theta)x + 3\} = 0 \cdots\cdots(*)$に対して，

$$x^2 - 2(\cos\theta)x - \cos\theta + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots①,\ \ x^2 + 2(\tan\theta)x + 3 = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①，②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，

$$D_1/4 = \cos^2\theta + \cos\theta - 1,\ \ D_2/4 = \tan^2\theta - 3$$

さて，①が虚数解をもたない条件は，$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$ であり，

$$\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \geqq 0 \cdots\cdots\cdots③,\ \ \tan^2\theta - 3 \geqq 0 \cdots\cdots\cdots④$$

条件より $0° \leqq \theta < 90°$ なので，④から $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$，すなわち $60° \leqq \theta < 90°$ となり，

$$0 < \cos\theta \leqq \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，③より，$\cos\theta > 0$ から，$\cos\theta \geqq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdots\cdots\cdots⑥$

すると，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ から，⑤⑥をともに満たす θ は存在せず，$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$ は成立しない。すなわち，4 次方程式$(*)$は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

コメント

解答例は背理法風に記しました。意外なことに，④から θ の範囲が決まります。

問　題

a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。 [2013]

解答例＋映像解説

$a\geqq 2$ において，$f(x)=(x+a)(x+2)$ に対し，$f(f(x))>0$ より，

$$\{f(x)+a\}\{f(x)+2\}>0$$

$-a\leqq -2$ から，$f(x)<-a$ または $-2<f(x)$ ……(＊)

さて，(＊)がすべての実数 x に対して成り立つ条件は，$-2<f(x)$ がすべての実数 x に対して成り立つことに等しく，$f(x)$ を変形すると，

$$f(x)=x^2+(a+2)x+2a=\left(x+\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}$$

よって，求める条件は，$-\dfrac{(a-2)^2}{4}>-2$ となり，$(a-2)^2<8$ から，

$$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$$

すると，$a\geqq 2$ より，$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$

コメント

記載は省きましたが，2 次関数のグラフをもとに考えています。なお，4 次不等式として処理することも可能です。

問　題

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。 [2012]

解答例＋映像解説

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので，

$$D=u^2-4v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6)\geqq 0$，$u^2-8\leqq 0$，$-2\sqrt{2}\leqq u\leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から，

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$
$$=u^3-u^2-5u$$
$$z'=3u^2-2u-5=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は，

$$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$$

コメント

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

問　題

次の条件(＊)を満たす正の実数の組$(a,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

(＊)　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど 1 つある。 [2012]

解答例＋映像解説

条件より，$\cos a\theta=\cos b\theta$（$a>0,\ b>0$）に対し，

$$\cos a\theta-\cos b\theta=0,\ -2\sin\frac{a+b}{2}\theta\sin\frac{a-b}{2}\theta=0\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$f(\theta)=\sin\frac{a+b}{2}\theta$，$g(\theta)=\sin\frac{a-b}{2}\theta$ とおくと，①から，

$$f(\theta)g(\theta)=0\cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$f(\theta)$ は周期 $\frac{4\pi}{a+b}$ の周期関数である。

また，$g(\theta)$ は，$a>b>0$ のとき周期 $\frac{4\pi}{a-b}$，$b>a>0$ のとき周期 $\frac{4\pi}{b-a}$ の周期関数となり，$a=b>0$ のとき $g(\theta)=0$ である。

これより，②を満たす $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど 1 つある条件は，$a\neq b$ で，

(i)　$a>b>0$ のとき

$\frac{4\pi}{a+b}<\frac{4\pi}{a-b}$ から，$\pi<\frac{4\pi}{a+b}\leqq 2\pi$ かつ $\frac{4\pi}{a-b}>2\pi$ となり，

$$a+b<4,\ a+b\geqq 2,\ a-b<2$$

(ii)　$b>a>0$ のとき

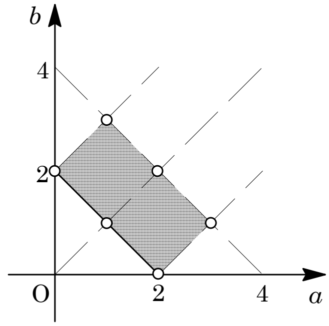
$\frac{4\pi}{a+b}<\frac{4\pi}{b-a}$ から，$\pi<\frac{4\pi}{a+b}\leqq 2\pi$ かつ $\frac{4\pi}{b-a}>2\pi$

となり，

$$a+b<4,\ a+b\geqq 2,\ b-a<2$$

(i)(ii)より，点$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面上に図示すると，右図の網点部となる。

ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。また，白丸も含まない。



コメント

上の解には明示していませんが，サインカーブを描きながら考えています。そのため，周期に注目しているわけです。おもしろい問題です。

問　題

x, y は $x \neq 1$，$y \neq 1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき x, y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

[2009]

解答例

$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$　$(x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1)$ より，

$$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} > 2 + (\log_x 2)\cdot\frac{\log_x 2}{\log_x y}$$

(i)　$\log_x y > 0$ $(x>1,\ y>1$ または $0<x<1,\ 0<y<1)$ のとき

$(\log_x y)^2 + 1 > 2\log_x y + (\log_x 2)^2$，$(\log_x y - 1)^2 - (\log_x 2)^2 > 0$ より，

$$(\log_x y - 1 - \log_x 2)(\log_x y - 1 + \log_x 2) > 0,\ \log_x \frac{y}{2x}\cdot\log_x\frac{2y}{x} > 0$$

(i-i)　$\log_x \dfrac{y}{2x} > 0$ かつ $\log_x \dfrac{2y}{x} > 0$ のとき

$x>1$ では，$\dfrac{y}{2x} > 1$ かつ $\dfrac{2y}{x} > 1$ より，$y > 2x$，$y > \dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

(i-ii)　$\log_x \dfrac{y}{2x} < 0$ かつ $\log_x \dfrac{2y}{x} < 0$ のとき

$x>1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

(ii)　$\log_x y < 0$ $(x>1,\ 0<y<1$ または $0<x<1,\ y>1)$ のとき

$(\log_x y)^2 + 1 < 2\log_x y + (\log_x 2)^2$ より，$\log_x \dfrac{y}{2x}\cdot\log_x\dfrac{2y}{x} < 0$

(ii-i)　$\log_x \dfrac{y}{2x} > 0$ かつ $\log_x \dfrac{2y}{x} < 0$ のとき

$x>1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$y>2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

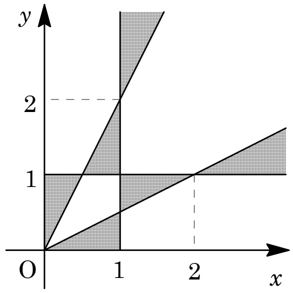
(ii-ii)　$\log_x \dfrac{y}{2x} < 0$ かつ $\log_x \dfrac{2y}{x} > 0$ のとき

$x>1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，

$$y>2x,\ 0<y<\frac{1}{2}x$$

以上より，$(x,\ y)$ の満たす範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

頻出タイプの問題です。丁寧に場合分けをして記述しました。

問　題

定数 a は実数であるとする。方程式$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$を満たす実数 x はいくつあるか。a の値によって分類せよ。 [2008]

解答例

方程式$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ ……①に対して,

$$x^2+ax+1=0 \cdots\cdots②,\ \ 3x^2+ax-3=0\cdots\cdots③$$

②より $ax=-x^2-1$, ③より $ax=-3x^2+3$

すると, ①の異なる実数解の個数は, $y=-x^2-1$ ……④, $y=-3x^2+3$ ……⑤の 2 つのグラフと $y=ax$ ……⑥のグラフの共有点の個数に一致する。

さて, ④と⑤の交点は,

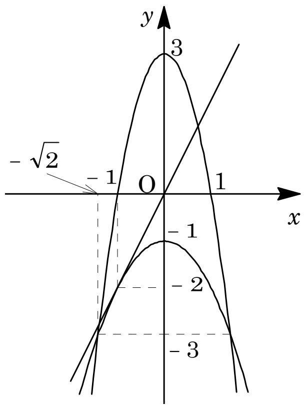
$$-x^2-1=-3x^2+3,\ \ x=\pm\sqrt{2}$$

よって, $(-\sqrt{2},\ -3)$, $(\sqrt{2},\ -3)$である。

また, ④と⑥が接するのは, ②が重解をもつときより,

$$D=a^2-4=0,\ \ a=\pm 2$$

このとき, 重解は $x=-\dfrac{a}{2}=\mp 1$ であり, 接点は$(-1,\ -2)$, $(1,\ -2)$となる。



以上より, 方程式①の異なる実数解の個数は, 対称性に注意すると, 右図より, $|a|<2$ のとき 2 個, $|a|=2$ または $|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 3 個, $2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ または $|a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 4 個である。

コメント

②と③の方程式の異なる実数解の個数を, 図を用いて視覚的にとらえています。なお, ③がつねに異なる 2 実数解をもつために, 場合分けだけで攻めても, さほど複雑にはなりません。

問　題

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x\cos x = 0$ を満たす x の個数を求めよ。 [2008]

解答例

$2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x\cos x = 0$ ……①に対して，$t = \sin x + \cos x$ とおくと，

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x,\quad \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

①に代入して，$2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}(t^2 - 1) = 0$

$$2\sqrt{2}t^3 - 6\sqrt{2}t - 3t^2 + 3 = 0,\quad 4t^3 - 3\sqrt{2}t^2 - 12t + 3\sqrt{2} = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$0 \leqq x < 2\pi$，$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ より，方程式②を満たす 1 つの解に対して，方程式①を満たす解の個数は，$-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ のとき 2 個，$t = \pm\sqrt{2}$ のとき 1 個となり，$t < -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} < t$ のときはない。

さて，$f(t) = 4t^3 - 3\sqrt{2}t^2 - 12t + 3\sqrt{2}$ とおくと，

$$f'(t) = 12t^2 - 6\sqrt{2}t - 12 = 6(2t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2})$$

すると，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t) = 0$ すなわち方程式②は $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \sqrt{2}$ に解を 1 つだけもつ。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		＋	0	－	0
$f(t)$	$\sqrt{2}$	↗		↘	$-7\sqrt{2}$

よって，方程式①を満たす x は 2 個存在する。

コメント

有名な三角方程式の解の個数についての問題です。t と x の個数の対応に注意が必要です。

問　題

放物線$C: y=x^2$と 2 直線$l_1: y=px-1$，$l_2: y=-x-p+4$は 1 点で交わるという。このとき，実数pの値を求めよ。 [2006]

解答例

$C: y=x^2$……①，$l_1: y=px-1$……②，$l_2: y=-x-p+4$……③に対して，②と③の交点は，

$$px-1=-x-p+4,\ (p+1)x=-p+5$$

$p=-1$では成立しないので，$p\neq-1$より，$x=\dfrac{-p+5}{p+1}$

$$y=p\cdot\frac{-p+5}{p+1}-1=\frac{-p^2+4p-1}{p+1}$$

②と③の交点が①上にあることより，

$$\frac{-p^2+4p-1}{p+1}=\left(\frac{-p+5}{p+1}\right)^2,\ (p+1)(-p^2+4p-1)=(-p+5)^2$$

まとめると，$p^3-2p^2-13p+26=0$，$(p-2)(p^2-13)=0$

よって，$p=2,\ \pm\sqrt{13}$

コメント

何か裏があるのではないか，たとえば「交わる」というのは「接する」場合を含まないという意味なのだろうか，などと勘ぐりたくなるほどの問題です。

問　題

xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。　[2005]

解答例

原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分 L は，$y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$………①

①と曲線 $y=x^2+ax+b$……②の共有点は，

$$x^2+ax+b=2x,\ x^2+(a-2)x+b=0\text{………③}$$

すると，①②が共有点をもつ条件は，③が $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことであり，さらに $f(x)=x^2+(a-2)x+b$……④とおくと，この条件は，放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの共有点をもつことと言い換えることができる。

④より，$f(x)=\left(x+\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b$ となり，放物線の軸の位置で場合分けをして，$(a,\ b)$ の条件を求めると，

(i)　$-\dfrac{a-2}{2}<0\ (a>2)$ のとき

$f(0)=b\leqq 0$ かつ $f(1)=a+b-1\geqq 0$ より，$-a+1\leqq b\leqq 0$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{a-2}{2}\leqq 1\ (0\leqq a\leqq 2)$ のとき

$-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b\leqq 0$　かつ（$f(0)=b\geqq 0$ または $f(1)=a+b-1\geqq 0$）

よって，$b\leqq\dfrac{1}{4}(a-2)^2$ かつ（$b\geqq 0$ または $b\geqq -a+1$）

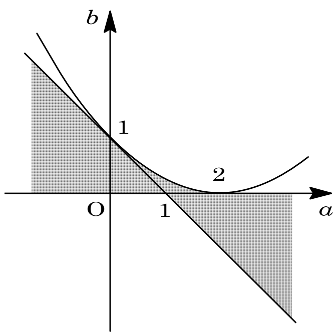
(iii)　$-\dfrac{a-2}{2}>1\ (a<0)$ のとき

$f(0)=b\geqq 0$ かつ $f(1)=a+b-1\leqq 0$ より，

$$0\leqq b\leqq -a+1$$

さて，$b=\dfrac{1}{4}(a-2)^2$ と $b=-a+1$ の共有点は，

$$\frac{1}{4}(a-2)^2=-a+1,\ a=0$$



以上より，$(a,\ b)$ の存在領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。

コメント

頻出問題なので，方針はすぐに決まります。ミスをしないように，ていねいに計算を進めていきます。

問　題

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301 < \log_{10}2 < 0.3011$ である。 [2005]

解答例

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ より，$10\log_{10}2 < n(\log_{10}5 - \log_{10}4) < 20\log_{10}2$

$$10\log_{10}2 < n(1-3\log_{10}2) < 20\log_{10}2$$

$1-3\log_{10}2 > 0$ より，

$$\frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2} < n < \frac{20\log_{10}2}{1-3\log_{10}2} \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$f(x) = \dfrac{x}{1-3x}$，$a = \log_{10}2$ とおくと，①より，

$$10f(a) < n < 20f(a) \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$f(x) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3(1-3x)}$ と変形し，条件から $0.301 < a < 0.3011$ なので，

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.903)} < f(a) < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.9033)}$$

これより，$3.103 < f(a) < 3.114$ となり，

$$31.03 < 10f(a) < 31.14,\ \ 62.06 < 20f(a) < 62.28$$

②より, n は自然数なので, $32 \leqq n \leqq 62$ となり, n の個数は 31 である。

コメント

数値計算が面倒そうなので，後回しにしたくなる問題です。しかし，その予想は，はずれてしまいました。

問　題

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$ とする。$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2004]

解答例

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta=2\cos^2 2\theta-1-4\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=2\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta-3$ より，

$$f(\theta)=2\left(\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ から，$-1 \leqq \cos 2\theta \leqq 1$ となる。

よって，$f(\theta)$ は $\cos 2\theta=-\dfrac{1}{2}$ $(\theta=60^\circ)$ のとき最小値 $-\dfrac{7}{2}$ をとる。また $\cos 2\theta=1$ $(\theta=0^\circ)$ のとき最大値 1 をとる。

コメント

理系の類題では微分法を利用しましたが，文系では平方完成を用いる解法になります。

問　題

$0 \leqq \theta < 360$ とし，a は定数とする。$\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3\cos\theta^\circ - 1 = a$ を満たす θ の値はいくつあるか。a の値によって分類せよ。　[2002]

解答例

$\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3\cos\theta^\circ - 1 = a$ ……①に対して，$t = \cos\theta^\circ$ ……②とおくと，$\cos 3\theta^\circ = 4\cos^3\theta^\circ - 3\cos\theta^\circ = 4t^3 - 3t$，$\cos 2\theta^\circ = 2\cos^2\theta^\circ - 1 = 2t^2 - 1$ より，

$$4t^3 - 3t - (2t^2 - 1) + 3t - 1 = a,\quad 4t^3 - 2t^2 = a \cdots\cdots③$$

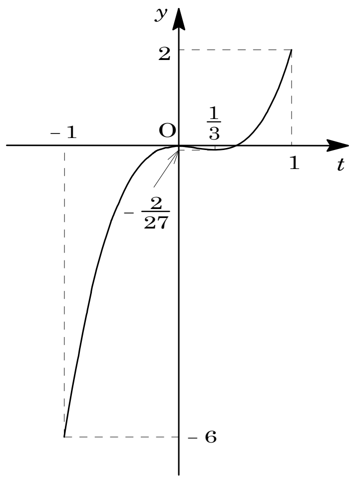
ここで，$f(t) = 4t^3 - 2t^2$ とすると，

$$f'(t) = 12t^2 - 4t = 4t(3t - 1)$$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{2}{27}$	↗	2

すると，③は $f(t) = a$ となり，この解は $y = f(t)$ のグラフと $y = a$ の共有点の t 座標となる。

さて，$0 \leqq \theta < 360$ なので，②より，③の解が $t = 1$ または $t = -1$ のとき，t の値 1 個に対して①の解 θ は 1 個対応する。また，③の解が $-1 < t < 1$ のとき，t の値 1 個に対して①の解 θ は 2 個対応する。



したがって，右図より，

$a < -6$，$2 < a$ のとき θ の値は 0 個

$a = -6$，$a = 2$ のとき θ の値は 1 個

$-6 < a < -\frac{2}{27}$，$0 < a < 2$ のとき θ の値は 2 個

$a = -\frac{2}{27}$，$a = 0$ のとき θ の値は 4 個

$-\frac{2}{27} < a < 0$ のとき θ の値は 6 個

コメント

三角方程式の解の個数を求める頻出問題です。

問　題

$a,\ b$ は実数で $a \neq b$，$ab \neq 0$ とする。このとき不等式

$$\frac{x-b}{x+a}-\frac{x-a}{x+b}>\frac{x+a}{x-b}-\frac{x+b}{x-a}$$

を満たす実数 x の範囲を求めよ。 [1998]

解答例

条件より，$\dfrac{x-b}{x+a}+\dfrac{x+b}{x-a}>\dfrac{x-a}{x+b}+\dfrac{x+a}{x-b}$

$$1-\frac{a+b}{x+a}+1+\frac{a+b}{x-a}>1-\frac{a+b}{x+b}+1+\frac{a+b}{x-b}$$

$$-\frac{a+b}{x+a}+\frac{a+b}{x-a}>-\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+b}{x-b}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

(i)　$a+b>0$ のとき

$-\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-a}>-\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x-b}$ より，$\dfrac{a}{(x+a)(x-a)}>\dfrac{b}{(x+b)(x-b)}$

両辺 $\times(x+a)^2(x-a)^2(x+b)^2(x-b)^2$

$$a(x+a)(x-a)(x+b)^2(x-b)^2>b(x+a)^2(x-a)^2(x+b)(x-b)$$

$$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)\left\{a(x^2-b^2)-b(x^2-a^2)\right\}>0$$

$$(a-b)(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x^2+ab)>0\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

(i-i)　$0<b<a$ のとき

$-a<-b<0<b<a$ となり，$x^2+ab>0$ より，②の解は，

$x<-a$，$-b<x<b$，$a<x$

(i-ii)　$b<0<a$ のとき

$-a<b<0<-b<a$ となり，$-b<a$ から $(-b)^2<a\cdot(-b)<a^2$

よって，$-b<\sqrt{-ab}<a$，また $-a<-\sqrt{-ab}<b$ なので，

$-a<-\sqrt{-ab}<b<0<-b<\sqrt{-ab}<a$ となり，②の解は，

$x<-a$，$-\sqrt{-ab}<x<b$，$-b<x<\sqrt{-ab}$，$a<x$

(i-iii)　$0<a<b$ のとき

(i-i)と同様にして，$-b<-a<0<a<b$ となり，②の解は，

$-b<x<-a$，$a<x<b$

(i-iv)　$a<0<b$ のとき

(i-ii)と同様にして，$-b<-\sqrt{-ab}<a<0<-a<\sqrt{-ab}<b$ となり，②の解は，

$-b<x<-\sqrt{-ab}$，$a<x<-a$，$\sqrt{-ab}<x<b$

(ii)　$a+b=0$ のとき

①の両辺がともに 0 より，解なし。

(iii)　$a+b<0$ のとき

(i)と同様にして，

$(a-b)(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x^2+ab)<0$ …………③

(iii-i)　$b<a<0$ のとき

$b<a<0<-a<-b$ となり，③の解は，

$b<x<a$，$-a<x<-b$

(iii-ii)　$b<0<a$ のとき

$b<-\sqrt{-ab}<-a<0<a<\sqrt{-ab}<-b$ となり，③の解は，

$b<x<-\sqrt{-ab}$，$-a<x<a$，$\sqrt{-ab}<x<-b$

(iii-iii) $a<b<0$ のとき

$a<b<0<-b<-a$ となり，③の解は，

$x<a$，$b<x<-b$，$-a<x$

(iii-iv) $a<0<b$ のとき

$a<-\sqrt{-ab}<-b<0<b<\sqrt{-ab}<-a$ となり，③の解は，

$x<a$，$-\sqrt{-ab}<x<-b$，$b<x<\sqrt{-ab}$，$-a<x$

以上まとめると，

(i-i)と(iii-iii)から，$ab>0$，$|a|>|b|$ のとき

$x<-|a|$，$-|b|<x<|b|$，$|a|<x$

(i-ii)と(iii-iv)から，$ab<0$，$|a|>|b|$ のとき

$x<-|a|$，$-\sqrt{-ab}<x<-|b|$，$|b|<x<\sqrt{-ab}$，$|a|<x$

(i-iii)と(iii-i)から，$ab>0$，$|a|<|b|$ のとき

$-|b|<x<-|a|$，$|a|<x<|b|$

(i-iv)と(iii-ii)から，$ab<0$，$|a|<|b|$ のとき

$-|b|<x<-\sqrt{-ab}$，$-|a|<x<|a|$，$\sqrt{-ab}<x<|b|$

(ii)から，$a=-b$ のとき

解なし

コメント

どのようにみても，数学Ⅲの範囲の問題です。現行課程の標準的カリキュラムの拡充を意図した出題かも知れません。このように指定された入試科目の範囲外と考えられる問題が，昨年度も確率などで少々出ましたが，本年度は非常によく目につくようになりました。受験生の立場からすると，ありがたくない規制緩和ですが。

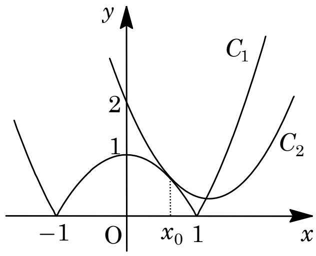
問　題

a は正の実数とし，座標平面内の点 $(x_0,\ y_0)$ は 2 つの曲線

$$C_1 : y = |x^2 - 1|,\quad C_2 : y = x^2 - 2ax + 2$$

の共有点であり，$|x_0| \neq 1$ を満たすとする。C_1 と C_2 が $(x_0,\ y_0)$ で共通の接線をもつとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2018]

解答例＋映像解説



まず，$C_1 : y = |x^2 - 1|$ ……①に対して，

$$y = x^2 - 1\ (|x| \geqq 1),\quad y' = 2x\ (|x| > 1)$$

$$y = -x^2 + 1\ (|x| \leqq 1),\quad y' = -2x\ (|x| < 1)$$

また，$C_2 : y = x^2 - 2ax + 2\quad (a > 0)$ ……②に対して，

$$y = (x - a)^2 - a^2 + 2,\quad y' = 2x - 2a$$

ここで，C_1 と C_2 が共有点 $(x_0,\ y_0)$ $(|x_0| \neq 1)$ で共通の接線をもつ条件は，

(i)　$|x_0| > 1$ のとき

$$x_0{}^2 - 1 = x_0{}^2 - 2ax_0 + 2,\quad 2x_0 = 2x_0 - 2a$$

$a > 0$ より $2x_0 = 2x_0 - 2a$ は成立しない。

(ii)　$|x_0| < 1$ のとき

$$-x_0{}^2 + 1 = x_0{}^2 - 2ax_0 + 2,\quad -2x_0 = 2x_0 - 2a$$

すると，$x_0 = \dfrac{a}{2}$ となり，$-\dfrac{a^2}{4} + 1 = \dfrac{a^2}{4} - 2a \cdot \dfrac{a}{2} + 2$ から，$-\dfrac{a^2}{2} + 1 = 0$

よって，$a > 0$ より $a = \sqrt{2}$ となり，$x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である（$|x_0| < 1$ を満たす)。

(i)(ii)より，$C_2 : y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$ …… ②′ となる。

さて，C_1 と C_2 の $(x_0,\ y_0)$ 以外の共有点について，$|x| \geqq 1$ で①②′を連立すると，

$$x^2 - 1 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2,\quad 2\sqrt{2}x = 3$$

よって，$x = \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ となり，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S は，

$$S = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}} (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2)\,dx - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} (-x^2 + 1)\,dx - \int_{1}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}} (x^2 - 1)\,dx$$

$$= \Big[\frac{x^3}{3} - \sqrt{2}x^2 + 2x\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}} + \Big[\frac{x^3}{3} - x\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} - \Big[\frac{x^3}{3} - x\Big]_{1}^{\frac{3}{4}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{32}\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \Big(-\frac{2}{3}\Big) - \Big(-\frac{5}{12}\sqrt{2}\Big) - \Big(-\frac{15}{32}\sqrt{2}\Big) + \Big(-\frac{2}{3}\Big)$$

$$= \frac{23}{24}\sqrt{2} - \frac{4}{3}$$

コメント

微積分の総合問題です。基本的な内容ですが，最後の数値計算はやや複雑です。

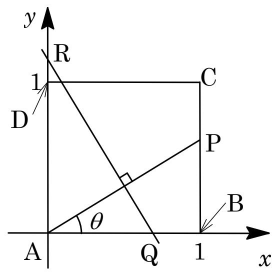
問　題

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P をとり，線分 AP の垂直二等分線が辺 AB，辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とする。

(1)　線分 QR の長さを $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を用いて表せ。

(2)　点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説



(1)　右図のように座標系を設定し，$0 < t \leqq 1$ として $\mathrm{P}(1,\ t)$ とおく。すると，線分 AP の垂直二等分線は，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+t\left(y-\frac{t}{2}\right)=0$$

x 軸との交点は，$\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{t^2}{2}=0$ から $x=\frac{t^2+1}{2}$

y 軸との交点は，$-\frac{1}{2}+t\left(y-\frac{t}{2}\right)=0$ から $y=\frac{t^2+1}{2t}$

これより，$\mathrm{Q}\left(\frac{t^2+1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{R}\left(0,\ \frac{t^2+1}{2t}\right)$ となり，

$$\mathrm{QR}^2=\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2=\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}(t^2+1)=\frac{(t^2+1)^3}{4t^2}$$

さて，$\angle\mathrm{BAP}=\theta\ \left(0<\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$t=\tan\theta$ となり，

$$\mathrm{QR}^2=\frac{(\tan^2\theta+1)^3}{4\tan^2\theta}=\frac{1}{4\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^6\theta}=\frac{1}{4\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^4\theta}$$

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{2\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}=\frac{1}{2\sin\angle\mathrm{BAP}\,(1-\sin^2\angle\mathrm{BAP})}$$

(2)　$f(s)=s(1-s^2)=s-s^3\ \left(0<s\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とおくと，$\mathrm{QR}=\frac{1}{2f(s)}$ となり，

$$f'(s)=1-3s^2$$

これより，$f(s)$ の増減は右表のようになり，$f(s)$ は $s=\frac{\sqrt{3}}{3}$ で最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。したがって，QR の長さの最小値は，$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ である。

s	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(s)$		$+$	0	$-$	
$f(s)$	0	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

コメント

微分と増減についての基本題です。誘導に従えばスムーズに結論まで到達します。なお，(1)は相似を利用する方法もあります。

問　題

曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする。直線 l は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする。また，l の傾きは負であるとする。このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 [2017]

解答例＋映像解説

曲線 $C: y=x^3-4x+1$ ……①に対して $y'=3x^2-4$ となるので，点 $(t,\ t^3-4t+1)$ における接線 l の方程式は,

$$y-(t^3-4t+1)=(3t^2-4)(x-t),\ \ y=(3t^2-4)x-2t^3+1 \cdots\cdots\cdots ②$$

②が $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通ることより，$0=3(3t^2-4)-2t^3+1$

$$2t^3-9t^2+11=0,\ \ (t+1)(2t^2-11t+11)=0$$

これより，$t=-1,\ \dfrac{11\pm\sqrt{33}}{4}$ となる。

さて，l の傾きは負なので，$3t^2-4<0$ すなわち $-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}<t<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ ……③となり,

$$-\frac{2}{3}\sqrt{3}<-1,\ \ \frac{11+\sqrt{33}}{4}>\frac{11-\sqrt{33}}{4}>\frac{11-6}{4}=1.25>1.2=\frac{2}{3}\times1.8>\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

よって，③を満たす t は，$t=-1$ だけであり，このとき②から,

$$l: y=-x+3 \cdots\cdots\cdots ④$$

そこで，①④を連立すると，$x^3-4x+1=-x+3$ となり,

$$x^3-3x-2=0,\ \ (x+1)^2(x-2)=0$$

すると，$x=-1,\ 2$ となり，$-1\leqq x\leqq 2$ において C と l の上下関係は変わらないので，C と l で囲まれた部分の面積 S は,

$$\begin{aligned}S&=\left|\int_{-1}^{2}\{(x^3-4x+1)-(-x+3)\}dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)\,dx\right|\\&=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x+1-3)\,dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}\{(x+1)^3-3(x+1)^2\}dx\right|\\&=\left|\Big[\frac{1}{4}(x+1)^4-(x+1)^3\Big]_{-1}^{2}\right|=\left|\frac{1}{4}\cdot3^4-3^3\right|=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

コメント

3 次曲線と接線に囲まれた部分の面積を求める超頻出問題です。計算が面倒なのは，t の値を絞り込む箇所ぐらいです。

問　題

xy 平面内の領域 $x^2+y^2 \leqq 2$，$|x| \leqq 1$ で，曲線 $C: y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ。 [2016]

解答例＋映像解説

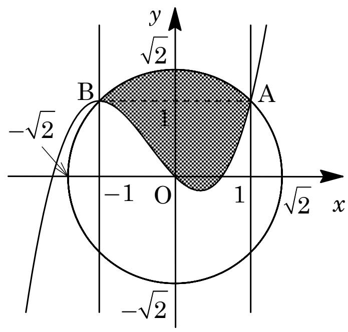
曲線 $C: y=x^3+x^2-x$ に対して，

$$y'=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$$

これより，増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$

さて，領域 $x^2+y^2 \leqq 2$，$|x| \leqq 1$ で，曲線 C の上側にある部分は，右図の網点部となる。



ここで，A$(1,\ 1)$，B$(-1,\ 1)$ とおき，網点部の領域について，線分 AB より上側の面積を S_1，下側の面積を S_2 とおくと，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ から，

$$S_1=\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}-1$$

$$S_2=\int_{-1}^{1}\{1-(x^3+x^2-x)\}dx$$

$$=2\int_0^1(-x^2+1)dx=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}$$

よって，網点部の領域の面積 S は，

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi}{2}-1+\frac{4}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$

コメント

微積分の基本問題です。計算も簡単です。

問　題

t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く。

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　$C: y=x^3-x$ ……①に対して $y'=3x^2-1$ となり，点 $(s,\ s^3-s)$ における接線は，

$$y-(s^3-s)=(3s^2-1)(x-s),\ \ y=(3s^2-1)x-2s^3 \cdots\cdots②$$

接線②が $\mathrm{P}(1,\ t)$ を通ることより，$t=3s^2-1-2s^3$ ………③

ここで，$f(s)=3s^2-1-2s^3$ とおくと，

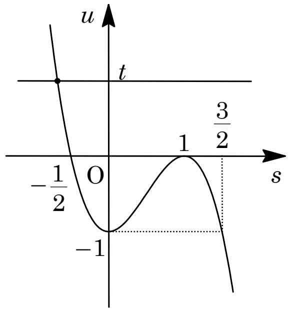
$$f'(s)=6s-6s^2=-6s(s-1)$$

これより $f(s)$ の増減は右表のようになる。

s	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(s)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$

さて，接線がちょうど 1 本だけ引ける条件は，③を満たす実数解 s が 1 つだけ存在する条件に対応する。言い換えると，$u=f(s)$ と $u=t$ のグラフが共有点を 1 つだけもつことより，右図から，

$$t<-1,\ \ 0<t \cdots\cdots④$$



(2)　①②を連立すると，$x^3-x=(3s^2-1)x-2s^3$ から，

$$x^3-3s^2x+2s^3=0,\ \ (x-s)^2(x+2s)=0$$

これより，$x=s,\ -2s$ となる。この共有点間で，曲線①と接線②について上下の位置関係は変わらないので，囲まれた部分の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\left|\int_s^{-2s}-(x-s)^2(x+2s)\,dx\right|=\left|\int_s^{-2s}(x-s)^2(x-s+3s)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_s^{-2s}\{(x-s)^3+3s(x-s)^2\}\,dx\right|=\left|\Big[\frac{1}{4}(x-s)^4+s(x-s)^3\Big]_s^{-2s}\right|$$

$$=\left|\frac{81}{4}s^4-27s^4\right|=\frac{27}{4}s^4$$

ここで，④のとき，右上のグラフより，$s<-\dfrac{1}{2}$ または $s>\dfrac{3}{2}$ となるので，

$$S(t)>\frac{27}{4}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|^4=\frac{27}{64}$$

コメント

募集要項に記された微積分の拡張領域からの出題です。2015 年度からは，数学Ⅱの頻出タイプとなるでしょう。

問　題

α，β を実数とする。xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線

$$y=-\frac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$$

が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している。このとき以下の問いに答えよ。

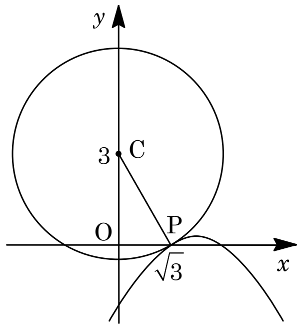
(1)　α，β の値を求めよ。

(2)　円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2013]

解答例＋映像解説

(1)　円 C の中心 $\mathrm{C}(0,\ 3)$ と $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を結ぶ線分の傾きは，$\dfrac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ より，点 P における円 C の接線の傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。



ここで，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ ……①に対して，

$$y'=-\frac{2}{3}x+\alpha$$

条件より，放物線①は点 P を通り，P における接線の傾きが $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるので，

$$0=-1+\sqrt{3}\alpha-\beta\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\alpha\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より，$\alpha=\sqrt{3}$ となり，②に代入すると，$\beta=2$ である。

(2)　(1)より，放物線①は $y=-\dfrac{x^2}{3}+\sqrt{3}x-2$，直線 CP は $y=-\sqrt{3}x+3$ である。

また，$\angle\mathrm{OCP}=\dfrac{\pi}{6}$ より，円 C，放物線①および y 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\Big(-\sqrt{3}x+3+\frac{x^2}{3}-\sqrt{3}x+2\Big)dx-\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\Big(\frac{x^2}{3}-2\sqrt{3}x+5\Big)dx-\pi=\Big[\frac{x^3}{9}-\sqrt{3}x^2+5x\Big]_0^{\sqrt{3}}-\pi=\frac{7}{3}\sqrt{3}-\pi$$

コメント

円と放物線についての基本的な計算問題です。積分計算もややこしくありません。

問　題

2 つの曲線 $y=x^4$ と $y=x^2+2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2012]

解答例＋映像解説

曲線 $y=x^4$ ……①，$y=x^2+2$ ……②の交点は，

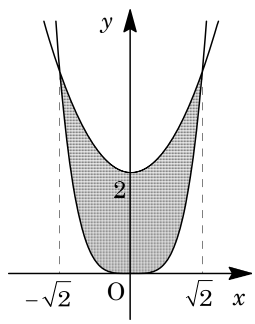
$$x^4-x^2-2=0,\ (x^2-2)(x^2+1)=0$$

よって，$x=\pm\sqrt{2}$ となる。

曲線①と②によって囲まれる図形は，y 軸対称なので，その面積を S とすると，

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}(x^2+2-x^4)\,dx=2\Big[\frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^5}{5}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\Big(\frac{2}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\frac{4}{5}\sqrt{2}\Big)=\frac{56}{15}\sqrt{2}$$



コメント

基本的な積分計算です。

問　題

実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか。a の値によって分類せよ。 [2011]

解答例＋映像解説

曲線 $y=x^3-4x^2+6x$ ……①と直線 $y=x+a$ ……②の式を連立して，

$$x^3-4x^2+6x=x+a,\quad x^3-4x^2+5x=a\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，①②の共有点の個数は，③の異なる実数解の個数に一致する。

さらに，③を，$y=x^3-4x^2+5x$ ……④と $y=a$ ……⑤を連立した式とみると，③の異なる実数解の個数は，曲線④と直線⑤の共有点の個数に一致する。

④より，$y'=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$

これより，曲線④の増減は右表のようになり，曲線④と x 軸に平行な直線⑤の共有点の個数，すなわち曲線①と直線②の共有点の個数は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

(i)　$a<\dfrac{50}{27}$，$2<a$ のとき　共有点は 1 個

(ii)　$a=\dfrac{50}{27}$，$a=2$ のとき　共有点は 2 個

(iii)　$\dfrac{50}{27}<a<2$ のとき　共有点は 3 個

コメント

問題文が「交点」の個数ですが，接点も交点として数えています。

問　題

xy 平面上で，連立不等式 $|x|\leqq 2$，$y\geqq x$，$y\leqq\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ を満たす領域の面積を求めよ。 [2011]

解答例＋映像解説

与えられた不等式 $|x|\leqq 2$ ……①，$y\geqq x$ ……②，$y\leqq\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ ……③に対して，

①より，$-2\leqq x\leqq 2$

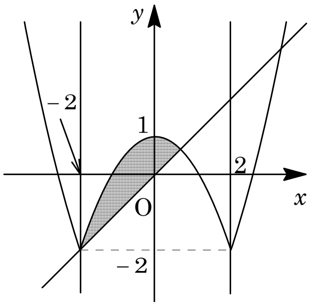
③は，$y\leqq\dfrac{3}{4}|x^2-4|-2$ となり，その領域の境界線 $y=\dfrac{3}{4}|x^2-4|-2$ は，

(i)　$x\leqq-2$，$2\leqq x$ のとき

$$y=\frac{3}{4}(x^2-4)-2=\frac{3}{4}x^2-5$$

(ii)　$-2\leqq x\leqq 2$ のとき

$$y=-\frac{3}{4}(x^2-4)-2=-\frac{3}{4}x^2+1$$



以上より，連立不等式①②③を満たす領域は右図の網点部となる。

さて，$-2\leqq x\leqq 2$ において，②の領域の境界線 $y=x$ と③の境界線 $y=-\dfrac{3}{4}x^2+1$ を連立すると，

$$x=-\frac{3}{4}x^2+1,\ 3x^2+4x-4=0,\ (x+2)(3x-2)=0$$

よって，$x=-2,\ \dfrac{2}{3}$ となり，網点部の面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2+1-x\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}+2\right)^3=\frac{64}{27}$$

コメント

一見，難しそうな連立不等式ですが，見掛け倒しでした。

問　題

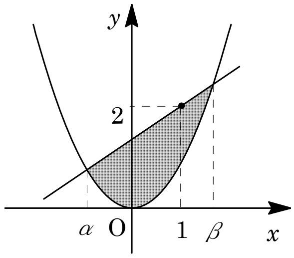
座標平面上で，点$(1,\ 2)$を通り傾きaの直線と放物線$y=x^2$によって囲まれる部分の面積を$S(a)$とする。a が $0\leqq a\leqq 6$ の範囲を変化するとき，$S(a)$を最小にするようなaの値を求めよ。　[2010]

解答例＋映像解説

点$(1,\ 2)$を通る傾き a の直線は，$y-2=a(x-1)$と表せ，放物線$y=x^2$の方程式と連立すると，

$$x^2-2=a(x-1)\ ,\ \ x^2-ax+a-2=0$$

これより，交点の x 座標は$x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}$となり，この値を$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおく。



すると，放物線と直線によって囲まれる部分の面積$S(a)$は，

$$S(a)=\int_{\alpha}^{\beta}(ax-a+2-x^2)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-4a+8}\right)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(a-2)^2+4}\right)^3$$

よって，aが$0\leqq a\leqq 6$の範囲を変化するとき，$S(a)$は$a=2$のとき最小となる。

コメント

参考書の例題に載っているような定型的な頻出題です。

問　題

座標空間内で，$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 1)$，$E(1,\ 0,\ 1)$，$F(1,\ 1,\ 1)$，$G(0,\ 1,\ 1)$を頂点にもつ立方体を考える。

(1)　頂点Aから対角線OFに下ろした垂線の長さを求めよ。

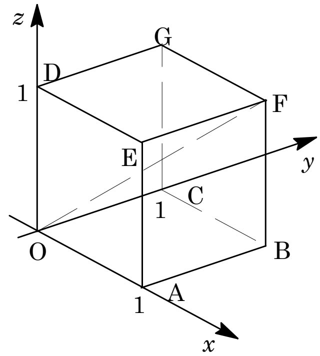
(2)　この立方体を対角線OFを軸にして回転して得られる回転体の体積を求めよ。

[2010]

解答例＋映像解説

(1)　$\overrightarrow{OF}=(1,\ 1,\ 1)$より，直線OFの方程式は，

$$x=y=z\ \cdots\cdots\cdots①$$



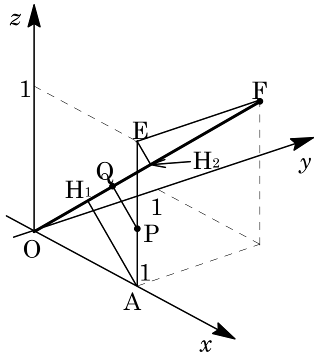
また，点$A(1,\ 0,\ 0)$を含み，OF に垂直な平面の方程式は，

$$(x-1)+y+z=0\ ,\ \ x+y+z=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$x=y=z=\dfrac{1}{3}$

よって，点 A から OF に下ろした垂線の足をH_1とすると，$H_1\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$となり，垂線の長さ$AH_1$は，

$$AH_1=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$



(2)　立方体 OABC-DEFG を対角線 OF を軸にして回転してできる立体は，折れ線 OA, AE, EF を OF を軸にして回転してできる立体に等しい。

(i)　辺OAをOFを軸にして回転したとき

回転体は，AH_1を半径とする円を底面とし，高さOH_1の円錐となり, (1)から,

$$OH_1=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，この円錐の体積をV_1とおくと，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$$

(ii)　辺AEをOFを軸にして回転したとき

$0\leqq u\leqq 1$として，辺AE上の点を$P(1,\ 0,\ u)$とおくと，点Pを含み，OFに垂直な平面の方程式は，

$$(x-1)+y+(z-u)=0\ ,\ \ x+y+z=1+u\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③を連立すると，$x = y = z = \dfrac{1+u}{3}$

よって，点 P から OF に下ろした垂線の足 Q は，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1+u}{3},\ \dfrac{1+u}{3},\ \dfrac{1+u}{3}\right)$となり，

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{\left(\frac{1+u}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1+u}{3}\right)^2 + \left(\frac{1+u}{3}-u\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{u^2-u+1}$$

また，点 E から OF に下ろした垂線の足 $\mathrm{H_2}$ は，$u=1$ から $\mathrm{H_2}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$となり，

$$\mathrm{OH_2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

さて，$\mathrm{OQ} = t$，辺 AE を OF を軸にして回転した立体の体積を V_2 とおくと，

$$V_2 = \pi\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}} \mathrm{PQ}^2 dt = \frac{2}{3}\pi\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}} (u^2-u+1)\,dt$$

ここで，$t = \sqrt{\left(\dfrac{1+u}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1+u}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1+u}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+u)$ から，

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi\int_0^1 (u^2-u+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}du = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u\right]_0^1 = \frac{5}{27}\sqrt{3}\pi$$

(iii) 辺 EF を OF を軸にして回転したとき

回転体は，$\mathrm{EH_2}$ を半径とする円を底面とし，高さ $\mathrm{FH_2}$ の円錐となり，この円錐の体積を V_3 とおくと，対称性より，(i)と同じく $V_3 = \dfrac{2}{27}\sqrt{3}\pi$ である。

(i)(ii)(iii)より，立方体を対角線 OF を軸にして回転してできる立体の体積 V は，

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{2}{27}\sqrt{3}\pi + \frac{5}{27}\sqrt{3}\pi + \frac{2}{27}\sqrt{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

コメント

水平な台の上に，対角線が鉛直になるように立てたサイコロを，対角線を軸として回転したときにできる立体の体積を求めるという有名問題です。京大独自の拡張した範囲からの出題ですが，普通に解いた上の解では，置換積分も利用していることから，文系には厳しい内容になっています。

問　題

整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。 [2009]

解答例

まず，$\displaystyle\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$ を変形して，

$$\int_0^x f(y)\,dy+x^2\int_0^1 f(y)\,dy+2x\int_0^1 yf(y)\,dy+\int_0^1 y^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

$\displaystyle p=\int_0^1 f(y)\,dy$ ……①，$\displaystyle q=\int_0^1 yf(y)\,dy$ ……②，$\displaystyle r=\int_0^1 y^2 f(y)\,dy$ ……③とおくと，

$$\int_0^x f(y)\,dy+px^2+2qx+r=x^2+C \quad\cdots\cdots\cdots④$$

④の両辺を x で微分すると，$f(x)+2px+2q=2x$

$$f(x)=-2(p-1)x-2q \quad\cdots\cdots\cdots⑤$$

④に $x=0$ を代入すると，$r=C$ ………⑥

①⑤より，$\displaystyle p=\int_0^1\{-2(p-1)y-2q\}\,dy=-p+1-2q$，$2p+2q=1$ ………⑦

②⑤より，$\displaystyle q=\int_0^1\{-2(p-1)y^2-2qy\}\,dy=-\frac{2}{3}(p-1)-q$，$p+3q=1$ ………⑧

⑦⑧より，$p=q=\dfrac{1}{4}$ となり，

$$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

③⑥より，$\displaystyle C=\int_0^1\left(\frac{3}{2}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

コメント

定型的な積分方程式の問題です。$f(x)$ を 1 次以下の整式として設定し，与えられた式に代入する方法もあります。

問　題

実数 $a,\ b,\ c$ に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。このとき

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx \leqq 6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$$

であることを示せ。 [2008]

解答例

$f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=2ax+b$ となる。

さて，$I_1=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx$，$I_2=6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$ とおくと，

$$I_1=\int_{-1}^{1}(1-x^2)(4a^2x^2+4abx+b^2)\,dx=2\int_{0}^{1}(4a^2x^2+b^2-4a^2x^4-b^2x^2)\,dx$$

$$=2\left(\frac{4}{3}a^2+b^2-\frac{4}{5}a^2-\frac{1}{3}b^2\right)=\frac{16}{15}a^2+\frac{4}{3}b^2$$

$$I_2=6\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)^2dx=12\int_{0}^{1}(a^2x^4+b^2x^2+c^2+2acx^2)\,dx$$

$$=12\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}b^2+c^2+\frac{2}{3}ac\right)=\frac{12}{5}a^2+4b^2+12c^2+8ac$$

すると，$I_2-I_1=\left(\frac{12}{5}a^2+4b^2+12c^2+8ac\right)-\left(\frac{16}{15}a^2+\frac{4}{3}b^2\right)$

$$=\frac{4}{3}a^2+\frac{8}{3}b^2+12c^2+8ac=\frac{4}{3}(a+3c)^2+\frac{8}{3}b^2\geqq 0$$

よって，$I_1\leqq I_2$ となり，

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx \leqq 6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$$

コメント

定積分の計算問題ですが，積分区間に注目をして，偶関数と奇関数に分ける工夫が必要です。

問　題

3 次関数 $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ のグラフ上の点 $(1,\ 0)$ における接線を l とする。この 3 次関数のグラフと接線 l で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。 [2007]

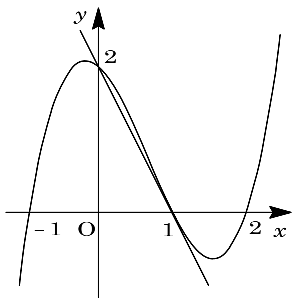
解答例

$y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ を変形すると，$y = (x-2)(x-1)(x+1)$ ……①となり，

$$y' = 3x^2 - 4x - 1$$

$x = 1$ のとき $y' = -2$ より，接線 l の方程式は，

$$y = -2(x-1) \text{ ………②}$$



①②の共有点は，

$$(x-2)(x-1)(x+1) = -2(x-1),\quad x(x-1)^2 = 0$$

よって，$x = 0,\ 1$ となる。

これより，①と②で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V とすると，

$$V = \pi\int_0^1 (x-2)^2(x-1)^2(x+1)^2\,dx - \frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 1$$

$$= \pi\int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 4)\,dx - \frac{4}{3}\pi$$

$$= \pi\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + 2 - \frac{7}{3} - 2 + 4\right) - \frac{4}{3}\pi = \frac{54}{35}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{22}{105}\pi$$

コメント

募集要項に記載の数Ⅱの範囲外からの出題です。体積計算について，基本的な知識があれば，単なる計算練習にすぎません。

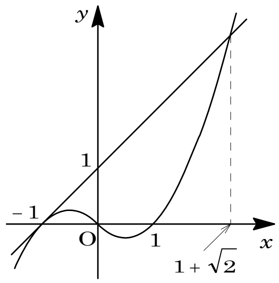
問　題

関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x\leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき $x=-1$ におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。　[2006]

解答例

関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\leqq 0$ の部分は，頂点が $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ の放物線より，a を 0 でない定数として，

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



原点を通るので，$0=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}$，$a=-1$

よって，$y=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，$y=-x^2-x$ ………①

また，関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\geqq 0$ の部分は，$x\leqq 0$ の部分を原点対称したものなので，

$$-y=-(-x)^2-(-x),\ \ y=x^2-x\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，①より $y'=-2x-1$ なので，$x=-1$ のとき $y'=1$ となり，点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は，

$$y=x+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

②と③の交点は，$x^2-x=x+1$，$x^2-2x-1=0$ より，$x=1+\sqrt{2}$

以上より，求める図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}(x+1+x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(x+1-x^2+x)\,dx\\&=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(-x^2+2x+1)\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})=2+\frac{4}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

コメント

微積分のセンターレベルの基本題です。なお，定積分の計算は，工夫なしで実行しています。

問　題

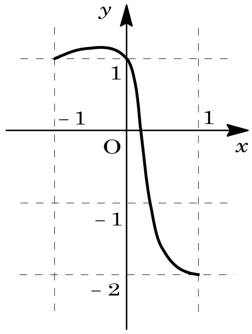
区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が,

$$f(-1)=f(0)=1,\ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

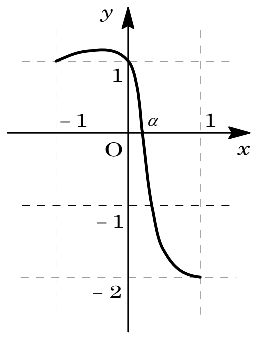
このとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geqq -1$ を示せ。

[2004]



解答例

$y=f(x)$ のグラフは $-1 \leqq x \leqq 1$ で連続であり，x 軸との交点を $x=\alpha$ とすると，$0<\alpha<1$ となる。



右図より，$-1<x<\alpha$ で $f(x)>0$，$-1<x<0$ で $f(x)>1$ となっているので，

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} dx = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\alpha<x<1$ で $f(x)>-2$ より，

$$\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{1} (-2)\,dx = -2(1-\alpha) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > 1-2(1-\alpha) = -1+2\alpha > -1$$

コメント

定性的な問題で，昨年の名大・理系の選択題を思い出しました。符号付きの面積を考えると，結論が見えてきます。

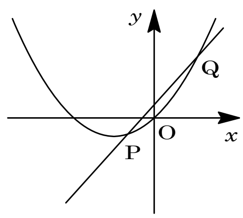
問　題

xy 平面上で，放物線 $C: y = x^2 + x$ と，直線 $l: y = kx + k - 1$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。k が(1)で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。　[2003]

解答例



(1) $C: y = x^2 + x$ ……①，$l: y = kx + k - 1$ ……②が相異なる 2 点で交わるのは，$x^2 + x = kx + k - 1$ として，

$$x^2 - (k-1)x - (k-1) = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

③が異なる 2 実数解をもつことより，

$$D = (k-1)^2 + 4(k-1) > 0$$

$(k-1)(k+3) > 0$ より，$k < -3,\ 1 < k$

(2) ③の解を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，2 交点を $(\alpha,\ k\alpha + k - 1)$，$(\beta,\ k\beta + k - 1)$ とおくことができるので，

$$L = \sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (k\beta + k - 1 - k\alpha - k + 1)^2} = \sqrt{1+k^2}\,(\beta - \alpha)$$

$$S = \int_\alpha^\beta (kx + k - 1 - x^2 - x)\,dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

よって，$\dfrac{S}{L^3} = \dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6(\sqrt{1+k^2}\,)^3(\beta-\alpha)^3} = \dfrac{1}{6(\sqrt{1+k^2}\,)^3}$

ここで(1)より，$k < -3,\ 1 < k$ なので，$1 + k^2 > 2$ となり，

$$0 < \frac{S}{L^3} < \frac{1}{6(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{24}$$

コメント

本年度 5 題中，最も基本的な問題です。落とすことはできません。

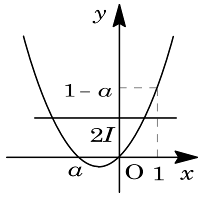
問　題

a を実数とする。x の 2 次方程式 $x^2 - ax = 2\int_0^1 |t^2 - at|\,dt$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。 [2000]

解答例

$I = \int_0^1 |t^2 - at|\,dt$ とおくと, $x^2 - ax = 2I$ の解の個数は，$y = x^2 - ax$ と $y = 2I$ のグラフの共有点の個数と一致する。

(i)　$a < 0$ のとき



$$I = \int_0^1 (t^2 - at)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$$

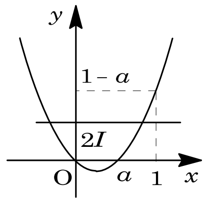
$$2I - (1 - a) = \frac{2}{3} - a - 1 + a = -\frac{1}{3} < 0$$

よって，$0 < 2I < 1 - a$ となるので，右図より，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$I = \int_0^a -(t^2 - at)\,dt + \int_a^1 (t^2 - at)\,dt = -\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2\right]_0^a + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2\right]_a^1$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$



$$2I - (1 - a) = \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3} - 1 + a = \frac{1}{3}(2a^3 - 1)$$

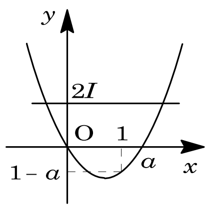
(ii-i)　$2I \leqq 1 - a \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ のとき

$0 < 2I \leqq 1 - a$ となるので，右図より，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii-ii)　$2I > 1 - a \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a \leqq 1\right)$ のとき

$0 < 1 - a < 2I$ となるので, $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に解はない。

(iii)　$1 < a$ のとき



$0 < 2I$ となるので，右図より, $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に解はない。

(i)(ii)(iii)より，求める解の個数は，$a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき 1 個，$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a$ のとき 0 個である。

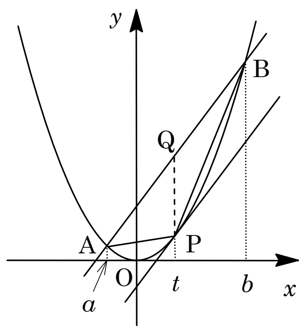
コメント

$I > 0$ が場合分けを少なくし，議論をスッキリさせるポイントです。

問　題

xy 平面上で放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$（$a<b$）をとり，線分 AB と放物線で囲まれた図形の面積を s とする。点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を放物線上にとり，三角形 ABP の面積を $S(\mathrm{P})$ とする。t が $a<t<b$ の範囲を動くときの $S(\mathrm{P})$ の最大値を S とするとき，s と S の比を求めよ。 [1998]

解答例



$y=x^2$ より $y'=2x$ なので，P における接線の傾きは $2t$ となる。

線分 AB の傾きは，$\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b$ である。

ここで，$S(\mathrm{P})$ が最大となるのは，P における接線の傾きと線分 AB の傾きとが等しいときより，

$$2t=a+b,\ \ t=\frac{a+b}{2}$$

このとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right)$ となる。

さて，P を通り y 軸に平行な直線と線分 AB との交点を Q とすると，点 Q は線分 AB の中点となるので，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$ と表される。

以上より，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}(b-a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-2ab}{4}(b-a)=\frac{1}{8}(b-a)^3$$

また，線分 AB と放物線で囲まれた面積は，

$$s=\int_a^b-(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

よって，$s:S=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{8}=4:3$

コメント

頻出有名問題です。上のように接線の傾きに着目する解法がベストですが，普通に $S(\mathrm{P})$ を立式して最大値を求めても，時間が不足するということはないでしょう。完答しなくてはいけない問題です。

問　題

直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

まず，$y=px+q$ ……①，$y=x^2-x$ ……②に対して，①と②が共有点をもつ条件は，①②を連立して，$x^2-x=px+q$，$x^2-(p+1)x-q=0$ から，

$$D=(p+1)^2+4q\geqq 0,\ q\geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

次に，$y=|x|+|x-1|+1$ ……④に対して，①と④が共有点をもたない条件は，

(i)　$x\leqq 0$ のとき　④は，$y=-x-(x-1)+1=-2x+2$ となり，①と連立して，

$$px+q=-2x+2,\ (p+2)x+q-2=0$$

すると，$(p+2\leqq 0$ かつ $q-2>0)$ または $(p+2\geqq 0$ かつ $q-2<0)$

(ii)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　④は，$y=x-(x-1)+1=2$ となり，①と連立して，

$$px+q=2,\ px+q-2=0$$

すると，$(q-2>0$ かつ $p+q-2>0)$ または $(q-2<0$ かつ $p+q-2<0)$

(iii)　$x\geqq 1$ のとき　④は，$y=x+(x-1)+1=2x$ となり，①と連立して，

$$px+q=2x,\ (p-2)x+q=0$$

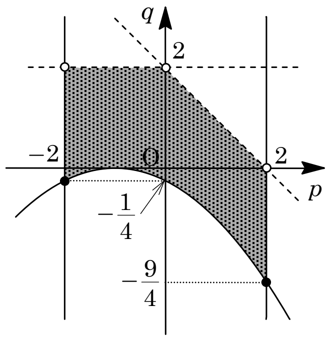
すると，$(p-2\geqq 0$ かつ $p+q-2>0)$ または $(p-2\leqq 0$ かつ $p+q-2<0)$

(ii)(iii)をまとめると，$(p\geqq 2$ かつ $q>2)$ または $(p\leqq 2$ かつ $q<2$ かつ $p+q<2)$

(i)を合わせて，①と④が共有点をもたない条件は，

$$-2\leqq p\leqq 2 \text{ かつ } q<2 \text{ かつ } p+q<2 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

したがって，求める $(p,\ q)$ の条件は，③かつ⑤となり，それを図示すると右図の網点部となる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



また，この範囲の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}(2+4)\cdot 2-\int_{-2}^{2}-\frac{1}{4}(p+1)^2\,dp$$

$$=6+\frac{1}{12}\Big[\,(p+1)^3\,\Big]_{-2}^{2}=6+\frac{1}{12}(27+1)=\frac{25}{3}$$

コメント

直球で勝負という感じの解法です。かなり時間がかかりました。共有点をもたない条件は図形的に解いた方がよかったようです。

問　題

座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $4x+y\leqq 9$，$x+2y\geqq 4$，$2x-3y\geqq -6$ の範囲を動くとき，$2x+y$，x^2+y^2 のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。 [2010]

解答例＋映像解説

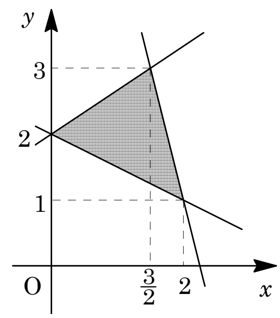
3 直線 $4x+y=9$ ……①，$x+2y=4$ ……②，$2x-3y=-6$ ……③に対して，

①②の交点は，$4x+y=9$，$x+2y=4$ から，$(x,\ y)=(2,\ 1)$

②③の交点は，$x+2y=4$，$2x-3y=-6$ から，$(x,\ y)=(0,\ 2)$

③①の交点は，$2x-3y=-6$，$4x+y=9$ から，$(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$

これより，領域 $4x+y\leqq 9$，$x+2y\geqq 4$，$2x-3y\geqq -6$ を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。



ここで，$2x+y=k$ とおくと，$y=-2x+k$ となり，k は傾き -2 の直線群の y 切片を表す。

この直線が，領域を共有点をもつ範囲を求めると，k は，$(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$ のとき，最大値 $k=2\times\frac{3}{2}+3=6$ をとり，$(x,\ y)=(0,\ 2)$ のとき，最小値 $k=2\times 0+2=2$ をとる。

また，$x^2+y^2=r$ とおくと，r は原点を中心とする円の半径の 2 乗を表す。

この円が領域と共有点をもつ範囲を求めると，r は，$(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$ のとき，最大値 $r=\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\frac{45}{4}$ をとる。

さて，原点と直線②の距離は，$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$ であり，また直線②の法線ベクトルの成分を $(1,\ 2)$ とおくことができるので，垂線方向の単位ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)$ となる。これから，原点から直線②に下ろした垂線の足の座標は，

$$\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

これより，r は，$(x,\ y)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$ のとき，最小値 $r=\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{16}{5}$ をとる。

コメント

定型的で，方針に迷いの生じない問題です。

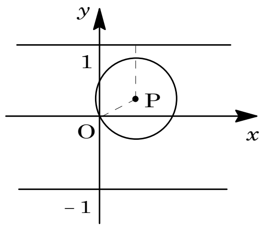
問　題

xy 平面内の $-1 \leqq y \leqq 1$ で定められる領域 D と，中心が P で原点 O を通る円 C を考える。C が D に含まれるという条件のもとで，P が動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2001]

解答例

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおき, x 軸に関する対称性から $y \geqq 0$ とすると，条件より,

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqq |y-1|,\ \ x^2+y^2 \leqq (y-1)^2$$



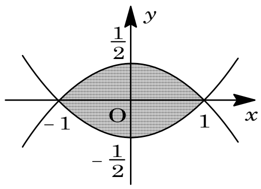
まとめて，$y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

よって, $y \geqq 0$ では $0 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ となる。

また, $y \leqq 0$ では対称性より，$\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq 0$ となる。

以上より, P が動きうる領域は,

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$



図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

この領域の面積を S とおくと,

$$S = 2\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx = \frac{4}{3}$$

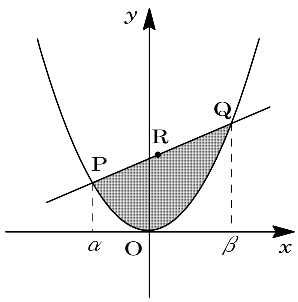
コメント

条件を数式化していけば，求める領域は自然に導き出されます。

問　題

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって, この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき, PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。　[1999]

解答例



P$(\alpha,\ \alpha^2)$, Q$(\beta,\ \beta^2)$（$\alpha<\beta$）とするとき, 放物線 $y = x^2$ と線分 PQ が囲む部分の面積 S は,

$$S = \int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

条件より, $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = 1$, $(\beta-\alpha)^3 = 6$

$$\left\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}} = 6 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, R$(x,\ y)$ とすると,

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \cdots\cdots\cdots ②,\quad y = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} \cdots\cdots\cdots ③$$

②より, $\alpha+\beta = 2x$ ………④

③④より, $\alpha\beta = -y + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} = -y + 2x^2$ ………⑤

④⑤を①に代入して,

$$(4y - 4x^2)^{\frac{3}{2}} = 6,\quad y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

コメント

典型問題です。途中の式変形も難しいところはありませんでした。なお, ①より α, β が実数という条件は満たされています。

問　題

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

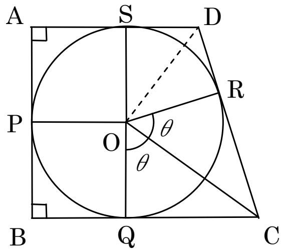
(a)　少なくとも 2 つの内角は $90°$ である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。　[2015]

解答例＋映像解説

四角形 ABCD について，その内接円の中心を O，また内接円との接点を P, Q, R, S とおく。条件(a)より，$90°$ の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)　$90°$ の内角が隣り合う $(\angle A=\angle B=90°)$ のとき

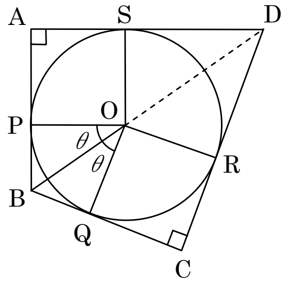


右図のように $\angle COQ=\angle COR=\theta\ (0°<\theta<90°)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\geqq 2+2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}}=4$$

等号成立は $\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}\ (\theta=45°)$ のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)　$90°$ の内角が向かい合う $(\angle A=\angle C=90°)$ のとき



右図のように $\angle BOP=\angle BOQ=\theta\ (0°<\theta<90°)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$

(i)と同様に，四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

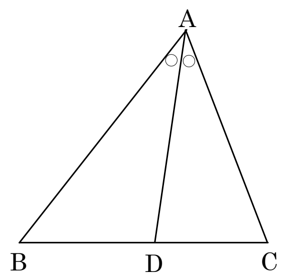
コメント

いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

問　題

辺 AB, 辺 BC, 辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。 [2011]

解答例＋映像解説



△ABC に余弦定理を適用すると，

$$\cos B=\frac{12^2+11^2-10^2}{2\cdot 12\cdot 11}=\frac{5}{8}$$

また，AD は∠BAC の二等分線より，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=6:5$$

すると，$\mathrm{BD}=\dfrac{6}{6+5}\times 11=6$ となり，△ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2=12^2+6^2-2\cdot 12\cdot 6\cos B=144+36-90=90$$

よって，$\mathrm{AD}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

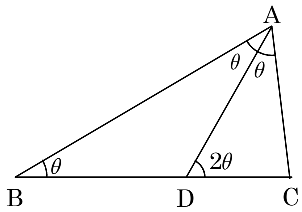
コメント

参考書に例題として載っている典型問題です。

問　題

$\triangle$ABC において AB$=2$，AC$=1$とする。$\angle$BACの二等分線と辺 BC の交点を D とする。AD$=$BDとなるとき，$\triangle$ABC の面積を求めよ。 [2010]

解答例＋映像解説



AB$=2$，AC$=1$の$\triangle$ABCで，$\angle$BAD$=\angle$DACより，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=2:1$$

よって，$\mathrm{DC}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BC}$………①

また，$\angle$BAD$=\angle$DAC$=\theta$とおくと，AD$=$BDから，

$$\angle\mathrm{B}=\theta,\ \angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{BAD}=2\theta$$

これより，$\triangle$ABC$\backsim\triangle$DACとなり，

$$\mathrm{BC}:\mathrm{AC}=\mathrm{AC}:\mathrm{DC},\ \mathrm{BC}\cdot\mathrm{DC}=\mathrm{AC}^2=1 \text{………②}$$

①②より，$\dfrac{1}{3}\mathrm{BC}^2=1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$

これより，$\triangle$ABCは$\angle\mathrm{C}=90^\circ$の直角三角形となり，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

コメント

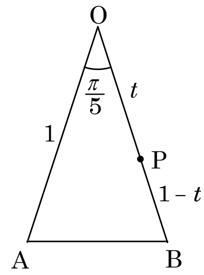
簡単そうな設定ですが，いろいろな解法が考えられ，かえって時間がかかります。

問　題

点 O を中心とする正十角形において, A, B を隣接する 2 つの頂点とする。線分 OB 上に $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PB}$ を満たす点 P をとるとき, $\mathrm{OP}=\mathrm{AB}$ が成立することを示せ。

[2010]

解答例＋映像解説



点 O を中心とする正十角形において, A, B が隣接する 2 頂点であることより, $\triangle\mathrm{OAB}$ は, $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{5}$, $\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{2\pi}{5}$ である二等辺三角形である。

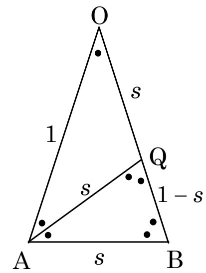
さて, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$, $\mathrm{OP}=t$ とおくと, 条件 $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PB}$ より,

$$t^2=1\times(1-t),\ t^2+t-1=0,\ t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

一方, $\angle\mathrm{OAB}$ の二等分線と辺 OB の交点を Q とおくと,

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BAQ}=\frac{\pi}{5},\ \angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{ABQ}=\frac{2\pi}{5}$$

これより, $\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{ABQ}$ となる。



ここで, $\mathrm{OQ}=s$ とおくと, $\mathrm{AQ}=\mathrm{AB}=s$ となり, ,

$$1:s=s:1-s,\ s^2+s-1=0,\ s=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

よって, $t=s$ から点 P と点 Q は一致し, $\mathrm{OP}=\mathrm{AB}$ が成立する。

コメント

$\cos\dfrac{\pi}{5}$ や $\sin\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めるときに, 誘導として現れる二等辺三角形が題材となっています。この知識をもとに, 力ずくで抑え込んだ解答例です。

問　題

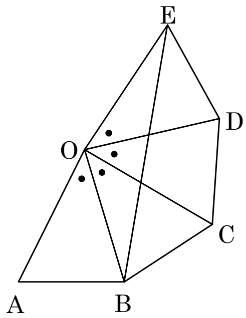
平面上で，鋭角三角形△OAB を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を△OBC，△OBC を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を△OCD，△OCD を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を△ODE とする。△OAB と△OBEの面積比が 2 : 3 のとき，$\sin\angle\mathrm{AOB}$の値を求めよ。 [2009]

解答例

$\angle\mathrm{AOB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$とおくと，$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$

また，題意より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\mathrm{OE}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OD}$

(i)　$0<3\theta\leqq\pi\left(0<\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)$のとき



$$\triangle\mathrm{OBE}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}\sin3\theta=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}\sin3\theta$$

ここで，$\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OBE}=2:3$より，

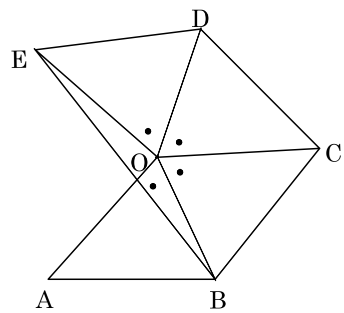
$$\sin\theta:\sin3\theta=2:3,\ 2\sin3\theta-3\sin\theta=0$$

$$2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-3\sin\theta=0$$

$$8\sin^3\theta-3\sin\theta=0$$

$0<\sin\theta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$より，$\sin\theta=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

(ii)　$\pi<3\theta\left(\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$のとき



$$\triangle\mathrm{OBE}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}\sin(2\pi-3\theta)$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}\sin3\theta$$

ここで，$\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OBE}=2:3$より，

$$\sin\theta:(-\sin3\theta)=2:3$$

$$2\sin3\theta+3\sin\theta=0,\ 8\sin^3\theta-9\sin\theta=0$$

すると，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$より，適する$\sin\theta$の値は存在しない。

(i)(ii)より，$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{4}$

コメント

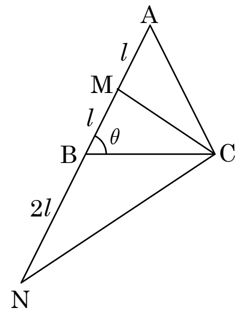
図を描いて場合分けをしましたが，絶対値を用いると，場合分けが回避できます。

問　題

$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を，$AN : NB = 2 : 1$ となるようにとる。このとき $\angle BCM = \angle BCN$ となることを示せ。ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする。

[2008]

解答例



まず，$AB = AC = 2l$，$\angle ABC = \theta$ とおくと，

$$BC = 2\times 2l\cos\theta = 4l\cos\theta$$

$\triangle BCM$ に余弦定理を適用すると，

$$CM^2 = l^2 + (4l\cos\theta)^2 - 2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos\theta$$
$$= l^2 + 8l^2\cos^2\theta = l^2(1+8\cos^2\theta)$$

次に，$\triangle BCN$ に余弦定理を適用すると，

$$CN^2 = (2l)^2 + (4l\cos\theta)^2 - 2\cdot 2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos(\pi-\theta)$$
$$= 4l^2 + 32l^2\cos^2\theta = 4l^2(1+8\cos^2\theta)$$

すると，$CM^2 : CN^2 = 1 : 4$ となり，

$$CM : CN = 1 : 2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，条件より，$MB : BN = 1 : 2 \cdots\cdots\cdots ②$

①②から，$MB : BN = CM : CN$ となることより，$\angle BCM = \angle BCN$ である。

コメント

内角の二等分線の定理を利用するという方針を立て，その方向に沿って解きました。他にもいろいろな解法が考えられます。

問　題

三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。この三角形 ABC は次の条件(イ), (ロ), (ハ)を満たすとする。

(イ)　ともに 2 以上である自然数 p と q が存在して，$a=p+q$，$b=pq+p$，$c=pq+1$ となる。

(ロ)　自然数 n が存在して a, b, c のいずれかは 2^n である。

(ハ)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C のいずれかは $60°$ である。

このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C を大きさの順に並べよ。

(2)　a, b, c を求めよ。　[2000]

解答例

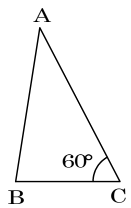
(1)　条件(イ)より，$b-c=pq+p-(pq+1)=p-1>0$

$c-a=pq+1-(p+q)=(p-1)(q-1)>0$

これから, $a<c<b$ となるので，$\angle A<\angle C<\angle B$

(2)　$\angle A=60°$ とすると, (1)より $\angle A+\angle B+\angle C>60°+60°+60°=180°$

$\angle B=60°$ とすると, (1)より $\angle A+\angle B+\angle C<60°+60°+60°=180°$



いずれも不適なので，条件(ハ)より，$\angle C=60°$

$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，

$$(pq+1)^2=(pq+p)^2+(p+q)^2-2(pq+p)(p+q)\cos 60°$$

変形して，$pq+1=p^2q+p^2+q^2-pq^2$

$$(q+1)p^2-q(q+1)p+(q+1)(q-1)=0,\ (q+1)(p-1)(p-q+1)=0$$

$p>1$, $q>1$ より，$q=p+1$

よって，$a=2p+1$，$b=p(p+2)$，$c=p(p+1)+1$

すると, a, c は p の偶奇にかかわらずともに奇数なるので，条件(ロ)より，

$$p(p+2)=2^n$$

よって，p は 2 以上の自然数なので，k, l を $k<l$ を満たす自然数として，$p=2^k$，$p+2=2^l$ と表すことができる。

$$2^l-2^k=2,\ 2^k(2^{l-k}-1)=2,\ 2^{k-1}(2^{l-k}-1)=1$$

$k-1\geqq 0$，$l-k\geqq 1$ なので，$k-1=0$ かつ $l-k=1$ となる。

すなわち，$k=1$，$l=2$ から，$p=2$ である。

以上より，$a=5$，$b=8$，$c=7$

コメント

三角形の辺と角の大小関係については，明らかとしてよいのでしょう。数学 A の教科書には，その証明が載っていたり載っていなかったりと，まちまちですが，ちょっと気になりました。

問　題

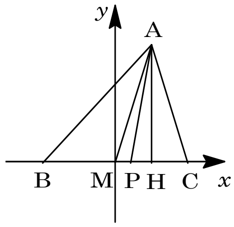
鋭角三角形△ABC において，辺 BC の中点を M，A から BC にひいた垂線を AH とする。点 P を線分 MH 上にとるとき，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 \geqq 2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

となることを示せ。 [1999]

解答例

M を原点とし，$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$ をおく。



このとき，$a>0,\ b>0,\ c>0$ としても一般性は失われない。

また，△ABC が鋭角三角形より $0<a<c$ となる。

すると $\mathrm{H}(a,\ 0)$ となることから，$\mathrm{P}(p,\ 0)$ とおくと，
条件より $0\leqq p\leqq a$ となる。

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2$$
$$2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=2\left\{(a-p)^2+b^2\right\}+(p+c)^2+(c-p)^2$$
$$=2a^2+2b^2+4p^2+2c^2-4ap$$

ここで，$0\leqq p\leqq a$ より，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-(2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)=-4p^2+4ap=4p(a-p)\geqq 0$$

よって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\geqq 2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$

コメント

ベクトルを利用しようか，座標を用いようかと迷いましたが，後者で解を作りました。中線定理の証明と同じように座標系を設定すると，簡単に示せました。