

《2019 入試対策》

# 京都大学

理系数学



電送数学舎

## まえがき

本書には、1998年度以降に出題された京都大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

利便性の向上のため、対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の **1**, **2**…などの問題番号、解答編の **問題** の文字がリンク元です。

また、2010年度以降に出題された過去問について、その解答例の映像解説を、YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の **解答例＋映像解説** です。

なお、映像解説の一覧は、下記のページに掲載しています。

PC サイト トップページ ≫ 京大数学 映像ライブラリー

## 本書の構成について

- 1 本書は2部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
  - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
  - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
  - (3) 1つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
  - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
  - (5) 出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。  
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

## 目 次

分野別問題一覧 .....	3
分野別問題と解答例 .....	27
図形と式 .....	28
図形と計量 .....	33
ベクトル .....	40
整数と数列 .....	58
確 率 .....	85
論 証 .....	104
複素数 .....	113
曲 線 .....	128
極 限 .....	129
微分法 .....	138
積分法 .....	155
積分の応用 .....	165

# 分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式 |||

1 0 でない実数  $a, b, c$  は次の条件(i)と(ii)を満たしながら動くものとする。

(i)  $1 + c^2 \leq 2a$

(ii) 2つの放物線  $C_1 : y = ax^2$  と  $C_2 : y = b(x-1)^2 + c$  は接している。

ただし、2つの曲線が接するとは、ある共有点において共通の接線をもつことであり、その共有点を接点という。

(1)  $C_1$  と  $C_2$  の接点の座標を  $a$  と  $c$  を用いて表せ。

(2)  $C_1$  と  $C_2$  の接点が動く範囲を求め、その範囲を図示せよ。 [2018]

2  $x$  を正の実数とする。座標平面上の3点  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $P(x, x)$  をとり、 $\triangle APB$  を考える。 $x$  の値が変化するとき、 $\angle APB$  の最大値を求めよ。 [2010]

3 定数  $a$  は実数であるとする。関数  $y = |x^2 - 2|$  と  $y = |2x^2 + ax - 1|$  のグラフの共有点はいくつあるか。 $a$  の値によって分類せよ。 [2008]

4  $xy$  平面上の原点と点  $(1, 2)$  を結ぶ線分(両端を含む)を  $L$  とする。曲線  $y = x^2 + ax + b$  が  $L$  と共有点をもつような実数の組  $(a, b)$  の集合を  $ab$  平面上に図示せよ。 [2005]

5 放物線  $y = x^2$  の上を動く2点  $P, Q$  があって、この放物線と線分  $PQ$  が囲む部分の面積が常に1であるとき、 $PQ$  の中点  $R$  が描く図形の方程式を求めよ。 [1999]

■ 図形と計量 |||

1  $\alpha$  は  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  を満たす定数とし、四角形  $ABCD$  に関する次の2つの条件を考える。

(i) 四角形  $ABCD$  は半径1の円に内接する。

(ii)  $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで、4辺の長さの積  $k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$  が最大となるものについて、 $k$  の値を求めよ。 [2018]

2  $\triangle ABC$  は鋭角三角形であり、 $\angle A = \frac{\pi}{3}$  であるとする。また  $\triangle ABC$  の外接円の半径は 1 であるとする。

- (1)  $\triangle ABC$  の内心を  $P$  とするとき、 $\angle BPC$  を求めよ。  
 (2)  $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  のとりうる値の範囲を求めよ。 [2017]

3 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

- (a) 少なくとも 2 つの内角は  $90^\circ$  である。  
 (b) 半径 1 の円が内接する。ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。 [2015]

4  $\triangle ABC$  は、条件  $\angle B = 2\angle A$ 、 $BC = 1$  を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき、 $\cos \angle B$  を求めよ。 [2014]

5  $1 < a < 2$  とする。3 辺の長さが  $\sqrt{3}$ 、 $a$ 、 $b$  である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき、 $a$  を用いて  $b$  を表せ。 [2010]

6 地球上の北緯  $60^\circ$  東経  $135^\circ$  の地点を  $A$ 、北緯  $60^\circ$  東経  $75^\circ$  の地点を  $B$  とする。 $A$  から  $B$  に向かう 2 種類の飛行経路  $R_1$ 、 $R_2$  を考える。 $R_1$  は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。 $R_2$  は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。 $R_1$  に比べて  $R_2$  は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし、飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば、三角関数表を用いよ。

注：大円とは、球を球の中心を通る平面で切ったとき、その切り口にできる円のことである。 [2008]

7 直角三角形に半径  $r$  の円が内接していて、三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) この三角形の斜辺の長さを  $r$  で表せ。  
 (2)  $r$  の値が問題の条件を満たしながら変化するとき、この三角形の面積の最大値を求めよ。 [1998]



**7** 四面体  $ABCD$  において  $\overrightarrow{CA}$  と  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DA}$  と  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{CD}$  はそれぞれ垂直であるとする。このとき、頂点  $A$ , 頂点  $B$  および辺  $CD$  の中点  $M$  の 3 点を通る平面は辺  $CD$  と直交することを示せ。 [2010]

**8**  $xyz$  空間で  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(3, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(0, 0, 4)$ ,  $E(3, 0, 4)$ ,  $F(3, 2, 4)$ ,  $G(0, 2, 4)$  を頂点とする直方体  $OABC-DEFG$  を考える。辺  $AE$  を  $s:1-s$  に内分する点を  $P$ , 辺  $CG$  を  $t:1-t$  に内分する点を  $Q$  とおく。ただし,  $0 < s < 1, 0 < t < 1$  とする。  $D$  を通り,  $O, P, Q$  を含む平面に垂直な直線が線分  $AC$ (両端を含む)と交わるような  $s, t$  の満たす条件を求めよ。 [2009]

**9** 点  $O$  を中心とする円に内接する  $\triangle ABC$  の 3 辺  $AB, BC, CA$  をそれぞれ  $2:3$  に内分する点を  $P, Q, R$  とする。  $\triangle PQR$  の外心が点  $O$  と一致するとき,  $\triangle ABC$  はどのような三角形か。 [2007]

**10** 点  $O$  を原点とする座標空間の 3 点を  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(2, 3, 0)$ ,  $P(5+t, 9+2t, 5+3t)$  とする。線分  $OP$  と線分  $AB$  が交点をもつような実数  $t$  が存在することを示せ。また, そのときの交点の座標を求めよ。 [2006]

**11**  $\triangle ABC$  に対し, 辺  $AB$  上に点  $P$  を, 辺  $BC$  上に点  $Q$  を, 辺  $CA$  上に点  $R$  を, 頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき, この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。 [2006]

**12** 四面体  $OABC$  は次の 2 つの条件

(i)  $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$

(ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき, この四面体は正四面体であることを示せ。 [2003]

**13**  $xyz$  空間内の正八面体の頂点  $P_1, P_2, \dots, P_6$  とベクトル  $\vec{v}$  に対し,  $k \neq m$  のとき  $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} \neq 0$  が成り立っているとする。このとき,  $k$  と異なるすべての  $m$  に対し,  $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$  が成り立つような点  $P_k$  が存在することを示せ。 [2001]



**14** 円に内接する四角形  $ABPC$  は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ) 三角形  $ABC$  は正三角形である。

(ロ)  $AP$  と  $BC$  の交点は線分  $BC$  を  $p : 1 - p$  ( $0 < p < 1$ ) の比に内分する。

このときベクトル  $\overrightarrow{AP}$  を  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $p$  を用いて表せ。 [2000]

**15**  $\vec{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{b} = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}, 0\right)$  とする。

(1) 長さ 1 の空間ベクトル  $\vec{c}$  に対し,  $\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ,  $\cos \beta = \vec{b} \cdot \vec{c}$  とおく。このとき次の不等式(\*)が成り立つことを示せ。

$$(*) \quad \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \leq \frac{3}{4}$$

(2) 不等式(\*)を満たす  $(\alpha, \beta)$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ ) の範囲を図示せよ。 [2000]

**16** 四面体  $OABC$  の辺  $OA$  上に点  $P$ , 辺  $AB$  上に点  $Q$ , 辺  $BC$  上に点  $R$ , 辺  $CO$  上に点  $S$  をとる。これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき, この平行四辺形  $PQRS$  の 2 つの対角線の交点は 2 つの線分  $AC$  と  $OB$  のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ。 [1998]

■ 整数と数列 |||||

**1**  $n^3 - 7n + 9$  が素数となるような整数  $n$  をすべて求めよ。 [2018]

**2**  $p, q$  を自然数,  $\alpha, \beta$  を,  $\tan \alpha = \frac{1}{p}$ ,  $\tan \beta = \frac{1}{q}$  を満たす実数とする。このとき,  $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$  を満たす  $p, q$  の組  $(p, q)$  をすべて求めよ。 [2017]

**3** 素数  $p, q$  を用いて,  $p^q + q^p$  と表される素数をすべて求めよ。 [2016]

**4** 自然数  $a, b$  はどちらも 3 で割り切れないが,  $a^3 + b^3$  は 81 で割り切れる。このような  $a, b$  の組  $(a, b)$  のうち,  $a^2 + b^2$  の値を最小にするものと, そのときの  $a^2 + b^2$  の値を求めよ。 [2014]

5  $N$  を 2 以上の自然数とし,  $a_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) を次の性質(i), (ii)を満たす数列とする。

(i)  $a_1 = 2^N - 3$

(ii)  $n=1, 2, \dots$  に対して,  $a_n$  が偶数のとき  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ ,  $a_n$  が奇数のとき

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}$$

このとき, どのような自然数  $M$  に対しても,  $\sum_{n=1}^M a_n \leq 2^{N+1} - N - 5$  が成り立つことを示せ。 [2013]

6  $n$  を自然数とし, 整式  $x^n$  を整式  $x^2 - 2x - 1$  で割った余りを  $ax + b$  とする。このとき  $a$  と  $b$  は整数であり, さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 [2013]

7 (1)  $\sqrt[3]{2}$  が無理数であることを証明せよ。  
 (2)  $P(x)$  は有理数を係数とする  $x$  の多項式で,  $P(\sqrt[3]{2}) = 0$  を満たしているとする。このとき  $P(x)$  は  $x^3 - 2$  で割り切れることを証明せよ。 [2012]

8  $n$  は 2 以上の整数であり,  $\frac{1}{2} < a_j < 1$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) であるとき, 不等式

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \right)$$

が成立することを示せ。 [2011]

9 次の問いに答えよ。

(1)  $n$  を正の整数,  $a = 2^n$  とする。  $3^a - 1$  は  $2^{n+2}$  で割り切れるが  $2^{n+3}$  では割り切れないことを示せ。

(2)  $m$  を正の偶数とする。  $3^m - 1$  が  $2^m$  で割り切れるならば  $m = 2$  または  $m = 4$  であることを示せ。 [2010]

**10**  $a$  と  $b$  を互いに素, すなわち 1 以外の公約数をもたない正の整数とし, さらに  $a$  は奇数とする。正の整数  $n$  に対して整数  $a_n, b_n$  を

$$(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たすように定めるとき, 次の(1), (2)を示せ。ただし  $\sqrt{2}$  が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (1)  $a_2$  は奇数であり,  $a_2$  と  $b_2$  は互いに素である。  
 (2) すべての  $n$  に対して,  $a_n$  は奇数であり,  $a_n$  と  $b_n$  は互いに素である。 [2009]

**11**  $p$  を 3 以上の素数とする。4 個の整数  $a, b, c, d$  が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき,  $a, b, c, d$  を  $p$  を用いて表せ。 [2007]

**12** 2 以上の自然数  $n$  に対し,  $n$  と  $n^2 + 2$  がともに素数になるのは  $n = 3$  の場合に限ることを示せ。 [2006]

**13**  $2^{10} < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$  を満たす自然数  $n$  は何個あるか。ただし  $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$  である。 [2005]

**14**  $a^3 - b^3 = 217$  を満たす整数の組  $(a, b)$  をすべて求めよ。 [2005]

**15** 正の数からなる数列  $\{a_n\}$  が次の条件(i), (ii)を満たすとき,  $\sum_{k=1}^n a_k$  を求めよ。

- (i)  $a_1 = 1$   
 (ii)  $\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1)$  ( $n \geq 2$ ) [2003]

**16**  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$  は整数を係数とする  $x$  の 4 次式とする。4 次方程式  $f(x) = 0$  の重複も込めた 4 つの解のうち, 2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき  $a, b, c$  の値を求めよ。 [2002]

**17** 整数  $n$  に対し  $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$  とおき,  $a_n = i^{f(n)}$  と定める。ただし,  $i$  は虚数単位を表す。このとき,  $a_{n+k} = a_n$  が任意の整数  $n$  に対して成り立つような正の整数  $k$  をすべて求めよ。 [2001]

**18**  $p$  を 2 以上の整数とする。2 以上の整数  $n$  に対し、次の条件(イ), (ロ)を満たす複素数の組  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  の個数を  $a_n$  とする。

(イ)  $k=1, 2, \dots, n$  に対し、 $z_k^p = 1$  かつ  $z_k \neq 1$

(ロ)  $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$

このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $a_3$  を求めよ。

(2)  $a_{n+2}$  を  $a_n, a_{n+1}$  の一方または両方を用いて表せ。

(3)  $a_n$  を求めよ。

[2001]

**19**  $f(x) = x^2 + 7$  とおく。

(1)  $n$  は 3 以上の自然数で、ある自然数  $a$  に対して  $f(a)$  は  $2^n$  の倍数になっているとする。このとき  $f(a)$  と  $f(a+2^{n-1})$  のうち少なくとも一方は  $2^{n+1}$  の倍数であることを示せ。

(2) 任意の自然数  $n$  に対して  $f(a_n)$  が  $2^n$  の倍数となるような自然数  $a_n$  が存在することを示せ。

[1998]

■ 確率 |||||

**1** コインを  $n$  回投げて複素数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  を次のように定める。

(i) 1 回目に表が出れば  $z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$  とし、裏が出れば  $z_1 = 1$  とする。

(ii)  $k=2, 3, \dots, n$  のとき、 $k$  回目に表が出れば  $z_k = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$  とし、裏が出れば  $z_k = \overline{z_{k-1}}$  とする。ただし、 $\overline{z_{k-1}}$  は  $z_{k-1}$  の共役複素数である。

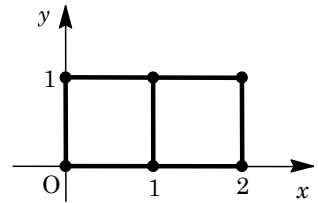
このとき、 $z_n = 1$  となる確率を求めよ。

[2018]

**2**  $n$  を自然数とする。 $n$  個の箱すべてに、**1**, **2**, **3**, **4**, **5** の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し、取り出した順に左から並べて  $n$  桁の数  $X$  を作る。このとき、 $X$  が 3 で割り切れる確率を求めよ。

[2017]

3  $xy$  平面上の 6 個の点  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$  が図のように長さ 1 の線分で結ばれている。動点  $X$  は、これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。



規則：動点  $X$  は、そのときに位置する点から出る長さ

1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに、等しい確率で移動する。

たとえば、 $X$  が  $(2, 0)$  にいるときは、 $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$  のいずれかに  $\frac{1}{2}$  の確率で移動する。また  $X$  が  $(1, 1)$  にいるときは、 $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$  のいずれかに  $\frac{1}{3}$  の確率で移動する。

時刻 0 で動点  $X$  が  $O = (0, 0)$  から出発するとき、 $n$  秒後に  $X$  の  $x$  座標が 0 である確率を求めよ。ただし  $n$  は 0 以上の整数とする。 [2016]

4 2 つの関数を、 $f_0(x) = \frac{x}{2}$ ,  $f_1(x) = \frac{x+1}{2}$  とおく。 $x_0 = \frac{1}{2}$  から始め、各  $n = 1, 2, \dots$  について、それぞれ確率  $\frac{1}{2}$  で  $x_n = f_0(x_{n-1})$  または  $x_n = f_1(x_{n-1})$  と定める。このとき  $x_n < \frac{2}{3}$  となる確率  $P_n$  を求めよ。 [2015]

5 2 つの粒子が時刻 0 において  $\triangle ABC$  の頂点  $A$  に位置している。これらの粒子は独立に運動し、それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば、ある時刻で点  $C$  にいる粒子は、その 1 秒後には点  $A$  または点  $B$  にそれぞれ  $\frac{1}{2}$  の確率で移動する。この 2 つの粒子が、時刻 0 の  $n$  秒後に同じ点にいる確率  $p(n)$  を求めよ。 [2014]

6 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き、この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し、裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1) 石が座標  $x$  の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき、石が座標  $x$  の点にある確率を求めよ。

(2) 石が原点にあるとする。 $n$  を自然数とし、 $2n$  回硬貨を投げたとき、石が座標  $2n-2$  の点にある確率を求めよ。 [2013]

**7** さいころを  $n$  回投げて出た目を順に  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする。さらに

$$Y_1 = X_1, Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \dots, n)$$

によって  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  を定める。  $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1+\sqrt{3}$  となる確率  $p_n$  を求めよ。

[2012]

**8** 箱の中に、1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし、異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び、小さい方の数を  $X$  とする。これらのカードを箱に戻して、再び 2 枚のカードを同時に選び、小さい方の数を  $Y$  とする。  $X = Y$  である確率を求めよ。

[2011]

**9**  $n$  枚のカードを積んだ山があり、各カードには上から順番に 1 から  $n$  まで番号がつけられている。ただし  $n \geq 2$  とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では、一番上のカードを取り、山の一番上にもどすか、あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら  $n$  通りの操作はすべて同じ確率であるとする。  $n$  回の試行を終えたとき、最初一番下にあったカード(番号  $n$ )が山の一番上にきている確率を求めよ。

[2009]

**10** 正四面体  $ABCD$  を考える。点  $P$  は時刻 0 では頂点  $A$  に位置し、1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに、等しい確率で動くとする。このとき、時刻 0 から時刻  $n$  までの間に、4 頂点  $A, B, C, D$  のすべてに点  $P$  が現れる確率を求めよ。ただし、 $n$  は 1 以上の整数とする。

[2008]

**11** 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

[2007]

**12** 先頭車両から順に 1 から  $n$  までの番号のついた  $n$  両編成の列車がある。ただし  $n \geq 2$  とする。各車両を赤色、青色、黄色のいずれか 1 色で塗るとき、隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

[2005]

**13**  $N$  を自然数とする。  $N+1$  個の箱があり、  $1$  から  $N+1$  までの番号が付いている。どの箱にも玉が  $1$  個入っている。番号  $1$  から  $N$  までの箱に入っている玉は白玉で、番号  $N+1$  の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作(\*)を、各々の  $k=1, 2, \dots, N+1$  に対して、 $k$  が小さい方から順番に  $1$  回ずつ行う。

(\*)  $k$  以外の番号の  $N$  個の箱から  $1$  個の箱を選び、その箱の中身と番号  $k$  の箱の中身を交換する。(ただし、 $N$  個の箱から  $1$  個の箱を選ぶ事象は、どれも同様に確からしいとする。)

操作がすべて終了した後、赤玉が番号  $N+1$  の箱に入っている確率を求めよ。

[2004]

**14**  $n$  チームがリーグ戦を行う。すなわち、各チームは他のすべてのチームとそれぞれ  $1$  回ずつ対戦する。引き分けはないものとし、勝つ確率はすべて  $\frac{1}{2}$  で、各回の勝敗は独立に決まるものとする。このとき、 $n-2$  勝  $1$  敗のチームがちょうど  $2$  チームである確率を求めよ。ただし、 $n$  は  $3$  以上とする。

[2003]

**15** 袋の中に青色、赤色、白色の形の同じ玉がそれぞれ  $3$  個ずつ入っている。各色の  $3$  個の玉にはそれぞれ  $1, 2, 3$  の番号がついている。これら  $9$  個の玉をよくかきまぜて袋から同時に  $3$  個の玉を取り出す。取り出した  $3$  個のうちに同色のものが他になく、同番号のものも他にない玉の個数を得点とする。たとえば、青  $1$  番、赤  $1$  番、白  $3$  番を取り出したときの得点は  $1$  で、青  $2$  番、赤  $2$  番、赤  $3$  番を取り出したときの得点は  $0$  である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 得点が  $n$  となるような取り出し方の数を  $A(n)$  とするとき、 $A(0)$ 、 $A(1)$ 、 $A(2)$ 、 $A(3)$  を求めよ。

(2) 得点の期待値を求めよ。

[1998]

■ 論証 |||||

**1** 四面体  $OABC$  が次の条件を満たすならば、それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点  $A, B, C$  からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし、四面体のある頂点の対面とは、その頂点を除く他の  $3$  つの頂点がなす三角形のことをいう。

[2016]

**2**  $a, b, c, d, e$  を正の実数として整式  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $g(x) = dx + e$  を考える。すべての正の整数  $n$  に対して  $\frac{f(n)}{g(n)}$  は整数であるとする。このとき、 $f(x)$  は  $g(x)$  で割り切れることを示せ。 [2015]

**3** 次の命題(p), (q)のそれぞれについて、正しいかどうか答えよ。正しいければ証明し、正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p) 正  $n$  角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが  $60^\circ$  である三角形を作ることができるならば、 $n$  は 3 の倍数である。

(q)  $\triangle ABC$  と  $\triangle ABD$  において、 $AC < AD$  かつ  $BC < BD$  ならば、 $\angle C > \angle D$  である。

[2012]

**4** 空間内に四面体  $ABCD$  を考える。このとき、4 つの頂点  $A, B, C, D$  を同時に通る球面が存在することを示せ。 [2011]

**5** 平面上の鋭角三角形  $\triangle ABC$  の内部(辺や頂点は含まない)に点  $P$  をとり、 $A'$  を  $B, C, P$  を通る円の中心、 $B'$  を  $C, A, P$  を通る円の中心、 $C'$  を  $A, B, P$  を通る円の中心とする。このとき、 $A, B, C, A', B', C'$  が同一円周上にあるための必要十分条件は  $P$  が  $\triangle ABC$  の内心に一致することであることを示せ。 [2009]

**6** 空間の 1 点  $O$  を通る 4 直線で、どの 3 直線も同一平面上にないようなものを考える。このとき、4 直線のいずれとも  $O$  以外の点で交わる平面で、4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ。 [2008]

**7**  $Q(x)$  を 2 次式とする。整式  $P(x)$  は  $Q(x)$  では割り切れないが、 $\{P(x)\}^2$  は  $Q(x)$  で割り切れるという。このとき 2 次方程式  $Q(x) = 0$  は重解をもつことを示せ。

[2006]

**8** 以下の問いに答えよ。ただし、 $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{6}$  が無理数であることは使ってよい。

(1) 有理数  $p, q, r$  について、 $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$  ならば、 $p = q = r = 0$  であることを示せ。

(2) 実数係数の 2 次式  $f(x) = x^2 + ax + b$  について、 $f(1)$ ,  $f(1 + \sqrt{2})$ ,  $f(\sqrt{3})$  のいずれかは無理数であることを示せ。 [1999]



■ 複素数 |||||

1  $w$  を 0 でない複素数,  $x, y$  を  $w + \frac{1}{w} = x + yi$  を満たす実数とする。

(1) 実数  $R$  は  $R > 1$  を満たす定数とする。  $w$  が絶対値  $R$  の複素数全体を動くとき,  $xy$  平面上の点  $(x, y)$  の軌跡を求めよ。

(2) 実数  $\alpha$  は  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  を満たす定数とする。  $w$  が偏角  $\alpha$  の複素数全体を動くとき,  $xy$  平面上の点  $(x, y)$  の軌跡を求めよ。 [2017]

2 複素数を係数とする 2 次式  $f(x) = x^2 + ax + b$  に対し, 次の条件を考える。

(イ)  $f(x^3)$  は  $f(x)$  で割り切れる。

(ロ)  $f(x)$  の係数  $a, b$  の少なくとも一方は虚数である。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ。 [2016]

3  $\alpha, \beta, \gamma$  は相異なる複素数で,  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$  を満たすとする。このとき,  $\alpha, \beta, \gamma$  の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か。(ただし, 複素平面を複素数平面ともいう。) [2005]

4 複素数  $\alpha$  に対してその共役複素数を  $\bar{\alpha}$  で表す。  $\alpha$  を実数ではない複素数とする。複素平面内の円  $C$  が  $1, -1, \alpha$  を通るならば,  $C$  は  $-\frac{1}{\alpha}$  も通ることを示せ。 [2004]

5 多項式  $(x^{100} + 1)^{100} + (x^2 + 1)^{100} + 1$  は多項式  $x^2 + x + 1$  で割り切れるか。 [2003]

6  $0 < \theta < 90$  とし,  $a$  は正の数とする。複素数平面上の点  $z_0, z_1, z_2, \dots$  を次の条件(i), (ii)を満たすように定める。

(i)  $z_0 = 0, z_1 = a$

(ii)  $n \geq 1$  のとき, 点  $z_n - z_{n-1}$  を原点のまわりに  $\theta^\circ$  回転すると点  $z_{n+1} - z_n$  に一致する。

このとき点  $z_n$  ( $n \geq 1$ ) が点  $z_0$  と一致するような  $n$  が存在するための必要十分条件は,  $\theta$  が有理数であることを示せ。 [2002]

7 未知数  $x$  に関する方程式  $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + a = 0$  が、虚軸上の複素数を解にもつような実数  $a$  をすべて求めよ。 [2001]

8 実数  $a$  は  $0 < a \leq 2$  の範囲を動くものとする。

- (1)  $y = \sqrt{x}$  と  $y = \frac{2}{a}x + 1 - \frac{1}{a}$  のグラフが共有点をもつような  $a$  の範囲を求めよ。  
 (2) 2 次方程式  $(2x + a - 1)^2 = a^2x$  の複素数の範囲で考えた 2 つの解を  $\alpha, \beta$  (ただし  $|\alpha| \leq |\beta|$ ) とする。このとき、 $|\beta|$  の最小値を求めよ。 [2000]

9  $p$  を素数、 $a, b$  を互いに素な正の整数とすると、 $(a + bi)^p$  は実数ではないことを示せ。ただし、 $i$  は虚数単位を表す。 [2000]

10 複素平面上で、 $\triangle ABC$  の頂点を表す複素数を  $\alpha, \beta, \gamma$  とする。 $\alpha, \beta, \gamma$  が次の 3 条件を満たすとする。

1.  $\triangle ABC$  は辺の長さ  $\sqrt{3}$  の正三角形である
2.  $\alpha + \beta + \gamma = 3$
3.  $\alpha\beta\gamma$  は絶対値 1 で、虚数部分は正

このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $z = \alpha - 1$  において、 $\beta$  と  $\gamma$  を  $z$  を使って表せ。  
 (2)  $\alpha, \beta, \gamma$  の偏角を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \arg \alpha \leq \arg \beta \leq \arg \gamma < 360^\circ$  とする。

[1999]

■ 曲線 |||||

1 平面上に 2 定点  $A, B$  をとる。 $c$  は正の定数として、平面上の点  $P$  が

$$|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$$

を満たすとき、点  $P$  の軌跡を求めよ。

[1999]

■ 極限 |||||

1 実数の定数  $a, b$  に対して、関数  $f(x)$  を、 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$  で定める。すべての実数  $x$  で不等式  $f(x) \leq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$  が成り立つような点  $(a, b)$  の範囲を図示せよ。 [2014]

2  $a$  が正の実数のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a^n)^{\frac{1}{n}}$  を求めよ。 [2012]

3  $x, y$  を相異なる正の実数とする。数列  $\{a_n\}$  を  
 $a_1 = 0, a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$   
 によって定めるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  が有限の値に収束するような座標平面上の点  $(x, y)$  の範囲を図示せよ。 [2007]

4  $n$  を 2 以上の自然数とする。 $x^{2n}$  を  $x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}$  で割った余りを  $a_n x + b_n$  とする。すなわち、 $x$  の多項式  $P_n(x)$  があって  
 $x^{2n} = P_n(x) \left( x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} \right) + a_n x + b_n$   
 が成り立っているとす。  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ。 [2004]

5 数列  $\{a_n\}$  の初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和を  $S_n$  と表す。この数列が  $a_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, n(n-2)a_{n+1} = S_n (n \geq 1)$  を満たすとき、一般項  $a_n$  を求めよ。 [2002]

6  $n, k$  は整数で、 $n \geq 2, 0 \leq k \leq 4$  とする。サイコロを  $n$  回投げて出た目の和を 5 で割ったときの余りが  $k$  に等しくなる確率を  $p_n(k)$  とする。

- (1)  $p_{n+1}(0), \dots, p_{n+1}(4)$  を  $p_n(0), \dots, p_n(4)$  を用いて表せ。
- (2)  $p_n(0), \dots, p_n(4)$  の最大値を  $M_n$ , 最小値を  $m_n$  とするとき、次の(イ), (ロ)が成立することを示せ。

(イ)  $m_n \leq \frac{1}{5} \leq M_n$

(ロ) 任意の  $k, l (0 \leq k, l \leq 4)$  に対し、 $p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) \leq \frac{1}{6}(M_n - m_n)$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$  を求めよ。 [2000]

**7**  $a, m$  は自然数で  $a$  は定数とする。 $xy$  平面上の点  $(a, m)$  を頂点とし、原点と点  $(2a, 0)$  を通る放物線を考える。この放物線と  $x$  軸で囲まれる領域の面積を  $S_m$ 、この領域の内部および境界線上にある格子点の数を  $L_m$  とする。このとき極限值  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L_m}{S_m}$  を求めよ。ただし  $xy$  平面上の格子点とはその点の  $x$  座標と  $y$  座標がともに整数となる点のことである。 [1998]

■ 微分法 |||||

**1** (1)  $n$  を 2 以上の自然数とするととき、関数  $f_n(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin^{n-1} \theta$  の  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  における最大値  $M_n$  を求めよ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^n$  を求めよ。 [2016]

**2** (1)  $a$  を実数とするととき、 $(a, 0)$  を通り、 $y = e^x + 1$  に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)  $a_1 = 1$  として、 $n = 1, 2, \dots$  について、 $(a_n, 0)$  を通り、 $y = e^x + 1$  に接する直線の接点の  $x$  座標を  $a_{n+1}$  とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$  を求めよ。 [2015]

**3**  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  における  $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$  の最大値を求めよ。ただし  $\pi > 3.1$  および  $\sqrt{3} > 1.7$  が成り立つことは証明なしに用いてよい。 [2013]

**4** 実数  $x, y$  が条件  $x^2 + xy + y^2 = 6$  を満たしながら動くとき  $x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$  がとりうる値の範囲を求めよ。 [2012]

**5**  $xyz$  空間で、原点  $O$  を中心とする半径  $\sqrt{6}$  の球面  $S$  と 3 点  $(4, 0, 0)$ ,  $(0, 4, 0)$ ,  $(0, 0, 4)$  を通る平面  $\alpha$  が共有点をもつことを示し、点  $(x, y, z)$  がその共有点全体の集合を動くとき、積  $xyz$  が取り得る値の範囲を求めよ。 [2011]

**6** 直線  $y = px + q$  が関数  $y = \log x$  のグラフと共有点をもたないために  $p$  と  $q$  が満たすべき必要十分条件を求めよ。 [2008]

**7** すべての実数で定義され何回でも微分できる関数  $f(x)$  が  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  を満たし、さらに任意の実数  $a, b$  に対して  $1 + f(a)f(b) \neq 0$  であって

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1) 任意の実数  $a$  に対して、 $-1 < f(a) < 1$  であることを証明せよ。

(2)  $y = f(x)$  のグラフは  $x > 0$  で上に凸であることを証明せよ。 [2007]

**8**  $k$  を正の整数とし、 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$  の範囲で定義された 2 曲線

$$C_1 : y = \cos x, \quad C_2 : y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える。

(1)  $C_1$  と  $C_2$  は共有点をもつことを示し、その点における  $C_1$  の接線は点  $(0, 1)$  を通ることを示せ。

(2)  $C_1$  と  $C_2$  の共有点はただ 1 つであることを証明せよ。 [2005]

**9**  $f(\theta) = \cos 4\theta - 4 \sin^2 \theta$  とする。  $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$  における  $f(\theta)$  の最大値および最小値を求めよ。 [2004]

**10** 半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。

(1)  $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$  ならば  $\triangle ABC$  は鋭角三角形であることを示せ。

(2)  $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$  が成立することを示せ。また、この等号が成立するのはどのような場合か。 [2002]

**11**  $a, b, c$  を実数とする。  $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$  と  $y = c$  のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき  $a^2 > b$  が成立することを示し、さらにこれらの交点の  $x$  座標のすべては开区間  $(-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$  に含まれていることを示せ。

[2002]

**12**  $xy$  平面上の曲線  $C : y = x^3$  上の点 P における接線を、P を中心にして反時計回りに  $45^\circ$  回転して得られる直線を  $L$  とする。  $C$  と  $L$  が、相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。 [2001]

- 13**  $a$  を  $0 < a < 1$  を満たす定数として、曲線  $y = \log(x - a)$  と  $x$  軸と 2 直線  $x = 1$ ,  $x = 3$  で囲まれる図形を  $x$  軸のまわりに回転して得られる立体の体積を  $V(a)$  とする。
- (1)  $V(a)$  を求めよ。
- (2)  $a$  の値が  $0 < a < 1$  の範囲で変化するとき、 $V(a)$  の最小値を求めよ。 [1998]

■ 積分法 |||||

**1** 定積分  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx$  の値を求めよ。 [2012]

**2** 定積分  $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2} dx$  を求めよ。 [2011]

**3**  $n$  個のボールを  $2n$  個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし、どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を  $p_n$  とする。このとき、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{n}$  を求めよ。 [2010]

**4** 定積分  $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$  を求めよ。 [2007]

**5**  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  として、関数  $F$  を  $F(\theta) = \int_0^\theta x \cos(x + \alpha) dx$  で定める。 $\theta$  が  $[0, \frac{\pi}{2}]$  の範囲を動くとき、 $F$  の最大値を求めよ。 [2006]

**6** 次の極限值を求めよ。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx$  [2001]

7 数列  $\{c_n\}$  を次の式で定める。

$$c_n = (n+1) \int_0^1 x^n \cos \pi x dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

このとき、

(1)  $c_n$  と  $c_{n+2}$  の関係を求めよ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  を求めよ。

(3) (2) で求めた極限値を  $c$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - c}{c_n - c}$  を求めよ。 [2000]

8 (1)  $a_0 < b_0$ ,  $a_1 < b_1$  を満たす正の実数  $a_0, b_0, a_1, b_1$  について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{b_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{a_1^2}{b_0^2 + 1} > \frac{a_1^2}{a_0^2 + 1} + \frac{b_1^2}{b_0^2 + 1}$$

(2)  $n$  個の自然数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  は互いに相異なり、 $1 \leq x_k \leq n$  ( $1 \leq k \leq n$ ) を満たしているとする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2 + 1} > n - \frac{8}{5} \quad [1999]$$

■ 積分の応用 |||||

1 曲線  $y = \log x$  上の点  $A(t, \log t)$  における法線上に、点  $B$  を  $AB = 1$  となるようにとる。ただし  $B$  の  $x$  座標は  $t$  より大きいものとする。

(1) 点  $B$  の座標  $(u(t), v(t))$  を求めよ。また  $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$  を求めよ。

(2) 実数  $r$  は  $0 < r < 1$  を満たすとし、 $t$  が  $r$  から 1 まで動くときに点  $A$  と点  $B$  が描く曲線の長さをそれぞれ  $L_1(r), L_2(r)$  とする。このとき、極限  $\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r))$  を求めよ。 [2018]

2  $a \geq 0$  とする。  $0 \leq x \leq \sqrt{2}$  の範囲で曲線  $y = xe^{-x}$ , 直線  $y = ax$ , 直線  $x = \sqrt{2}$  によって囲まれた部分の面積を  $S(a)$  とする。このとき、 $S(a)$  の最小値を求めよ。

(ここで「囲まれた部分」とは、上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。) [2017]

**3**  $xyz$  空間において、平面  $y = z$  の中で、 $|x| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1$ ,  $0 \leq y \leq \log a$  で与えられる図形  $D$  を考える。ただし  $a$  は 1 より大きい定数とする。

この図形  $D$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2016]

**4** 2 つの関数  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$  と  $y = \sin 2x$  のグラフの  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の部分で囲まれる領域を、 $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、 $x = 0$  と  $x = \frac{\pi}{2}$  は領域を囲む線とは考えない。 [2015]

**5** 双曲線  $y = \frac{1}{x}$  の第 1 象限にある部分と、原点  $O$  を中心とする円の第 1 象限にある部分を、それぞれ  $C_1$ ,  $C_2$  とする。 $C_1$  と  $C_2$  は 2 つの異なる点  $A$ ,  $B$  で交わり、点  $A$  における  $C_1$  の接線  $l$  と線分  $OA$  のなす角は  $\frac{\pi}{6}$  であるとする。このとき、 $C_1$  と  $C_2$  で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2014]

**6**  $xy$  平面上で、 $y$  軸上の点  $P$  を中心とする円  $C$  が 2 つの曲線

$$C_1 : y = \sqrt{3} \log(1+x), \quad C_2 : y = \sqrt{3} \log(1-x)$$

とそれぞれ点  $A$ , 点  $B$  で接しているとする。さらに  $\triangle PAB$  は  $A$  と  $B$  が  $y$  軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし、2 つの曲線がある点で接するとは、その点を共有し、さらにその点において共通の接線をもつことである。 [2013]

**7**  $xy$  平面上で、 $y = x$  のグラフと  $y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2$  のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2011]

**8**  $a$  を正の実数とする。座標平面において曲線  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) と  $x$  軸とで囲まれた図形の面積を  $S$  とし、曲線  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ),  $y = a \cos x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) および  $x$  軸で囲まれた図形の面積を  $T$  とする。このとき  $S : T = 3 : 1$  となるような  $a$  の値を求めよ。 [2010]



- 9  $xy$  平面上で原点を極,  $x$  軸の正の部分が始線とする極座標に関して, 極方程式
- $$r = 2 + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

により表される曲線を  $C$  とする。  $C$  と  $x$  軸とで囲まれた図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。 [2009]

- 10 次の式で与えられる底面の半径が 2, 高さが 1 の円柱  $C$  を考える。

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

$xy$  平面上の直線  $y=1$  を含み,  $xy$  平面と  $45^\circ$  の角をなす平面のうち, 点  $(0, 2, 1)$  を通るものを  $H$  とする。円柱  $C$  を平面  $H$  で 2 つに分けるととき, 点  $(0, 2, 0)$  を含む方の体積を求めよ。 [2008]

- 11 関数  $y = f(x)$  のグラフは, 座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの  $x \leq 0$  の部分は, 軸が  $y$  軸に平行で, 点  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  を頂点とし, 原点を通る放物線と一致している。このとき  $x = -1$  におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2006]

- 12  $\alpha > 0$  とし,  $x > 0$  で定義された関数  $f(x) = \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right) \frac{\log x}{x}$  を考える。  $y = f(x)$  のグラフより下側で  $x$  軸より上側の部分の面積を  $\alpha$  で表せ。ただし,  $e$  は自然対数の底である。 [2004]

- 13  $f(x) = x \sin x$  ( $x \geq 0$ ) とする。点  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  における  $y = f(x)$  の法線と,  $y = f(x)$  のグラフの  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の部分, および  $y$  軸とで囲まれる図形を考える。この図形を  $x$  軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。 [2003]

- 14 (1)  $x \geq 0$  で定義された関数  $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$  について, 導関数  $f'(x)$  を求めよ。

(2) 極方程式  $r = \theta$  ( $\theta \geq 0$ ) で定義される曲線の,  $0 \leq \theta \leq \pi$  の部分の長さを求めよ。

[2002]

15  $x, y$  は  $t$  を媒介変数として、次のように表示されているものとする。

$$x = \frac{3t - t^2}{t+1}, \quad y = \frac{3t^2 - t^3}{t+1}$$

変数  $t$  が  $0 \leq t \leq 3$  を動くとき、 $x$  と  $y$  の動く範囲をそれぞれ求めよ。さらに、この  $(x, y)$  が描くグラフが囲む図形と領域  $y \geq x$  の共通部分の面積を求めよ。 [1999]



# 分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

**問題**

0でない実数  $a, b, c$  は次の条件(i)と(ii)を満たしながら動くものとする。

- (i)  $1 + c^2 \leq 2a$
- (ii) 2つの放物線  $C_1 : y = ax^2$  と  $C_2 : y = b(x-1)^2 + c$  は接している。

ただし、2つの曲線が接するとは、ある共有点において共通の接線をもつことであり、その共有点を接点という。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  の接点の座標を  $a$  と  $c$  を用いて表せ。
- (2)  $C_1$  と  $C_2$  の接点が動く範囲を求め、その範囲を図示せよ。 [2018]

**解答例+映像解説**

- (1)  $C_1 : y = ax^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $C_2 : y = b(x-1)^2 + c \cdots \cdots \textcircled{2}$  の接点の座標を  $(t, at^2)$  とおく。  
 $at^2 = b(t-1)^2 + c \cdots \cdots \textcircled{3}$

①より  $y' = 2ax$ , ②より  $y' = 2b(x-1)$  なので,  $2at = 2b(t-1) \cdots \cdots \textcircled{4}$

④を③に代入すると,  $at^2 = at(t-1) + c$  となり,  $at = c$

$a \neq 0$  から  $t = \frac{c}{a}$ , そして  $at^2 = \frac{c^2}{a}$  となり, 接点の座標は  $(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a})$  である。

- (2) 接点を  $(x, y)$  とおくと,  $x = \frac{c}{a} \cdots \cdots \textcircled{5}$ ,  $y = \frac{c^2}{a} = cx \cdots \cdots \textcircled{6}$

⑤より  $c \neq 0$  から  $x \neq 0$  となり, ⑥から  $c = \frac{y}{x} \cdots \cdots \textcircled{7}$

⑤から  $a = \frac{c}{x}$  となり, ⑦を代入して  $a = \frac{y}{x^2} \cdots \cdots \textcircled{8}$

条件から  $1 + c^2 \leq 2a$  なので, ⑦⑧を代入すると,  $1 + \frac{y^2}{x^2} \leq \frac{2y}{x^2}$  から,

$$x^2 + y^2 \leq 2y, \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

さらに,  $a \neq 0, c \neq 0$  から,  $y \neq 0$  である。

また, ④から  $ax = b(x-1)$  となり,  $a \neq 0, x \neq 0$  より  $x \neq 1$  となり,

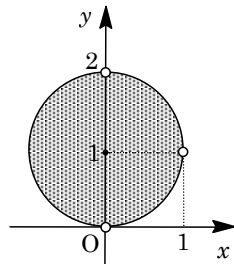
$$b = \frac{ax}{x-1} = \frac{y}{x(x-1)} \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑨より,  $b \neq 0$  なので,  $y \neq 0$  である。

したがって, 接点  $(x, y)$  の条件は,

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1, \quad y \neq 0$$

これを図示すると, 右図の網点部となる。ただし,  $y$  軸上の点および点  $(1, 1)$  は除く。



**コメント**

接点の軌跡を求める基本的な問題ですが,  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  という条件から派生する詰めの段階がやや面倒です。

**問題**

$x$  を正の実数とする。座標平面上の 3 点  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $P(x, x)$  をとり、 $\triangle APB$  を考える。 $x$  の値が変化するとき、 $\angle APB$  の最大値を求めよ。 [2010]

**解答例+映像解説**

3 点  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $P(x, x)$  を通る円の中心  $C$  は、弦  $AB$  の垂直二等分線上にあることより、 $t > 0$  として、 $C(t, \frac{3}{2})$  とおくことができる。

また、 $\angle APB = \theta$  とおくと、 $0 < \angle ACB < \pi$  から  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  となる。

さて、円  $C$  の半径を  $r$  とおくと、正弦定理より、

$$\frac{AB}{\sin \theta} = 2r, \quad \sin \theta = \frac{1}{2r} \dots\dots\dots (*)$$

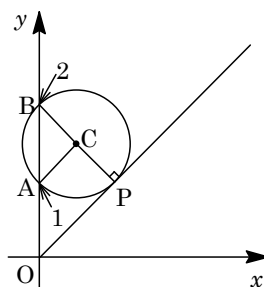
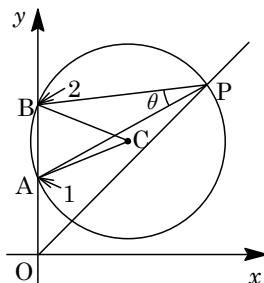
すると、 $\theta$  が最大値をとるのは、(\*)より  $r$  が最小、すなわち円  $C$  が点  $P$  の軌跡である半直線  $y = x (x > 0)$  と接するときであり、

$$\sqrt{t^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = \frac{\left|t - \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}, \quad t^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{2}\right)^2$$

まとめると、 $4t^2 + 12t - 7 = 0$ ,  $(2t - 1)(2t + 7) = 0$

$t > 0$  より  $t = \frac{1}{2}$  となり、このとき  $C\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  である。

すると、 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$  となり、 $\angle APB$  の最大値は  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$  である。



**コメント**

$AB$  を弦とする円を設定し、図形的に、そして感覚的に解きました。なお、円の中心は、 $AB$  を直径とする円が半直線  $y = x (x > 0)$  と共有点をもたないことから、第 1 象限にあることがわかります。また、2 直線のなす角のタンジェントを、加法定理を用いて数式化する解法もあります。

**問題**

定数  $a$  は実数であるとする。関数  $y = |x^2 - 2|$  と  $y = |2x^2 + ax - 1|$  のグラフの共有点はいくつあるか。  $a$  の値によって分類せよ。 [2008]

**解答例**

$y = |x^2 - 2| \cdots \cdots \textcircled{1}$  と  $y = |2x^2 + ax - 1| \cdots \cdots \textcircled{2}$  を連立して、

$$|x^2 - 2| = |2x^2 + ax - 1|, \pm(x^2 - 2) = 2x^2 + ax - 1$$

これより、 $x^2 + ax + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$  または  $3x^2 + ax - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$  より  $ax = -x^2 - 1$ ,  $\textcircled{4}$  より  $ax = -3x^2 + 3$

すると、 $\textcircled{1}$  と  $\textcircled{2}$  のグラフの共有点の個数は、直線  $y = ax \cdots \cdots \textcircled{5}$  と  $y = -x^2 - 1 \cdots \cdots \textcircled{6}$ ,  $y = -3x^2 + 3 \cdots \cdots \textcircled{7}$  の 2 つのグラフの共有点の個数に一致する。

さて、 $\textcircled{6}$  と  $\textcircled{7}$  の交点は、

$$-x^2 - 1 = -3x^2 + 3, x = \pm\sqrt{2}$$

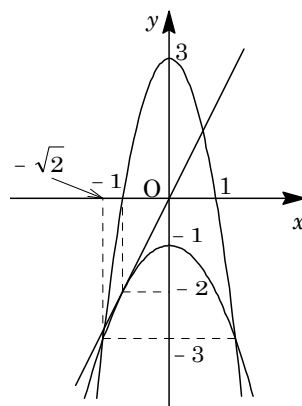
よって、 $(-\sqrt{2}, -3)$ ,  $(\sqrt{2}, -3)$  である。

また、 $\textcircled{5}$  と  $\textcircled{6}$  が接するのは、 $\textcircled{3}$  が重解をもつときより、

$$D = a^2 - 4 = 0, a = \pm 2$$

このとき、重解は  $x = -\frac{a}{2} = \mp 1$  であり、接点は  $(-1, -2)$ ,  $(1, -2)$  となる。

以上より、方程式 $\textcircled{1}$ の異なる実数解の個数は、対称性に注意すると、右図より、 $|a| < 2$  のとき 2 個、 $|a| = 2$  または  $|a| = \frac{3}{\sqrt{2}}$  のとき 3 個、 $2 < |a| < \frac{3}{\sqrt{2}}$  または  $|a| > \frac{3}{\sqrt{2}}$  のとき 4 個である。



**コメント**

$\textcircled{1}$  と  $\textcircled{2}$  のグラフの共有点の個数を、 $\textcircled{5}$  と  $\textcircled{6}$  および  $\textcircled{7}$  のグラフの共有点の個数として翻訳し、視覚的にとらえています。文系に相同な問題があり、後半その解を流用しています。

**問題**

$xy$  平面上の原点と点  $(1, 2)$  を結ぶ線分 (両端を含む) を  $L$  とする。曲線  $y = x^2 + ax + b$  が  $L$  と共有点をもつような実数の組  $(a, b)$  の集合を  $ab$  平面上に図示せよ。 [2005]

**解答例**

原点と点  $(1, 2)$  を結ぶ線分  $L$  は、 $y = 2x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) ……①

①と曲線  $y = x^2 + ax + b$  ……②の共有点は、

$$x^2 + ax + b = 2x, \quad x^2 + (a-2)x + b = 0 \dots\dots③$$

すると、①②が共有点をもつ条件は、③が  $0 \leq x \leq 1$  に少なくとも 1 つの実数解をもつことであり、さらに  $f(x) = x^2 + (a-2)x + b$  ……④とおくと、この条件は、放物線  $y = f(x)$  と  $x$  軸が  $0 \leq x \leq 1$  に少なくとも 1 つの共有点をもつことと言い換えることができる。

④より、 $f(x) = \left(x + \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a-2)^2 + b$  となり、放物線の軸の位置で場合分けをして、 $(a, b)$  の条件を求めると、

(i)  $-\frac{a-2}{2} < 0$  ( $a > 2$ ) のとき

$$f(0) = b \leq 0 \text{ かつ } f(1) = a + b - 1 \geq 0 \text{ より, } -a + 1 \leq b \leq 0$$

(ii)  $0 \leq -\frac{a-2}{2} \leq 1$  ( $0 \leq a \leq 2$ ) のとき

$$-\frac{1}{4}(a-2)^2 + b \leq 0 \text{ かつ } (f(0) = b \geq 0 \text{ または } f(1) = a + b - 1 \geq 0)$$

$$\text{よって, } b \leq \frac{1}{4}(a-2)^2 \text{ かつ } (b \geq 0 \text{ または } b \geq -a + 1)$$

(iii)  $-\frac{a-2}{2} > 1$  ( $a < 0$ ) のとき

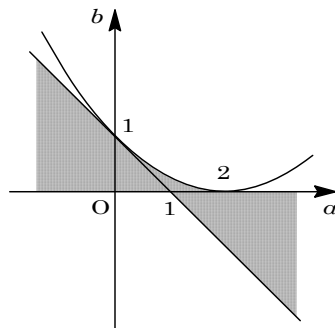
$$f(0) = b \geq 0 \text{ かつ } f(1) = a + b - 1 \leq 0 \text{ より,}$$

$$0 \leq b \leq -a + 1$$

さて、 $b = \frac{1}{4}(a-2)^2$  と  $b = -a + 1$  の共有点は、

$$\frac{1}{4}(a-2)^2 = -a + 1, \quad a = 0$$

以上より、 $(a, b)$  の存在領域は、右図の網点部である。ただし、境界は領域に含む。



**コメント**

頻出問題なので、方針はすぐに決まります。ミスをしないように、ていねいに計算を進めていきます。



**問題**

放物線  $y = x^2$  の上を動く 2 点 P, Q があって、この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき、PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。 [1999]

**解答例**

P( $\alpha, \alpha^2$ ), Q( $\beta, \beta^2$ ) ( $\alpha < \beta$ ) とするとき、放物線  $y = x^2$  と線分 PQ が囲む部分の面積  $S$  は、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} -(x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

条件より、 $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = 1, (\beta - \alpha)^3 = 6$

$$\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} = 6 \dots\dots\dots ①$$

ここで、 $R(x, y)$  とすると、

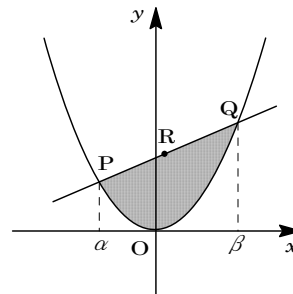
$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \dots\dots\dots ②, \quad y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} \dots\dots\dots ③$$

②より、 $\alpha + \beta = 2x \dots\dots\dots ④$

③④より、 $\alpha\beta = -y + \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} = -y + 2x^2 \dots\dots\dots ⑤$

④⑤を①に代入して、

$$(4y - 4x^2)^{\frac{3}{2}} = 6, \quad y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$



**コメント**

数Ⅱの微積分の典型問題です。途中の式変形も難しいところはありませんでした。なお、①より  $\alpha, \beta$  が実数という条件は満たされています。

**問題**

$\alpha$  は  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  を満たす定数とし、四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

- (i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。
- (ii)  $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで、4 辺の長さの積  $k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$  が最大となるものについて、 $k$  の値を求めよ。 [2018]

**解答例+映像解説**

半径 1 の円に内接する四角形 ABCD に対して、  
 $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$  ( $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ) から、

$$\angle BCD = \angle ADC = \pi - \alpha$$

これより、四角形 ABCD は  $AB \parallel DC$  の等脚台形である。

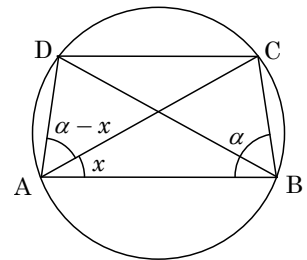
さて、 $\angle BAC = x$  ( $0 < x < \alpha$ ) とおくと、 $\angle CAD = \alpha - x$ 、  
 $\angle ACB = \pi - (\alpha + x)$  となり、正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin x} = 2 \cdot 1, \quad \frac{CD}{\sin(\alpha - x)} = 2 \cdot 1, \quad \frac{AB}{\sin(\alpha + x)} = 2 \cdot 1$$

すると、 $BC = 2 \sin x$ 、 $CD = 2 \sin(\alpha - x)$ 、 $AB = 2 \sin(\alpha + x)$  となり、 $DA = BC$  から、4 辺の長さの積  $k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$  は、

$$\begin{aligned} k &= 16 \sin^2 x \sin(\alpha + x) \sin(\alpha - x) = 8 \sin^2 x (\cos 2x - \cos 2\alpha) \\ &= 8 \sin^2 x (1 - 2 \sin^2 x - 1 + 2 \sin^2 \alpha) = -16 \sin^4 x + 16 \sin^2 \alpha \sin^2 x \\ &= -16 \left( \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right)^2 + 4 \sin^4 \alpha \end{aligned}$$

$0 < x < \alpha$  なので  $0 < \sin x < \sin \alpha$  となり、 $\sin^2 x = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$  ( $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha$ ) のとき、 $k$  は最大値  $4 \sin^4 \alpha$  をとる。



**コメント**

円に内接する台形は等脚台形となりますが、これに正弦定理の適用させて 4 辺の長さを評価する問題です。

**問題**

$\triangle ABC$  は鋭角三角形であり、 $\angle A = \frac{\pi}{3}$  であるとする。また  $\triangle ABC$  の外接円の半径は 1 であるとする。

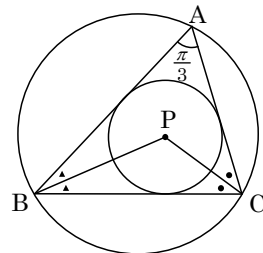
- (1)  $\triangle ABC$  の内心を  $P$  とするとき、 $\angle BPC$  を求めよ。  
 (2)  $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  のとりうる値の範囲を求めよ。

[2017]

**解答例+映像解説**

- (1)  $\triangle ABC$  の内心を  $P$  とするとき、

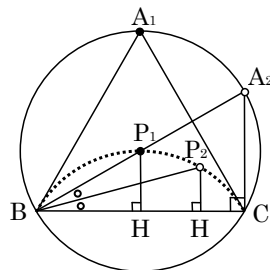
$$\begin{aligned} \angle BPC &= \pi - (\angle PBC + \angle PCB) \\ &= \pi - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \angle A) \\ &= \pi - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$



- (2)  $\triangle ABC$  の外接円の半径は 1 から、正弦定理より、

$$BC = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

さて、 $\triangle ABC$  は  $\angle A = \frac{\pi}{3}$  である鋭角三角形である。ここで、 $\triangle A_1BC$  を正三角形、 $\triangle A_2BC$  を  $\angle C = \frac{\pi}{2}$  の直角三角形としたとき、対称性から一般性を失うことなく、点  $A$  は右図の弧  $A_1A_2$  上を動くとしてもよい。ただし、点  $A_1$  は含み、点  $A_2$  は含まない。



また、点  $P$  は  $\angle BPC = \frac{2}{3}\pi$  から  $BC$  を弦とする点線の円弧上を動く。そして、 $A = A_1$  のとき  $P = P_1$ 、 $A = A_2$  のとき  $P = P_2$  とする。さらに、 $P_1$  から  $BC$  に垂線  $P_1H_1$ 、 $P_2$  から  $BC$  に垂線  $P_2H_2$  を引く。

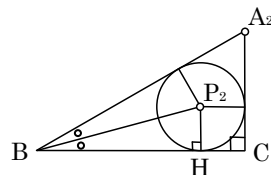
すると、 $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  のとりうる値は、 $P_2H_2 < r \leq P_1H_1$  である。

そこで、 $\angle P_1BH_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$  から、 $P_1H_1 = \frac{1}{2}BC \cdot \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

また、 $\triangle A_2BC$  は、 $AB = 2$ 、 $AC = 1$ 、 $BC = \sqrt{3}$  なので、右図から、

$$(\sqrt{3} - P_2H_2) + (1 - P_2H_2) = 2, \quad P_2H_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

以上より、 $\frac{\sqrt{3}-1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$  である。



**コメント**

平面図形の計量についての基本的な問題で、(1)の誘導により内心の軌跡が導けます。

**問題**

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

- (a) 少なくとも 2 つの内角は  $90^\circ$  である。
  - (b) 半径 1 の円が内接する。ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。
- [2015]

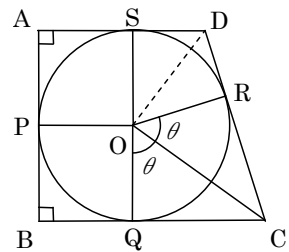
**解答例+映像解説**

四角形 ABCD について、その内接円の中心を O、また内接円との接点を P, Q, R, S とおく。条件(a)より、 $90^\circ$ の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)  $90^\circ$ の内角が隣り合う ( $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ) のとき

右図のように  $\angle COQ = \angle COR = \theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) とおくと、 $\angle DOR = \angle DOS = 90^\circ - \theta$  となる。これより、四角形 ABCD の面積 S は、

$$\begin{aligned}
 S &= 1^2 + 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan \theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan(90^\circ - \theta) \\
 &= 2 + \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \geq 2 + 2\sqrt{\tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta}} = 4
 \end{aligned}$$

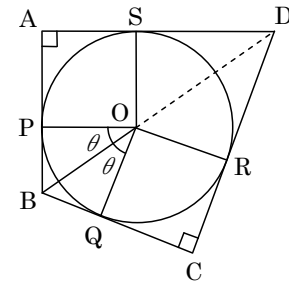


等号成立は  $\tan \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  ( $\theta = 45^\circ$ ) のときであり、このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)  $90^\circ$ の内角が向かい合う ( $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ) のとき

右図のように  $\angle BOP = \angle BOQ = \theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) とおくと、 $\angle DOR = \angle DOS = 90^\circ - \theta$  となる。これより、四角形 ABCD の面積 S は、

$$\begin{aligned}
 S &= 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan \theta + 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \tan(90^\circ - \theta) \\
 &= 2 + \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}
 \end{aligned}$$



(i)と同様に、四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より、四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

**コメント**

いったん 2 つの場合に分けましたが、計算を進めていくと、同じものとなります。そして、結論は予想通りとなりました。

**問題**

$\triangle ABC$  は、条件  $\angle B = 2\angle A$ 、 $BC = 1$  を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき、 $\cos \angle B$  を求めよ。 [2014]

**解答例+映像解説**

$\angle A = \theta$  とおくと、条件より、 $\angle B = 2\theta$ 、 $\angle C = \pi - 3\theta$  となり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$  のもとで、正弦定理より、

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{AB}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

$$AB = \frac{\sin(\pi - 3\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = \frac{3\sin \theta - 4\sin^3 \theta}{\sin \theta} = 3 - 4\sin^2 \theta$$

すると、 $\triangle ABC$  の面積  $S$  は、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 - 4\sin^2 \theta) \sin 2\theta = \frac{1}{2} (1 + 2\cos 2\theta) \sin 2\theta$$

さらに、 $\varphi = 2\theta$  とおくと、 $0 < \varphi < \frac{2}{3}\pi$  のもとで、 $S = \frac{1}{2} (1 + 2\cos \varphi) \sin \varphi$

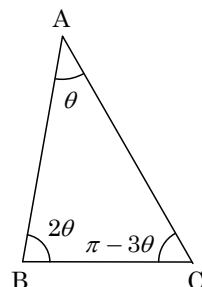
$$S' = \frac{1}{2} (-2\sin \varphi) \sin \varphi + \frac{1}{2} (1 + 2\cos \varphi) \cos \varphi$$

$$= -\sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi + \cos^2 \varphi = 2\cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - 1$$

ここで、 $S' = 0$  とすると、 $-\frac{1}{2} < \cos \varphi < 1$  から  $\cos \varphi = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$  である。

そこで、 $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$  とおくと、右表から、 $\varphi = \alpha$  で  $S$  は最大となり、このとき、

$$\cos \angle B = \cos \varphi = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$$



$\varphi$	0	...	$\alpha$	...	$\frac{2}{3}\pi$
$S'$		+	0	-	
$S$		↗		↘	

**コメント**

三角比の応用問題に、微分法の利用という味付けがされています。

**問題**

$1 < a < 2$  とする。3 辺の長さが  $\sqrt{3}$ ,  $a$ ,  $b$  である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき、 $a$  を用いて  $b$  を表せ。 [2010]

**解答例+映像解説**

外接円の半径が 1 である鋭角三角形 ABC において、 $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$  とおくと、正弦定理より、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C} = 2 \times 1$$

$$\sin A = \frac{a}{2} \dots\dots ①, \quad \sin B = \frac{b}{2} \dots\dots ②, \quad \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots ③$$

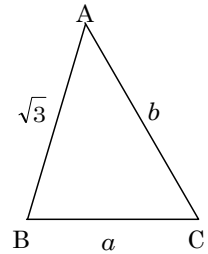
$$③ \text{より, } \angle C \text{ が鋭角から, } C = \frac{\pi}{3} \dots\dots ④$$

$$① \text{より, } 1 < a < 2 \text{ から } \frac{1}{2} < \sin A < 1 \text{ となり, } \angle A \text{ が鋭角から } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2} \dots\dots ⑤$$

$$④⑤ \text{より, } B = \frac{2}{3}\pi - A \text{ から } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2} \text{ となり, } \angle B \text{ が鋭角という条件は満たされる。}$$

さて、①より、 $\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$  となり、②から、

$$\begin{aligned} b &= 2 \sin B = 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi - A\right) = 2 \sin \frac{2}{3}\pi \cos A - 2 \cos \frac{2}{3}\pi \sin A \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2} = \frac{a + \sqrt{3(4 - a^2)}}{2} \end{aligned}$$



**コメント**

正弦定理の利用から始めるという点はすぐにわかるものの、その後の解法を選択に、運・不運が反映されます。

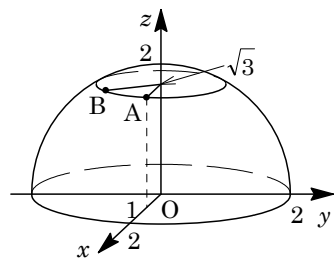
**問題**

地球上の北緯  $60^\circ$  東経  $135^\circ$  の地点を  $A$ , 北緯  $60^\circ$  東経  $75^\circ$  の地点を  $B$  とする。  $A$  から  $B$  に向かう 2 種類の飛行経路  $R_1, R_2$  を考える。  $R_1$  は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。  $R_2$  は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。  $R_1$  に比べて  $R_2$  は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし、飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば、三角関数表を用いよ。

注：大円とは、球を球の中心を通る平面で切ったとき、その切り口にできる円のことである。 [2008]

**解答例**

まず、地球の半径を 2, 赤道面を  $xy$  平面, 北極を点  $(0, 0, 2)$  とし, 東経  $135^\circ$  を  $xz$  平面上とする座標系を設定する。



すると、地点  $A$  は北緯  $60^\circ$  東経  $135^\circ$  より、その座標は  $A(1, 0, \sqrt{3})$  となる。また、地点  $B$  は北緯  $60^\circ$  東経  $75^\circ$  より、  $B(x, y, \sqrt{3})$  とおくと、

$$x = 2 \cos 60^\circ \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad y = 2 \cos 60^\circ \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて、経路  $R_1$  は、平面  $z = \sqrt{3}$  上での弧  $AB$  より、その長さを  $l_1$  とおくと、

$$l_1 = 2\pi \cdot 1 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = \frac{30}{90} \pi$$

また、経路  $R_2$  は、半径 2 の大円上での弧  $AB$  であり、  $\angle AOB = \theta^\circ$  とおくと、

$$l_2 = 2\pi \cdot 2 \times \frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{90} \theta$$

ここで、  $\cos \theta^\circ = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{\frac{1}{2} + 3}{2 \cdot 2} = \frac{7}{8} = 0.875$  から、三角関数表を用いると、

$$28^\circ < \theta^\circ < 29^\circ$$

よって、  $\frac{28}{90} \pi < l_2 < \frac{29}{90} \pi$  となり、  $\frac{l_2}{l_1} < \frac{29}{30} < 0.97$  である。

すなわち、  $R_1$  に比べて  $R_2$  は飛行距離が 3% 以上短くなる。

**コメント**

大圏航路を題材にした問題です。これは、メルカトル図法で書かれた世界地図で、最短の飛行経路が直線としては表されないことと関連しています。なお、与えられていた三角関数表は省略しました。

**問題**

直角三角形に半径  $r$  の円が内接していて、三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) この三角形の斜辺の長さを  $r$  で表せ。
- (2)  $r$  の値が問題の条件を満たしながら変化するとき、この三角形の面積の最大値を求めよ。 [1998]

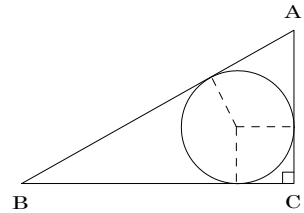
**解答例**

- (1)  $\angle C = 90^\circ$  とし、 $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  とおくと、  
 $(a-r) + (b-r) = c$  から、 $a+b-c-2r = 0 \dots\dots\dots ①$

条件より、 $a+b+c+2r = 2 \dots\dots\dots ②$

②-①より、 $2c+4r = 2$

よって、 $c = 1-2r \dots\dots\dots ③$



- (2) ③を②に代入すると、 $a+b = 1 \dots\dots\dots ④$

$\triangle ABC$  の面積を  $S$  とし、④と相加平均と相乗平均の関係から、

$$S = \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

等号は  $a = b$ , すなわち④より  $a = b = \frac{1}{2}$  のとき成立する。

このとき、 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ③より、 $r = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$  となり、与えられた条件をみたす。これより、 $S$  の最大値は  $\frac{1}{8}$  である。

**コメント**

これまで多くの大学でたびたび出題されてきた直角三角形の内接円に関する問題です。なお(2)は、④から  $b = 1-a$  として  $S$  を  $a$  だけの 2 次関数として表し、その最大値を求めるという方法でも構いません。



**問 題**

四面体 ABCD は  $AC = BD$ ,  $AD = BC$  を満たすとし, 辺 AB の中点を P, 辺 CD の中点を Q とする。

- (1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。
- (2) 線分 PQ を含む平面  $\alpha$  で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき, 2 つの部分の体積は等しいことを示せ。 [2018]

**解答例+映像解説**

(1)  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とおく。

まず,  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$  より,  $|\vec{c}| = |\vec{d} - \vec{b}|$  となり,

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{b}|^2 \dots\dots\dots ①$$

また,  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$  より,  $|\vec{d}| = |\vec{c} - \vec{b}|$  となり,

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 \dots\dots\dots ②$$

①②より,  $|\vec{c}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{b}|^2$  となり,

$$|\vec{b}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} \dots\dots\dots ③$$

さて, 点 P, 点 Q は, それぞれ辺 AB, 辺 CD の中点なので,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

$$\text{ここで, } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(-|\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d})$$

すると, ③から  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  となるので,  $PQ \perp AB$  である。

(2) ①③より,  $|\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$  となり,

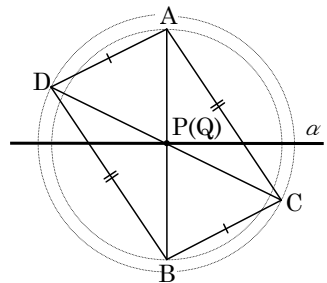
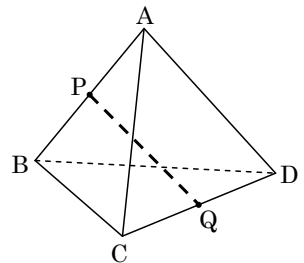
$$|\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} \dots\dots\dots ④$$

$$\text{ここで, } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot (-\vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} - |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2)$$

すると, ④から  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  となるので,  $PQ \perp CD$  である。

これより, 線分 PQ を軸として四面体 ABCD を  $180^\circ$  回転すると, 頂点 A は B, 頂点 B は A, 頂点 C は D, 頂点 D は C に一致する。すなわち, 四面体 ABCD は線分 PQ を軸とした回転対称になっている。

よって, 線分 PQ を含む平面  $\alpha$  で四面体 ABCD を 2 つの部分に分けたとき, 線分 PQ を軸として, その一方を  $180^\circ$  回転すると, もう一方に重なる。言い換えると,  $\alpha$  によって分けられた 2 つの部分の体積は等しい。



**コメント**

立体の性質に関する問題です。(1)はオーソドックスにベクトルを利用した解で記しました。(2)では, (1)と同様に考えると,  $PQ \perp CD$  になることが推測できます。それを示した後, 半直線  $QP$  上に視点をもってくると上図のようになり, 回転対称という構図が見えてきます。

**問題**

四面体  $OABC$  を考える。点  $D, E, F, G, H, I$  は、それぞれ辺  $OA, AB, BC, CO, OB, AC$  上にあり、頂点ではないとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{DG}$  と  $\overrightarrow{EF}$  が平行ならば  $AE:EB = CF:FB$  であることを示せ。  
 (2)  $D, E, F, G, H, I$  が正八面体の頂点となっているとき、これらの点は  $OABC$  の各辺の中点であり、 $OABC$  は正四面体であることを示せ。 [2017]

**解答例+映像解説**

- (1) まず、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とおく。また、 $D, E, F, G$  について、 $OD:DA = d:1-d$ ,  $BE:EA = e:1-e$ ,  $BF:FC = f:1-f$ ,  $OG:GC = g:1-g$  とすると、

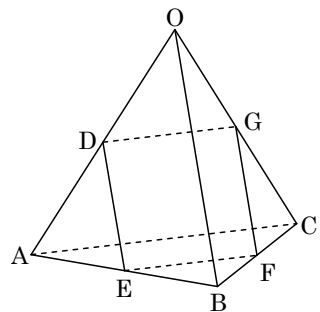
$$\begin{aligned} \overrightarrow{DG} &= g\vec{c} - d\vec{a} \\ \overrightarrow{EF} &= (1-f)\vec{b} + f\vec{c} - (1-e)\vec{b} - e\vec{a} \\ &= f\vec{c} + (e-f)\vec{b} - e\vec{a} \end{aligned}$$

ここで、 $\overrightarrow{DG} \parallel \overrightarrow{EF}$  から、 $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{DG}$  ( $k$  は定数)

$$f\vec{c} + (e-f)\vec{b} - e\vec{a} = k(g\vec{c} - d\vec{a}) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

すると、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  は 1 次独立なので、 $e-f=0$  すなわち  $e=f$  となり、

$$AE:EB = CF:FB$$



- (2) まず、 $D, E, F, G, H, I$  が正八面体の頂点となっているので、四角形  $DEFG$  は正方形である。

すると、 $\textcircled{1}$  で  $k=1$  となり、 $f=g, e=f, e=d$  から、

$$d=e=f=g \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また、 $OH:HB = h:1-h$ ,  $AI:IC = i:1-i$  とおくと、四角形  $DIFH$  は正方形なので、 $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{DH}$  より、

$$(1-f)\vec{b} + f\vec{c} - (1-i)\vec{a} - i\vec{c} = h\vec{b} - d\vec{a}$$

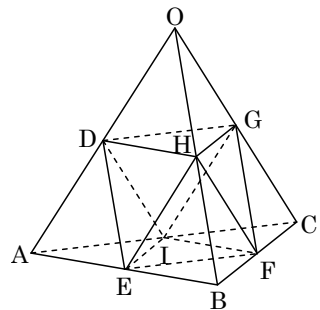
同様にすると、 $1-i=d, 1-f=h, f-i=0$  となり、

$$d=1-f=1-i=h \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}\textcircled{3}$  より、 $d=e=f=g=h=i = \frac{1}{2}$  となるので、点  $D, E, F, G, H, I$  は四面体

$OABC$  の各辺の中点である。

さらに、 $\triangle DHG$  が正三角形より  $\triangle ABC$  が正三角形となり、同様に  $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$  も正三角形となるので、四面体  $OABC$  は正四面体である。



**コメント**

ベクトルの空間図形への応用ですが、(1)が(2)の論証への誘導になっています。

**問題**

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において、P を辺 AB の中点とし、点 Q が辺 AC 上を動くとする。このとき、 $\cos \angle PDQ$  の最大値を求めよ。 [2015]

**解答例+映像解説**

まず、 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$  とおくと、

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1^2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

さて、点 P は辺 AB の中点、点 Q は辺 AC 上の点より、 $0 \leq t \leq 1$  として、

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{DQ} = t\vec{a} + (1-t)\vec{c}$$

$$\text{すると、} |\overrightarrow{DP}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\overrightarrow{DQ}| = \sqrt{t^2 \cdot 1^2 + 2t(1-t) \cdot \frac{1}{2} + (1-t)^2 \cdot 1^2} = \sqrt{t^2 - t + 1}$$

$$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}t \cdot 1^2 + \frac{1}{2}(1-t) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-t) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(t+2)$$

$$\text{これより、} \cos \angle PDQ = \frac{\frac{1}{4}(t+2)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t^2-t+1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{(t+2)^2}{t^2-t+1}} \dots\dots\dots (*)$$

そこで、 $f(t) = \frac{(t+2)^2}{t^2-t+1}$  とおくと、 $\cos \angle PDQ = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{f(t)}$  となり、

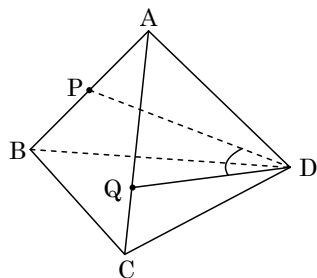
$$f'(t) = \frac{2(t+2)(t^2-t+1) - (t+2)^2(2t-1)}{(t^2-t+1)^2} = \frac{(t+2)(-5t+4)}{(t^2-t+1)^2}$$

$f(t)$  の増減は右表のようになり、 $t = \frac{4}{5}$  のと

き最大値  $\frac{14^2}{21}$  をとる。

よって、(\*) から、 $\cos \angle PDQ$  の最大値は、

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{14^2}{21}} = \frac{14}{6\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \text{ である。}$$



$t$	0	...	$\frac{4}{5}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{14^2}{21}$	↘	

**コメント**

正四面体を題材とした空間ベクトルの図形への応用問題です。方針に迷うようなことはないでしょう。また、同じことですが、 $\triangle PDQ$  に余弦定理という方法も考えられます。

**問題**

座標空間における次の3つの直線  $l, m, n$  を考える：

$l$  は点  $A(1, 0, -2)$  を通り、ベクトル  $\vec{u} = (2, 1, -1)$  に平行な直線である。

$m$  は点  $B(1, 2, -3)$  を通り、ベクトル  $\vec{v} = (1, -1, 1)$  に平行な直線である。

$n$  は点  $C(1, -1, 0)$  を通り、ベクトル  $\vec{w} = (1, 2, 1)$  に平行な直線である。

$P$  を  $l$  上の点として、 $P$  から  $m, n$  へ下ろした垂線の足をそれぞれ  $Q, R$  とする。このとき、 $PQ^2 + PR^2$  を最小にするような  $P$  と、そのときの  $PQ^2 + PR^2$  を求めよ。

[2014]

**解答例+映像解説**

まず、直線  $l, m, n$  上の点  $P, Q, R$  は、 $p, q, r$  を実数として、

$$\vec{OP} = \vec{OA} + p\vec{u} = (1, 0, -2) + p(2, 1, -1) = (1+2p, p, -2-p)$$

$$\vec{OQ} = \vec{OB} + q\vec{v} = (1, 2, -3) + q(1, -1, 1) = (1+q, 2-q, -3+q)$$

$$\vec{OR} = \vec{OC} + r\vec{w} = (1, -1, 0) + r(1, 2, 1) = (1+r, -1+2r, r)$$

すると、 $\vec{PQ} = (q-2p, 2-q-p, -1+q+p)$  となり、 $\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$  から、

$$(q-2p) - (2-q-p) + (-1+q+p) = 0, \quad q-1 = 0 \dots\dots\dots ①$$

また、 $\vec{PR} = (r-2p, -1+2r-p, 2+r+p)$ 、 $\vec{PR} \cdot \vec{w} = 0$  より、

$$(r-2p) + 2(-1+2r-p) + (2+r+p) = 0, \quad -p+2r = 0 \dots\dots\dots ②$$

①②より、 $q=1, r = \frac{1}{2}p$  となり、

$$\vec{PQ} = (1-2p, 1-p, p), \quad \vec{PR} = \left(-\frac{3}{2}p, -1, \frac{3}{2}p+2\right)$$

これより、 $F(p) = PQ^2 + PR^2$  とおくと、

$$F(p) = (1-2p)^2 + (1-p)^2 + p^2 + \left(-\frac{3}{2}p\right)^2 + 1 + \left(\frac{3}{2}p+2\right)^2 = \frac{21}{2}p^2 + 7$$

よって、 $p=0$  すなわち  $P(1, 0, -2)$  のとき、 $F(p) = PQ^2 + PR^2$  は最小となり、最小値は7である。

**コメント**

空間における直線を題材にした基本題です。なお、計算結果は予測を超えて簡単になります。

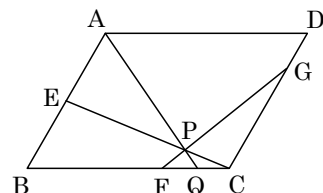
**問題**

平行四辺形 ABCD において、辺 AB を 1:1 に内分する点を E、辺 BC を 2:1 に内分する点を F、辺 CD を 3:1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし、線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき、比 AP:PQ を求めよ。 [2013]

**解答例+映像解説**

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とおき、 $s, t$  を実数とすると、点 P が線分 FG と線分 CE の交点より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= s\overrightarrow{AF} + (1-s)\overrightarrow{AG} \\ &= s\left(\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}\right) + (1-s)\left(\frac{1}{4}\vec{b} + \vec{d}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s\right)\vec{b} + \left(1 - \frac{1}{3}s\right)\vec{d} \dots\dots\dots ① \end{aligned}$$



$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AE} = t(\vec{b} + \vec{d}) + \frac{1}{2}(1-t)\vec{b} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right)\vec{b} + t\vec{d} \dots\dots\dots ②$$

ここで、 $\vec{b}$  と  $\vec{d}$  は 1 次独立なので、①②より、 $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$ ,  $1 - \frac{1}{3}s = t$

まとめると、 $t = \frac{8}{11}$  となり、②に代入して、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}\vec{b} + \frac{8}{11}\vec{d}$$

さらに、点 Q は直線 AP と辺 BC の交点より、 $k, l$  を実数として、

$$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} = \frac{19}{22}k\vec{b} + \frac{8}{11}k\vec{d} \dots\dots\dots ③$$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{BC} = \vec{b} + l\vec{d} \dots\dots\dots ④$$

$\vec{b}$  と  $\vec{d}$  は 1 次独立なので、③④より、 $\frac{19}{22}k = 1$ ,  $\frac{8}{11}k = l$

すると、 $k = \frac{22}{19}$  となり、 $AP:PQ = 1:(k-1) = 1:\frac{3}{19} = 19:3$  である。

**コメント**

題材が平行四辺形なので、補助線を引いて、相似を利用する手も考えられます。ただ、実戦的には、上のような解でしょう。

**問題**

正四面体  $OABC$  において、点  $P, Q, R$  をそれぞれ辺  $OA, OB, OC$  上にとる。ただし、 $P, Q, R$  は四面体  $OABC$  の頂点とは異なるとする。 $\triangle PQR$  が正三角形ならば、3 辺  $PQ, QR, RP$  はそれぞれ 3 辺  $AB, BC, CA$  に平行であることを証明せよ。 [2012]

**解答例+映像解説**

正四面体  $OABC$  において  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \dots\dots ①$

としても一般性を失わない。

また、 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$  から、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \dots\dots ②$$

さて、 $0 < p < 1, 0 < q < 1, 0 < r < 1$  として、 $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA}$ ,  
 $\overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OC}$  とおくと、 $\triangle PQR$  が正三角形より、

$$|p\overrightarrow{OA} - q\overrightarrow{OB}| = |q\overrightarrow{OB} - r\overrightarrow{OC}| = |r\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OA}|$$

$$①②より、p^2 - pq + q^2 = q^2 - qr + r^2 = r^2 - rp + p^2 \dots\dots ③$$

$$③から、p^2 - pq = -qr + r^2, p^2 - r^2 - q(p - r) = 0 \text{ となり、}$$

$$(p - r)(p + r - q) = 0 \dots\dots ④$$

$$\text{また、③から、同様にすると、}(p - q)(p + q - r) = 0 \dots\dots ⑤$$

そこで、④⑤から、場合分けをすると、

(i)  $p - r = 0$  かつ  $p - q = 0$  のとき  $p = q = r$

(ii)  $p - r = 0$  かつ  $p + q - r = 0$  のとき  $q = 0$  となり不適

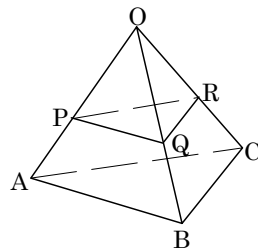
(iii)  $p + r - q = 0$  かつ  $p - q = 0$  のとき  $r = 0$  となり不適

(iv)  $p + r - q = 0$  かつ  $p + q - r = 0$  のとき  $p = 0$  となり不適

(i)~(iv)より、 $p = q = r$  となり、

$$\overrightarrow{PQ} = p\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{QR} = p\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{RP} = p\overrightarrow{CA}$$

よって、 $PQ \parallel AB, QR \parallel BC, RP \parallel CA$



**コメント**

ベクトルを利用して普通に設定をし、式変形を行っていくと、直感的に正しいと思える結論に到達できます。

**問題**

四面体 ABCD において  $\overrightarrow{CA}$  と  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DA}$  と  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{CD}$  はそれぞれ垂直であるとする。このとき、頂点 A, 頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ。 [2010]

**解答例+映像解説**

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とおく。

まず,  $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$  より,  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$  となり,

$$-\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2 \dots\dots\dots ①$$

また,  $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB}$  より,  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$  となり,

$$-\vec{d} \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{d}|^2 \dots\dots\dots ②$$

さらに,  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$  より,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  となり,

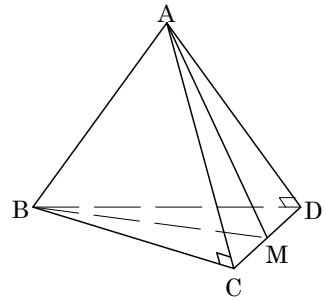
$$\vec{b} \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} \dots\dots\dots ③$$

①②③より,  $|\vec{c}|^2 = |\vec{d}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} \dots\dots\dots ④$

さて, 辺 CD の中点 M に対して,  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$  と表せるので, ④より,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(|\vec{d}|^2 - |\vec{c}|^2) = 0$$

よって,  $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}$  となり, 条件の  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$  と考え合わせると, 3 点 A, B, M を通る平面は, 辺 CD と直交する。



**コメント**

四面体を題材にした空間ベクトルの頻出題です。



**問題**

$xyz$  空間で  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(3, 2, 0)$ ,  $C(0, 2, 0)$ ,  $D(0, 0, 4)$ ,  $E(3, 0, 4)$ ,  $F(3, 2, 4)$ ,  $G(0, 2, 4)$  を頂点とする直方体  $OABC-DEFG$  を考える。辺  $AE$  を  $s:1-s$  に内分する点を  $P$ , 辺  $CG$  を  $t:1-t$  に内分する点を  $Q$  とおく。ただし,  $0 < s < 1$ ,  $0 < t < 1$  とする。  $D$  を通り,  $O, P, Q$  を含む平面に垂直な直線が線分  $AC$  (両端を含む) と交わるような  $s, t$  の満たす条件を求めよ。 [2009]

**解答例**

$AP:PE = s:1-s$ ,  $CB:BG = t:1-t$  より,

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= s\vec{OE} + (1-s)\vec{OA} \\ &= s(3, 0, 4) + (1-s)(3, 0, 0) \\ &= (3, 0, 4s) \\ \vec{OQ} &= t\vec{OG} + (1-t)\vec{OC} \\ &= t(0, 2, 4) + (1-t)(0, 2, 0) \\ &= (0, 2, 4t) \end{aligned}$$

平面  $OPQ$  の法線ベクトルを  $\vec{n} = (a, b, c)$  とおくと,

$$\vec{n} \cdot \vec{OP} = 3a + 4sc = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{OQ} = 2b + 4tc = 0$$

これより,  $a = -\frac{4}{3}sc$ ,  $b = -2tc$  となり,  $\vec{n} = \left(-\frac{4}{3}sc, -2tc, c\right) = -\frac{c}{3}(4s, 6t, -3)$

すると, 点  $D$  を通り,  $\vec{n}$  を方向ベクトルにもつ直線は,  $k$  を実数として,

$$(x, y, z) = (0, 0, 4) + k(4s, 6t, -3) = (4sk, 6tk, 4-3k)$$

$xy$  平面との交点は,  $z = 4 - 3k = 0$  から  $k = \frac{4}{3}$  となり,  $(x, y, z) = \left(\frac{16}{3}s, 8t, 0\right)$

さて, 線分  $AC$  上(両端を含む)の点は,  $0 \leq l \leq 1$  として,

$$(x, y, z) = l(3, 0, 0) + (1-l)(0, 2, 0) = (3l, 2-2l, 0)$$

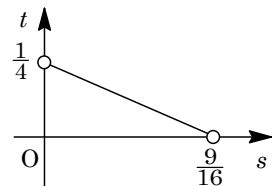
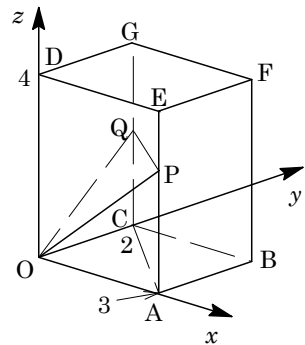
ここで, 条件より,  $\left(\frac{16}{3}s, 8t, 0\right) = (3l, 2-2l, 0)$  となり,

$$\frac{16}{3}s = 3l \dots\dots\dots ①, \quad 8t = 2 - 2l \dots\dots\dots ②$$

①②より,  $\frac{32}{5}s + 24t = 6$  となり,  $16s + 36t = 9$

また,  $0 \leq l \leq 1$  から  $0 \leq 8t \leq 2$  となり,  $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$

さらに,  $0 < t < 1$ ,  $0 < s < 1$  と合わせると,  $0 < t < \frac{1}{4}$  である。



**コメント**

空間ベクトルの頻出題で, 計算量も少なめです。

**問題**

点  $O$  を中心とする円に内接する  $\triangle ABC$  の 3 辺  $AB, BC, CA$  をそれぞれ  $2:3$  に内分する点を  $P, Q, R$  とする。  $\triangle PQR$  の外心が点  $O$  と一致するとき、  $\triangle ABC$  はどのような三角形か。 [2007]

**解答例**

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とすると、条件より、

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| \cdots \cdots (*)$$

ここで、条件より、  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + 2\vec{b})$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{5}(3\vec{b} + 2\vec{c}), \quad \overrightarrow{OR} = \frac{1}{5}(3\vec{c} + 2\vec{a})$$

さて、  $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OR}|$  から、

$$|3\vec{a} + 2\vec{b}| = |3\vec{b} + 2\vec{c}| = |3\vec{c} + 2\vec{a}|$$

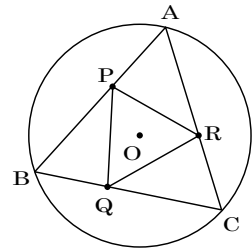
$$9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{b} \cdot \vec{c} + 4|\vec{c}|^2 = 9|\vec{c}|^2 + 12\vec{c} \cdot \vec{a} + 4|\vec{a}|^2$$

よって、  $(*)$  から、  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$

すると、  $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$  から、

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{c}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2$$

以上より、  $AB = BC = CA$  となるので、  $\triangle ABC$  は正三角形である。



**コメント**

ベクトル利用という方針を立てた後は、その始点を決定するわけですが、これを点  $O$  にすることには、ためらいはないでしょう。ここまで準備をすると、簡単な計算で結論が導けます。

**問題**

点  $O$  を原点とする座標空間の 3 点を  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(2, 3, 0)$ ,  $P(5+t, 9+2t, 5+3t)$  とする。線分  $OP$  と線分  $AB$  が交点をもつような実数  $t$  が存在することを示せ。また、そのときの交点の座標を求めよ。 [2006]

**解答例**

まず、線分  $AB$  上の点は、 $0 \leq s \leq 1$  として、

$$(x, y, z) = s(0, 1, 2) + (1-s)(2, 3, 0) = (-2s+2, -2s+3, 2s)$$

また、線分  $OP$  上の点は、 $0 \leq u \leq 1$  として、

$$(x, y, z) = u(5+t, 9+2t, 5+3t)$$

線分  $AB$  と線分  $OP$  が交わるのは、

$$(-2s+2, -2s+3, 2s) = u(5+t, 9+2t, 5+3t)$$

すなわち、 $-2s+2 = u(5+t) \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $-2s+3 = u(9+2t) \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$2s = u(5+3t) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より、 $1 = u(4+t) \cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{2}\textcircled{3}$ より、 $3 = u(14+5t) \cdots \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{4}\textcircled{5}$ より、 $14+5t-3(4+t) = 0$  となり、 $t = -1$  である。

このとき、 $u = \frac{1}{3}$ ,  $s = \frac{1}{3}$  となり、 $0 \leq s \leq 1$ ,  $0 \leq u \leq 1$  を満たすので、 $t = -1$  のとき、線分  $OP$  と線分  $AB$  は交点をもつ。

また、交点の座標は、

$$(x, y, z) = \frac{1}{3}(5-1, 9-2, 5-3) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

**コメント**

空間内の 2 直線が、交点をもつという特別な位置関係にあることを示す問題です。これは、連立方程式 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ が解をもつ条件として、言い換えることができます。

**問題**

$\triangle ABC$  に対し、辺  $AB$  上に点  $P$  を、辺  $BC$  上に点  $Q$  を、辺  $CA$  上に点  $R$  を、頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき、この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。 [2006]

**解答例**

$BC$  上に点  $Q$  を固定し、 $0 < p < 1, 0 < r < 1$  として、

$$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC}$$

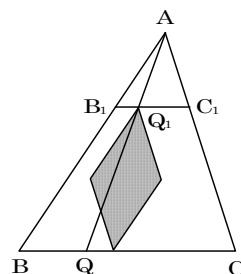
$\triangle PQR$  の重心を  $G$  とすると、

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ} + p \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + r \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

ここで、 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AQ_1}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB_1}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC_1}$  とおき、

線分  $AB_1, AC_1$  を隣りあう 2 辺とする平行四辺形を  $S_A$  とおく。

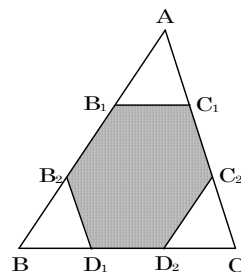
さて、 $p, r$  を  $0 < p < 1, 0 < r < 1$  を満たすように動かすと、点  $G$  は、 $S_A$  を  $\overrightarrow{AQ_1}$  だけ平行移動した平行四辺形  $S_{Q_1}$  の内部を動く。



ここで、点  $Q$  を辺  $BC$  上で点  $B$  から点  $C$  まで動かすと、点  $Q_1$  は線分  $B_1C_1$  上を点  $B_1$  から点  $C_1$  まで動く。その結果、平行四辺形  $S_{Q_1}$  は平行移動し、その通過領域が点  $G$  の動く範囲である。

以上より、辺  $AB$  の三等分点を  $B_1, B_2$ 、辺  $AC$  の三等分点を  $C_1, C_2$ 、辺  $BC$  の三等分点を  $D_1, D_2$  とおくと、点  $G$  は六角形  $B_1B_2D_1D_2C_2C_1$  の内部を動く。

すなわち、点  $G$  の動く範囲は右図の網点部である。ただし、境界線は含まない。



**コメント**

独立に動く点が 3 つあり、そのうちの 1 つを固定して考えた解です。そのプロセスが記述しにくく、そのため演習するのに適した問題です。

**問題**

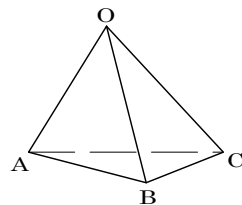
四面体 OABC は次の 2 つの条件

- (i)  $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$
- (ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき、この四面体は正四面体であることを示せ。 [2003]

**解答例**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c} \text{ とおくと, 条件(i)より,} \\ \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{a} \\ \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$



まとめて,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = k \dots \dots \textcircled{1}$  とおく。

また, 条件(ii)より,  $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCA$  から,

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{c}|^2 |\vec{a}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{a})^2}$$

$\textcircled{1}$ より,  $|\vec{a}| |\vec{b}| = |\vec{b}| |\vec{c}| = |\vec{c}| |\vec{a}|$

まとめて,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = l \dots \dots \textcircled{2}$  とおく。

ここで,  $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,  $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = l^2 - 2k + l^2 = 2(l^2 - k)$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 = l^2 - 2k + l^2 = 2(l^2 - k)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\vec{b} - \vec{a})(\vec{c} - \vec{a}) = k - k - k + l^2 = l^2 - k$$

すると,  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$  より,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{4(l^2 - k)^2 - (l^2 - k)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3(l^2 - k)^2}$$

さらに,  $\triangle ABC = \triangle OAB$  より,  $\frac{1}{2} \sqrt{3(l^2 - k)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{l^4 - k^2}$

$$3(l^2 - k)^2 = (l^2 - k)(l^2 + k), \quad 3(l^2 - k) = l^2 + k, \quad l^2 = 2k \dots \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ より,  $\cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{k}{l^2} = \frac{1}{2}$  から,  $\angle AOB = 60^\circ$  となる。

同様にして,  $\angle BOC = \angle COA = 60^\circ$  なので,  $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$  は正三角形となり, 四面体 OABC は正四面体である。

**コメント**

頂角が  $60^\circ$  の二等辺三角形は正三角形という方針で解をつくりました。

## 問題

$xyz$  空間内の正八面体の頂点  $P_1, P_2, \dots, P_6$  とベクトル  $\vec{v}$  に対し、 $k \neq m$  のとき  $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} \neq 0$  が成り立っているとす。このとき、 $k$  と異なるすべての  $m$  に対し、 $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$  が成り立つような点  $P_k$  が存在することを示せ。 [2001]

## 解答例

$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), \dots, P_6(x_6, y_6, z_6)$  とし、 $\vec{v} = (1, 0, 0)$  とおいても一般性は失われない。

すると、条件より、任意の  $k, m$  に対して  $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} = x_m - x_k \neq 0$  なので、 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  の間に大小関係が生じ、その中で最大なものを  $x_k$  とおくと、 $k$  と異なるすべての  $m$  に対して、 $x_m - x_k < 0$  となる。

すなわち、 $k$  と異なるすべての  $m$  に対して、 $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$  が成り立つような点  $P_k$  が存在する。

## コメント

成分を用いた解を考えました。書き方がやや雑な感じもしますが……。なお、文系に類題が出ています。

**問題**

円に内接する四角形  $ABPC$  は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ) 三角形  $ABC$  は正三角形である。

(ロ)  $AP$  と  $BC$  の交点は線分  $BC$  を  $p : 1 - p$  ( $0 < p < 1$ ) の比に内分する。

このときベクトル  $\overrightarrow{AP}$  を  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $p$  を用いて表せ。

[2000]

**解答例**

対角線  $AP$  と  $BC$  の交点を  $D$  とすると, 条件(ロ)より,  
 $BD : DC = p : (1 - p)$  なので,

$$\overrightarrow{AD} = (1 - p)\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}$$

ここで, 正三角形  $ABC$  の 1 辺の長さを 1 としても, 一般性は失われないので,

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AD}|^2 &= (1 - p)^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + 2(1 - p)p \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + p^2 |\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= (1 - p)^2 + (1 - p)p + p^2 = 1 - p + p^2 \end{aligned}$$

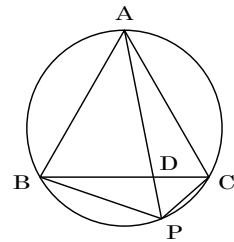
よって,  $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1 - p + p^2}$

ここで, 方べきの定理より,  $AD \cdot DP = BD \cdot DC$

$$DP = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{p(1 - p)}{\sqrt{1 - p + p^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } AD : AP &= \sqrt{1 - p + p^2} : \left( \sqrt{1 - p + p^2} + \frac{p(1 - p)}{\sqrt{1 - p + p^2}} \right) \\ &= (1 - p + p^2) : (1 - p + p^2 + p - p^2) \\ &= (1 - p + p^2) : 1 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1 - p + p^2} \overrightarrow{AD} = \frac{1 - p}{1 - p + p^2} \overrightarrow{AB} + \frac{p}{1 - p + p^2} \overrightarrow{AC}$$



**コメント**

方べきの定理が活躍する構図の設問です。まず, 1 問完答ではずみをつける問題です。

問題

$\vec{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{b} = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}, 0\right)$  とする。

(1) 長さ 1 の空間ベクトル  $\vec{c}$  に対し,  $\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ,  $\cos \beta = \vec{b} \cdot \vec{c}$  とおく。このとき次の不等式(\*)が成り立つことを示せ。

$$(*) \quad \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta \leq \frac{3}{4}$$

(2) 不等式(\*)を満たす  $(\alpha, \beta)$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ ) の範囲を図示せよ。 [2000]

解答例

(1)  $\vec{c} = (p, q, r)$  とおくと,  $|\vec{c}| = 1$  より,  $p^2 + q^2 + r^2 = 1$

$\vec{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  から,

$$\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{c} = p, \quad \cos \beta = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}p + \frac{\sqrt{3}}{2}q$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta &= p^2 - p \left( \frac{1}{2}p + \frac{\sqrt{3}}{2}q \right) + \left( \frac{1}{2}p + \frac{\sqrt{3}}{2}q \right)^2 \\ &= \frac{3}{4}p^2 + \frac{3}{4}q^2 = \frac{3}{4}(1 - r^2) \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2) (1)より,  $\cos^2 \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta - \frac{3}{4} \leq 0$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} - \frac{3}{4} \leq 0$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \leq 0$$

$$4 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 \leq 0$$

$$\{ 2 \cos(\alpha + \beta) - 1 \} \{ 2 \cos(\alpha - \beta) - 1 \} \leq 0$$

ここで,  $0 \leq \alpha + \beta \leq 2\pi$ ,  $-\pi \leq \alpha - \beta \leq \pi$  に注意して,

(i)  $2 \cos(\alpha + \beta) - 1 \geq 0$  かつ  $2 \cos(\alpha - \beta) - 1 \leq 0$  のとき

$$\cos(\alpha + \beta) \geq \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \cos(\alpha - \beta) \leq \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より,  $0 \leq \alpha + \beta \leq \frac{1}{3}\pi$  または  $\frac{5}{3}\pi \leq \alpha + \beta \leq 2\pi$

$$-\alpha \leq \beta \leq -\alpha + \frac{1}{3}\pi \quad \text{または} \quad -\alpha + \frac{5}{3}\pi \leq \beta \leq -\alpha + 2\pi$$

②より,  $-\pi \leq \alpha - \beta \leq -\frac{1}{3}\pi$  または  $\frac{1}{3}\pi \leq \alpha - \beta \leq \pi$

$$\alpha + \frac{1}{3}\pi \leq \beta \leq \alpha + \pi \quad \text{または} \quad \alpha - \pi \leq \beta \leq \alpha - \frac{1}{3}\pi$$



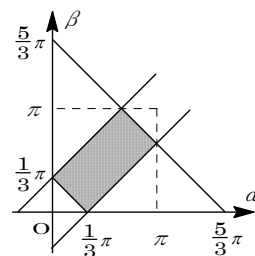
(ii)  $2 \cos(\alpha + \beta) - 1 \leq 0$  かつ  $2 \cos(\alpha - \beta) - 1 \geq 0$  のとき

$$\cos(\alpha + \beta) \leq \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad \cos(\alpha - \beta) \geq \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ より } \frac{1}{3}\pi \leq \alpha + \beta \leq \frac{5}{3}\pi, \quad -\alpha + \frac{1}{3}\pi \leq \beta \leq -\alpha + \frac{5}{3}\pi$$

$$\textcircled{4} \text{ より } -\frac{1}{3}\pi \leq \alpha - \beta \leq \frac{1}{3}\pi, \quad \alpha - \frac{1}{3}\pi \leq \beta \leq \alpha + \frac{1}{3}\pi$$

(i)(ii)より, 点 $(\alpha, \beta)$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ )の範囲は右図の網点部となる。なお, 境界は領域に含む。



### コメント

(2)は, もとの設定を無視して不等式を変形していくと, 結論が見えてきます。

**問題**

四面体  $OABC$  の辺  $OA$  上に点  $P$ , 辺  $AB$  上に点  $Q$ , 辺  $BC$  上に点  $R$ , 辺  $CO$  上に点  $S$  をとる。これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき、この平行四辺形  $PQRS$  の 2 つの対角線の交点は 2 つの線分  $AC$  と  $OB$  のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ。 [1998]

**解答例**

$\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とする。

$0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1$ ,  $0 < r < 1$ ,  $0 < s < 1$  として,  
 $\vec{OP} = p\vec{a}$ ,  $\vec{OQ} = q\vec{a} + (1-q)\vec{b}$ ,  $\vec{OR} = (1-r)\vec{b} + r\vec{c}$ ,  
 $\vec{OS} = s\vec{c}$  とおく。

ここで、四角形  $PQRS$  が平行四辺形より、 $\vec{PQ} = \vec{SR}$

$$(q-p)\vec{a} + (1-q)\vec{b} = (1-r)\vec{b} + (r-s)\vec{c}$$

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  が 1 次独立より

$$q-p=0 \text{ かつ } 1-q=1-r \text{ かつ } r-s=0$$

よって、 $p=q=r=s$  ……①

このとき平行四辺形  $PQRS$  の 2 つの対角線の交点を  $T$  とすると、 $T$  は  $PR$  の中点より、①を用いて、

$$\vec{OT} = \frac{\vec{OP} + \vec{OR}}{2} = \frac{p\vec{a} + (1-p)\vec{b} + p\vec{c}}{2} \dots\dots\dots②$$

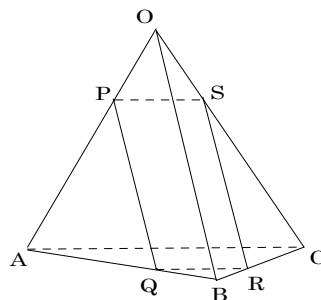
$AC$ ,  $OB$  の中点をそれぞれ  $M$ ,  $N$  とすると、

$$\vec{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}, \vec{ON} = \frac{\vec{b}}{2} \dots\dots\dots③$$

②③より、

$$\vec{OT} = p \cdot \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} + (1-p) \cdot \frac{\vec{b}}{2} = p\vec{OM} + (1-p)\vec{ON}$$

$0 < p < 1$  から  $T$  は線分  $MN$  上にある。



**コメント**

証明の方針に迷いが生じることがない頻出問題の 1 つです。完答が要求される設問です。

**問題**

$n^3 - 7n + 9$  が素数となるような整数  $n$  をすべて求めよ。

[2018]

**解答例+映像解説**

以下,  $\text{mod}3$  で記すと,  $9 \equiv 0$  に注意して,

(i)  $n \equiv 0$  のとき  $n^3 - 7n + 9 \equiv 0 - 0 + 0 = 0$

(ii)  $n \equiv 1$  のとき  $n^3 - 7n + 9 \equiv 1 - 7 + 0 = -6 \equiv 0$

(iii)  $n \equiv 2$  のとき  $n^3 - 7n + 9 \equiv 8 - 14 + 0 = -6 \equiv 0$

(i)~(iii)より,  $n^3 - 7n + 9$  はつねに 3 の倍数である。

すると,  $n^3 - 7n + 9$  が素数となるのは,  $n^3 - 7n + 9 = 3$  の場合だけであり,

$$n^3 - 7n + 6 = 0, (n-1)(n-2)(n+3) = 0$$

以上より, 求める整数  $n$  は,  $n = 1, 2, -3$  である。

**コメント**

まず,  $n^3 - 7n + 9$  の因数分解を考えたところうまくいかなかったため, 次の手は,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  として実験です。すると, すべて 3 の倍数になることがわかり……。

**問題**

$p, q$  を自然数,  $\alpha, \beta$  を,  $\tan \alpha = \frac{1}{p}$ ,  $\tan \beta = \frac{1}{q}$  を満たす実数とする。このとき,  $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$  を満たす  $p, q$  の組  $(p, q)$  をすべて求めよ。 [2017]

**解答例+映像解説**

自然数  $p, q$  に対して, 条件より,

$$\tan \alpha = \frac{1}{p} \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \tan \beta = \frac{1}{q} \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad \tan(\alpha + 2\beta) = 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i)  $q = 1$  のとき

②より,  $\tan \beta = 1$  から,  $n$  を整数として,  $\beta = n\pi + \frac{\pi}{4}$  となり, ①より,

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \tan\left(\alpha + 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} = -p$$

すると, ③より  $p = -2$  となり, 不適である。

(ii)  $q \geq 2$  のとき

$$\textcircled{2} \text{ から, } \tan 2\beta = \frac{2 \cdot \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q^2}} = \frac{2q}{q^2 - 1} \text{ となり, } \textcircled{1} \textcircled{3} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{2q}{q^2 - 1} = 2 \left(1 - \frac{1}{p} \cdot \frac{2q}{q^2 - 1}\right), \quad 2(q^2 - q - 1)p = q^2 + 4q - 1$$

$$q \geq 2 \text{ のとき } q^2 - q - 1 = q(q - 1) - 1 > 0 \text{ から, } p = \frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで,  $p$  は自然数より, ④から  $\frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)} \geq 1$  となり,

$$q^2 + 4q - 1 \geq 2(q^2 - q - 1), \quad q^2 - 6q - 1 \leq 0$$

これより,  $3 - \sqrt{10} \leq q \leq 3 + \sqrt{10}$  となり,  $3 < \sqrt{10} < 4$  から  $q \geq 7$  のときは自然数  $p$  は存在しない。そこで, 以下,  $q = 2, 3, 4, 5, 6$  の場合について調べる。

(a)  $q = 2$  のとき ④より,  $p = \frac{4 + 8 - 1}{2(4 - 2 - 1)} = \frac{11}{2}$  となり不適である。

(b)  $q = 3$  のとき ④より,  $p = \frac{9 + 12 - 1}{2(9 - 3 - 1)} = 2$  となり適する。

(c)  $q = 4$  のとき ④より,  $p = \frac{16 + 16 - 1}{2(16 - 4 - 1)} = \frac{31}{22}$  となり不適である。

(d)  $q = 5$  のとき ④より,  $p = \frac{25 + 20 - 1}{2(25 - 5 - 1)} = \frac{22}{19}$  となり不適である。

(e)  $q = 6$  のとき ④より,  $p = \frac{36 + 24 - 1}{2(36 - 6 - 1)} = \frac{59}{58}$  となり不適である。

(a)~(e)より, 条件を満たす  $p, q$  の組は,  $(p, q) = (2, 3)$  だけである。

## コメント

三角関数を題材にした整数問題です。なお、 $q=1$ のときは、 $\tan 2\beta$ が定義できないので別扱いとなっています。

## 問題

素数  $p, q$  を用いて、 $p^q + q^p$  と表される素数をすべて求めよ。

[2016]

## 解答例+映像解説

素数  $p, q$  に対して、 $n = p^q + q^p$  とおく。ここで、 $n$  が素数である  $p, q$  の条件を求めるとき、対称性から  $p \leq q$  としても一般性は失われない。

まず、 $p$  が 3 以上のときは、素数  $p, q$  はともに奇数になり、 $p^q, q^p$  もともに奇数である。よって、 $n$  は偶数となり素数ではない。

これより、 $p = 2$  となり、 $n = 2^q + q^2$  と表される。

さらに、 $q = 2$  のときは、 $n = 2^2 + 2^2 = 8$  となり、 $n$  は素数ではない。

また、 $q = 3$  のときは、 $n = 2^3 + 3^2 = 17$  となり、 $n$  は素数となる。

さて、 $q$  が 5 以上の素数のとき、2 の倍数でもなく、かつ 3 の倍数でもないことに着目すると、 $k$  を自然数として、 $q = 6k \pm 1$  と表せる。

(i)  $q = 6k + 1$  のとき

$$n = 2^{6k+1} + (6k+1)^2 = 2 \cdot 64^k + 36k^2 + 12k + 1$$

ここで、 $N_1$  を整数とすると、 $64^k = (3 \cdot 21 + 1)^k = 3N_1 + 1$  となるので、

$$n = 2(3N_1 + 1) + 36k^2 + 12k + 1 = 3(2N_1 + 12k^2 + 4k + 1)$$

よって、 $n$  は 3 の倍数となり、素数ではない。

(ii)  $q = 6k - 1$  のとき

$$n = 2^{6k-1} + (6k-1)^2 = 32 \cdot 64^{k-1} + 36k^2 - 12k + 1$$

ここで、 $N_2$  を整数とすると、 $64^{k-1} = (3 \cdot 21 + 1)^{k-1} = 3N_2 + 1$  となるので、

$$n = 32(3N_2 + 1) + 36k^2 - 12k + 1 = 3(32N_2 + 12k^2 - 4k + 11)$$

よって、 $n$  は 3 の倍数となり、素数ではない。

(i)(ii)より、 $q$  が 5 以上の素数のとき、 $n$  は素数にならない。

以上より、 $p^q + q^p$  と表される素数は 17 だけである。

## コメント

演習しておきたい素数がらみの整数問題です。まず、2 以外の素数は奇数という頻出事項でふるいにかけて  $p$  の値を決め、次に  $q$  の値を 2, 3, 5, 7, 11 として  $n$  の値を計算すると、5 以上では 3 の倍数であることがわかります。ただ、 $q$  が奇数ということだけでは、 $q = 9$  で  $n$  が素数となることから考え直し、その結果、 $q$  を 6 で割った余りで分類とした解答例となったわけです。なお、二項展開を用いる箇所は、省略気味に記しています。

**問題**

自然数  $a, b$  はどちらも 3 で割り切れないが、 $a^3 + b^3$  は 81 で割り切れる。このような  $a, b$  の組  $(a, b)$  のうち、 $a^2 + b^2$  の値を最小にするものと、そのときの  $a^2 + b^2$  の値を求めよ。 [2014]

**解答例+映像解説**

まず、自然数  $a, b$  がどちらも 3 で割り切れないとき、 $a, b$  を 3 で割った余りと、 $a^3 + b^3$  を 3 で割った余りととの関係は、右表のようになる。

	$b$		
$a \backslash$	$b$		
		1	2
1		2	0
2		0	1

すると、 $a^3 + b^3$  が 81 で割り切れるためには、3 で割った余りについて、 $a, b$  の一方が 1、他方が 2 であることが必要となる。

そこで、 $a, b$  に関する対称性より、 $a = 3k + 1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )、 $b = 3l - 1$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) の場合を考えると、

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (3k+1+3l-1)\{(3k+1)^2 - (3k+1)(3l-1) + (3l-1)^2\} \\ &= 9(k+l)\{3(k^2 - kl + l^2 + k - l) + 1\} \end{aligned}$$

これより、 $a^3 + b^3$  が 81 で割り切れる条件は、 $3(k^2 - kl + l^2 + k - l) + 1$  が 3 の倍数でないことより、 $k+l$  が 9 の倍数となることである。すなわち、 $k \geq 0, l \geq 1$  から  $k+l \geq 1$  となり、 $k+l = 9, 18, 27, \dots$  である。

(i)  $k+l=9$  のとき

この場合をまとめると、右表のようになり、 $(a, b)$  の組で  $a^2 + b^2$  の値が最小になるのは、 $a+b = 3 \times 9 = 27$  から、

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$l$	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$a$	1	4	7	10	13	16	19	22	25
$b$	26	23	20	17	14	11	8	5	2

$$a^2 + b^2 = a^2 + (27-a)^2 = 2a^2 - 54a + 27^2 = 2\left(a - \frac{27}{2}\right)^2 + \frac{27^2}{2}$$

よって、 $(a, b) = (13, 14)$  のとき、 $a^2 + b^2$  は最小値  $13^2 + 14^2 = 365$  をとる。

(ii)  $k+l \geq 18$  のとき

この場合は  $a+b \geq 3 \times 18 = 54$  から、(i)と同様に考えると、 $a^2 + b^2$  の値が最小になるのは  $a=b=27$  のときであるが、この値はともに 3 で割り切れるので、

$$a^2 + b^2 > 27^2 + 27^2 > 365$$

(i)(ii)より、 $a^2 + b^2$  が最小となるのは、 $(a, b) = (13, 14)$  のときである。

したがって、対称性を考え合わせると、 $(a, b) = (13, 14), (14, 13)$  において、 $a^2 + b^2$  は最小値 365 をとる。

**コメント**

試行錯誤が必要とされる京大らしい整数問題です。まず、3 で割った余りに注目して、絞り込みを行っています。ただ、後半は  $ab$  平面をイメージした解答例のつもりですが、アバウトに記してしまいたいという誘惑に負けそうになっています。



**問題**

$N$  を 2 以上の自然数とし、 $a_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) を次の性質(i), (ii)を満たす数列とする。

(i)  $a_1 = 2^N - 3$

(ii)  $n=1, 2, \dots$  に対して、 $a_n$  が偶数のとき  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ 、 $a_n$  が奇数のとき

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}$$

このとき、どのような自然数  $M$  に対しても、 $\sum_{n=1}^M a_n \leq 2^{N+1} - N - 5$  が成り立つことを示せ。

[2013]

**解答例+映像解説**

$N \geq 2$  より、 $a_1 = 2^N - 3$  は奇数なので、 $a_2 = \frac{a_1 - 1}{2} = \frac{2^N - 3 - 1}{2} = 2^{N-1} - 2$

$a_2$  は偶数となり、 $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2^{N-1} - 2}{2} = 2^{N-2} - 1$

すると、 $N=2$  のとき  $a_3 = 0$  から  $a_3$  は偶数となり、 $a_4 = \frac{a_3}{2} = 0$ 、また  $N \geq 3$  のときは  $a_3$  は奇数となり、 $a_4 = \frac{a_3 - 1}{2} = \frac{2^{N-2} - 1 - 1}{2} = 2^{N-3} - 1$

さらに、 $2 \leq N \leq 3$  のとき  $a_4 = 0$  から  $a_4$  は偶数となり、 $a_5 = \frac{a_4}{2} = 0$ 、また  $N \geq 4$  のときは  $a_4$  は奇数となり、 $a_5 = \frac{a_4 - 1}{2} = \frac{2^{N-3} - 1 - 1}{2} = 2^{N-4} - 1$

以上より、 $a_1 = 2^N - 3$ 、 $a_2 = 2^{N-1} - 2$  で、 $n \geq 3$  のときは、帰納的に、 $a_n$  を以下のようにまとめることができる。

(i)  $n \geq N+1$  のとき  $a_n = 0$

(ii)  $n \leq N$  のとき  $a_n = 2^{N-n+1} - 1$

さて、 $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$  とおくと、 $N \geq 3$  のとき、

$$\begin{aligned} S_M \leq S_N &= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + \sum_{n=3}^N a_n \\ &= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + (2^{N-2} - 1) + (2^{N-3} - 1) + \dots + (2^1 - 1) \\ &= \frac{2(2^N - 1)}{2 - 1} - N - 3 = 2^{N+1} - N - 5 \end{aligned}$$

また、 $N=2$  のときは、 $a_1 = 2^2 - 3 = 1$ 、 $a_2 = 2^1 - 2 = 0$ 、 $n \geq 3$  のとき  $a_n = 0$  より、

$$S_M = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1 = 2^3 - 2 - 5 = 2^{N+1} - N - 5$$

したがって、どのような自然数  $M$  に対しても、 $\sum_{n=1}^M a_n \leq 2^{N+1} - N - 5$  が成立する。

**コメント**

$n$ が大きくなると  $a_n$  は 0 になって, 和は変わらないというような大雑把なとらえ方が必要です。ただ, 文字がたくさん出るので, 詰めの作業は気疲れします。

**問題**

$n$  を自然数とし、整式  $x^n$  を整式  $x^2 - 2x - 1$  で割った余りを  $ax + b$  とする。このとき  $a$  と  $b$  は整数であり、さらにそれらをとともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

[2013]

**解答例+映像解説**

整式  $x^n$  を整式  $x^2 - 2x - 1$  で割った商を  $q_n(x)$ 、余りを  $a_nx + b_n$  とすると、

$$x^n = (x^2 - 2x - 1)q_n(x) + a_nx + b_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

このとき、 $a_n$  と  $b_n$  は整数であることを数学的帰納法で証明する。

- (i)  $n = 1$  のとき  $a_1 = 1, b_1 = 0$  でともに整数である。
- (ii)  $n = k$  のとき  $a_k$  と  $b_k$  がともに整数であると仮定し、 $\textcircled{1}$  より、

$$\begin{aligned} x^k &= (x^2 - 2x - 1)q_k(x) + a_kx + b_k \\ x^{k+1} &= (x^2 - 2x - 1)xq_k(x) + a_kx^2 + b_kx \\ &= (x^2 - 2x - 1)xq_k(x) + a_k(x^2 - 2x - 1) + a_k(2x + 1) + b_kx \\ &= (x^2 - 2x - 1)\{xq_k(x) + a_k\} + (2a_k + b_k)x + a_k \end{aligned}$$

整式  $x^{k+1}$  を整式  $x^2 - 2x - 1$  で割った余りは  $a_{k+1}x + b_{k+1}$  より、

$$a_{k+1} = 2a_k + b_k \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad b_{k+1} = a_k \cdots \cdots \textcircled{3}$$

これより、 $a_{k+1}, b_{k+1}$  はともに整数である。

(i)(ii)より、 $a_n$  と  $b_n$  は整数である。

次に、 $a_n$  と  $b_n$  をともに割り切る素数は存在しないことを証明する。

- (i)  $n = 1$  のとき  $a_1 = 1, b_1 = 0$  で、ともに割り切る素数は存在しない。
- (ii)  $n = k$  のとき  $a_k$  と  $b_k$  をともに割り切る素数は存在しないと仮定する。

ここで、 $a_{k+1}, b_{k+1}$  がともに素数  $p$  で割り切れるとすると、 $\textcircled{2}\textcircled{3}$ より、

$$a_k = b_{k+1}, \quad b_k = a_{k+1} - 2a_k = a_{k+1} - 2b_{k+1}$$

これより、 $a_k, b_k$  も素数  $p$  で割り切れ、仮定に反する。

よって、 $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  をともに割り切る素数は存在しない。

(i)(ii)より、 $a_n$  と  $b_n$  をともに割り切る素数は存在しない。

以上より、整式  $x^n$  を整式  $x^2 - 2x - 1$  で割った余りを  $ax + b$  とするとき、 $a$  と  $b$  は整数であり、さらにそれらをとともに割り切る素数は存在しない。

**コメント**

見かけは、本年の文系 2 番の類題ですが、内容的には 2002 年の東大の文理共通の 2 番の類題です。誘導はありましたが……。

**問題**

- (1)  $\sqrt[3]{2}$  が無理数であることを証明せよ。  
 (2)  $P(x)$  は有理数を係数とする  $x$  の多項式で、 $P(\sqrt[3]{2})=0$  を満たしているとする。  
 このとき  $P(x)$  は  $x^3-2$  で割り切れることを証明せよ。 [2012]

**解答例+映像解説**

- (1)  $\sqrt[3]{2}$  が有理数であると仮定すると、 $p, q$  を互いに素である自然数として、  

$$\sqrt[3]{2} = \frac{q}{p}, \quad q^3 = 2p^3 \dots\dots\dots ①$$
 すると、 $q$  は 2 の倍数となり、 $k$  を自然数として、 $q = 2k \dots\dots\dots ②$   
 ②を①に代入すると、 $8k^3 = 2p^3, \quad p^3 = 4k^3$   
 すると、 $p$  も 2 の倍数となり、 $p, q$  が互いに素であることに反する。  
 よって、 $\sqrt[3]{2}$  が有理数でない、すなわち無理数である。  
 (2) 有理数を係数とする多項式  $P(x)$  を、 $x^3-2$  で割った商を  $Q(x)$  とし、余りを  $ax^2+bx+c$  ( $a, b, c$  は有理数) とおくと、  

$$P(x) = (x^3-2)Q(x) + ax^2 + bx + c \dots\dots\dots ③$$
 ここで、 $\alpha = \sqrt[3]{2}$  とすると、条件より  $P(\alpha) = 0$  なので、 $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \dots\dots\dots ④$   
 次に、 $x^3-2$  を  $ax^2+bx+c$  で割ると、 $a \neq 0$  のとき、  

$$x^3-2 = (ax^2+bx+c)\left(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a^2}\right) + \left(-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right)x + \left(-2 + \frac{bc}{a^2}\right) \dots\dots\dots ⑤$$
 ⑤に  $x = \alpha$  を代入すると、④より、 $\left(-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right)\alpha + \left(-2 + \frac{bc}{a^2}\right) = 0$   
 $a, b, c$  は有理数であり、(1)から  $\alpha$  は無理数なので、  

$$-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2} = 0 \dots\dots\dots ⑥, \quad -2 + \frac{bc}{a^2} = 0 \dots\dots\dots ⑦$$
 ⑥より、 $c = \frac{b^2}{a}$  となり、⑦に代入すると、 $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2$  から、 $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$   
 ところが、左辺が有理数、右辺が無理数なので、成立しない。  
 よって、 $a = 0 \dots\dots\dots ⑧$  である。  
 すると、④より  $b\alpha + c = 0$  となり、 $b, c$  は有理数、 $\alpha$  は無理数なので、  

$$b = c = 0 \dots\dots\dots ⑨$$
 ⑧⑨を③に代入すると、 $P(x) = (x^3-2)Q(x)$   
 したがって、 $P(x)$  は  $x^3-2$  で割り切れる。

**コメント**

(1)は有名問題。(2)はこの結論を利用するのですが、一筋縄ではいきません。

**問題**

$n$  は 2 以上の整数であり,  $\frac{1}{2} < a_j < 1$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) であるとき, 不等式

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \right)$$

が成立することを示せ。

[2011]

**解答例+映像解説**

$n \geq 2$  のとき,  $\frac{1}{2} < a_j < 1$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) に対して, 不等式

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \right) \cdots \cdots (*)$$

が成り立つことを, 以下, 数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n = 2$  のとき  $\frac{1}{2} < a_1 < 1, \frac{1}{2} < a_2 < 1$  に対して,

$$(1 - a_1)(1 - a_2) - 1 + \left( a_1 + \frac{a_2}{2} \right) = a_1 a_2 - \frac{a_2}{2} = a_2 \left( a_1 - \frac{1}{2} \right) > 0$$

よって, 不等式(\*)は成立する。

(ii)  $n = k$  のとき  $\frac{1}{2} < a_j < 1$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) に対して,

不等式  $(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_k) > 1 - \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} \right)$  の成立を仮定する。

さて,  $\frac{1}{2} < a_{k+1} < 1$  に対して,

$$\begin{aligned} & (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_k)(1 - a_{k+1}) - 1 + \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{2^k} \right) \\ & > \left\{ 1 - \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} \right) \right\} (1 - a_{k+1}) - 1 + \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{2^k} \right) \\ & = -a_{k+1} + \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} \right) a_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{2^k} \\ & = \left( -1 + a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} \right) a_{k+1} > \left( -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \right) a_{k+1} \end{aligned}$$

ここで,  $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^k} = 0$  より,

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_k)(1 - a_{k+1}) > 1 - \left( a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{2^k} \right)$$

(i)(ii)より,  $n \geq 2$  のとき,  $\frac{1}{2} < a_j < 1$  に対して, 不等式(\*)が成立する。

**コメント**

数学的帰納法による不等式の証明問題です。予想よりはるかにスッキリ示せます。

**問題**

次の問いに答えよ。

- (1)  $n$  を正の整数,  $a = 2^n$  とする。  $3^a - 1$  は  $2^{n+2}$  で割り切れるが  $2^{n+3}$  では割り切れないことを示せ。
- (2)  $m$  を正の偶数とする。  $3^m - 1$  が  $2^m$  で割り切れるならば  $m = 2$  または  $m = 4$  であることを示せ。 [2010]

**解答例+映像解説**

- (1)  $a = 2^n$  とするとき,  $3^a - 1$  は  $2^{n+2}$  で割り切れるが  $2^{n+3}$  では割り切れないことを数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n = 1$  のとき

$a = 2$  より  $3^a - 1 = 8$  となり,  $2^{1+2}$  では割り切れるが  $2^{1+3}$  では割り切れない。

(ii)  $n = k$  のとき

$a = 2^k$  とするとき,  $3^a - 1$  は  $2^{k+2}$  で割り切れるが  $2^{k+3}$  では割り切れない, すなわち  $l$  を奇数として,  $3^{2^k} - 1 = l \cdot 2^{k+2}$  と仮定する。このとき,

$$\begin{aligned} 3^{2^{k+1}} - 1 &= 3^{2^k \cdot 2} - 1 = (3^{2^k})^2 - 1 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1) \\ &= l \cdot 2^{k+2} (l \cdot 2^{k+2} + 2) = l \cdot 2^{k+3} (l \cdot 2^{k+1} + 1) \end{aligned}$$

ここで,  $l$  および  $l \cdot 2^{k+1} + 1$  はともに奇数なので,  $3^{2^{k+1}} - 1$  は  $2^{k+3}$  で割り切れるが  $2^{k+4}$  では割り切れない。

(i)(ii)より,  $3^{2^n} - 1$  は  $2^{n+2}$  で割り切れるが  $2^{n+3}$  では割り切れない。

- (2)  $m$  は正の偶数より,  $L$  を正の奇数として,  $m = L \cdot 2^n = L \cdot a$  とおくことができる。

$$3^m - 1 = 3^{L \cdot a} - 1 = (3^a)^L - 1 = (3^a - 1) \{ (3^a)^{L-1} + (3^a)^{L-2} + \dots + 3^a + 1 \}$$

ここで, (1)より,  $3^a - 1$  は  $2^{n+2}$  で割り切れるが  $2^{n+3}$  では割り切れない。さらに,  $3^a$  は奇数であるので,  $L$  項の奇数の和  $(3^a)^{L-1} + (3^a)^{L-2} + \dots + 3^a + 1$  も奇数となることを考え合わせると,  $3^m - 1$  は  $2^{n+2}$  で割り切れるが  $2^{n+3}$  では割り切れない。

よって,  $M$  を奇数として,  $3^m - 1 = M \cdot 2^{n+2}$  と表すことができる。

さて, 条件より,  $3^m - 1$  は  $2^m$  で割り切れるので,

$$n + 2 \geq m = L \cdot 2^n, \quad L \leq \frac{n+2}{2^n} \dots\dots\dots (*)$$

そこで,  $f(n) = \frac{n+2}{2^n}$  とおくと,  $n \geq 3$  で  $f(n) < 1$  であり, (\*) を満たす正の奇数  $L$  は存在しない。また,  $f(1) = \frac{3}{2}$ ,  $f(2) = 1$  から, (\*) を満たす  $(L, n)$  の組は,  $(L, n) = (1, 1), (1, 2)$  のみとなる。

このとき  $m$  の値は, それぞれ  $m = 1 \cdot 2^1 = 2$ ,  $m = 1 \cdot 2^2 = 4$  である。

## コメント

正の整数を 2 で割っていくと、その商がいつかは、1 も含めて、奇数となるということを利用した解法です。難問なので、本問だけが誘導形式になっています。なお、 $f(n)$  の値については、1 次関数と指数関数のグラフを比較して結論を導いています。

**問題**

$a$  と  $b$  を互いに素、すなわち 1 以外の公約数をもたない正の整数とし、さらに  $a$  は奇数とする。正の整数  $n$  に対して整数  $a_n, b_n$  を

$$(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たすように定めるとき、次の(1), (2)を示せ。ただし  $\sqrt{2}$  が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (1)  $a_2$  は奇数であり、 $a_2$  と  $b_2$  は互いに素である。
- (2) すべての  $n$  に対して、 $a_n$  は奇数であり、 $a_n$  と  $b_n$  は互いに素である。 [2009]

**解答例**

(1) 条件より、 $a_2 + b_2\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$  となり、

$$a_2 = a^2 + 2b^2 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_2 = 2ab \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$a$  は奇数から  $a^2$  も奇数となり、 $\textcircled{1}$  より  $a_2$  は奇数である。

ここで、 $a_2$  と  $b_2$  は互いに素でないと仮定すると、 $a_2$  と  $b_2$  はともに 3 以上の素因数  $g$  をもつことになり、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  より、 $j, l$  を整数として、

$$a^2 + 2b^2 = gj \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad 2ab = gl \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$  より  $2a^4 + 4a^2b^2 = 2a^2gj$ 、 $\textcircled{4}$  より  $4a^2b^2 = g^2l^2$  となり、

$$2a^4 + g^2l^2 = 2a^2gj, \quad 2a^4 = g(2a^2j - gl^2)$$

$g$  は 3 以上の素数より、 $a^4$  は  $g$  を約数にもち、すなわち  $a$  は  $g$  を約数にもつ。

また、同様にして、 $\textcircled{3}$  より  $4a^2b^2 + 8b^4 = 4b^2gj$  となり、

$$g^2l^2 + 8b^4 = 4b^2gj, \quad 8b^4 = g(4b^2j - gl^2)$$

$g$  は 3 以上の素数より、 $b^4$  は  $g$  を約数にもち、すなわち  $b$  は  $g$  を約数にもつ。

これは、 $a$  と  $b$  が互いに素であるという条件に反する。

したがって、 $a_2$  と  $b_2$  は互いに素である。

(2) 条件より、 $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^{n+1} = (a + b\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2})$  なので、

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (aa_n + 2bb_n) + (ba_n + ab_n)\sqrt{2}$$

$$a_{n+1} = aa_n + 2bb_n \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad b_{n+1} = ba_n + ab_n \cdots \cdots \textcircled{6}$$

以下、すべての  $n$  に対して、 $a_n$  は奇数であり、 $a_n$  と  $b_n$  は互いに素であることを、数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n=1$  のとき

$a_1 = a, b_1 = b$  から、明らかに成立している。

(ii)  $n=k$  のとき

$a_k$  は奇数であり、 $a_k$  と  $b_k$  は互いに素であると仮定する。

まず、 $\textcircled{5}$  より  $a_{k+1} = aa_k + 2bb_k$  となり、 $a$  は奇数から  $a_{k+1}$  も奇数である。



ここで、 $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  は互いに素でないとすると、 $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  はともに 3 以上の素因数  $g$  をもつことになり、⑤⑥より、 $j_k, l_k$  を整数として、

$$aa_k + 2bb_k = gj_k \cdots \cdots \textcircled{7}, \quad ba_k + ab_k = gl_k \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}\textcircled{8} \text{より}, \quad (a^2 - 2b^2)a_k = g(aj_k - 2bl_k), \quad (a^2 - 2b^2)b_k = g(al_k - bj_k)$$

$a_k$  と  $b_k$  は互いに素であることから、 $a^2 - 2b^2$  は 3 以上の素因数  $g$  をもつ。

$$\text{さて}, \quad \textcircled{5}\textcircled{6} \text{より}, \quad a_{k+1} - 2aa_k + (a^2 - 2b^2)a_{k-1} = 0$$

$$2aa_k = a_{k+1} - (a^2 - 2b^2)a_{k-1} \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$$\text{同様に}, \quad \textcircled{5}\textcircled{6} \text{より}, \quad b_{k+1} - 2ab_k + (a^2 - 2b^2)b_{k-1} = 0$$

$$2ab_k = b_{k+1} - (a^2 - 2b^2)b_{k-1} \cdots \cdots \textcircled{10}$$

すると、 $a_{k+1}, b_{k+1}, a^2 - 2b^2$  は 3 以上の素因数  $g$  をもつので、⑨⑩から、 $2aa_k, 2ab_k$  は素因数  $g$  をもつ。さらに、 $a_k$  と  $b_k$  は互いに素なので、 $a$  は素因数  $g$  をもつ。

そこで、 $a^2 - 2b^2$  は 3 以上の素因数  $g$  をもつことから、 $b$  も素因数  $g$  をもつことになり、 $a$  と  $b$  が互いに素であるという条件に反する。

したがって、 $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  は互いに素である。

(i)(ii)より、すべての  $n$  に対して、 $a_n$  は奇数であり、 $a_n$  と  $b_n$  は互いに素である。

## コメント

(2)は(1)と同じように進めていますが、後半が難です。連立漸化式と隣接 3 項間型の漸化式の関係については「ピンポイントレクチャー」で掠る程度に触れています。

**問題**

$p$  を 3 以上の素数とする。4 個の整数  $a, b, c, d$  が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき、 $a, b, c, d$  を  $p$  を用いて表せ。

[2007]

**解答例**

まず、 $a + b + c + d = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $ad - bc + p = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$  より、

$$a(-a - b - c) - bc + p = 0, \quad a^2 + ab + ac + bc = p$$

変形して、 $(a + b)(a + c) = p \cdots \cdots \textcircled{3}$

ここで、 $a \geq b \geq c \geq d \cdots \cdots \textcircled{4}$  より、 $a + b \geq a + c$

$\textcircled{1}\textcircled{4}$  より、 $0 = a + b + c + d \leq a + b + a + b = 2(a + b)$  から、 $a + b \geq 0$

よって、 $p$  は素数なので、 $\textcircled{3}$  から、

$$a + b = p \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad a + c = 1 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}$  より  $b = p - a \cdots \cdots \textcircled{5}'$ ,  $\textcircled{6}$  より  $c = 1 - a \cdots \cdots \textcircled{6}'$

$\textcircled{1}$  から、 $d = -a - (p - a) - (1 - a) = -p - 1 + a \cdots \cdots \textcircled{7}$

$\textcircled{5}' \textcircled{6}' \textcircled{7}$  を  $\textcircled{4}$  に代入すると、 $a \geq p - a \geq 1 - a \geq -p - 1 + a$  となり、

$$a \geq p - a \cdots \cdots \textcircled{8}, \quad p - a \geq 1 - a \cdots \cdots \textcircled{9}, \quad 1 - a \geq -p - 1 + a \cdots \cdots \textcircled{10}$$

$\textcircled{8}$  より  $a \geq \frac{p}{2}$ ,  $\textcircled{10}$  より  $a \leq \frac{p}{2} + 1$  となり、 $\frac{p}{2} \leq a \leq \frac{p}{2} + 1 \cdots \cdots \textcircled{11}$

また、 $\textcircled{9}$  は  $p \geq 1$  となり成立する。

そこで、 $p$  は 3 以上の素数、すなわち奇数であることを用いると、 $\textcircled{11}$  から、

$$a = \frac{p+1}{2}$$

すると、 $\textcircled{5}' \textcircled{6}' \textcircled{7}$  から、

$$b = p - \frac{p+1}{2} = \frac{p-1}{2}, \quad c = 1 - \frac{p+1}{2} = \frac{-p+1}{2}, \quad d = -p - 1 + \frac{p+1}{2} = \frac{-p-1}{2}$$

**コメント**

京大らしい味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが、そのポイントは、2 以外の素数は奇数という事実です。

**問題**

2以上の自然数  $n$  に対し、 $n$  と  $n^2 + 2$  がともに素数になるのは  $n = 3$  の場合に限ることを示せ。 [2006]

**解答例**

(i)  $n = 2$  のとき

$n^2 + 2 = 6$  となり、 $n^2 + 2$  は素数ではない。

(ii)  $n = 3$  のとき

$n^2 + 2 = 11$  となり、 $n$  と  $n^2 + 2$  はともに素数である。

(iii)  $n \geq 5$  のとき

$n$  は素数なので、2の倍数でなく、しかも3の倍数でもないことより、 $k$  を自然数として、 $n = 6k \pm 1$  と表すことができる。このとき、

$$n^2 + 2 = (6k \pm 1)^2 + 2 = 36k^2 \pm 12k + 3 = 3(12k^2 \pm 4k + 1)$$

すると、 $12k^2 \pm 4k + 1$  は整数なので、 $n^2 + 2$  は3の倍数となり、素数ではない。

(i)~(iii)より、 $n$  と  $n^2 + 2$  がともに素数になるのは、 $n = 3$  の場合のみである。

**コメント**

まず、 $n = 2, 3, 5, 7, 11, 13$  として  $n^2 + 2$  を計算したところ、 $n$  が5以上のとき、 $n^2 + 2$  は3の倍数になると推測できました。これを、式を用いて確認した解です。

**問題**

$2^{10} < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$  を満たす自然数  $n$  は何個あるか。ただし  $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$  である。 [2005]

**解答例**

$$2^{10} < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 2^{20} \text{ より, } 10 \log_{10} 2 < n(\log_{10} 5 - \log_{10} 4) < 20 \log_{10} 2$$

$$10 \log_{10} 2 < n(1 - 3 \log_{10} 2) < 20 \log_{10} 2$$

$1 - 3 \log_{10} 2 > 0$  より,

$$\frac{10 \log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} < n < \frac{20 \log_{10} 2}{1 - 3 \log_{10} 2} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで,  $f(x) = \frac{x}{1 - 3x}$ ,  $a = \log_{10} 2$  とおくと,  $\textcircled{1}$  より,

$$10 f(a) < n < 20 f(a) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

さて,  $f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1 - 3x)}$  と変形し, 条件から  $0.301 < a < 0.3011$  なので,

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1 - 0.903)} < f(a) < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1 - 0.9033)}$$

これより,  $3.103 < f(a) < 3.114$  となり,

$$31.03 < 10 f(a) < 31.14, \quad 62.06 < 20 f(a) < 62.28$$

$\textcircled{2}$  より,  $n$  は自然数なので,  $32 \leq n \leq 62$  となり,  $n$  の個数は 31 である。

**コメント**

数値計算が面倒そうなので, 後回しにしたくなる問題です。しかし, その予想は, はずれてしまいました。

**問題**

$a^3 - b^3 = 217$  を満たす整数の組  $(a, b)$  をすべて求めよ。 [2005]

**解答例**

$$a^3 - b^3 = 217 \text{ より, } (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 217$$

ここで,  $a, b$  は整数なので,  $a-b, a^2 + ab + b^2$  はともに整数である。

さらに,  $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$  より,  $a-b, a^2 + ab + b^2$  はともに

$217 = 7 \times 31$  の正の約数となる。

(i)  $a-b=1, a^2 + ab + b^2 = 217$  のとき

$$a = b+1 \text{ より, } (b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 217 \text{ から,}$$

$$b^2 + b - 72 = 0$$

$$\text{これより, } b = 8, -9 \text{ となり, } (a, b) = (9, 8), (-8, -9)$$

(ii)  $a-b=7, a^2 + ab + b^2 = 31$  のとき

$$a = b+7 \text{ より, } (b+7)^2 + (b+7)b + b^2 = 31 \text{ から,}$$

$$b^2 + 7b + 6 = 0$$

$$\text{これより, } b = -1, -6 \text{ となり, } (a, b) = (6, -1), (1, -6)$$

(iii)  $a-b=31, a^2 + ab + b^2 = 7$  のとき

$$a = b+31 \text{ より, } (b+31)^2 + (b+31)b + b^2 = 7 \text{ から,}$$

$$b^2 + 31b + 318 = 0$$

すると,  $D = 31^2 - 4 \times 318 = -311 < 0$  から,  $b$  は虚数となり不適。

(iv)  $a-b=217, a^2 + ab + b^2 = 1$  のとき

$$a = b+217 \text{ より, } (b+217)^2 + (b+217)b + b^2 = 1 \text{ から,}$$

$$b^2 + 217b + 15696 = 0$$

すると,  $D = 217^2 - 4 \times 15696 = -15695 < 0$  から,  $b$  は虚数となり不適。

(i)~(iv)より,  $(a, b) = (9, 8), (-8, -9), (6, -1), (1, -6)$

**コメント**

正確な計算だけで結論まで導けます。なお, 217 を 65 に変更すると文系の問題になりますが, 内容は全く同じです。

## 問題

正の数からなる数列  $\{a_n\}$  が次の条件(i), (ii)を満たすとき,  $\sum_{k=1}^n a_k$  を求めよ。

(i)  $a_1 = 1$

(ii)  $\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1) \quad (n \geq 2)$  [2003]

## 解答例

条件より,  $\log \frac{a_n}{a_{n-1}} = \log \frac{n-1}{n+1}$  なので,  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$

$$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}, \quad n(n+1)a_n = (n-1)na_{n-1}$$

よって,  $n(n+1)a_n = 1 \cdot 2 \cdot a_1 = 2$  から,  $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$$

## コメント

昨年より基本的な問題で, すっきり解けます。漸化式の両辺に  $n$  をかける変形もよく見かけます。

**問題**

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$  は整数を係数とする  $x$  の 4 次式とする。4 次方程式  $f(x) = 0$  の重複も込めた 4 つの解のうち、2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき  $a, b, c$  の値を求めよ。 [2002]

**解答例**

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$  のとき、 $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

まず、 $f(x) = 0$  の整数解は、定数項 1 の約数  $\pm 1$  だけである。

すると、条件より、 $f(x) = 0$  の整数解は、 $x = 1$  を重解にもつとき、 $x = -1$  を重解にもつとき、 $x = \pm 1$  を解にもつときのいずれかである。

(i)  $x = 1$  を重解にもつとき  $f(1) = f'(1) = 0$  より、

$$1 + a + b + c + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 4 + 3a + 2b + c = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{より } c = -3a - 2b - 4 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad \textcircled{1} \text{に代入して, } -2a - b - 2 = 0, \quad b = -2a - 2$$

$$\textcircled{3} \text{より, } c = -3a - 2(-2a - 2) - 4 = a$$

このとき、 $f(x) = x^4 + ax^3 - (2a + 2)x^2 + ax + 1 = (x - 1)^2 \{ x^2 + (a + 2)x + 1 \}$  となり、条件より、 $x^2 + (a + 2)x + 1 = 0$  が虚数解をもつことより、

$$D = (a + 2)^2 - 4 < 0, \quad (a + 2 - 2)(a + 2 + 2) < 0, \quad -4 < a < 0$$

$a$  は整数なので、 $a = -3, -2, -1$

以上より、 $(a, b, c) = (-3, 4, -3), (-2, 2, -2), (-1, 0, -1)$

(ii)  $x = -1$  を重解にもつとき  $f(-1) = f'(-1) = 0$  より、

$$1 - a + b - c + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad -4 + 3a - 2b + c = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \text{より } c = -3a + 2b + 4 \cdots \cdots \textcircled{6}, \quad \textcircled{4} \text{に代入して, } 2a - b - 2 = 0, \quad b = 2a - 2$$

$$\textcircled{6} \text{より, } c = -3a + 2(2a - 2) + 4 = a$$

このとき、 $f(x) = x^4 + ax^3 + (2a - 2)x^2 + ax + 1 = (x + 1)^2 \{ x^2 + (a - 2)x + 1 \}$  となり、条件より、 $x^2 + (a - 2)x + 1 = 0$  が虚数解をもつことより、

$$D = (a - 2)^2 - 4 < 0, \quad (a - 2 - 2)(a - 2 + 2) < 0, \quad 0 < a < 4$$

$a$  は整数なので、 $a = 3, 2, 1$

以上より、 $(a, b, c) = (3, 4, 3), (2, 2, 2), (1, 0, 1)$

(iii)  $x = \pm 1$  を解にもつとき  $f(1) = f(-1) = 0$  より、

$$1 + a + b + c + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}, \quad 1 - a + b - c + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}\textcircled{8} \text{より } a + c = 0, \quad c = -a \cdots \cdots \textcircled{9}, \quad \textcircled{7}\textcircled{9} \text{より } b = -2$$

このとき、 $f(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 - ax + 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 - ax - 1)$

ところが、 $x^2 - ax - 1 = 0$  の判別式  $D = a^2 + 4 > 0$  となり、 $f(x) = 0$  は虚数解をもたない。よって、条件に適さない。

(i)(ii)(iii)より, 複号同順として,

$$(a, b, c) = (\pm 3, 4, \pm 3), (\pm 2, 2, \pm 2), (\pm 1, 0, \pm 1)$$

### コメント

整数解の候補が $\pm 1$ と $2$ つしかないので, ホッとします。



**問 題**

整数  $n$  に対し  $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$  とおき、 $a_n = i^{f(n)}$  と定める。ただし、 $i$  は虚数単位を表す。このとき、 $a_{n+k} = a_n$  が任意の整数  $n$  に対して成り立つような正の整数  $k$  をすべて求めよ。 [2001]

**解答例**

$$\text{条件より, } a_n = i^{f(n)} = \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \cos \frac{n(n-1)}{4} \pi + i \sin \frac{n(n-1)}{4} \pi$$

$$a_{n+k} = \cos \frac{(n+k)(n+k-1)}{4} \pi + i \sin \frac{(n+k)(n+k-1)}{4} \pi$$

$a_{n+k} = a_n$  なので、 $m$  を整数として、

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{4} \pi = 2m\pi + \frac{n(n-1)}{4} \pi$$

$$(n+k)(n+k-1) = 8m + n(n-1), \quad k(2n+k-1) = 8m \cdots \cdots (*)$$

ここで、(\*)に  $n=0$ ,  $n=1$  を代入すると、 $k(k-1)$ ,  $k(k+1)$  がともに 8 の倍数となるが、 $k-1$ ,  $k+1$  がともに 8 の倍数となることはないので、 $k$  が 8 の倍数である。

逆に  $k$  が 8 の倍数であるとき、任意の整数  $n$  に対して(\*)は明らかに成立する。

よって、任意の整数  $n$  に対して、ある整数  $m$  が存在する条件は  $k$  が 8 の倍数、すなわち、 $k = 8l$  ( $l=1, 2, 3, \dots$ ) である。

**コメント**

式変形の結果、得られた(\*)には、とまどってしまいます。このようなときは、必要条件を求め、そのあと十分性を確認するという流れでうまくいくことがよくあります。

**問題**

$p$  を 2 以上の整数とする。2 以上の整数  $n$  に対し、次の条件(イ), (ロ)を満たす複素数の組  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  の個数を  $a_n$  とする。

(イ)  $k = 1, 2, \dots, n$  に対し、 $z_k^p = 1$  かつ  $z_k \neq 1$

(ロ)  $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a_3$  を求めよ。
- (2)  $a_{n+2}$  を  $a_n, a_{n+1}$  の一方または両方を用いて表せ。
- (3)  $a_n$  を求めよ。

[2001]

**解答例**

- (1) まず、 $n = 2$  のとき、 $1 \leq k_1 \leq p-1, 1 \leq k_2 \leq p-1$  として、

$$z_1^p = 1 \text{ かつ } z_1 \neq 1 \text{ より, } z_1 = \cos \frac{2\pi}{p} k_1 + i \sin \frac{2\pi}{p} k_1$$

$$z_2^p = 1 \text{ かつ } z_2 \neq 1 \text{ より, } z_2 = \cos \frac{2\pi}{p} k_2 + i \sin \frac{2\pi}{p} k_2$$

また、 $z_1 z_2 = 1$  より  $l$  を整数として、 $\frac{2\pi}{p} k_1 + \frac{2\pi}{p} k_2 = 2l\pi, k_1 + k_2 = lp$

$$2 \leq k_1 + k_2 \leq 2p - 2 < 2p \text{ より } l = 1 \text{ となるので, } k_1 + k_2 = p \cdots \cdots \textcircled{1}$$

すると、①を満たす  $(k_1, k_2)$  は、 $k_1$  の値を決めると  $k_2$  の値が 1 つずつ決まることより  $p-1$  組あり、 $a_2 = p-1$  である。

次に、 $n = 3$  のとき、同様にして、

$$z_j = \cos \frac{2\pi}{p} k_j + i \sin \frac{2\pi}{p} k_j, 1 \leq k_j \leq p-1 (j = 1, 2, 3)$$

$$z_1 z_2 z_3 = 1 \text{ より } l \text{ を整数として, } k_1 + k_2 + k_3 = lp \cdots \cdots \textcircled{2}$$

なお、 $3 \leq k_1 + k_2 + k_3 \leq 3p - 3 < 3p$  より  $l \leq 2$  となる。

すると、②を満たす  $(k_1, k_2, k_3)$  は、 $k_1 + k_2 \neq p$  のとき  $(k_1, k_2)$  の値を決めると  $k_3$  の値が 1 つずつ決まることより  $(p-1)^2 - (p-1)$  組あり、

$$a_3 = (p-1)^2 - (p-1) = (p-1)(p-2)$$

- (2) (1)と同様に設定して、

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1} + k_{n+2} = lp (l \leq n+1) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

すると、③を満たす  $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1}, k_{n+2})$  は、 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1} \neq lp$  のとき、 $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$  の値を決めると、 $k_{n+2}$  の値が 1 つずつ決まることより、

$$a_{n+2} = (p-1)^{n+1} - a_{n+1}$$

(3) (1)(2)より,  $a_2 = p-1$ ,  $a_{n+1} = (p-1)^n - a_n$  ( $n \geq 2$ )

漸化式を変形して,  $a_{n+1} - \frac{1}{p}(p-1)^{n+1} = -\left\{a_n - \frac{1}{p}(p-1)^n\right\}$

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{p}(p-1)^n &= \left\{a_2 - \frac{1}{p}(p-1)^2\right\}(-1)^{n-2} = \left\{p-1 - \frac{1}{p}(p-1)^2\right\}(-1)^{n-2} \\ &= \frac{p-1}{p}(-1)^{n-2} = \frac{p-1}{p}(-1)^n \end{aligned}$$

よって,  $a_n = \frac{1}{p}\left\{(p-1)(-1)^n + (p-1)^n\right\}$

### コメント

$a_3$ の値を求めることが(2)の誘導となっています。しかし、この設問からすでにややこしい、本年で一番の難問です。

**問題**

$f(x) = x^2 + 7$  とおく。

- (1)  $n$  は 3 以上の自然数で、ある自然数  $a$  に対して  $f(a)$  は  $2^n$  の倍数になっているとする。このとき  $f(a)$  と  $f(a+2^{n-1})$  のうち少なくとも一方は  $2^{n+1}$  の倍数であることを示せ。
- (2) 任意の自然数  $n$  に対して  $f(a_n)$  が  $2^n$  の倍数となるような自然数  $a_n$  が存在することを示せ。 [1998]

**解答例**

- (1)  $f(a) = a^2 + 7 = k \cdot 2^n$  ( $k$  は自然数) ……①とおくと、

$$f(a+2^{n-1}) = (a+2^{n-1})^2 + 7 = a^2 + a \cdot 2^n + 2^{2n-2} + 7$$

$$\text{①より、} f(a+2^{n-1}) = k \cdot 2^n + a \cdot 2^n + 2^{2n-2} \dots\dots\dots \text{②}$$

- (i)  $k$  が偶数 ( $k = 2l, l \geq 1$ ) のとき

①より、 $f(a) = 2l \cdot 2^n = l \cdot 2^{n+1}$  となり、 $f(a)$  は  $2^{n+1}$  の倍数となる。

- (ii)  $k$  が奇数 ( $k = 2l-1, l \geq 1$ ) のとき

$$\begin{aligned} \text{②より、} f(a+2^{n-1}) &= (2l-1) \cdot 2^n + a \cdot 2^n + 2^{2n-2} \\ &= l \cdot 2^{n+1} + (a-1) \cdot 2^n + 2^{n-3} \cdot 2^{n+1} \\ &= \left( l + \frac{a-1}{2} + 2^{n-3} \right) \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

ここで、①より  $a^2$  は奇数なので  $a$  も奇数となり、 $\frac{a-1}{2}$  は整数となる。

また条件より、 $n \geq 3$  から  $2^{n-3} \geq 2^0 = 1$  となる。

すると、 $l + \frac{a-1}{2} + 2^{n-3}$  は整数である。

よって、 $f(a+2^{n-1})$  は  $2^{n+1}$  の倍数となる。

- (i)(ii)より、 $f(a)$  と  $f(a+2^{n-1})$  の少なくとも一方は  $2^{n+1}$  の倍数となる。

- (2) 題意成立を数学的帰納法によって証明する。

- (i)  $n = 1, 2, 3$  のとき

$$f(a_1) = a_1^2 + 7 = k_1 \cdot 2^1 \text{ とすると、} a_1 = 1, k_1 = 4 \text{ で成立。}$$

$$f(a_2) = a_2^2 + 7 = k_2 \cdot 2^2 \text{ とすると、} a_2 = 1, k_2 = 2 \text{ で成立。}$$

$$f(a_3) = a_3^2 + 7 = k_3 \cdot 2^3 \text{ とすると、} a_3 = 1, k_3 = 1 \text{ で成立。}$$

- (ii)  $n = m$  のとき

$$f(a_m) = a_m^2 + 7 = k_m \cdot 2^m \text{ (} k_m \text{ は自然数) となる自然数 } a_m \text{ が存在すると仮定。}$$

(1)より、 $f(a_m)$  と  $f(a_m+2^{m-1})$  の少なくとも一方は  $2^{m+1}$  の倍数となるので、 $a_{m+1} = a_m$  または  $a_{m+1} = a_m + 2^{m-1}$  とすると、題意が成立する。

(i)(ii)より,  $f(a_n)$  が  $2^n$  の倍数となるような自然数  $a_n$  が存在する。

### コメント

京大特有の整数問題です。(2)の命題には一瞬驚かされますが, (1)の利用という視点で考えれば,  $n$  に関する帰納法とすぐにつかむことができます。この点, 昨年度の2番の整数問題と比べると, とても扱いやすいという気がします。

**問題**

コインを  $n$  回投げて複素数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  を次のように定める。

- (i) 1 回目に表が出れば  $z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$  とし、裏が出れば  $z_1 = 1$  とする。
- (ii)  $k = 2, 3, \dots, n$  のとき、 $k$  回目に表が出れば  $z_k = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} z_{k-1}$  とし、裏が出れば  $z_k = \overline{z_{k-1}}$  とする。ただし、 $\overline{z_{k-1}}$  は  $z_{k-1}$  の共役複素数である。  
このとき、 $z_n = 1$  となる確率を求めよ。 [2018]

**解答例+映像解説**

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \text{ とおくと,}$$

$$\alpha^2 = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi = \bar{\alpha}, \quad \alpha^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

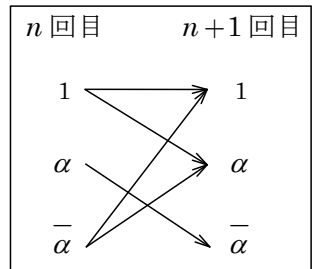
さて、コインを投げ、1 回目に表が出れば  $z_1 = \alpha$ 、裏が出れば  $z_1 = 1$  とし、 $k \geq 2$  において  $k$  回目に表が出れば  $z_k = \alpha z_{k-1}$ 、裏が出れば  $z_k = \overline{z_{k-1}}$  とする。

ここで、 $z_n = 1, z_n = \alpha, z_n = \bar{\alpha}$  である確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n$  とおくと、 $p_1 = \frac{1}{2}, q_1 = \frac{1}{2}, r_1 = 0$  のもとで、

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} r_n \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} r_n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①②から  $n \geq 2$  で  $p_n = q_n$  となり、さらに  $p_1 = q_1 = \frac{1}{2}$  か



ら、 $n \geq 1$  で  $p_n = q_n$  である。

そこで、 $p_n + q_n + r_n = 1$  に注意すると、①より、

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} (1 - p_n - q_n) = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} (1 - 2p_n) = -\frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2}$$

変形すると、 $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} (p_n - \frac{1}{3})$  となり、

$$p_n - \frac{1}{3} = (p_1 - \frac{1}{3}) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって、 $p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  である。

**コメント**

確率と漸化式の問題に、複素数が味付けされています。樹形図を書いていくと、漸化式という方針が見えてきます。

**問題**

$n$  を自然数とする。 $n$  個の箱すべてに、 $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$ ,  $\boxed{4}$ ,  $\boxed{5}$  の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し、取り出した順に左から並べて  $n$  桁の数  $X$  を作る。このとき、 $X$  が 3 で割り切れる確率を求めよ。 [2017]

**解答例+映像解説**

数字 1 から 5 を並べてできる  $n$  桁の数  $X$  が 3 で割り切れる確率を  $p_n$ , 3 で割って 1 余る確率を  $q_n$ , 3 で割って 2 余る確率を  $r_n$  とする。

さて、 $n$  桁の数  $X$  に 1 枚のカード加えて  $n+1$  桁の数を作るとき、この  $n+1$  桁の数が 3 で割り切れるのは、

- (i)  $X$  が 3 で割り切れるとき 数字 3 のカードを加える。
- (ii)  $X$  が 3 で割って 1 余るとき 数字 2 または 5 のカードを加える。
- (iii)  $X$  が 3 で割って 2 余るとき 数字 1 または 4 のカードを加える。

すると、 $p_1 = \frac{1}{5}$ ,  $q_1 = r_1 = \frac{2}{5}$  のもとで、

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}q_n + \frac{2}{5}r_n = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}(1-p_n) = -\frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$$

変形すると、 $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}(p_n - \frac{1}{3})$  となり、

$$p_n - \frac{1}{3} = (p_1 - \frac{1}{3})\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = -\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

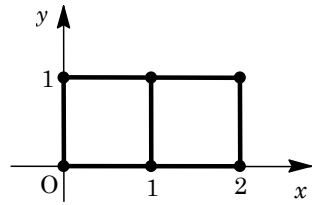
よって、 $p_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$  である。

**コメント**

確率と漸化式についての基本的な問題です。立式も、さほど難しくはありません。

**問題**

$xy$  平面上の 6 個の点  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$  が図のように長さ 1 の線分で結ばれている。動点  $X$  は、これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。



規則：動点  $X$  は、そのときに位置する点から出る長さ

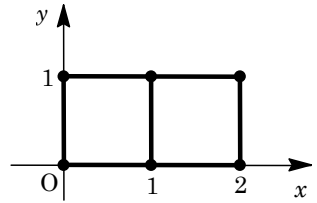
1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに、等しい確率で移動する。

たとえば、 $X$  が  $(2, 0)$  にいるときは、 $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$  のいずれかに  $\frac{1}{2}$  の確率で移動する。また  $X$  が  $(1, 1)$  にいるときは、 $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$  のいずれかに  $\frac{1}{3}$  の確率で移動する。

時刻 0 で動点  $X$  が  $O = (0, 0)$  から出発するとき、 $n$  秒後に  $X$  の  $x$  座標が 0 である確率を求めよ。ただし  $n$  は 0 以上の整数とする。 [2016]

**解答例+映像解説**

まず、 $n$  秒後に  $X$  の  $x$  座標が 0, 1 である確率をそれぞれ  $p_n, q_n$  とおくと、 $X$  の  $x$  座標が 2 である確率は  $1 - p_n - q_n$  となる。



ここで、条件より、 $p_0 = 1, q_0 = 0$  で、

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n \dots\dots\dots ①$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}(1 - p_n - q_n) \dots\dots\dots ②$$

②より、 $q_{n+1} = -\frac{1}{6}q_n + \frac{1}{2}$  となり、 $q_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}(q_n - \frac{3}{7})$  から、

$$q_n - \frac{3}{7} = (q_0 - \frac{3}{7})\left(-\frac{1}{6}\right)^n = -\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって、 $q_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$  となり、①に代入すると、

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \dots\dots\dots ③$$

③を満たす 1 つの数列を、 $\alpha, \beta$  を定数として、 $p_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{6}\right)^n$  とおくと、

$$\alpha + \beta\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

すると、 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\beta = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{7}$  から、 $\alpha = \frac{2}{7}, \beta = \frac{3}{14}$  となり、

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \dots\dots\dots ④$$



③-④より,  $p_{n+1} - \frac{2}{7} - \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{p_n - \frac{2}{7} - \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$  となり,

$$p_n - \frac{2}{7} - \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = \left\{p_0 - \frac{2}{7} - \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって, 求める確率  $p_n$  は,  $p_n = \frac{2}{7} + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

### コメント

確率と漸化式の融合問題です。漸化式を立式する段階は基本的ですが, その解法にはいろいろなスタイルが考えられます。なお, 解答例の方法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

**問 題**

2つの関数を、 $f_0(x) = \frac{x}{2}$ ,  $f_1(x) = \frac{x+1}{2}$  とおく。 $x_0 = \frac{1}{2}$  から始め、各  $n = 1, 2, \dots$  について、それぞれ確率  $\frac{1}{2}$  で  $x_n = f_0(x_{n-1})$  または  $x_n = f_1(x_{n-1})$  と定める。このとき  $x_n < \frac{2}{3}$  となる確率  $P_n$  を求めよ。 [2015]

**解答例+映像解説**

まず、 $x_0 = \frac{1}{2}$  で、 $x_n = \frac{x_{n-1}}{2}$  または  $x_n = \frac{x_{n-1}+1}{2}$  から、帰納的に  $0 < x_n < 1$  である。そこで、 $0 < x_n < \frac{1}{3}$  となる確率を  $Q_n$  とおくと、条件より  $x_n < \frac{2}{3}$  となる確率が  $P_n$  より、 $\frac{1}{3} \leq x_n < \frac{2}{3}$  となる確率は  $P_n - Q_n$ 、 $\frac{2}{3} \leq x_n < 1$  となる確率は  $1 - P_n$  である。

さて、 $0 < x_n < \frac{1}{3}$  となるのは、 $0 < x_{n-1} < \frac{1}{3}$  で  $x_n = f_0(x_{n-1})$  または  $\frac{1}{3} \leq x_{n-1} < \frac{2}{3}$  で  $x_n = f_0(x_{n-1})$  のときより、

$$Q_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{2}(P_{n-1} - Q_{n-1}), \quad Q_n = \frac{1}{2}P_{n-1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、 $\frac{2}{3} \leq x_n < 1$  となるのは、 $\frac{1}{3} \leq x_{n-1} < \frac{2}{3}$  で  $x_n = f_1(x_{n-1})$  または  $\frac{2}{3} \leq x_{n-1} < 1$  で  $x_n = f_1(x_{n-1})$  のときより、

$$1 - P_n = \frac{1}{2}(P_{n-1} - Q_{n-1}) + \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}), \quad Q_{n-1} = -1 + 2P_n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } -1 + 2P_{n+1} = \frac{1}{2}P_{n-1}, \quad P_{n+1} = \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$P_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(P_{n-1} - \frac{2}{3}\right) \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

ここで、 $x_0 = \frac{1}{2}$  で、 $x_1 = f_0(x_0) = \frac{1}{4}$  または  $x_1 = f_1(x_0) = \frac{3}{4}$  から、 $P_0 = 1$ ,  $P_1 = \frac{1}{2}$

(i)  $n = 2k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) のとき

$$\textcircled{3} \text{より, } P_{2k} - \frac{2}{3} = \left(P_0 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}, \quad P_{2k} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \text{となり,}$$

$$P_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii)  $n = 2k+1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) のとき

$$\textcircled{3} \text{より, } P_{2k+1} - \frac{2}{3} = \left(P_1 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}, \quad P_{2k+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \text{となり,}$$

$$P_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

## コメント

与えられた関数は、数直線上で、点  $x$  と原点との中点または点  $x$  と点  $1$  との中点を出力するという意味をもちます。このことに着目して、初めは樹形図を書いたり、さらに  $2^n$  を  $3$  で割った余りを考えたりして、大雑把に結論は出ました。ただ、突っ込みどころが多すぎたため、考えを改め、状態を  $3$  つに分けて確率漸化式の出番となったわけです。

**問題**

2つの粒子が時刻 0 において△ABC の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し、それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば、ある時刻で点 C にいる粒子は、その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ  $\frac{1}{2}$  の確率で移動する。この 2 つの粒子が、時刻 0 の  $n$  秒後に同じ点にいる確率  $p(n)$  を求めよ。

[2014]

**解答例+映像解説**

頂点 A から移動し始めた粒子が、 $n$  秒後に頂点 A にいる確率を  $a_n$  とおく。そして、隣の頂点への移動確率は  $\frac{1}{2}$  ずつなので、 $n$  秒後に頂点 B, C にいる確率は、対称性から、ともに  $\frac{1}{2}(1-a_n)$  となり、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1-a_n) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1-a_n), \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$

すると、 $a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(a_n - \frac{1}{3})$  となり、 $a_1 = 0$  から、

$$a_n - \frac{1}{3} = (a_1 - \frac{1}{3})\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

さて、2 つの粒子が、頂点 A から独立に移動していくとき、 $n$  秒後に同じ点にいる確率  $p(n)$  は、

$$\begin{aligned} p(n) &= a_n^2 + \left\{\frac{1}{2}(1-a_n)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}(1-a_n)\right\}^2 = \frac{3}{2}a_n^2 - a_n + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2 - \frac{1}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \left\{1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

**コメント**

確率と漸化式の融合問題です。漸化式は 1 つの粒子の動きに注目して立て、その結果を用いて  $p(n)$  を導いています。

**問題**

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き、この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し、裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

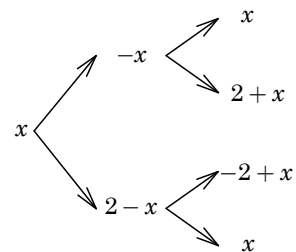
- (1) 石が座標  $x$  の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき、石が座標  $x$  の点にある確率を求めよ。
- (2) 石が原点にあるとする。 $n$  を自然数とし、 $2n$  回硬貨を投げたとき、石が座標  $2n-2$  の点にある確率を求めよ。 [2013]

**解答例+映像解説**

- (1) 座標  $x$  の点に石があるとき、硬貨を投げて表が出れば点  $-x$  に、裏が出れば点  $2-x$  に移動する。

すると、2 回投げたとき、石の座標は右図のように移動するので、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$



- (2) (1)より、2 回投げたとき、 $x \rightarrow 2+x$  と 2 だけ移動する確率は  $\frac{1}{4}$ 、 $x \rightarrow x$  と移動しない確率は  $\frac{1}{2}$ 、 $x \rightarrow -2+x$  と  $-2$  だけ移動する確率は  $\frac{1}{4}$  である。

さて、 $2n$  回硬貨を投げたとき、原点にある石が座標  $2n-2$  の点に移動する場合、 $x \rightarrow 2+x$  の移動が  $a$  回、 $x \rightarrow x$  の移動が  $b$  回、 $x \rightarrow -2+x$  の移動が  $c$  回とすると、

$$a + b + c = n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2a - 2c = 2n - 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より、 $b + 2c = 1$  となり、 $a, b, c$  は 0 以上の整数より、 $b = 1, c = 0$  となる。よって、 $(a, b, c) = (n-1, 1, 0)$  となり、求める確率は、

$${}^n C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

**コメント**

文系の類題ですが、(2)も、文系ほどではないにせよ、あっさり解けてしまいます。