

《2019 入試対策》

# 九州大学

理系数学



電送数学舎

## まえがき

本書には、1998 年度以降に出題された九州大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

利便性の向上のため、対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の **1**, **2**…などの問題番号、解答編の **問題** の文字がリンク元です。

また、2013 年度以降に出題された過去問について、その解答例の映像解説を、YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の **解答例＋映像解説** です。

なお、映像解説の一覧は、下記のページに掲載しています。

PC サイト トップページ ≫ 九大数学 映像ライブラリー

## 本書の構成について

- 1 本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
  - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
  - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
  - (3) 1 つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
  - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
  - (5) 出題の流れをウェブサイトの入試直前に確認する。

注 「行列」や「コンピュータ」は範囲外ですので除外しました。「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

## 目 次

分野別問題一覧 .....	3
分野別問題と解答例 .....	37
図形と式 .....	38
図形と計量 .....	40
ベクトル .....	47
整数と数列 .....	67
確 率 .....	87
論 証 .....	107
複素数 .....	112
曲 線 .....	128
極 限 .....	139
微分法 .....	151
積分法 .....	170
積分の応用 .....	177

# 分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式 |||

1 3次関数  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  のグラフを  $G$  とする。

- (1)  $xy$  平面上の点  $(p, q)$  に関する, 点  $(X, Y)$  に対称な点の座標を求めよ。
- (2)  $G$  はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。
- (3) 直線  $mx + ny = 0$  に関する, 点  $(X, Y)$  に対称な点の座標を求めよ。ただし,  $m, n$  は共には  $0$  でないとする。
- (4)  $G$  は原点を通るどんな直線に対しても線対称でないことを示せ。 [2001]

■ 図形と計量 |||

1  $t$  を  $0 < t < 1$  を満たす実数とする。面積が  $1$  である三角形  $ABC$  において, 辺  $AB, BC, CA$  をそれぞれ  $2:1, t:1-t, 1:3$  に内分する点を  $D, E, F$  とする。また,  $AE$  と  $BF, BF$  と  $CD, CD$  と  $AE$  の交点をそれぞれ  $P, Q, R$  とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 3直線  $AE, BF, CD$  が1点で交わるときの  $t$  の値  $t_0$  を求めよ。  
以下,  $t$  は  $0 < t < t_0$  を満たすものとする。
- (2)  $AP = kAE, CR = lCD$  を満たす実数  $k, l$  をそれぞれ求めよ。
- (3) 三角形  $BCQ$  の面積を求めよ。
- (4) 三角形  $PQR$  の面積を求めよ。 [2016]

2 三角形  $ABC$  の3辺の長さを  $a = BC, b = CA, c = AB$  とする。実数  $t \geq 0$  を与えたとき,  $A$  を始点とし  $B$  を通る半直線上に  $AP = tc$  となるように点  $P$  をとる。次の問いに答えよ。

- (1)  $CP^2$  を  $a, b, c, t$  を用いて表せ。
- (2) 点  $P$  が  $CP = a$  を満たすとき,  $t$  を求めよ。
- (3) (2)の条件を満たす点  $P$  が辺  $AB$  上にちょうど2つあるとき,  $\angle A$  と  $\angle B$  に関する条件を求めよ。 [2010]

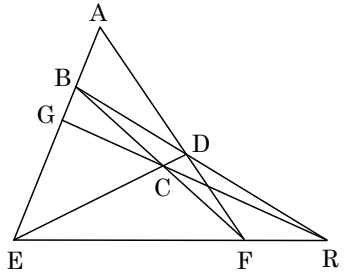
③ いくつかの半径 3 の円を、半径 2 の円  $Q$  に外接し、かつ互いに交わらないように配置する。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 半径 3 の円の 1 つを  $R$  とする。円  $Q$  の中心を端点とし、円  $R$  に接する 2 本の半直線のなす角を  $\theta$  とおく。ただし、 $0 < \theta < \pi$  とする。このとき、 $\sin \theta$  を求めよ。
- (2)  $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$  を示せ。
- (3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。 [2008]

④ 長さ 2 の線分  $AB$  を直径とする円を底面とし、高さが  $\sqrt{3}$  の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点  $A, B$  を結ぶ最短の道を  $l$  とする。直円錐の頂点を  $C$ 、底面の中心を  $O$  とし以下の問いに答えよ。

- (1) 直円錐の展開図を用いて、 $l$  の長さを求めよ。
- (2)  $l$  上の点  $P$  に対して、線分  $CP$  の延長と弧  $AB$  の交点を  $Q$  とする。 $\angle AOQ = \theta$  とし  $CP^2$  を  $\sin \theta$  で表せ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。
- (3)  $P$  から線分  $OQ$  に下ろした垂線を  $PR$  とし、 $A$  から線分  $OQ$  に下ろした垂線を  $AS$  とする。 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$  の範囲で  $\frac{OS^2}{OR^2}$  の最大値を求めよ。 [1999]

⑤ 右図のような四角形  $ABCD$  において、直線  $AB$  と直線  $CD$  の交点  $E$ 、直線  $BC$  と直線  $AD$  の交点  $F$ 、直線  $BD$  と直線  $EF$  の交点  $R$ 、直線  $RC$  と直線  $AB$  の交点  $G$  がえられたとする。



- (1)  $\frac{BG}{GE} = \frac{BA}{AE}$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $G$  が  $AE$  の中点で、 $\frac{AD}{DF} = 2$  であるとき、 $AB = a$ 、 $E$

$CD = b$  とおく。次の条件をみたす  $x, y, z$  の値を求めよ。

- ①  $EB = xa$                       ②  $EC = yb$
- ③ 四角形  $ABCD$  が円に内接するとき、 $a = zb$  [1998]

■ ベクトル |||||

1 座標空間において、 $xy$  平面上にある双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  のうち  $x \geq 1$  を満たす部分を  $C$  とする。また、 $z$  軸上の点  $A(0, 0, 1)$  を考える。点  $P$  が  $C$  上を動くとき、直線  $AP$  と平面  $x = d$  との交点の軌跡を求めよ。ただし、 $d$  は正の定数とする。 [2018]

2 2 つの定数  $a > 0$  および  $b > 0$  に対し、座標空間内の 4 点を  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $D(a, b, 1)$  と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点  $A$  から線分  $CD$  におろした垂線と  $CD$  の交点を  $G$  とする。 $G$  の座標を  $a, b$  を用いて表せ。

(2) さらに、点  $B$  から線分  $CD$  におろした垂線と  $CD$  の交点を  $H$  とする。 $\overline{AG}$  と  $\overline{BH}$  がなす角を  $\theta$  とするとき、 $\cos \theta$  を  $a, b$  を用いて表せ。 [2017]

3 1 辺の長さが 1 の正方形  $OABC$  を底面とし、点  $P$  を頂点とする四角錐  $POABC$  がある。ただし、点  $P$  は内積に関する条件  $\overline{OA} \cdot \overline{OP} = \frac{1}{4}$ , および  $\overline{OC} \cdot \overline{OP} = \frac{1}{2}$  を満たす。辺  $AP$  を  $2:1$  に内分する点を  $M$  とし、辺  $CP$  の中点を  $N$  とする。さらに、点  $P$  と直線  $BC$  上の点  $Q$  を通る直線  $PQ$  は、平面  $OMN$  に垂直であるとする。このとき、長さの比  $BQ:QC$ , および線分  $OP$  の長さを求めよ。 [2013]

4 空間内の 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 2, 3)$ ,  $B(1, 0, 3)$ ,  $C(1, 2, 0)$  を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 4 点  $O, A, B, C$  を通る球面の中心  $D$  の座標を求めよ。

(2) 3 点  $A, B, C$  を通る平面に点  $D$  から垂線を引き、交点を  $F$  とする。線分  $DF$  の長さを求めよ。

(3) 四面体  $ABCD$  の体積を求めよ。 [2011]

5 座標平面に 3 点  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 6)$ ,  $B(3, 4)$  をとり、点  $O$  から直線  $AB$  に垂線  $OC$  を下ろす。また、実数  $s$  と  $t$  に対し、点  $P$  を

$$\overline{OP} = s\overline{OA} + t\overline{OB}$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点  $C$  の座標を求め、 $|\overline{CP}|^2$  を  $s$  と  $t$  を用いて表せ。

(2)  $s$  を定数として、 $t$  を  $t \geq 0$  の範囲で動かすとき、 $|\overline{CP}|^2$  の最小値を求めよ。

[2009]

〔6〕  $\triangle OAB$  において、辺  $AB$  上に点  $Q$  をとり、直線  $OQ$  上に点  $P$  をとる。ただし、点  $P$  は点  $Q$  に関して点  $O$  と反対側にあるとする。3 つの三角形  $\triangle OAP$ ,  $\triangle OBP$ ,  $\triangle ABP$  の面積をそれぞれ  $a, b, c$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  および  $a, b$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{OP}$  を  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  および  $a, b, c$  を用いて表せ。
- (3) 3 辺  $OA, OB, AB$  の長さはそれぞれ  $3, 5, 6$  であるとする。点  $P$  を中心とし、3 直線  $OA, OB, AB$  に接する円が存在するとき、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ。

[2008]

〔7〕  $a, b$  を正の数とし、空間内の 3 点  $A(a, -a, b)$ ,  $B(-a, a, b)$ ,  $C(a, a, -b)$  を考える。 $A, B, C$  を通る平面を  $\alpha$ , 原点  $O$  を中心とし  $A, B, C$  を通る球面を  $S$  とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分  $AB$  の中点を  $D$  とするとき、 $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$  および  $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$  であることを示せ。  
また  $\triangle ABC$  の面積を求めよ。
- (2) ベクトル  $\overrightarrow{DC}$  と  $\overrightarrow{DO}$  のなす角を  $\theta$  とするとき  $\sin \theta$  を求めよ。また、平面  $\alpha$  に垂直で原点  $O$  を通る直線と平面  $\alpha$  との交点を  $H$  とするとき、線分  $OH$  の長さを求めよ。
- (3) 点  $P$  が球面  $S$  上を動くとき、四面体  $ABCP$  の体積の最大値を求めよ。ただし、 $P$  は平面  $\alpha$  上にはないものとする。

[2007]

〔8〕  $\triangle OAB$  において、辺  $OB$  の中点を  $M$ , 辺  $AB$  を  $\alpha : 1 - \alpha$  に内分する点を  $P$  とする。ただし、 $0 < \alpha < 1$  とする。線分  $OP$  と  $AM$  の交点を  $Q$  とし、 $Q$  を通り、線分  $AM$  に垂直な直線が、辺  $OA$  またはその延長を交わる点を  $R$  とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とし、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  および  $\alpha$  を用いて表せ。
- (2)  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\angle AOB = \theta$  で  $\cos \theta = \frac{1}{6}$  とする。このとき、ベクトル  $\overrightarrow{OR}$  を  $\vec{a}$  と  $\alpha$  を用いて表せ。
- (3) (2) の条件のもとで、点  $R$  が辺  $OA$  の中点であるときの  $\alpha$  の値を求めよ。 [2006]



9 座標空間内の三角柱

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \geq y, 0 \leq z \leq 1$$

を考え、その  $xy$  平面内の面を  $S$ ,  $xz$  平面内の面を  $T$  とする。点  $A(a, b, 0)$  を  $S$  内に、点  $B(c, 0, d)$  を  $T$  内にとり、また  $C(1, 1, 1)$  とする。ただし、点  $A, B$  は原点  $O$  とは異なるとする。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{OA}$  および  $\overrightarrow{OC}$  に直交する単位ベクトルを求め、その単位ベクトルとベクトル  $\overrightarrow{OB}$  の内積の絶対値を求めよ。
- (2) 四面体  $OABC$  の体積を求めよ。ただし、点  $O, A, B, C$  は同一平面上にないとする。
- (3) 点  $A$  が  $S$  内を、点  $B$  が  $T$  内を動くとする。このときの、四面体  $OABC$  の体積の最大値、および最大値を与える点  $A, B$  の位置をすべて求めよ。 [2004]

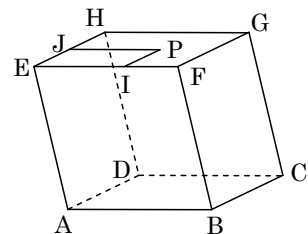
10 空間内に四面体  $OABC$  があり  $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$  はすべて  $90^\circ$  であるとする。辺  $OA, OB, OC$  の長さを、それぞれ  $a, b, c$  とし、三角形  $ABC$  の重心を  $G$  とする。

- (1)  $\angle OGA, \angle OGB, \angle OGC$  がすべて  $90^\circ$  であるための条件を  $a, b, c$  の関係式で表せ。
- (2) 線分  $BC$  を  $1:2$  に内分する点を  $D$  とする。点  $P$  は直線  $AD$  上の  $A$  以外の点を動き、点  $Q$  は三角形  $APQ$  の重心が点  $G$  になるように動く。このとき、線分  $OQ$  の長さの最小値を求めよ。 [2003]

11 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1)  $\triangle ABC$  の面積は、 $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$  に等しいことを示せ。ここで、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  はベクトル  $\overrightarrow{AB}$  とベクトル  $\overrightarrow{AC}$  との内積を表す。必要ならば、2つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) 右図の平行六面体  $ABCD-EFGH$  を考える。 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 1, |\overrightarrow{AE}| = 2$  とし、 $\angle FBC = \angle BCD = \frac{\pi}{2}, \angle EAB = \theta$  とする。ここで  $\theta$  は  $0 < \theta < \pi$  なる定数とする。面  $EFGH$  上に点  $P$  をとり、点  $P$  から辺  $EF$  上に垂線  $PI$  を下ろし、点  $P$  から辺  $EH$  上に垂線  $PJ$  を下ろす。 $x = |\overrightarrow{EI}|, y = |\overrightarrow{EJ}|$  とするとき、 $\triangle ACP$  の面積を  $\theta, x, y$  を用いて表せ。



(平行六面体  $ABCD-EFGH$ )

- (3) 問(2)で点  $P$  が面  $EFGH$  上を動くとき、 $\triangle ACP$  の面積の最小値を求めよ。 [2002]

**12**  $a, b, c$  を 0 でない実数として、空間内に 3 点  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$  をとる。

- (1) 空間内の点  $P$  が  $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$  を満たしながら動くとき、この点  $P$  はある定点  $Q$  から一定の距離にあることを示せ。
- (2) (1)における定点  $Q$  は 3 点  $A, B, C$  を通る平面上にあることを示せ。
- (3) (1)における  $P$  について、四面体  $ABCP$  の体積の最大値を求めよ。 [2000]

**13** 大きさ 1 の空間ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$  を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル  $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$  が

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{d} = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{e} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{e} = 1, \quad \vec{c} \cdot \vec{e} = 0, \\ \vec{a} \cdot \vec{f} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{f} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{f} = 1 \end{aligned}$$

を満たすとき、点  $D(\vec{d})$ ,  $E(\vec{e})$ ,  $F(\vec{f})$  および原点  $O$  について次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$  となるような実数  $x, y, z$  を求めよ。同様に  $\vec{f}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  で表せ。
- (2) ベクトル  $\vec{d}, \vec{f}, \vec{d} - \vec{f}$  の大きさを求めよ。
- (3) 三角形  $ODF$  の面積を求めよ。
- (4) 四面体  $ODEF$  の体積を求めよ。 [1999]

**14** 辺の長さ 1 の正四面体  $OABC$  において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  とおき、線分  $OA$  を  $m:n$  に内分する点を  $P$ , 線分  $BC$  を  $m:n$  に内分する点を  $Q$ , 線分  $CO$  を  $m:n$  に内分する点を  $R$ , 線分  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $S$  とする。(ただし、 $m, n > 0$  とする)

- (1) ①  $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  で表せ。  
 ②  $\overrightarrow{PQ}$  と  $\overrightarrow{RS}$  が垂直かどうか調べよ。
- (2) ① 点  $P, Q, R, S$  が同一平面上にあるときの  $m, n$  の関係を求めよ。  
 ② このとき  $PQ, RS$  の交点を  $G$  として、 $\overrightarrow{OG}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  で表せ。  
 ③  $G$  は正四面体  $OABC$  に外接する球の中心であることを示し、その球の半径を求めよ。 [1998]

## ■ 整数と数列 |||||

**1** 整数  $a, b$  は 3 の倍数ではないとし,  $f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(1)$  と  $f(2)$  を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。
- (2)  $f(x) = 0$  を満たす整数  $x$  は存在しないことを示せ。
- (3)  $f(x) = 0$  を満たす有理数  $x$  が存在するような組  $(a, b)$  をすべて求めよ。 [2018]

**2** 初項  $a_1 = 1$ , 公差 4 の等差数列  $\{a_n\}$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\{a_n\}$  の初項から第 600 項のうち, 7 の倍数である項の個数を求めよ。
- (2)  $\{a_n\}$  の初項から第 600 項のうち,  $7^2$  の倍数である項の個数を求めよ。
- (3) 初項から第  $n$  項までの積  $a_1a_2 \cdots a_n$  が  $7^{45}$  の倍数となる最小の自然数  $n$  を求めよ。

[2017]

**3** 自然数  $n$  に対して,  $10^n$  を 13 で割った余りを  $a_n$  とおく。  $a_n$  は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_{n+1}$  は  $10a_n$  を 13 で割った余りに等しいことを示せ。
- (2)  $a_1, a_2, \dots, a_6$  を求めよ。
- (3) 以下の 3 条件を満たす自然数  $N$  をすべて求めよ。
  - (i)  $N$  を十進法で表示したとき 6 桁となる。
  - (ii)  $N$  を十進法で表示して, 最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。
  - (iii)  $N$  は 13 で割り切れる。

[2016]

**4** 以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$  が正の偶数のとき,  $2^n - 1$  は 3 の倍数であることを示せ。
- (2)  $n$  を自然数とする。  $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素であることを示せ。
- (3)  $p, q$  を異なる素数とする。  $2^{p-1} - 1 = pq^2$  を満たす  $p, q$  の組をすべて求めよ。

[2015]

**5** 次の問いに答えよ。

- (1) 任意の自然数  $a$  に対し,  $a^2$  を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。
- (2) 自然数  $a, b, c$  が  $a^2 + b^2 = 3c^2$  を満たすと仮定すると,  $a, b, c$  はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。
- (3)  $a^2 + b^2 = 3c^2$  を満たす自然数  $a, b, c$  は存在しないことを証明せよ。 [2014]

〔6〕 数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  は,  $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) を満たしている

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  とするとき、一般項  $a_n$  を求めよ。

(2)  $\tan \frac{\pi}{12}$  の値を求めよ。

(3)  $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$  とするとき、 $a_{n+k} = a_n$  ( $n=3, 4, 5, \dots$ ) を満たす最小の自然数  $k$  を求めよ。 [2011]

〔7〕 関数  $f(x)$  が 0 でない定数  $p$  に対して、つねに  $f(x+p) = f(x)$  を満たすとき  $f(x)$  は周期関数であるといい、 $p$  を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば、関数  $\sin x$  の基本周期は  $2\pi$  である。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $y = |\sin x|$  のグラフをかき、関数  $|\sin x|$  の基本周期を求めよ。

(2) 自然数  $m, n$  に対して関数  $f(x)$  を  $f(x) = |\sin mx| |\sin nx|$  とおく。 $p$  が関数  $f(x)$  の周期ならば、 $f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$  が成り立つことを示せ。また、このとき  $mp$  は  $\pi$  の整数倍であり、 $np$  は  $2\pi$  の整数倍であることを示せ。

(3)  $m, n$  は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2)の結果を用いて関数  $|\sin mx| |\sin nx|$  の基本周期を求めよ。 [2007]

〔8〕 2つの数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は、 $a_1 = b_1 = 1$  および、関係式

$$a_{n+1} = 2a_n b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)  $n \geq 3$  のとき、 $a_n$  は 3 で割り切れるが、 $b_n$  は 3 で割り切れないことを示せ。

(2)  $n \geq 2$  のとき、 $a_n$  と  $b_n$  は互いに素であることを示せ。 [2006]

〔9〕 座標平面上で、不等式  $2|x-4| + |y-5| \leq 3$ ,  $2||x|-4| + ||y|-5| \leq 3$  が表す領域を、それぞれ  $A, B$  とする。

(1) 領域  $A$  を図示せよ。

(2) 領域  $B$  を図示せよ。

(3) 領域  $B$  の点  $(x, y)$  で、 $x$  が正の整数であり  $y$  が整数であって、 $\log_x |y|$  が有理数となる点を、理由を示してすべて求めよ。 [2003]

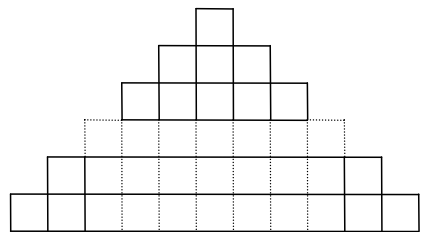
**10** 正の整数  $a$  に対し、 $a$  の正の約数全体の和を  $f(a)$  で表す。ただし、1 および  $a$  自身も約数とする。たとえば、 $f(1)=1$  であり、 $a=15$  ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので、 $f(15)=24$  となる。次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  が正の奇数  $b$  と正の整数  $m$  を用いて  $a=2^m b$  と表されるとする。このとき  $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $a$  が 2 以上の整数  $p$  と正の整数  $q$  を用いて  $a=pq$  と表されるとする。このとき  $f(a)\geq(p+1)q$  が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのは、 $q=1$  かつ  $p$  が素数であるときに限ることを示せ。
- (3) 正の偶数  $a, b$  は、ある整数  $m, n$  とある奇数  $r, s$  を用いて  $a=2^m r, b=2^n s$  のように表すことができる。このとき  $a, b$  が  $f(a)=2b, f(b)=2a$  をみたせば、 $r, s$  は素数であり、かつ  $r=2^{n+1}-1, s=2^{m+1}-1$  となることを示せ。 [2002]

**11** (1) 自然数  $n=1, 2, 3, \dots$  について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

- (2) 辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して、辺の長さが自然数  $m$  の正三角形をタイルで張りつめたい。
- ①  $m=2, 3, 4$  のとき、どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。
- ② 一般に、辺の長さ  $m$  の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を  $m$  の式で表し、その式が成り立つ理由を述べよ。
- (3) 辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して、すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を  $n$  段積み上げ、高さ  $n$  の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし、図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。 [1998]



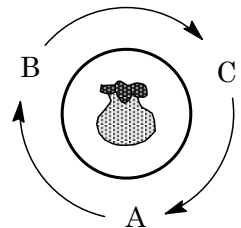
**12** 3桁の自然数  $N = 100a + 10b + c$  ( $a, b, c$  は,  $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$  をみたす整数) を考える。

- (1) 平方数かつ奇数である  $N$  で, 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが  $x$  軸と接するようなものをすべて求めよ。
- (2) 命題「 $N$  および  $a$  が平方数のとき 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは  $x$  軸と接する」は正しいか。正しいければそれを示し, 正しくなければ反例をあげよ。
- (3) ある  $N$  について, 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは座標が整数である相異なる2点で  $x$  軸と交わり, グラフと  $x$  軸とで囲まれる部分の面積が4となる。このときの  $N$  を求めよ。 [1998]

■ 確率 |||||

**1** 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を  $n$  回続けて行う。  $k$  回目に取り出したカードの数字を  $X_k$  とし, 積  $X_1 X_2 \cdots X_n$  を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n, s_n$  とする。  $p_n, q_n, r_n, s_n$  を求めよ。 [2018]

**2** 赤玉 2 個, 青玉 1 個, 白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルのまわりに A, B, C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち, ひとりが袋から玉を 1 個取り出し, 色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し, 次のルール(a), (b), (c)に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。



- (a) 赤玉を取り出したら, 取り出した人を勝者とする。
- (b) 青玉を取り出したら, 次の回も同じ人が玉を取り出す。
- (c) 白玉を取り出したら, 取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の 3 人が  $n$  回目に玉を取り出す確率をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とする。ただし,  $a_1 = 1, b_1 = c_1 = 0$  である。以下の問いに答えよ。

- (1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。
- (2)  $d_n = a_n + b_n + c_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおくととき,  $d_n$  を求めよ。
- (3) 自然数  $n \geq 3$  に対し,  $a_{n+1}$  を  $a_{n-2}$  と  $n$  を用いて表せ。 [2017]

**3** 座標平面上で円  $x^2 + y^2 = 1$  に内接する正六角形で、点  $P_0(1, 0)$  を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を  $P_0$  から反時計まわりに順に  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し、1 つのサイコロを 1 回投げ、出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

(規則) (i) 1 から 5 までの目が出た場合は、出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。たとえば、コインが  $P_4$  にあるときに 4 の目が出た場合は  $P_2$  まで動かす。

(ii) 6 の目が出た場合は、 $x$  軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし、コインが  $x$  軸上にあるときは動かさない。たとえば、コインが  $P_5$  にあるときに 6 の目が出た場合は  $P_1$  に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ  $P_0$  に置き、1 つのサイコロを続けて何回か投げて、1 回投げごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 回サイコロを投げた後に、コインが  $P_0$  の位置にある確率を求めよ。
- (2) 3 回サイコロを投げた後に、コインが  $P_0$  の位置にある確率を求めよ。
- (3)  $n$  を自然数とする。 $n$  回サイコロを投げた後に、コインが  $P_0$  の位置にある確率を求めよ。 [2016]

**4** 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

- (1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
- (2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
- (3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。
- (4) 8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。 [2015]

**5** Aさんは5円硬貨を3枚、Bさんは5円硬貨1枚と10円硬貨を1枚持っている。2人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお、表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし、硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて、以下の問いに答えよ。

- (1) AさんがBさんに勝つ確率  $p$ 、および引き分けとなる確率  $q$  をそれぞれ求めよ。
- (2) ゲーム終了後にAさんが持っている硬貨の合計金額の期待値  $E$  を求めよ。

[2014]

**6** 横一列に並んだ6枚の硬貨に対して、以下の操作Lと操作Rを考える。

L: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作Lを行うときに、3の目が出た場合は、裏裏表表裏表 となる。

以下、「最初の状態」とは硬貨が6枚とも表であることとする。

- (1) 最初の状態から操作Lを2回続けて行うとき、表が1枚となる確率を求めよ。
- (2) 最初の状態からL, Rの順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。
- (3) 最初の状態からL, R, Lの順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

[2013]

**7** いくつかの玉が入った箱Aと箱Bがあるとき、次の試行Tを考える。

(試行T) 箱Aから2個の玉を取り出して箱Bに入れ、その後、箱Bから2個の玉を取り出して箱Aに入れる。

最初に箱Aに黒玉が3個、箱Bに白玉が2個入っているとき以下の問いに答えよ。

- (1) 試行Tを1回行ったときに、箱Aに黒玉が  $n$  個入っている確率  $p_n$  ( $n=1, 2, 3$ ) を求めて既約分数で表せ。
- (2) 試行Tを2回行ったときに、箱Aに黒玉が  $n$  個入っている確率  $q_n$  ( $n=1, 2, 3$ ) を求めて既約分数で表せ。
- (3) 試行Tを3回行ったときに、箱Aの中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

[2012]



**8** 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が  $i$  と  $j$  ならば、 $i$  のカードと  $j$  のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を  $n$  回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1)  $n = 2$  のとき、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2)  $n = 2$  のとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3)  $n = 2$  のとき、左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4)  $n = 3$  のとき、左端のカードの数字の期待値を求めよ。 [2011]

**9**  $k$  は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚、「2」と書かれたカードが 2 枚、 $\dots$ 、「 $k$ 」と書かれたカードが  $k$  枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を  $M$ 、奇数が書かれたカードの枚数を  $N$  で表す。この  $(M + N)$  枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し、そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を  $n$  回繰り返す。記録された  $n$  個の数の和が偶数となる確率を  $p_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $p_1$  と  $p_2$  を  $M, N$  で表せ。
- (2)  $p_{n+1}$  を  $p_n, M, N$  で表せ。
- (3)  $\frac{M - N}{M + N}$  を  $k$  で表せ。
- (4)  $p_n$  を  $n$  と  $k$  で表せ。 [2009]

**10** 1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。 $k$  を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り、そのカードの番号が  $k$  より大きいなら、抜き取った番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が  $k$  以下なら、そのカードを戻さずに、残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り、2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 2 以上 9 以下の整数  $n$  に対して、得点が  $n$  である確率を求めよ。
- (3) 得点の期待値を求めよ。 [2008]

**11** さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に  $a, b, c$  とする。これらの数  $a, b, c$  に対して 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0 \cdots \cdots (*)$  を考える。ただし、さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式(\*)が異なる 2 つの実数の解をもつとき、積  $ac$  の取りうる値を求め、積  $ac$  の各値ごとに可能な  $a$  と  $c$  の組  $(a, c)$  がそれぞれ何通りあるかを求めよ。
- (2) 2 次方程式(\*)が異なる 2 つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし、一般に自然数  $n$  が自然数の 2 乗でなければ  $\sqrt{n}$  は無理数であることを用いてよい。

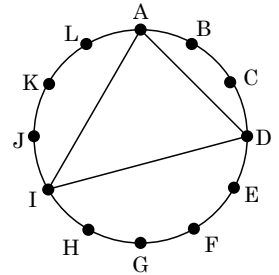
[2007]

**12**  $n$  を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に  $n$  個並んでいる。これらの  $n$  個の電球のスイッチを同時に入れた後、左から電球の色を見ていき、色の変化の回数を調べる。

- (1) 赤青…青, 赤赤青…青, …… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。
- (2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。
- (3) 色の変化がちょうど  $m$  回 ( $0 \leq m \leq n-1$ ) 起きる確率を求めよ。
- (4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

[2004]

**13** 右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, I を選べば, 図のような三角形が得られる。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (4) 3 点を選んで得られる三角形のうち、互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

[1998]

## ■ 論証 |||||

**1** 区間  $[a, b]$  が関数  $f(x)$  に関して不変であるとは、 $a \leq x \leq b$  ならば、 $a \leq f(x) \leq b$  が成り立つこととする。 $f(x) = 4x(1-x)$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 区間  $[0, 1]$  は関数  $f(x)$  に関して不変であることを示せ。  
 (2)  $0 < a < b < 1$  とする。このとき、区間  $[a, b]$  は関数  $f(x)$  に関して不変ではないことを示せ。 [2006]

**2** 係数が 0 か 1 である  $x$  の整式を、ここでは  $M$  多項式とよぶことにする。整数を係数とする  $x$  の整式は、偶数の係数を 0 でおきかえ、奇数の係数を 1 でおきかえると  $M$  多項式になる。2 つの整式は、このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば、 $5x^2 + 4x + 3$  と  $x^2 - 1$  とは対応する  $M$  多項式がともに  $x^2 + 1$  となるので、合同である。

$M$  多項式は、2 つの 1 次以上の  $M$  多項式の積と合同になるとき可約であるといい、可約でないとき既約であるという。たとえば、 $x^2 + 1$  は  $(x+1)^2$  と合同であるから、可約である。

- (1)  $x^2 + x + 1$  は既約な  $M$  多項式であることを示せ。  
 (2) 1 次から 3 次までの既約な  $M$  多項式をすべて求めよ。  
 (3)  $x^4 + x + 1$  は既約な  $M$  多項式かどうか判定せよ。 [2000]

**3** 実数  $a, b$  は  $0 < a < b$  を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3}, \sqrt{ab}, \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}} \quad [1999]$$

**4** (1)  $x \geq y \geq 0$  のとき、不等式  $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$  が成り立つことを示せ。

(2) ① 不等式  $\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$  が成り立つことを示せ。

② ①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。 [1998]

## ■ 複素数

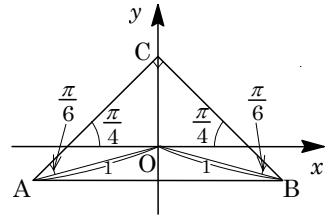
1  $\alpha$  を複素数とする。等式  $\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$  を満たす複素数  $z$  をすべて求めよ。ただし、 $i$  は虚数単位である。 [2018]

2 2 つの複素数  $\alpha = 10000 + 10000i$  と  $w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$  を用いて、複素数平面上の点  $P_n(z_n)$  を  $z_n = \alpha w^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) により定める。ただし、 $i$  は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を  $\log_{10} 2 = 0.301$ ,  $\log_{10} 3 = 0.477$  として、以下の問いに答えよ。

(1)  $z_n$  の絶対値  $|z_n|$  と偏角  $\arg z_n$  を求めよ。

(2)  $|z_n| \leq 1$  が成り立つ最小の自然数  $n$  を求めよ。

(3) 右図のように、複素数平面上の  $\triangle ABC$  は線分  $AB$  を斜辺とし、点  $C(\frac{i}{\sqrt{2}})$  を 1 つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお、 $A, B$  を表す複素数の虚部は負であり、原点  $O$  と 2 点  $A, B$  の距離はともに 1 である。点  $P_n$  が  $\triangle ABC$  の内部に含まれる最小の自然数  $n$  を求めよ。



[2017]

3 以下の問いに答えよ。

(1)  $\theta$  を  $0 \leq \theta < 2\pi$  を満たす実数、 $i$  を虚数単位とし、 $z$  を  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  で表される複素数とする。このとき、整数  $n$  に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left( z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数  $x$  ( $0 \leq x < 2\pi$ ) を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4} \quad [2016]$$

4  $t$  を実数とするとき、2 次方程式  $z^2 + tz + t = 0$  について、次の問いに答えよ。

- (1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような  $t$  の範囲と、そのときの虚数解をすべて求めよ。
- (2) (1)の虚数解のうち、その虚部が正のものを  $z(t)$  で表す。 $t$  が(1)で求めた範囲を動くとき、複素数平面上で点  $z(t)$  が描く図形  $C$  を求め、図示せよ。
- (3) 複素数平面上で、点  $z$  が(2)の図形  $C$  上を動くとき、 $w = \frac{iz}{z+1}$  で表される点  $w$  が描く図形を求め、図示せよ。 [2005]

5  $0 < a < 1$  である定数  $a$  に対し、複素数平面上で  $z = t + ai$  ( $t$  は実数全体を動く) が表す直線を  $l$  とする。ただし、 $i$  は虚数単位である。

- (1) 複素数  $z$  が  $l$  上を動くとき、 $z^2$  が表す点の軌跡を図示せよ。
- (2) 直線  $l$  を、原点を中心に角  $\theta$  だけ回転移動した直線を  $m$  とする。 $m$  と(1)で求めた軌跡との交点の個数を  $\sin \theta$  の値で場合分けして求めよ。 [2003]

6 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円  $C$  上に相異なる 3 点  $z_1, z_2, z_3$  をとる。次の問いに答えよ。

- (1)  $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$  とおく。点  $w_1$  は 3 点  $z_1, z_2, z_3$  を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで、三角形の垂心とは、各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり、これらの 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。
- (2)  $w_2 = -\overline{z_1 z_2 z_3}$  とおく。 $w_2 \neq z_1$  のとき、2 点  $z_2, z_3$  を通る直線上に点  $z_1$  から下ろした垂線またはその延長線が円  $C$  と交わる点は  $w_2$  であることを示せ。ここで  $\overline{z_1}$  は  $z_1$  に共役な複素数である。
- (3) 2 点  $z_2, z_3$  を通る直線とこの直線上に点  $z_1$  から下ろした垂線との交点は、点  $w_1$  と点  $w_2$  を結ぶ線分の midpoint であることを示せ。ただし、 $w_1 = w_2$  のときは、 $w_1$  と  $w_2$  の midpoint は  $w_1$  と解釈する。 [2002]

**7** 複素数平面上の点  $z$  を考える。

(1) 実数  $a, c$  と複素数  $b$  が  $|b|^2 - ac > 0$  を満たすとき、 $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  を満たす点  $z$  は  $a \neq 0$  のとき、どのような図形を描くか。ただし、 $\bar{z}$  は  $z$  に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数  $d$  と複素数平面上の異なる 2 点  $p, q$  に対して

$$d(z-p)(\bar{z}-\bar{q}) = \bar{d}(z-q)(\bar{z}-\bar{p})$$

を満たす点  $z$  はどのような図形を描くか。

[2001]

**8** 複素数  $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$  と、それに共役な複素数  $\bar{z}$  に対し、 $\alpha = z + \bar{z}$  とする。

(1)  $\alpha$  は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち、そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする 2 次方程式で、 $\alpha$  を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

[2000]

**9**  $k$  を実数として、2 次方程式  $x^2 + 2kx + 3k = 0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ) とする。 $i$  を虚数単位として次の問いに答えよ。

(1)  $|\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2$  の値を  $k$  を用いて表せ。

(2) 複素数平面において、複素数  $\alpha, \beta, i$  を表す点をそれぞれ A, B, P とする。

$\angle APB$  が直角となるような  $k$  の値を求めよ。

[1999]

**10**  $k$  を実数とするとき、方程式

$$x^3 - (2k+1)x^2 + (4k^2 + 2k)x - 4k^2 = 0$$

の解を  $z_1, z_2, z_3$  とし、それらを複素数平面上の点とみなす。

(1)  $z_1, z_2, z_3$  が一直線上にあるような  $k$  の値を求めよ。

(2)  $z_1, z_2, z_3$  が直角三角形をなすような  $k$  の値を求めよ。

(3) 3 点  $z_1, z_2, z_3$  を原点のまわりに角  $\theta$  だけ回転して得られる 3 点を  $w_1, w_2, w_3$  とする。 $w_1, w_2, w_3$  およびそれらと共役な点  $\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}$  とが、原点中心の正六角形の頂点となるとき、 $k$  および  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) の値を求めよ。

[1998]

## ■ 曲線 |||||

**1** 座標平面上の楕円  $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円 $\textcircled{1}$ と直線  $y = x + a$  が交点をもつときの  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $|x| + |y| = 1$  を満たす点  $(x, y)$  全体がなす図形の概形をかけ。
- (3) 点  $(x, y)$  が楕円 $\textcircled{1}$ 上を動くとき、 $|x| + |y|$  の最大値、最小値とそれを与える  $(x, y)$  をそれぞれ求めよ。 [2014]

**2** 座標平面上を動く点  $P(x(t), y(t))$  の時刻  $t$  における座標が

$$x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad y(t) = \cos(2t) \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

で与えられているとし、この点の軌跡を  $C$  とする。

- (1)  $P$  が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。
- (2)  $C$  が  $x$  軸,  $y$  軸に関して対称であることを示せ。
- (3)  $C$  の概形を描け。
- (4)  $C$  が囲む図形の面積を求めよ。 [2004]

**3**  $\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  である定数とする。座標平面上で、 $a^2 > 4b$  を満たす点  $P(a, b)$  から放物線  $y = \frac{1}{4}x^2$  に引いた 2 つの接線の接点を  $Q, R$  とし、接線  $PQ, PR$  の傾きをそれぞれ  $m_1, m_2$  とおく。点  $P$  は  $\angle QPR = \theta$  を満たしている。点  $P$  の全体が作る図形を  $G$  とする。

- (1)  $m_1 < 0 < m_2$  のとき、 $\tan \theta$  を  $m_1$  と  $m_2$  で表せ。
- (2)  $G$  を数式で表せ。
- (3)  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき  $G$  を図示せよ。 [2003]

4 平面上の点 P の  $x$  座標と  $y$  座標が、変数  $\theta$  の関数  $f(\theta) = \frac{(\theta - \pi)^2}{2\pi^2} + \frac{1}{2}$  を用いて、

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

と表されている。 $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  の範囲で変化したとき、点 P が描く曲線を  $C$  とする。点 P を  $P(\theta)$  で表し、 $P_1 = P(0)$ 、 $P_2 = P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 、 $P_3 = P(\pi)$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 方程式  $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) で与えられる楕円が点  $P_1$  を通るとする。このとき、点  $P_3$  がこの楕円の内部に含まれる (ただし楕円の上にはない) ための必要十分条件を  $\alpha$  のみを用いて表せ。
- (2) 点  $P_2$  における曲線  $C$  の接線を  $l$  とする。 $l$  の方程式を求めよ。
- (3) 次の条件(i)(ii)(iii)をみたす楕円  $D$  を考える。
- (i)  $D$  の軸の 1 つは  $x$  軸上にある。
  - (ii)  $D$  は点  $P_1$ ,  $P_2$  を通る。
  - (iii) 点  $P_2$  における  $D$  の接線は  $l$  である。

このとき、点  $P_3$  は楕円  $D$  の内部に含まれるかどうか判定せよ。

[2002]

5 平面上の点の極座標を、原点  $O$  からの距離  $r$  ( $\geq 0$ ) と偏角  $\theta$  を用いて  $(r, \theta)$  で表す。

(1) 平面上の 2 曲線

$$C_1 : r = 2\cos(\pi + \theta), \quad C_2 : r = 2(\cos\theta + 1) \quad \left( \text{ただし } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

の概形を描き、この 2 曲線  $C_1$ ,  $C_2$  の交点の極座標を求めよ。

- (2) 平面上の 3 点  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $E$  の極座標をそれぞれ  $(r_1, \theta_1)$ ,  $(r_2, \theta_2)$ ,  $(1, 0)$  とするとき、三角形  $OEP_1$  と三角形  $OP_2Q$  とが相似となる点  $Q$  を  $P_1 * P_2$  で表す。点  $P_1 * P_2$  の極座標を求めよ。ただし、点  $Q$  は  $\angle EOP_1 = \angle P_2OQ$  となるように向きも込めて定める。
- (3) 3 点  $O$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  が同一直線上にないとき、四辺形  $OP_1RP_2$  が平行四辺形となるような点  $R$  を  $P_1 \circ P_2$  で表す。 $P_1$ ,  $P_2$  の極座標が  $(r_1, \theta_1)$ ,  $(r_2, \theta_2)$  で  $r_1 = r_2 = r$  のとき、点  $P_1 \circ P_2$  の極座標を求めよ。
- (4) さらに、平面上の点 P の極座標を  $(r, \theta)$  として、実数  $k$  に対し点  $kP$  を、 $k \geq 0$  のときは極座標が  $(kr, \theta)$  となる点、 $k < 0$  のときは極座標が  $(|k|r, \theta + \pi)$  となる点とする。(1)で求めた 2 曲線  $C_1$ ,  $C_2$  の交点を  $V$  として、点  $k(V \circ (V * V))$  が曲線  $C_1$  上にあるための  $k$  の条件を求めよ。

[2000]





3  $xy$  平面上に曲線  $y = \frac{1}{x^2}$  を描き、この曲線の第 1 象限内の部分を  $C_1$ 、第 2 象限内の部分を  $C_2$  と呼ぶ。 $C_1$  上の点  $P_1(a, \frac{1}{a^2})$  から  $C_2$  に向けて接線を引き、 $C_2$  との接点を  $Q_1$  とする。次に点  $Q_1$  から  $C_1$  に向けて接線を引き、 $C_1$  との接点を  $P_2$  とする。次に点  $P_2$  から  $C_2$  に向けて接線を引き、接点を  $Q_2$  とする。以下同様に続けて、 $C_1$  上の点列  $P_n$  と  $C_2$  上の点列  $Q_n$  を定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点  $Q_1$  の座標を求めよ。
- (2) 三角形  $P_1Q_1P_2$  の面積  $S_1$  を求めよ。
- (3) 三角形  $P_nQ_nP_{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) の面積  $S_n$  を求めよ。
- (4) 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$  の和を求めよ。 [2010]

4  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して、 $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx$  とおく。ただし、 $0! = 1$  とする。

- (1)  $I_0$  の値を求め、 $n = 1, 2, \dots$  のとき  $I_n$  と  $I_{n-1}$  の関係式を求めよ。また、これらを用いて  $I_3$  の値を求めよ。
- (2)  $0 \leq x \leq 2$  に対して  $e^x \leq e^2$  であることを利用して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$  を求めよ。 [2004]

5 座標平面上で、 $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし、辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。 $p, n$  を自然数とし、領域  $D_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x, x^p \leq y \leq n\}$  を考え、その面積を  $S_n$  とする。 $L_n$  と  $M_n$  を、それぞれ  $D_n$  に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

- (1) グラフ  $y = x^p$  ( $0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}}$ ) と交わる単位正方形の個数は  $n$  であることを示せ。
- (2) 不等式  $M_n < S_n < M_n + n$  を示せ。また、面積  $S_n$  を求めよ。
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$  を求めよ。 [2003]

〔6〕  $m$  を 2 以上の自然数,  $e$  を自然対数の底とする。

- (1) 方程式  $xe^x - me^x + m = 0$  を満たす正の実数  $x$  の値はただ 1 つであることを示せ。  
またその値を  $c$  とするとき,  $m-1 < c < m$  となることを示せ。
- (2)  $x > 0$  の範囲で  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^m}$  は  $x = c$  で最小となることを示せ。
- (3)  $a_m$  を(2)で求められる  $f(x)$  の最小値とすると,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$  を求めよ。

[1999]

〔7〕 関数  $f(x) = 1 - x^2$  について, 次の問いに答えよ。

- (1)  $f(a) = a$  を満たす正の実数  $a$  を求めよ。
- (2)  $a$  を(1)で求めた実数とする。  $x \geq \frac{1}{2}$  ならば,  $|f(x) - f(a)| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}|x - a|$  となることを示せ。
- (3)  $a$  を(1)で求めた実数とする。  $\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1$  として,

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で決まる数列  $\{x_n\}$  を考える。すべての  $n$  に対して  $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$  が成り立つならば,  $x_1 = a$  であることを示せ。

[1999]

## ■ 微分法 |||||

〔1〕 2 以上の自然数  $n$  に対して, 関数  $f_n(x)$  を,  $f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$  と定義する。  $k = 1, 2, \dots, n-1$  に対して,  $f_n(x)$  が区間  $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$  でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

[2014]

〔2〕  $a > 1$  とし, 2 つの曲線

$$y = \sqrt{x} \quad (x \geq 0), \quad y = \frac{a^3}{x} \quad (x > 0)$$

を順に  $C_1, C_2$  とする。また,  $C_1$  と  $C_2$  の交点  $P$  における  $C_1$  の接線を  $l_1$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C_1$  と  $y$  軸および直線  $l_1$  で囲まれた部分の面積を  $a$  を用いて表せ。
- (2) 点  $P$  における  $C_2$  の接線と直線  $l_1$  のなす角を  $\theta(a)$  とする ( $0 < \theta(a) < \frac{\pi}{2}$ )。このとき,  $\lim_{a \rightarrow \infty} a \sin \theta(a)$  を求めよ。

[2013]

3 実数  $a$  と自然数  $n$  に対して、 $x$  の方程式

$$a(x^2 + |x+1| + n - 1) = \sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) この方程式が実数解をもつような  $a$  の範囲を、 $n$  を用いて表せ。
- (2) この方程式が、すべての自然数  $n$  に対して実数解をもつような  $a$  の範囲を求めよ。 [2012]

4  $a$  を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$  の極大値および極小値を求めよ。
- (2)  $x \geq 3$  のとき、不等式  $x^3 e^{-x} \leq 27e^{-3}$  が成り立つことを示せ。さらに、極限値  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$  を求めよ。
- (3)  $k$  を定数とする。  $y = x^2 + 2x + 2$  のグラフと  $y = ke^x + a^2$  のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を、 $a$  と  $k$  を用いて表せ。 [2011]

5 曲線  $C_1 : y = \frac{x^2}{2}$  の点  $P(a, \frac{a^2}{2})$  における法線と点  $Q(b, \frac{b^2}{2})$  における法線の交点を  $R$  とする。ただし、 $b \neq a$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $b$  が  $a$  に限りなく近づくと、 $R$  はある点  $A$  に限りなく近づく。 $A$  の座標を  $a$  で表せ。
- (2) 点  $P$  が曲線  $C_1$  上を動くとき、(1) で求めた点  $A$  が描く軌跡を  $C_2$  とする。曲線  $C_1$  と軌跡  $C_2$  の概形を描き、 $C_1$  と  $C_2$  の交点の座標を求めよ。
- (3) 曲線  $C_1$  と軌跡  $C_2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2009]

6 曲線  $y = e^x$  上を動く点  $P$  の時刻  $t$  における座標を  $(x(t), y(t))$  と表し、 $P$  の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ  $\vec{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$  と  $\vec{\alpha} = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2})$  とする。すべての時刻  $t$  で  $|\vec{v}| = 1$  かつ  $\frac{dx}{dt} > 0$  であるとして、次の問いに答えよ。

- (1)  $P$  が点  $(s, e^s)$  を通過する時刻における速度ベクトル  $\vec{v}$  を  $s$  を用いて表せ。
- (2)  $P$  が点  $(s, e^s)$  を通過する時刻における加速度ベクトル  $\vec{\alpha}$  を  $s$  を用いて表せ。
- (3)  $P$  が曲線全体を動くとき、 $|\vec{\alpha}|$  の最大値を求めよ。 [2009]

**7**  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  とおく。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。このとき、次の問いに

答えよ。

(1)  $y = f(x)$  の増減、凹凸、漸近線を調べ、グラフをかけ。

(2)  $f(x)$  の逆関数  $f^{-1}(x)$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\}$  を求めよ。 [2008]

**8**  $a > 0$  に対して、 $f(x) = a + \log x$  ( $x > 0$ )、 $g(x) = \sqrt{x-1}$  ( $x \geq 1$ ) とおく。2 曲線  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$  が、ある点  $P$  を共有し、その点で共通の接線  $l$  をもつとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $a$  の値、点  $P$  の座標、および接線  $l$  の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点  $P$  以外の共有点をもたないことを示せ。

(3) 2 曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2008]

**9**  $f(x) = xe^x$  とおく。また  $p$  を  $p \geq 0$  を満たす数とし、曲線  $y = f(x)$  上の点  $P(p, f(p))$  における接線の方程式を  $y = g(x)$  とおく。ただし、 $e$  は自然対数の底である。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $x \geq 0$  において  $f(x) \geq g(x)$  が成り立つことを示せ。

(2)  $L$  を正の数とする。曲線  $y = f(x)$ 、接線  $y = g(x)$ 、および 2 直線  $x = 0$ 、 $x = L$  で囲まれた部分の面積を  $S(p)$  とするとき、 $p \geq 0$  における  $S(p)$  の最小値を与える  $p$  の値を求めよ。 [2007]

**10** 次の問いに答えよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  であること、また、 $e$  は自然対数の底で、 $e < 3$  であることを用いてよい。

(1) 自然数  $n$  に対して、方程式  $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$  は  $x > 0$  の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) の 2 つの実数解を  $\alpha_n$ 、 $\beta_n$  ( $\alpha_n < \beta_n$ ) とするとき、 $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{3n}}$ 、 $ne < \beta_n$  が成り立つことを示せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$  を求めよ。 [2006]

**11** 実数  $x$  に対して,  $[x]$  は  $x$  を超えない最大の整数を表す。たとえば,  $[\frac{3}{2}] = 1$ ,  $[2] = 2$  である。このとき,  $0 < \theta < \pi$  として次の問いに答えよ。ただし, 必要なら  $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  となる角  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) を用いてよい。

- (1) 不等式  $\log_2 \left[ \frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 1$  を満たす  $\theta$  の範囲を求めよ。
- (2) 不等式  $\left[ \frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \geq 1$  を満たす  $\theta$  の範囲を求めよ。
- (3) 不等式  $\log_2 \left[ \frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq \left[ \frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right]$  を満たす  $\theta$  の範囲を求めよ。 [2005]

**12** 実数  $t$  が  $t \geq 0$  の範囲を動くとき,  $xy$  平面上で点  $P(t^2, e^{-t})$  が描く曲線を  $C$  とする。 $a$  を正の実数とし, 曲線  $C$  と  $x$  軸,  $y$  軸, および直線  $x = a^2$  で囲まれる部分の面積を  $S(a)$  とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 面積  $S(a)$  を求めよ。
- (2)  $a > 0$  の範囲で関数  $S(a)$  の増減, 凹凸を調べ, そのグラフの概形を描け。ただし,  $\lim_{a \rightarrow \infty} a e^{-a} = 0$  であることを用いてよい。
- (3)  $S(a) = 1.35$  となる  $a$  が  $2 < a < 3$  の範囲に存在することを示せ。ただし, 必要なら  $2.5 < e < 3$  であることを用いてよい。 [2005]

**13** 関数  $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$  を考える。

- (1) 関数  $f(x)$  がつねに増加するための  $a, b$  の条件を求め, その範囲を  $ab$  平面上に図示せよ。
- (2)  $a = 0$  のとき, 関数  $f(x)$  が  $x > -1$  においてつねに増加するための  $b$  の条件を求めよ。
- (3) 関数  $f(x)$  が  $x > -1$  においてつねに増加するための  $a, b$  の条件を求め, その範囲を  $ab$  平面上に図示せよ。 [2001]

**14** (1) 実数  $k \geq 0$  に対し,

$$\int_0^{2\pi} \left\{ y \left( x \cos \theta + \frac{1}{2}x^2 \right) - \left( x \cos \theta + \frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right\} \cos \theta d\theta = 2k\pi$$

を満たす  $xy$  平面内の曲線の方程式を求めよ。

- (2) (1) で求めた曲線と直線  $y = a$  との共有点が 1 個であるような実数  $a$  の範囲を求めよ。 [1999]

**15** 以下において、 $f(x)$  はすべての実数  $x$  において微分可能な関数とし、 $F(x) = e^x f(x)$  とおく。

(1) 定数関数でない関数  $f(x)$  で

条件(A): すべての  $x$  に対して  $f(x+1) = f(x)$  である

をみたすものの例をあげよ。

(2) 関数  $f(x)$  が

条件(B): すべての  $x$  に対して  $f'(x) + f(x) \leq 0$  である

をみたすとき、 $a < b$  ならば  $F(a) \geq F(b)$  であることを示せ。

(3) 関数  $f(x)$  が(1)の条件(A)をみたすとき、 $F(x+n)$  (ただし、 $n$  は正の整数) を  $F(x)$  を用いて表せ。

(4) 関数  $f(x)$  が(1), (2)の条件(A), (B)をともにみたすとする。

①  $f(c) \geq 0$  となる  $c$  が存在すれば、 $f(c) = 0$  であることを示せ。

② ある  $c$  で  $f(c) = 0$  であれば、すべての  $x$  で  $f(x) = 0$  となることを示せ。

[1998]

## ■ 積分法 |||||

**1** 以下の問いに答えよ。

(1) 関数  $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$  は  $x > 1$  において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分  $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$  を求めよ。

(3)  $n$  を 3 以上の整数とするととき、不等式  $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$  が成り立つことを示せ。

[2015]

**2** 関数  $f(x) = \left| \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right|$  を考える。ただし、 $-\pi \leq x \leq \pi$  とする。さらに、 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$  に対して、 $F(a) = \int_0^a f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $f(x) = 0$  となる  $x$  を求めよ。

(2) 関数  $y = f(x)$  のグラフの概形を描け。

(3)  $F(a)$  を求めよ。

[2006]

□3 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数  $x, y$  に対して, 不等式  $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$  が成り立つことを示せ。ここで  $\log$  は自然対数を表す。

(2)  $a, b$  は実数で  $a < b$  とする。関数  $f(x)$  と  $g(x)$  は閉区間  $[a, b]$  で正の値をとる連続関数で,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$  をみたす。このとき, 不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

(3)  $a, b$  は実数で  $a < b$  とする。閉区間  $[a, b]$  で正の値をとる連続関数  $f(x)$  に対し正の実数  $M$  を  $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  とする。不等式

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ。

[2002]

□4  $n$  を自然数として,  $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$  とおく。

(1)  $x < 1$  において,  $f(x) = -\log(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$  が成り立つことを示せ。ここで,  $\log$  は自然対数を表す。

(2)  $|x| \leq \frac{1}{3}$  とするとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

(i)  $x \geq 0$  において,  $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

(ii)  $x < 0$  において,  $\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

(iii)  $\left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| \leq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3) この不等式を用いて,  $\log 2$  の近似値を誤差が  $\frac{1}{100}$  以下となるような分数で求めよ。

[2000]



## ■ 積分の応用 |||||

1 原点を中心とする半径 3 の半円  $C: x^2 + y^2 = 9$  ( $y \geq 0$ ) 上の 2 点  $P$  と  $Q$  に対し、線分  $PQ$  を 2:1 に内分する点を  $R$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $P$  の  $y$  座標と  $Q$  の  $y$  座標が等しく、かつ  $P$  の  $x$  座標は  $Q$  の  $x$  座標より小さくなるように  $P$  と  $Q$  が動くものとする。このとき、線分  $PR$  が通過してできる図形  $S$  の面積を求めよ。
- (2) 点  $P$  を  $(-3, 0)$  に固定する。 $Q$  が半円  $C$  上を動くとき線分  $PR$  が通過してできる図形  $T$  の面積を求めよ。
- (3) (1)の図形  $S$  から(2)の図形  $T$  を除いた図形と第 1 象限の共通部分を  $U$  とする。 $U$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。 [2018]

2 定数  $a > 0$  に対し、曲線  $y = a \tan x$  の  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  の部分を  $C_1$ 、曲線  $y = \sin 2x$  の  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  の部分を  $C_2$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  が原点以外に交点をもつための  $a$  の条件を求めよ。
- (2)  $a$  が(1)の条件を満たすとき、原点以外の  $C_1$  と  $C_2$  の交点を  $P$  とし、 $P$  の  $x$  座標を  $p$  とする。 $P$  における  $C_1$  と  $C_2$  のそれぞれの接線が直交するとき、 $a$  および  $\cos 2p$  の値を求めよ。
- (3)  $a$  が(2)で求めた値のとき、 $C_1$  と  $C_2$  で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2017]

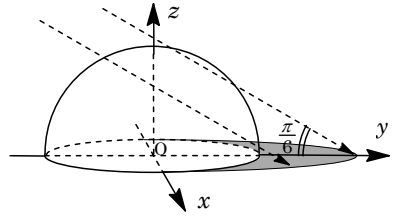
3  $C_1, C_2$  をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部とする。

$$C_1: y = -x^2 + 2x \quad (0 \leq x \leq 2), \quad C_2: y = -x^2 - 2x \quad (-2 \leq x \leq 0)$$

また、 $a$  を実数とし、直線  $y = a(x+4)$  を  $l$  とする。

- (1) 直線  $l$  と  $C_1$  が異なる 2 つの共有点をもつための  $a$  の値の範囲を求めよ。  
以下、 $a$  が(1)の条件を満たすとする。このとき、 $l$  と  $C_1$  で囲まれた領域の面積を  $S_1$ 、 $x$  軸と  $C_2$  で囲まれた領域で  $l$  の下側にある部分の面積を  $S_2$  とする。
- (2)  $S_1$  を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $S_1 = S_2$  を満たす実数  $a$  が  $0 < a < \frac{1}{5}$  の範囲に存在することを示せ。 [2015]

4 座標空間内に、原点  $O(0, 0, 0)$  を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように、 $y$  軸の負の方向から仰角  $\frac{\pi}{6}$  で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル  $(0, \sqrt{3}, -1)$  に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



- (1) 球の  $z \geq 0$  の部分が  $xy$  平面上につくる影を考える。  $k$  を  $-1 < k < 1$  を満たす実数とすると、 $xy$  平面上の直線  $x = k$  において、球の外で光が当たらない部分の  $y$  座標の範囲を  $k$  を用いて表せ。
- (2)  $xy$  平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
- (3)  $z \geq 0$  において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。 [2015]

5 関数  $f(x) = x - \sin x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) を考える。曲線  $y = f(x)$  の接線で傾きが  $\frac{1}{2}$  となるものを  $l$  とする。

- (1)  $l$  の方程式と接点の座標  $(a, b)$  を求めよ。
- (2)  $a$  は(1)で求めたものとする。曲線  $y = f(x)$ , 直線  $x = a$ , および  $x$  軸で囲まれた領域を、 $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。 [2014]

6 原点  $O$  を中心とし、点  $A(0, 1)$  を通る円を  $S$  とする。点  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  で円  $S$  に内接する円  $T$  が、点  $C$  で  $y$  軸に接しているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 円  $T$  の中心  $D$  の座標と半径を求めよ。
- (2) 点  $D$  を通り  $x$  軸に平行な直線を  $l$  とする。円  $S$  の短い方の弧  $AB$ , 円  $T$  の短い方の弧  $BC$ , および線分  $AC$  で囲まれた図形を  $l$  のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2013]

7 円  $x^2 + (y-1)^2 = 4$  で囲まれた図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2012]

**8** 曲線  $y = \sqrt{x}$  上の点  $P(t, \sqrt{t})$  から直線  $y = x$  へ垂線を引き、交点を  $H$  とする。ただし、 $t > 1$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $H$  の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $x \geq 1$  の範囲において、曲線  $y = \sqrt{x}$  と直線  $y = x$  および線分  $PH$  とで囲まれた図形の面積を  $S_1$  とするとき、 $S_1$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 曲線  $y = \sqrt{x}$  と直線  $y = x$  で囲まれた図形の面積を  $S_2$  とする。 $S_1 = S_2$  であるとき、 $t$  の値を求めよ。 [2011]

**9** 中心が  $(0, a)$ 、半径  $a$  の円を  $xy$  平面上の  $x$  軸の上を  $x$  の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点  $P$  が原点  $(0, 0)$  を出発するとする。次の問いに答えよ。

- (1) 円が角  $t$  だけ回転したとき、点  $P$  の座標を求めよ。
- (2)  $t$  が  $0$  から  $2\pi$  まで動いて円が  $1$  回転したときの点  $P$  の描く曲線を  $C$  とする。曲線  $C$  と  $x$  軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) (2)の曲線の長さを求めよ。 [2010]

**10** 直線  $l: y = x + a$  が曲線  $C: y = 2\sin x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) に接しているとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a \geq 0$  とする。

- (1)  $a$  の値を求めよ。
- (2) 曲線  $C$  と直線  $l$  で囲まれた図形の  $y \geq 0$  の範囲にある部分を、 $x$  軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。 [2005]

**11**  $xy$  平面上で、 $x = r(t)\cos t$ 、 $y = r(t)\sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) で表される曲線を  $C$  とする。

- (1)  $r(t) = e^{-t}$  のとき、 $x$  の最小値と  $y$  の最大値を求め、 $C$  の概形を図示せよ。
- (2) 一般に、すべての実数  $t$  で微分可能な関数  $r(t)$  に対し、

$$\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt = \int_0^\pi \{r(t)\}^3 \left( \sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで、 $r'(t)$  は  $r(t)$  の導関数である。

- (3) (1)で求めた曲線  $C$  と  $x$  軸とで囲まれる図形を、 $x$  軸のまわりに  $1$  回転してできる立体の体積  $V$  は、 $V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t dt$  と表せることを示せ。 [2003]

12 平面上を運動する点  $P(x, y)$  の時刻  $t$  での  $x$  座標と  $y$  座標が

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

で表されている。ただし、 $e$  は自然対数の底である。原点を  $O$ 、点  $(0, 1)$  を  $M$  とする。 $t$  が  $t \geq 0$  の範囲で変化したとき、点  $P$  が描く曲線を  $C$  とする。時刻  $t$  において、曲線  $C$ 、線分  $OM$ 、および線分  $OP$  で囲まれる図形の面積を  $A(t)$  で表し、曲線  $C$  と線分  $MP$  で囲まれる図形の面積を  $S(t)$  で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点  $P(x, y)$  の座標  $x, y$  に対して  $y$  を  $x$  を用いて表せ。

(2) 時刻  $t$  を用いて  $A(t)$  と  $S(t)$  を表せ。

(3)  $A(t) - S(t)$  が最大となる時刻  $t$  を求めよ。 [2002]

13 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は  $x$  軸で、中心軸に直交する平面による切り口は半径  $r$  の円である。正四角柱の中心軸は  $z$  軸で、 $xy$  平面による切り口は 1 辺の長さが  $\frac{2\sqrt{2}}{r}$  の正方形で、その正方形の対角線は  $x$  軸と  $y$  軸である。 $0 < r \leq \sqrt{2}$  とし、円柱と正四角柱の共通部分を  $K$  とする。

(1) 高さが  $z = t$  ( $-r \leq t \leq r$ ) で  $xy$  平面に平行な平面と  $K$  との交わりの面積を求めよ。

(2)  $K$  の体積  $V(r)$  を求めよ。

(3)  $0 < r \leq \sqrt{2}$  における  $V(r)$  の最大値を求めよ。 [2001]

14 関数  $f(x)$  の第 2 次導関数はつねに正とし、関数  $y = f(x)$  のグラフ  $G$  上の点  $P(t, f(t))$  における接線と  $x$  軸のなす角を  $\theta(t)$  とする。ただし、 $\theta(t)$  は  $-\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \frac{\pi}{2}$  で接線の傾きが正、負、0 に従って正、負、0 の値をとるものとする。

また、点  $P$  における  $G$  の法線上に  $P$  から距離 1 の点  $Q(\alpha(t), \beta(t))$  を  $G$  の下側にとる。

(1)  $\theta(t)$  はつねに増加することを示せ。

(2)  $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$  を求めよ。

(3)  $t$  が  $a$  から  $b$  ( $a < b$ ) まで変化するとき、点  $P$ 、 $Q$  が描く曲線の長さをそれぞれ  $L_1$ 、 $L_2$  とする。 $L_2 - L_1$  を  $\theta(a)$  と  $\theta(b)$  を用いて表せ。 [2001]

**15** 定数  $a, b$  を係数とする 2 次関数  $y = -ax^2 + b$  のグラフが, 原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする。ただし,  $a > 0$  とする。

- (1)  $a, b$  の条件式, および接点の座標を求めよ。
- (2) 与えられた 2 次関数のグラフと  $x$  軸とで囲まれる部分を,  $y$  軸のまわりに回転して得られる回転体の体積  $V$  を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $V$  を最小にする  $a, b$  の値, およびそのときの  $V$  の値を求めよ。 [2000]

**16** 平面上の曲線  $C$  が媒介変数  $t$  を用いて

$$x = \sin t - t \cos t, \quad y = \cos t + t \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で与えられている。

- (1) 曲線  $C$  の長さを求めよ。
- (2) 曲線  $C$  上の各点  $P$  において,  $P$  における接線と  $P$  で直交する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は,  $P$  を動かすときどんな図形を描くか。
- (3)  $\int_0^{\pi} t \sin 2t dt$  を求めよ。
- (4) 曲線  $C$  と  $y$  軸および直線  $y = -1$  で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ。 [1998]

## 分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

## 問題

3次関数  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  のグラフを  $G$  とする。

- (1)  $xy$  平面上の点  $(p, q)$  に関する, 点  $(X, Y)$  に対称な点の座標を求めよ。
- (2)  $G$  はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。
- (3) 直線  $mx + ny = 0$  に関する, 点  $(X, Y)$  に対称な点の座標を求めよ。ただし,  $m, n$  は共には 0 でないとする。
- (4)  $G$  は原点を通るどんな直線に対しても線対称でないことを示せ。 [2001]

## 解答例

- (1) 点  $(p, q)$  に関する, 点  $(X, Y)$  に対称な点を  $(x, y)$  とすると,

$$\frac{x+X}{2} = p, \quad \frac{y+Y}{2} = q$$

$x = 2p - X, y = 2q - Y$  より, 対称点の座標は  $(2p - X, 2q - Y)$  となる。

- (2)  $G: y = x^3 + ax^2 + bx + c$  ……①上の点  $(X, Y)$  に対して,

$$Y = X^3 + aX^2 + bX + c \dots\dots\dots②$$

$G$  上の点  $(p, p^3 + ap^2 + bp + c)$  に関して対称移動した点を  $(x, y)$  とすると,

$$X = 2p - x, \quad Y = 2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y \dots\dots\dots③$$

②③より,  $2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y = (2p - x)^3 + a(2p - x)^2 + b(2p - x) + c$

$$y = x^3 - (a + 6p)x^2 + (12p^2 + 4ap + b)x - 6p^3 - 2ap^2 + c \dots\dots\dots④$$

①と④が一致する条件は,

$$a = -a - 6p \dots\dots\dots⑤, \quad b = 12p^2 + 4ap + b \dots\dots\dots⑥, \quad c = -6p^3 - 2ap^2 + c \dots\dots\dots⑦$$

⑤より  $p = -\frac{1}{3}a$  となり, このとき⑥⑦はともに成立する。

すると,  $q = p^3 + ap^2 + bp + c = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$  となり,  $G$  はこのグラフ上の点

$(-\frac{1}{3}a, \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c)$  に関して点対称である。

- (3) 直線  $mx + ny = 0$  に関する, 点  $(X, Y)$  に対称な点を  $(x, y)$  とすると, この直線の法線ベクトル  $\vec{n}$  が  $\vec{n} = (m, n)$  なので,

$$(x, y) = (X, Y) + k(m, n) = (X + km, Y + kn)$$

ここで, 点  $(X, Y)$  と点  $(x, y)$  の中点  $(X + \frac{1}{2}km, Y + \frac{1}{2}kn)$  が,  $mx + ny = 0$  上にあるので,

$$m\left(X + \frac{1}{2}km\right) + n\left(Y + \frac{1}{2}kn\right) = 0, \quad k = -\frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}$$

$$\text{よって, } x = X - \frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}m = \frac{(n^2 - m^2)X - 2mnY}{m^2 + n^2}$$

$$y = Y - \frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}n = \frac{-2mnX + (m^2 - n^2)Y}{m^2 + n^2}$$

対称点の座標は  $\left( \frac{(n^2 - m^2)X - 2mnY}{m^2 + n^2}, \frac{-2mnX + (m^2 - n^2)Y}{m^2 + n^2} \right)$  となる。

(4)  $p = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ ,  $q = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$  とおくと, (3)より  $x = -pX - qY$ ,  $y = -qX + pY$

(2)と同様にして,  $X = -px - qy$ ,  $Y = -qx + py$  を②に代入すると,

$$-qx + py = (-px - qy)^3 + a(-px - qy)^2 + b(-px - qy) + c \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$q \neq 0$  のときは, 明らかに⑧は①と一致しない。

$$q = 0 \text{ のときは, } p \neq 0 \text{ となり, } y = -p^2x^3 + apx^2 - bx + \frac{c}{p} \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$x^3$ の係数を比べると, どんな  $p$  の値に対しても  $-p^2 < 0$  なので, ⑨は①と一致しない。

したがって,  $G$  は原点を通るどんな直線に対しても線対称でない。

### コメント

3次曲線の有名な性質についての証明問題です。このように, 一度きっちり証明しておくとお記憶に残ります。



## 問題

$t$  を  $0 < t < 1$  を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 AB, BC, CA をそれぞれ  $2:1$ ,  $t:1-t$ ,  $1:3$  に内分する点を D, E, F とする。また、AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの  $t$  の値  $t_0$  を求めよ。

以下、 $t$  は  $0 < t < t_0$  を満たすものとする。

(2)  $AP = kAE$ ,  $CR = lCD$  を満たす実数  $k, l$  をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

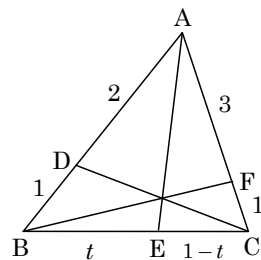
[2016]

## 解答例+映像解説

(1)  $\triangle ABC$  において、 $AD:DB=2:1$ ,  $BE:EC=t:1-t$ ,  $CF:FA=1:3$  であり、 $t=t_0$  のとき、AE, BF, CD が 1 点で交わることより、チェバの定理から、

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1, \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

すると、 $2t_0 = 3(1-t_0)$  から、 $t_0 = \frac{3}{5}$  となる。



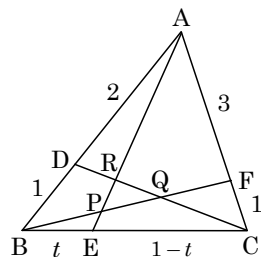
(2) 条件より、 $AP = kAE$ ,  $CR = lCD$  なので、

$$AP:PE = k:1-k, \quad CR:RD = l:1-l$$

さて、 $\triangle AEC$  と直線 BF にメネラウスの定理を適用して、

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1, \quad \frac{k}{1-k} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

すると、 $kt = 3(1-k)$  より、 $k = \frac{3}{3+t}$  となる。



また、 $\triangle CDB$  と直線 AE にメネラウスの定理を適用して、

$$\frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} \cdot \frac{BE}{EC} = 1, \quad \frac{l}{1-l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{1-t} = 1$$

すると、 $2lt = 3(1-l)(1-t)$  より、 $(3-t)l = 3-3t$ ,  $l = \frac{3-3t}{3-t}$  となる。

(3)  $BQ:QF = m:1-m$  とし、 $\triangle BFA$  と直線 CD にメネラウスの定理を適用して、

$$\frac{BQ}{QF} \cdot \frac{FC}{CA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1, \quad \frac{m}{1-m} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

すると、 $2m = 4(1-m)$  より、 $m = \frac{2}{3}$  となる。

よって、 $\triangle ABC$  の面積が 1 から、 $\triangle BCQ = \frac{2}{3} \triangle BCF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{1}{6}$

(4) (2)から,  $AP:PE = \frac{3}{3+t} : \left(1 - \frac{3}{3+t}\right) = 3:t$  となり,

$$\triangle ABP = \frac{3}{3+t} \triangle ABE = \frac{3}{3+t} \cdot t \triangle ABC = \frac{3t}{3+t}$$

また,  $CR:RD = \frac{3-3t}{3-t} : \left(1 - \frac{3-3t}{3-t}\right) = 3-3t:2t$  から,

$$\triangle CAR = \frac{3-3t}{3-3t+2t} \triangle CAD = \frac{3-3t}{3-t} \cdot \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{2-2t}{3-t}$$

すると,  $\triangle PQR = \triangle ABC - \triangle BCQ - \triangle CAR - \triangle ABP$  より,

$$\triangle PQR = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2-2t}{3-t} - \frac{3t}{3+t} = \frac{25t^2 - 30t + 9}{6(3-t)(3+t)} = \frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

### コメント

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

## 問題

三角形 ABC の 3 辺の長さを  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$  とする。実数  $t \geq 0$  を与えたとき、A を始点とし B を通る半直線上に  $AP = tc$  となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

- (1)  $CP^2$  を  $a, b, c, t$  を用いて表せ。
- (2) 点 P が  $CP = a$  を満たすとき、 $t$  を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき、 $\angle A$  と  $\angle B$  に関する条件を求めよ。

[2010]

## 解答例

- (1) 余弦定理から、 $\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  となり、

$$\begin{aligned} CP^2 &= b^2 + t^2 c^2 - 2btc \cos \angle A \\ &= b^2 + t^2 c^2 - t(b^2 + c^2 - a^2) \\ &= ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2 - t)c^2 \end{aligned}$$

- (2)  $CP = a$  のとき、(1) より、 $ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2 - t)c^2 = a^2$   
 $(1-t)(-a^2 + b^2 - tc^2) = 0$

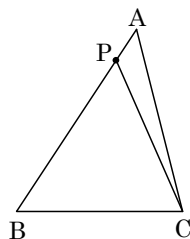
すると、 $t \geq 0$  から、 $b \geq a$  のとき  $t = 1$ ,  $\frac{-a^2 + b^2}{c^2}$ ,  $b < a$  のとき  $t = 1$  である。

- (3)  $t$  の値が  $0 \leq t \leq 1$  に 2 つ存在する条件は、 $b \geq a$  のとき  $0 \leq \frac{-a^2 + b^2}{c^2} < 1$  より、

$$b \geq a \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b^2 < a^2 + c^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より  $\angle B \geq \angle A$ , ②より  $\angle B < 90^\circ$

まとめると、 $\angle A \leq \angle B < 90^\circ$  となる。



## コメント

三角比の応用についての基本問題です。

## 問題

いくつかの半径 3 の円を、半径 2 の円  $Q$  に外接し、かつ互いに交わらないように配置する。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 半径 3 の円の 1 つを  $R$  とする。円  $Q$  の中心を端点とし、円  $R$  に接する 2 本の半直線のなす角を  $\theta$  とおく。ただし、 $0 < \theta < \pi$  とする。このとき、 $\sin \theta$  を求めよ。
- (2)  $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$  を示せ。
- (3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。 [2008]

## 解答例

(1) 条件より、 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$

すると、 $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$  となり、

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

(2)  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{7}{25} > 0$  より、 $\theta$  は鋭角である。

さて、 $\sqrt{3} < \frac{48}{25}$  なので  $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{24}{25} < 1$  となり、

$$\sin \frac{\pi}{3} < \sin \theta < \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を  $n$  とすると、

$$n\theta \leq 2\pi < (n+1)\theta, \quad n \leq \frac{2\pi}{\theta} < n+1 \cdots \cdots (*)$$

さて、 $\alpha = \frac{2}{5}\pi$  とおくと、 $2\alpha = 2\pi - 3\alpha$  となり、

$$\sin 2\alpha = -\sin 3\alpha, \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = -3 \sin \alpha + 4 \sin^3 \alpha$$

$\sin \alpha \neq 0$  から、 $2 \cos \alpha = -3 + 4 \sin^2 \alpha$ ,  $4 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1 = 0$

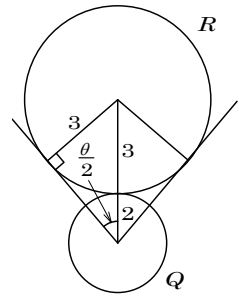
$$\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

また、 $\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$  であり、 $\frac{53}{25} < \sqrt{5}$  から、 $\frac{7}{25} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

よって、 $\cos \theta < \cos \alpha$  となるので、 $\theta > \alpha = \frac{2}{5}\pi$  から、(2) と合わせて、

$$\frac{2}{5}\pi < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 4 < \frac{2\pi}{\theta} < 5$$

すると、(\*) より、配置できる円の最大個数  $n$  は、 $n = 4$  である。



## コメント

(2)の結論がアバウトすぎて、(3)では、そのまま利用できません。

## 問題

長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし、高さが  $\sqrt{3}$  の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を  $l$  とする。直円錐の頂点を C, 底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

- (1) 直円錐の展開図を用いて,  $l$  の長さを求めよ。
- (2)  $l$  上の点 P に対して, 線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。  $\angle AOQ = \theta$  とし  $CP^2$  を  $\sin \theta$  で表せ。ただし,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。
- (3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし, A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。  $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$  の範囲で  $\frac{OS^2}{OR^2}$  の最大値を求めよ。 [1999]

## 解答例

- (1) 母線 AC の長さは  $\sqrt{1+3} = 2$  となるので, 側面の展開図の中心角を  $\varphi$  とすると,

$$2\pi \cdot 1 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} \text{ より, } \varphi = 180^\circ$$

線分 AB は底面の直径なので,  $\angle ACB = 90^\circ$

よって,  $l$  の長さは展開図で  $AB = 2\sqrt{2}$  となる。

- (2) 弧 AQ の長さは, 底面では  $2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\theta}{360^\circ}$  であるが, 側面の

展開図では  $2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\angle ACQ}{360^\circ}$  と表せるので,  $\angle ACQ = \frac{\theta}{2}$

$\triangle APC$  に正弦定理を適用すると,  $\angle CAP = 45^\circ$  から,

$$\frac{CP}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin\left(135^\circ - \frac{\theta}{2}\right)}$$

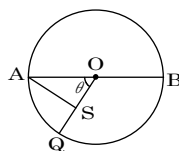
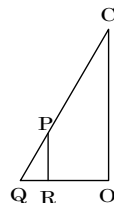
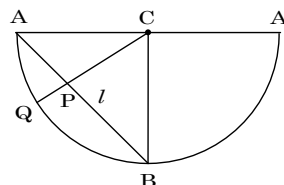
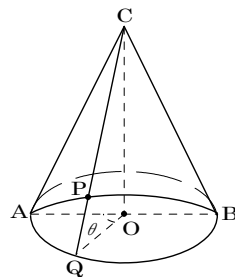
$$CP = \frac{2 \sin 45^\circ}{\sin\left(135^\circ - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{よって, } CP^2 = \frac{2}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{4}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{4}{1 + \sin \theta}$$

- (3)  $\triangle COQ$  について考えると,  $\frac{OR}{OQ} = \frac{CP}{CQ}$  から,

$$OR = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{1 + \sin \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \theta}} \text{ より, } OR^2 = \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

次に底面について,  $OS = OA \cos \theta = \cos \theta$  より  $OS^2 = \cos^2 \theta$



$$\text{よって, } \frac{OS^2}{OR^2} = \cos^2\theta(1 + \sin\theta) = (1 - \sin^2\theta)(1 + \sin\theta)$$

$\sin\theta = t$  とおくと,  $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$  より  $0 < t \leq 1$

このとき,  $f(t) = (1 - t^2)(1 + t)$  とおくと,

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2t(1+t) + (1-t^2) \\ &= -(3t-1)(t+1) \end{aligned}$$

$t$	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	

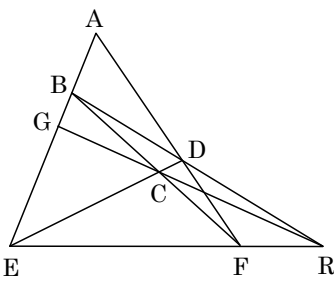
$f(t)$  は  $t = \frac{1}{3}$  のとき最大値  $\frac{32}{27}$  をとる。すなわち  $\frac{OS^2}{OR^2}$  の最大値は  $\frac{32}{27}$  である。

### コメント

断面図や展開図を書かないと, 位置関係がとらえきれない問題です。

## 問題

右図のような四角形 ABCD において、直線 AB と直線 CD の交点 E、直線 BC と直線 AD の交点 F、直線 BD と直線 EF の交点 R、直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする。



(1)  $\frac{BG}{GE} = \frac{BA}{AE}$  が成り立つことを示せ。

(2) G が AE の中点で、 $\frac{AD}{DF} = 2$  であるとき、 $AB = a$ 、E

CD = b とおく。次の条件をみたす  $x, y, z$  の値を求めよ。

①  $EB = xa$

②  $EC = yb$

③ 四角形 ABCD が円に内接するとき、 $a = zb$

[1998]

## 解答例

(1)  $\triangle BER$  において、直線 BF, ED, RG が点 C で交わるので、チェバの定理より、

$$\frac{BG}{GE} \cdot \frac{EF}{FR} \cdot \frac{RD}{DB} = 1 \text{ から, } \frac{BG}{GE} = \frac{FR}{EF} \cdot \frac{DB}{RD} \dots\dots\dots ①$$

$\triangle REB$  と直線 AF に対して、メネラウスの定理を適用して、

$$\frac{RF}{FE} \cdot \frac{EA}{AB} \cdot \frac{BD}{DR} = 1 \text{ から, } \frac{BA}{AE} = \frac{RF}{FE} \cdot \frac{BD}{DR} \dots\dots\dots ②$$

①②より、 $\frac{BG}{GE} = \frac{BA}{AE} \dots\dots\dots ③$

(2)  $EB = xa$  より、 $AG = GE = \frac{1}{2}(x+1)a$ 、 $BG = \frac{1}{2}(x+1)a - a = \frac{1}{2}(x-1)a$

③より、 $\frac{\frac{1}{2}(x-1)a}{\frac{1}{2}(x+1)a} = \frac{a}{(x+1)a}$ 、よって  $x-1=1$ 、 $x=2$

また、 $\triangle AED$  と直線 BF に対して、メネラウスの定理を適用して、

$$\frac{EB}{BA} \cdot \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DC}{CE} = 1 \text{ から, } \frac{DC}{CE} = \frac{BA}{EB} \cdot \frac{FD}{AF} = \frac{a}{2a} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$EC = 6CD$  より、 $y = 6$

さらに、四角形 ABCD が円に内接するとき、方べきの定理より、

$$EB \cdot EA = EC \cdot ED \text{ から, } 2a \cdot 3a = 6b \cdot 7b, a^2 = 7b^2$$

よって、 $a = \sqrt{7}b$  となり、 $z = \sqrt{7}$

## コメント

メネラウスやチェバを用いて証明するというのはすぐにわかるのですが……。





## 問題

2 つの定数  $a > 0$  および  $b > 0$  に対し、座標空間内の 4 点を  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $D(a, b, 1)$  と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を  $a, b$  を用いて表せ。
- (2) さらに、点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。 $\overrightarrow{AG}$  と  $\overrightarrow{BH}$  がなす角を  $\theta$  とするとき、 $\cos \theta$  を  $a, b$  を用いて表せ。 [2017]

## 解答例+映像解説

- (1)  $a > 0, b > 0$  のとき、 $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $D(a, b, 1)$  に対し、線分 CD 上の点 G を、 $0 \leq t \leq 1$  とし、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= t\overrightarrow{OD} + (1-t)\overrightarrow{OC} \\ &= t(a, b, 1) + (1-t)(0, 0, 1) \\ &= (at, bt, 1)\end{aligned}$$

すると、 $\overrightarrow{AG} = (a(t-1), bt, 1)$  と  $\overrightarrow{CD} = (a, b, 0)$  が垂直なので、 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  より、

$$a^2(t-1) + b^2t = 0, \quad t = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

したがって、 $G\left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}, 1\right)$  となる。

- (2) (1)と同様に、線分 CD 上の点 H を、 $0 \leq s \leq 1$  とし、 $\overrightarrow{OH} = (as, bs, 1)$  と表すと、 $\overrightarrow{BH} = (as, b(s-1), 1)$  と  $\overrightarrow{CD} = (a, b, 0)$  が垂直なので、 $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  より、

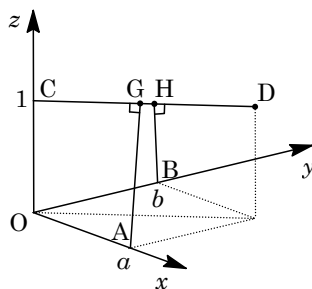
$$a^2s + b^2(s-1) = 0, \quad s = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

したがって、 $H\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{b^3}{a^2 + b^2}, 1\right)$  となる。

ここで、 $\overrightarrow{AG}$  と  $\overrightarrow{BH}$  のなす角を  $\theta$  とし、内積の定義を利用すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} &= a^2s(t-1) + b^2t(s-1) + 1 = (a^2 + b^2)st - a^2s - b^2t + 1 \\ &= \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} + 1 = \frac{a^2 + b^2 - a^2b^2}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AG}|^2 &= a^2(t-1)^2 + b^2t^2 + 1 = (a^2 + b^2)t^2 - 2a^2t + a^2 + 1 \\ &= \frac{a^4}{a^2 + b^2} - \frac{2a^4}{a^2 + b^2} + a^2 + 1 = \frac{a^2 + b^2 + a^2b^2}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{BH}}|^2 &= a^2 s^2 + b^2 (s-1)^2 + 1 = (a^2 + b^2) s^2 - 2b^2 s + b^2 + 1 \\ &= \frac{b^4}{a^2 + b^2} - \frac{2b^4}{a^2 + b^2} + b^2 + 1 = \frac{a^2 + b^2 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

よって、 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{BH}}}{|\overrightarrow{\text{AG}}| |\overrightarrow{\text{BH}}|} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 b^2}{a^2 + b^2 + a^2 b^2}$ となる。

### コメント

空間ベクトルの基本問題です。計算量は多めですが、難しいというわけではありません。

## 問題

1 辺の長さが 1 の正方形  $OABC$  を底面とし、点  $P$  を頂点とする四角錐  $POABC$  がある。ただし、点  $P$  は内積に関する条件  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}$ 、および  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}$  を満たす。辺  $AP$  を 2:1 に内分する点を  $M$  とし、辺  $CP$  の中点を  $N$  とする。さらに、点  $P$  と直線  $BC$  上の点  $Q$  を通る直線  $PQ$  は、平面  $OMN$  に垂直であるとする。このとき、長さの比  $BQ:QC$ 、および線分  $OP$  の長さを求めよ。 [2013]

## 解答例+映像解説

条件より、 $OA = OC = 1$ 、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}, \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}$$

さて、点  $M$  は辺  $AP$  を 2:1 に内分する点、点  $N$  は辺  $CP$  の中点より、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$$

ここで、 $Q$  は線分  $BC$  を  $t:1-t$  に分ける点とすると、

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$$

$$= (1-t)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + t\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$$

さて、直線  $PQ$  が平面  $OMN$  に垂直なので、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$  となり、 $OP = k$  とおくと、

$$((1-t)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OP}) = 0$$

$$(1-t) + 2(1-t) \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2k^2 = 0, \quad \frac{3}{2}t + 2k^2 = \frac{9}{4} \dots\dots\dots ①$$

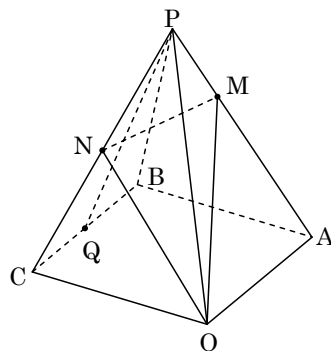
また、 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$  から、 $((1-t)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}) = 0$

$$\frac{1}{4}(1-t) + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - k^2 = 0, \quad \frac{1}{4}t + k^2 = \frac{5}{4} \dots\dots\dots ②$$

①②より、 $t = -\frac{1}{4}$  となり、 $1-t = \frac{5}{4}$  から、点  $Q$  は  $BC$  を 1:5 に外分するので、

$$BQ:QC = 1:5$$

また、 $k^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{21}{16}$  より、 $OP = k = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$



## コメント

$t$  の値が負になり計算間違いをしたかと思いましたが、問題をよく読むと、「直線  $BC$  上の点  $Q$ 」と記されていました。このため、上図の  $Q$  の位置は、結論とは異なります。

## 問題

空間内の 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 2, 3)$ ,  $B(1, 0, 3)$ ,  $C(1, 2, 0)$  を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 点  $O, A, B, C$  を通る球面の中心  $D$  の座標を求めよ。
- (2) 3 点  $A, B, C$  を通る平面に点  $D$  から垂線を引き、交点を  $F$  とする。線分  $DF$  の長さを求めよ。
- (3) 四面体  $ABCD$  の体積を求めよ。 [2011]

## 解答例

- (1) 4 点  $O, A, B, C$  を通る球面の中心  $D$  を、 $D(p, q, r)$  とす

ると、 $OD = AD = BD = CD$  から、

$$p^2 + q^2 + r^2 = p^2 + (q-2)^2 + (r-3)^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$p^2 + q^2 + r^2 = (p-1)^2 + q^2 + (r-3)^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

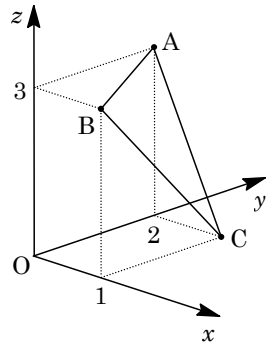
$$p^2 + q^2 + r^2 = (p-1)^2 + (q-2)^2 + r^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{より、} -4q + 4 - 6r + 9 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{より、} -2p + 1 - 6r + 9 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{3} \text{より、} -2p + 1 + 4q - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}'$$

$\textcircled{1}' \textcircled{2}' \textcircled{3}'$  から、 $p = \frac{1}{2}$ ,  $q = 1$ ,  $r = \frac{3}{2}$  となり、 $D(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$  である。



- (2) 平面  $ABC$  の方程式は、法線ベクトルを  $\vec{n} = (a, b, c)$  とおき、 $C(1, 2, 0)$  を通ることを用いて立式すると、 $a(x-1) + b(y-2) + cz = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$

$$A(0, 2, 3) \text{ を通ることより、} -a + 3c = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$B(1, 0, 3) \text{ を通ることより、} -2b + 3c = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5} \textcircled{6}$  より、 $\vec{n} = (a, b, c) = (3c, \frac{3}{2}c, c) = \frac{c}{2}(6, 3, 2)$  となり、 $\textcircled{4}$  から、

$$6(x-1) + 3(y-2) + 2z = 0, \quad 6x + 3y + 2z - 12 = 0$$

これより、点  $D$  から平面  $ABC$  への垂線  $DF$  の長さは、

$$DF = \frac{\left| 6 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 12 \right|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{3}{7}$$

- (3)  $\vec{CA} = (-1, 0, 3)$ ,  $\vec{CB} = (0, -2, 3)$  より、 $\triangle ABC$  の面積  $S$  は、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{CA}|^2 |\vec{CB}|^2 - (\vec{CA} \cdot \vec{CB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(1+9)(4+9) - 9^2} = \frac{7}{2}$$

よって、四面体  $ABCD$  の体積  $V$  は、 $V = \frac{1}{3} S \cdot DF = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{2}$

## コメント

平面の方程式や点と平面の距離の公式を用いた解答例です。九大では、範囲外である弧長の問題も出ていますので、拡張した知識も仕入れておいた方がよいでしょう。

## 問題

座標平面に 3 点  $O(0, 0)$ ,  $A(2, 6)$ ,  $B(3, 4)$  をとり, 点  $O$  から直線  $AB$  に垂線  $OC$  を下ろす。また, 実数  $s$  と  $t$  に対し, 点  $P$  を

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

で定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 点  $C$  の座標を求め,  $|\overrightarrow{CP}|^2$  を  $s$  と  $t$  を用いて表せ。  
 (2)  $s$  を定数として,  $t$  を  $t \geq 0$  の範囲で動かすとき,  $|\overrightarrow{CP}|^2$  の最小値を求めよ。

[2009]

## 解答例

- (1) 直線  $AB$  の方程式は,  $A(2, 6)$ ,  $B(3, 4)$  から,

$$y - 6 = -2(x - 2), \quad y = -2x + 10 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

直線  $OC$  は直線  $AB$  と垂直なので, その方程式は,

$$y = \frac{1}{2}x \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } -2x + 10 = \frac{1}{2}x, \quad x = 4$$

$\textcircled{2}$ より,  $y = 2$  となり,  $C(4, 2)$  である。

また,  $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  より,

$$\overrightarrow{OP} = s(2, 6) + t(3, 4) = (2s + 3t, 6s + 4t)$$

$$|\overrightarrow{CP}|^2 = (2s + 3t - 4)^2 + (6s + 4t - 2)^2$$

$$= (2s + 3t)^2 - 8(2s + 3t) + 16 + (6s + 4t)^2 - 4(6s + 4t) + 4$$

$$= 40s^2 + 60st + 25t^2 - 40s - 40t + 20$$

- (2)  $t \geq 0$  において,  $f(t) = 40s^2 + 60st + 25t^2 - 40s - 40t + 20$  とおくと,

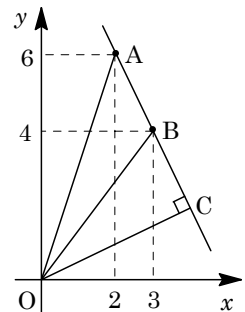
$$f(t) = 25t^2 + (60s - 40)t + 40s^2 - 40s + 20 = 25\left(t + \frac{6s - 4}{5}\right)^2 + 4s^2 + 8s + 4$$

- (i)  $-\frac{6s - 4}{5} \geq 0$  ( $s \leq \frac{2}{3}$ ) のとき

$|\overrightarrow{CP}|^2$  は,  $t = -\frac{6s - 4}{5}$  で最小値  $4s^2 + 8s + 4$  をとる。

- (ii)  $-\frac{6s - 4}{5} < 0$  ( $s > \frac{2}{3}$ ) のとき

$|\overrightarrow{CP}|^2$  は,  $t = 0$  で最小値  $40s^2 - 40s + 20$  をとる。



## コメント

ベクトルの成分計算についての基本題です。

## 問題

$\triangle OAB$  において、辺  $AB$  上に点  $Q$  をとり、直線  $OQ$  上に点  $P$  をとる。ただし、点  $P$  は点  $Q$  に関して点  $O$  と反対側にあるとする。3 つの三角形  $\triangle OAP$ ,  $\triangle OBP$ ,  $\triangle ABP$  の面積をそれぞれ  $a, b, c$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  および  $a, b$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{OP}$  を  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  および  $a, b, c$  を用いて表せ。
- (3) 3 辺  $OA, OB, AB$  の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点  $P$  を中心とし、3 直線  $OA, OB, AB$  に接する円が存在するとき、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ。

[2008]

## 解答例

- (1)  $AQ : QB = \triangle OAP : \triangle OBP = a : b$  より、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b}$$

- (2)  $\triangle OAB = a+b-c$  より、 $OQ : QP = \triangle OAB : \triangle ABP = (a+b-c) : c$  となり、

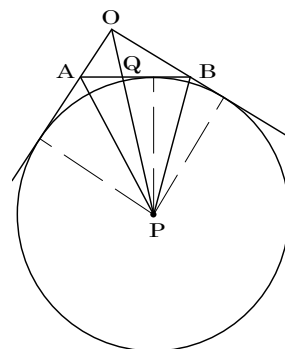
$$OQ : OP = (a+b-c) : (a+b)$$

$$\text{よって、} \overrightarrow{OP} = \frac{a+b}{a+b-c} \overrightarrow{OQ} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b-c}$$

- (3) 高さの等しい三角形の面積比は、底辺の長さの比になることより、

$$a : b : c = OA : OB : AB = 3 : 5 : 6$$

$$\text{よって、(2)より、} \overrightarrow{OP} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+5-6} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{2}$$



## コメント

(3)は、三角形の傍心のベクトル表示ですが、(2)の誘導を利用すると、計算は不要です。なお、内角や外角の二等分線の定理を用いる解も可能ですが、これは出題者の善意に反します。

## 問題

$a, b$  を正の数とし、空間内の 3 点  $A(a, -a, b)$ ,  $B(-a, a, b)$ ,  $C(a, a, -b)$  を考える。 $A, B, C$  を通る平面を  $\alpha$ , 原点  $O$  を中心とし  $A, B, C$  を通る球面を  $S$  とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分  $AB$  の中点を  $D$  とするとき、 $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$  および  $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$  であることを示せ。

また  $\triangle ABC$  の面積を求めよ。

(2) ベクトル  $\overrightarrow{DC}$  と  $\overrightarrow{DO}$  のなす角を  $\theta$  とするとき  $\sin \theta$  を求めよ。また、平面  $\alpha$  に垂直で原点  $O$  を通る直線と平面  $\alpha$  との交点を  $H$  とするとき、線分  $OH$  の長さを求めよ。

(3) 点  $P$  が球面  $S$  上を動くとき、四面体  $ABCP$  の体積の最大値を求めよ。ただし、 $P$  は平面  $\alpha$  上にはないものとする。 [2007]

## 解答例

(1)  $A(a, -a, b)$ ,  $B(-a, a, b)$  より  $\overrightarrow{AB} = (-2a, 2a, 0)$  となり、 $C(a, a, -b)$ ,  $AB$  の中点  $D(0, 0, b)$  より、 $\overrightarrow{DC} = (a, a, -2b)$ ,  $\overrightarrow{DO} = (0, 0, -b)$

すると、 $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2 + 2a^2 = 0$ ,  $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  から、 $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$

よって、 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + 4a^2} \sqrt{a^2 + a^2 + 4b^2} = 2a\sqrt{a^2 + 2b^2}$

(2)  $\overrightarrow{DC}$  と  $\overrightarrow{DO}$  のなす角  $\theta$  は、 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO}}{|\overrightarrow{DC}| |\overrightarrow{DO}|} = \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 + a^2 + 4b^2} \cdot b} = \frac{2b}{\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

さて、 $OH$  は平面  $\alpha$  に垂直なので、 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  となり、

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OH}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

すると  $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB}$  から、点  $H$  は直線  $CD$  上にあり、 $OH = DO \sin \theta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$

(3) 球面  $S$  の半径  $r$  は  $r = OA = OB = OC = \sqrt{2a^2 + b^2}$

ここで、 $HO$  の延長線と  $S$  との交点を  $P_0$  とおくと、 $S$  上の点  $P$  と平面  $\alpha$  の距離の最大値は  $P_0H$  となり、 $P_0H = r + OH = \sqrt{2a^2 + b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$

したがって、四面体  $ABCP$  の体積の最大値は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot P_0H &= \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{a^2 + 2b^2} \left( \sqrt{2a^2 + b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} \right) \\ &= \frac{2}{3} a \left( \sqrt{(a^2 + 2b^2)(2a^2 + b^2)} + ab \right) \end{aligned}$$

## コメント

図示すると、(1)の結論は明らかですが、続く設問への誘導となっています。コンパクトにまとまった 1 題です。

## 問題

$\triangle OAB$  において、辺  $OB$  の中点を  $M$ 、辺  $AB$  を  $\alpha:1-\alpha$  に内分する点を  $P$  とする。ただし、 $0 < \alpha < 1$  とする。線分  $OP$  と  $AM$  の交点を  $Q$  とし、 $Q$  を通り、線分  $AM$  に垂直な直線が、辺  $OA$  またはその延長を交わる点を  $R$  とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  として、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{OP}$  と  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  および  $\alpha$  を用いて表せ。
- (2)  $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $\angle AOB = \theta$  で  $\cos \theta = \frac{1}{6}$  とする。このとき、ベクトル  $\overrightarrow{OR}$  を  $\vec{a}$  と  $\alpha$  を用いて表せ。
- (3) (2)の条件のもとで、点  $R$  が辺  $OA$  の中点であるときの  $\alpha$  の値を求めよ。 [2006]

## 解答例

- (1)  $AP:PB = \alpha:1-\alpha$  より、

$$\overrightarrow{OP} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

また、 $\triangle OPB$  と直線  $AM$  に対して、メネラウスの定理を適用すると、

$$\frac{OM}{MB} \cdot \frac{BA}{AP} \cdot \frac{PQ}{QO} = 1, \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{PQ}{QO} = 1$$

よって、 $PQ:QO = \alpha:1$  から、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{OP} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$$

- (2)  $\overrightarrow{OR} = t\vec{a}$  とおくと、 $\overrightarrow{RQ} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\vec{a} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

ここで、 $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$  であり、 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$  から、

$$-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)|\vec{a}|^2 + \left\{-\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} - t\right)\right\}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} |\vec{b}|^2 = 0$$

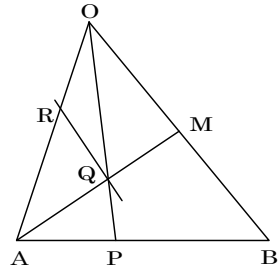
条件より、 $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 \times \frac{1}{6} = 1$  なので、まとめると、

$$\frac{7}{2}t = \frac{7-14\alpha}{2(1+\alpha)}, \quad t = \frac{1-2\alpha}{1+\alpha}$$

よって、 $\overrightarrow{OR} = \frac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}$

- (3) 点  $R$  が辺  $OA$  の中点であるとき、 $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{a}$  であり、(2)から、

$$\frac{1-2\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2}, \quad 2-4\alpha = 1+\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{5}$$



## コメント

頻出のベクトルの平面図形への応用です。計算量は多いものの、内容は基本的です。



## 問題

座標空間内の三角柱

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \geq y, 0 \leq z \leq 1$$

を考え、その  $xy$  平面内の面を  $S$ ,  $xz$  平面内の面を  $T$  とする。点  $A(a, b, 0)$  を  $S$  内に、点  $B(c, 0, d)$  を  $T$  内にとり、また  $C(1, 1, 1)$  とする。ただし、点  $A, B$  は原点  $O$  とは異なるとする。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{OA}$  および  $\overrightarrow{OC}$  に直交する単位ベクトルを求め、その単位ベクトルとベクトル  $\overrightarrow{OB}$  の内積の絶対値を求めよ。
- (2) 四面体  $OABC$  の体積を求めよ。ただし、点  $O, A, B, C$  は同一平面上にないとする。
- (3) 点  $A$  が  $S$  内を、点  $B$  が  $T$  内を動くとする。このときの、四面体  $OABC$  の体積の最大値、および最大値を与える点  $A, B$  の位置をすべて求めよ。 [2004]

## 解答例

- (1) 求める単位ベクトルを  $\vec{e} = (x, y, z)$  とおく。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{e} = 0 \text{ より, } ax + by = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \vec{e} = 0 \text{ より, } x + y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } (x, y) = k(b, -a) \text{ (} k \text{ は実数)}$$

$\textcircled{2}$  から、 $z = -x - y$  なので、

$$(x, y, z) = k(b, -a, a - b)$$

$$|\vec{e}| = 1 \text{ より, } 1 = |k| \sqrt{b^2 + (-a)^2 + (a - b)^2} \text{ から,}$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 + (-a)^2 + (a - b)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}}$$

$$\text{よって, } \vec{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}} (b, -a, a - b)$$

$$\text{すると, } \overrightarrow{OB} \cdot \vec{e} = \pm \frac{bc + ad - bd}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}} \text{ より, } |\overrightarrow{OB} \cdot \vec{e}| = \frac{|bc + ad - bd|}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}}$$

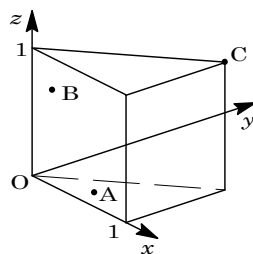
ここで、 $a \geq b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$  なので、 $bc + ad - bd = bc + d(a - b) \geq 0$  となり、

$$|\overrightarrow{OB} \cdot \vec{e}| = \frac{bc + ad - bd}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}}$$

- (2) 四面体  $OABC$  において、 $\triangle OAC$  を底面とすると、高さは  $|\overrightarrow{OB} \cdot \vec{e}|$  となる。

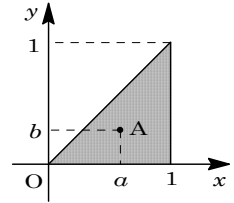
$$\begin{aligned} \triangle OAC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3(a^2 + b^2) - (a + b)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)} \end{aligned}$$

四面体  $OABC$  の体積を  $V$  とすると、(1) より、



$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)} \cdot \frac{bc + ad - bd}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}} = \frac{1}{6}(bc + ad - bd)$$

- (3) まず、点  $A(a, b, 0)$  の位置を  $S$  内でいったん固定した後、点  $B(c, 0, d)$  を  $T$  内で動かし、 $V$  が最大になるときの点  $B$  の位置を求める。次に、この状態を保ったまま、点  $A$  を  $S$  内で動かし、 $V$  の最大値を求める。なお、 $a = b = 0$  のときは、点  $A$  が原点  $O$  と一致するので不適である。



- (i) 点  $A(a, b, 0)$  を  $a > b > 0$  の位置に固定したとき

$V = \frac{1}{6}\{(a-b)d + bc\}$  となるので、 $V$  は  $d$  の単調増加関数であり、 $0 \leq d \leq 1$ 、 $0 \leq c \leq 1$  より、 $c = d = 1$  のとき  $V$  は最大  $V = \frac{1}{6}(a - b + b) = \frac{1}{6}a$  となる。

そこで、点  $A$  を  $S$  内で動かすと、 $V$  は  $a = 1$  で最大となり、その値は  $\frac{1}{6}$  である。

よって、 $a = c = d = 1$ 、 $0 < b < 1$  のとき、 $V$  は最大値  $\frac{1}{6}$  をとる。

- (ii) 点  $A(a, b, 0)$  を  $a > b = 0$  の位置に固定したとき

$V = \frac{1}{6}ad$  となるので、 $V$  は  $d$  の単調増加関数であり、 $0 \leq d \leq 1$  より、 $d = 1$  のとき  $V$  は最大になる。このとき  $V = \frac{1}{6}a$  である。

そこで、点  $A$  を  $S$  内で動かすと、 $V$  は  $a = 1$  で最大となり、その値は  $\frac{1}{6}$  である。

よって、 $a = d = 1$ 、 $b = 0$ 、 $0 \leq c \leq 1$  のとき、 $V$  は最大値  $\frac{1}{6}$  をとる。

- (iii) 点  $A(a, b, 0)$  を  $a = b > 0$  の位置に固定したとき

$V = \frac{1}{6}bc$  となるので、 $V$  は  $c$  の単調増加関数であり、 $0 \leq c \leq 1$  より、 $c = 1$  のとき  $V$  は最大になる。このとき  $V = \frac{1}{6}b$  である。

そこで、点  $A$  を  $S$  内で動かすと、 $V$  は  $b = 1$  で最大となり、その値は  $\frac{1}{6}$  である。

よって、 $a = b = c = 1$ 、 $0 \leq d \leq 1$  のとき、 $V$  は最大値  $\frac{1}{6}$  をとる。

- (i)(ii)(iii)より、 $V$  の最大値は  $\frac{1}{6}$ 、このときの点  $A, B$  の位置は次の3種類である。

$$A(1, b, 0), B(1, 0, 1) \quad (0 < b < 1)$$

$$A(1, 0, 0), B(c, 0, 1) \quad (0 \leq c \leq 1)$$

$$A(1, 1, 0), B(1, 0, d) \quad (0 \leq d \leq 1)$$

## コメント

(2)までは1999年に類題が出ています。ただ、(3)の最大値を求めるときに、いわゆる「予選→決勝戦」という1文字固定の解法を用いる必要があります。

## 問題

空間内に四面体  $OABC$  があり  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COA$  はすべて  $90^\circ$  であるとする。辺  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  の長さを、それぞれ  $a, b, c$  とし、三角形  $ABC$  の重心を  $G$  とする。

- (1)  $\angle OGA$ ,  $\angle OGB$ ,  $\angle OGC$  がすべて  $90^\circ$  であるための条件を  $a, b, c$  の関係式で表せ。
- (2) 線分  $BC$  を  $1:2$  に内分する点を  $D$  とする。点  $P$  は直線  $AD$  上の  $A$  以外の点を動き、点  $Q$  は三角形  $APQ$  の重心が点  $G$  になるように動く。このとき、線分  $OQ$  の長さの最小値を求めよ。 [2003]

## 解答例

- (1)  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とおくと、条件より、  
 $|\vec{a}| = a$ ,  $|\vec{b}| = b$ ,  $|\vec{c}| = c$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

さて、 $\angle OGA = 90^\circ$  より、 $\vec{OG} \cdot \vec{AG} = 0$

点  $G$  は  $\triangle ABC$  の重心なので、 $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

そこで、 $\vec{AG} = \vec{OG} - \vec{OA} = \frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$  から、

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0, \quad -2a^2 + b^2 + c^2 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

同様に、 $\angle OGB = 90^\circ$  より、 $\vec{OG} \cdot \vec{BG} = 0$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) = 0, \quad a^2 - 2b^2 + c^2 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

また、 $\angle OGC = 90^\circ$  より、 $\vec{OG} \cdot \vec{CG} = 0$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) = 0, \quad a^2 + b^2 - 2c^2 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

①②より、 $-3a^2 + 3b^2 = 0$  から  $a = b$ ,  $-a^2 + c^2 = 0$  から  $a = c$  となる。これは③を満たすので、求める条件は、 $a = b = c$  である。

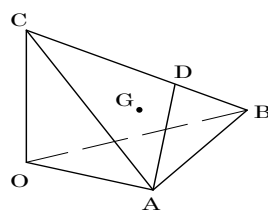
- (2)  $AP : PD = t : 1 - t$  ( $t \neq 0$ ) とおくと、

$$\vec{OP} = (1-t)\vec{a} + t\vec{OD} = (1-t)\vec{a} + t \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} = (1-t)\vec{a} + \frac{2t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}$$

また、 $\frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OP} + \vec{OQ}) = \vec{OG}$  より、

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= 3\vec{OG} - \vec{OA} - \vec{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - (1-t)\vec{a} - \frac{2t}{3}\vec{b} - \frac{t}{3}\vec{c} \\ &= -(1-t)\vec{a} + \left(1 - \frac{2t}{3}\right)\vec{b} + \left(1 - \frac{t}{3}\right)\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{OQ}|^2 &= (1-t)^2 a^2 + \left(1 - \frac{2t}{3}\right)^2 b^2 + \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 c^2 \\ &= \frac{1}{9}(9a^2 + 4b^2 + c^2)t^2 - \frac{2}{3}(3a^2 + 2b^2 + c^2)t + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$



そこで、平方完成をすると、

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \frac{1}{9}(9a^2 + 4b^2 + c^2) \left\{ t - \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2} \right\}^2 + \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + 4c^2a^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}$$

以上より、 $t = \frac{3(3a^2 + 2b^2 + c^2)}{9a^2 + 4b^2 + c^2}$  のとき、 $OQ$  は最小値  $\sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + 4c^2a^2}{9a^2 + 4b^2 + c^2}}$  をとる。

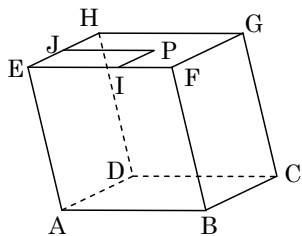
### コメント

(2)の平方完成の計算は、過程は省きましたが、たいへんな量でした。ところで、(1)は何のための設問なのでしょうか。

## 問題

空間内の図形について次の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle ABC$  の面積は、 $\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$  に等しいことを示せ。ここで、 $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  はベクトル  $\overline{AB}$  とベクトル  $\overline{AC}$  との内積を表す。必要ならば、2つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。
- (2) 右図の平行六面体  $ABCD-EFGH$  を考える。 $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = 1$ 、 $|\overline{AE}| = 2$  とし、 $\angle FBC = \angle BCD = \frac{\pi}{2}$ 、 $\angle EAB = \theta$  とする。ここで  $\theta$  は  $0 < \theta < \pi$  なる定数とする。面  $EFGH$  上に点  $P$  をとり、点  $P$  から辺  $EF$  上に垂線  $PI$  を下ろし、点  $P$  から辺  $EH$  上に垂線  $PJ$  を下ろす。 $x = |\overline{EI}|$ 、 $y = |\overline{EJ}|$  とするとき、 $\triangle ACP$  の面積を  $\theta$ 、 $x$ 、 $y$  を用いて表せ。
- (3) 問(2)で点  $P$  が面  $EFGH$  上を動くとき、 $\triangle ACP$  の面積の最小値を求めよ。 [2002]

(平行六面体 $ABCD-EFGH$ )

## 解答例

- (1)  $\triangle ABC = \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sin A = \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sqrt{1 - \cos^2 A}$   
 $= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 (1 - \cos^2 A)} = \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$
- (2) 条件より、 $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = 1$ 、 $|\overline{AE}| = 2$ 、 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AD} \cdot \overline{AE} = 0$   
 $\overline{AB} \cdot \overline{AE} = 1 \cdot 2 \cos \theta = 2 \cos \theta$   
 ここで、 $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ 、 $\overline{AP} = x\overline{AB} + y\overline{AD} + \overline{AE}$   
 $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AD} + |\overline{AD}|^2 = 2$   
 $|\overline{AP}|^2 = x^2 |\overline{AB}|^2 + y^2 |\overline{AD}|^2 + |\overline{AE}|^2$   
 $+ 2xy\overline{AB} \cdot \overline{AD} + 2y\overline{AD} \cdot \overline{AE} + 2x\overline{AB} \cdot \overline{AE}$   
 $= x^2 + y^2 + 4 + 4x \cos \theta$   
 $\overline{AC} \cdot \overline{AP} = x |\overline{AB}|^2 + y\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{AE} + x\overline{AB} \cdot \overline{AD} + y |\overline{AD}|^2 + \overline{AD} \cdot \overline{AE}$   
 $= x + 2 \cos \theta + y$

そこで、 $\triangle ACP$  の面積を  $S$  とすると、(1)より、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2(x^2 + y^2 + 4 + 4x \cos \theta) - (x + 2 \cos \theta + y)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 4x \cos \theta - 4y \cos \theta + 8 - 4 \cos^2 \theta}$$

(3)  $P = x^2 - 2xy + y^2 + 4x \cos \theta - 4y \cos \theta + 8 - 4 \cos^2 \theta$  とおくと,  $S = \frac{1}{2} \sqrt{P}$  となる。

さて,  $x - y = t$  とおくと,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  より  $-1 \leq t \leq 1$  であり,

$$\begin{aligned} P &= (x - y)^2 + 4(x - y) \cos \theta + 8 - 4 \cos^2 \theta = t^2 + 4t \cos \theta + 8 - 4 \cos^2 \theta \\ &= (t + 2 \cos \theta)^2 + 8 - 8 \cos^2 \theta = (t + 2 \cos \theta)^2 + 8 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

(i)  $-2 \cos \theta < -1$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ ) のとき  $P$  は  $t = -1$  で最小となる。

このとき,  $S$  は最小値  $\frac{1}{2} \sqrt{9 - 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta}$  をとる。

(ii)  $-1 \leq -2 \cos \theta \leq 1$  ( $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ ) のとき  $P$  は  $t = -2 \cos \theta$  で最小となる。

このとき,  $S$  は最小値  $\frac{1}{2} \sqrt{8 \sin^2 \theta} = \sqrt{2} \sin \theta$  をとる。

(iii)  $-2 \cos \theta > 1$  ( $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ ) のとき  $P$  は  $t = 1$  で最小となる。

このとき,  $S$  は最小値  $\frac{1}{2} \sqrt{9 + 4 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta}$  をとる。

### コメント

(3)は 1 文字を固定して, 2 次関数として最小値を求める問題かとも思いましたが, 式の特徴を利用すると, その必要はありませんでした。

## 問題

$a, b, c$  を 0 でない実数として、空間内に 3 点  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$  をとる。

- (1) 空間内の点  $P$  が  $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$  を満たしながら動くとき、この点  $P$  はある定点  $Q$  から一定の距離にあることを示せ。
- (2) (1)における定点  $Q$  は 3 点  $A, B, C$  を通る平面上にあることを示せ。
- (3) (1)における  $P$  について、四面体  $ABCP$  の体積の最大値を求めよ。 [2000]

## 解答例

$$(1) \quad BC \text{ を } 2:1 \text{ に内分する点を } D \text{ とすると, } \overrightarrow{DP} = \frac{\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}}{3}, \quad \overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{DP}$$

$$\text{条件より, } \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0 \text{ なので, } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$$

よって、 $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$  または  $\overrightarrow{DP} = \vec{0}$  または  $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{DP}$  より、点  $P$  は 2 点  $A, D$  を直径の両端とする球を描く。すなわち 2 点  $P, Q$  の距離が一定である定点  $Q$  は、この球の中心で、線分  $AD$  の中点である。ここで、 $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$  より、 $D\left(0, \frac{b}{3}, \frac{2c}{3}\right)$  となり、 $Q\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{6}, \frac{c}{3}\right)$  である。

$$(2) \quad (1) \text{ より, } \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

よって、点  $Q$  は 3 点  $A, B, C$  を通る平面上にある。

$$(3) \quad \text{まず, } \overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c) \text{ から,}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - a^4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \end{aligned}$$

$$\text{また, 球の半径は, } AQ = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{6}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2} = \frac{1}{6} \sqrt{9a^2 + b^2 + 4c^2}$$

四面体  $ABCP$  の体積が最大となるのは、 $PQ$  が平面  $ABC$  に垂直なときなので、 $PQ = AQ$  より、その最大値  $V$  は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{9a^2 + b^2 + 4c^2} \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)(9a^2 + b^2 + 4c^2)} \end{aligned}$$

## コメント

空間ベクトルの基本題です。

## 問題

大きさ 1 の空間ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  が  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$  を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$ ,  $\vec{f}$  が

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{d} &= 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{e} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{e} = 1, \quad \vec{c} \cdot \vec{e} = 0, \\ \vec{a} \cdot \vec{f} &= 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{f} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{f} = 1\end{aligned}$$

を満たすとき、点  $D(\vec{d})$ ,  $E(\vec{e})$ ,  $F(\vec{f})$  および原点  $O$  について次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$  となるような実数  $x, y, z$  を求めよ。同様に  $\vec{f}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  で表せ。
- (2) ベクトル  $\vec{d}, \vec{f}, \vec{d} - \vec{f}$  の大きさを求めよ。
- (3) 三角形  $ODF$  の面積を求めよ。
- (4) 四面体  $ODEF$  の体積を求めよ。

[1999]

## 解答例

$$(1) \text{ 条件より, } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1 \text{ より, } \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 1 \text{ なので, } x - \frac{1}{2}y = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0 \text{ より, } \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0 \text{ なので, } -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \text{ より, } \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0 \text{ なので, } -\frac{1}{2}y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より, } (x, y, z) = \left( \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{また, } \vec{f} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c} \text{ とおいて同様にすると, } \vec{a} \cdot \vec{f} = 0 \text{ より } u - \frac{1}{2}v = 0,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{f} = 0 \text{ より } -\frac{1}{2}u + v - \frac{1}{2}w = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{f} = 1 \text{ より } -\frac{1}{2}v + w = 1$$

$$\text{よって, } (u, v, w) = \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right) \text{ から, } \vec{f} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$$

$$(2) (1) \text{ より, } |\vec{d}|^2 = \left| \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right|^2 = \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$|\vec{f}|^2 = \left| \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって, } |\vec{d}| = |\vec{f}| = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{また, } \vec{d} - \vec{f} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \vec{a} - \vec{c}$$

$$|\vec{d} - \vec{f}|^2 = |\vec{a} - \vec{c}|^2 = 1 - 2 \cdot 0 + 1 = 2 \text{ なので, } |\vec{d} - \vec{f}| = \sqrt{2}$$



(3)  $\triangle ODF$  は  $OD = OF = \frac{\sqrt{6}}{2}$  の二等辺三角形より、底辺  $DF = \sqrt{2}$  の中点を  $M$  とおく

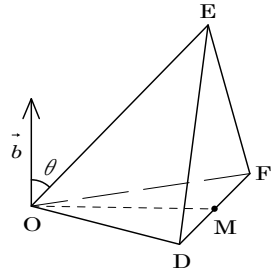
と、 $OM = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$  となる。

よって、 $\triangle ODF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4)  $\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{f} = 0$  より、 $\vec{b}$  は平面  $ODF$  に垂直である。

ここで、 $\vec{b}$  と  $\vec{e}$  のなす角を  $\theta$  とおくと、 $\vec{b} \cdot \vec{e} = 1$ ,  $|\vec{b}| = 1$  から、 $|\vec{e}| \cos \theta = 1$  となる。

これは、 $\triangle ODF$  を底面とするとき、四面体  $ODEF$  の高さが 1 であることを表すので、体積は  $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{6}$  となる。



### コメント

(4)では、 $\vec{b}$  が平面  $ODF$  の法線ベクトルであるのに注目して解きました。

## 問題

辺の長さ 1 の正四面体  $OABC$  において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  とおき、線分  $OA$  を  $m:n$  に内分する点を  $P$ , 線分  $BC$  を  $m:n$  に内分する点を  $Q$ , 線分  $CO$  を  $m:n$  に内分する点を  $R$ , 線分  $AB$  を  $m:n$  に内分する点を  $S$  とする。(ただし、 $m, n > 0$  とする)

- (1) ①  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{RS}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  で表せ。  
 ②  $\overrightarrow{PQ}$  と  $\overrightarrow{RS}$  が垂直かどうか調べよ。
- (2) ① 点  $P, Q, R, S$  が同一平面上にあるときの  $m, n$  の関係を求めよ。  
 ② このとき  $PQ, RS$  の交点を  $G$  として、 $\overrightarrow{OG}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  で表せ。  
 ③  $G$  は正四面体  $OABC$  に外接する球の中心であることを示し、その球の半径を求めよ。 [1998]

## 解答例

$$(1) \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n} - \frac{m\vec{a}}{m+n} = \frac{-m\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n}$$

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} - \frac{n\vec{c}}{m+n} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b} - n\vec{c}}{m+n}$$

ここで、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ , また同様にして、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$  なので、

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = \frac{1}{(m+n)^2} (-m\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}) \cdot (n\vec{a} + m\vec{b} - n\vec{c})$$

$$= \frac{1}{(m+n)^2} \left( -mn - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{2}n^2 + mn - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}mn + \frac{1}{2}m^2 - mn \right)$$

$$= 0$$

よって、 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{RS}$

- (2) 4点  $P, Q, R, S$  は同一平面上にある条件は、直線  $PQ$  と  $RS$  が交わることなので、 $\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR} + s\overrightarrow{RS}$  となる定数  $t, s$  が存在することである。

$$\frac{m}{m+n}\vec{a} + t\frac{-m\vec{a} + n\vec{b} + m\vec{c}}{m+n} = \frac{n}{m+n}\vec{c} + s\frac{n\vec{a} + m\vec{b} - n\vec{c}}{m+n}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が 1 次独立より、

$$m - tm = sn \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad tn = sm \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad tm = n - sn \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①③より、 $m = n$  かつ  $t + s = 1$

②に代入して、 $t = s = \frac{1}{2}$

以上より、4点  $P, Q, R, S$  は同一平面上にある条件は、 $m = n$

このとき、PQ, RS の交点 G は、 $t = \frac{1}{2}$  より、

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

$$\text{また、} |\overrightarrow{OG}| = \frac{1}{4} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \frac{1}{4} \sqrt{1+1+1+2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \vec{a} = \frac{-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

$$|\overrightarrow{AG}| = \frac{1}{4} |-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \frac{1}{4} \sqrt{9+1+1-6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{同様にして、} \overrightarrow{BG} = \frac{\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}}{4}, \overrightarrow{CG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}}{4} \text{ なので、} |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{CG}| = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

以上より、G は正四面体 OABC に外接する球の中心であり、半径は  $\frac{\sqrt{6}}{4}$  となる。

### コメント

基本的なよくある構図の問題です。方針に迷いは生じないでしょう。

## 問題

整数  $a, b$  は 3 の倍数ではないとし、 $f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(1)$  と  $f(2)$  を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。
- (2)  $f(x) = 0$  を満たす整数  $x$  は存在しないことを示せ。
- (3)  $f(x) = 0$  を満たす有理数  $x$  が存在するような組  $(a, b)$  をすべて求めよ。 [2018]

## 解答例+映像解説

- (1) 整数  $a$  は 3 の倍数ではないことより、以下 mod 3 で記すと、 $a \equiv 1$  のとき  $a^2 \equiv 1$ 、 $a \equiv 2$  のとき  $a^2 \equiv 4 \equiv 1$  となり、いずれも  $a^2 \equiv 1$  である。また、整数  $b$  も 3 の倍数ではないことより、同様に  $b^2 \equiv 1$  である。

さて、 $f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$  に対し、

$$f(1) = 2 + a^2 + 2b^2 + 1 \equiv 2 + 1 + 2 \times 1 + 1 = 6 \equiv 0$$

$$f(2) = 16 + 4a^2 + 4b^2 + 1 \equiv 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 = 4 \equiv 1$$

よって、 $f(1)$  を 3 で割った余りは 0、 $f(2)$  を 3 で割った余りは 1 である。

- (2) まず、 $x$  が 0 以上のとき  $f(x) \geq 1$  となり、 $f(x) = 0$  を満たさない。

そこで、 $f(x) = 0$  を満たす整数解  $x = \alpha$  の存在を仮定すると、 $\alpha < 0$  であり、

$$2\alpha^3 + a^2\alpha^2 + 2b^2\alpha + 1 = 0, \quad -\alpha(2\alpha^2 + a^2\alpha + 2b^2) = 1$$

$2\alpha^2 + a^2\alpha + 2b^2$  は整数なので、 $-\alpha$  は 1 の約数であり、 $\alpha < 0$  から  $\alpha = -1$  となり、

$$f(-1) = -2 + a^2 - 2b^2 + 1 = a^2 - 2b^2 - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ところが、mod 3 で記すと、 $a^2 - 2b^2 - 1 \equiv 1 - 2 \times 1 - 1 = -2 \equiv 1$  となり、 $\textcircled{1}$  を満たさない。すなわち、 $f(x) = 0$  を満たす整数  $x$  は存在しない。

- (3) (2) から、 $f(x) = 0$  を満たす有理数  $x$  は  $x < 0$  であり、 $p$  と  $q$  を互いに素な自然数として、 $x = -\frac{q}{p}$  ( $p \geq 2$ ) と表すことができる。すると、 $f(-\frac{q}{p}) = 0$  から、

$$-\frac{2q^3}{p^3} + \frac{a^2q^2}{p^2} - \frac{2b^2q}{p} + 1 = 0, \quad -2q^3 + a^2pq^2 - 2b^2p^2q + p^3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$  より、 $p^3 = q(2q^2 - a^2pq + 2b^2p^2)$  となり、 $p$  と  $q$  は互いに素より  $q = 1$  であり、

$$p^3 = 2 - a^2p + 2b^2p^2, \quad a^2p - 2b^2p^2 + p^3 = 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$  より、 $p(a^2 - 2b^2p + p^2) = 2$  となり、 $p$  は 2 以上の自然数から  $p = 2$  であり、

$$a^2 - 4b^2 + 4 = 1, \quad 4b^2 - a^2 = 3, \quad (2b + a)(2b - a) = 3$$

(i)  $(2b + a, 2b - a) = (1, 3)$  のとき  $(a, b) = (-1, 1)$

(ii)  $(2b + a, 2b - a) = (3, 1)$  のとき  $(a, b) = (1, 1)$

(iii)  $(2b + a, 2b - a) = (-1, -3)$  のとき  $(a, b) = (1, -1)$

$$(iv) (2b + a, 2b - a) = (-3, -1) \text{ のとき } (a, b) = (-1, -1)$$

(i)~(iv)より,  $a, b$  は 3 の倍数ではないことに留意して,

$$(a, b) = (-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1)$$

### コメント

3 次方程式の解と整数問題の融合です。最初, (2)は(1)の結果をストレートに利用すると思ったのですが, 途中で方向転換をし, 定数項の 1 に注目しました。

## 問題

初項  $a_1 = 1$ 、公差 4 の等差数列  $\{a_n\}$  を考える。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\{a_n\}$  の初項から第 600 項のうち、7 の倍数である項の個数を求めよ。
- (2)  $\{a_n\}$  の初項から第 600 項のうち、 $7^2$  の倍数である項の個数を求めよ。
- (3) 初項から第  $n$  項までの積  $a_1 a_2 \cdots a_n$  が  $7^{45}$  の倍数となる最小の自然数  $n$  を求めよ。

[2017]

## 解答例+映像解説

- (1) 初項 1、公差 4 の等差数列  $\{a_n\}$  の一般項は、 $a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$   
 さて、 $a_n$  が 7 の倍数となるのは、 $k$  を自然数として、 $4n - 3 = 7k \cdots \cdots \textcircled{1}$   
 ここで、 $4 \times (-1) - 3 = 7 \times (-1)$  から、 $\textcircled{1}$  を変形すると、  

$$4(n+1) = 7(k+1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$
 すると、4 と 7 は互いに素より、 $l$  を整数として  $n+1 = 7l$ 、 $k+1 = 4l$  となり、  

$$n = 7l - 1, \quad k = 4l - 1$$
 そこで、 $1 \leq n \leq 600$ 、 $k \geq 1$  から、 $1 \leq 7l - 1 \leq 600$ 、 $4l - 1 \geq 1$  となり、  

$$\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{601}{7} = 85 + \frac{6}{7}$$
 これより、 $l = 1, 2, \dots, 85$  となり、7 の倍数である項の個数は 85 である。
- (2)  $\{a_n\}$  の初項から第 600 項のうち、7 の倍数の項を取り出して  $b_l$  とおくと、  

$$b_l = a_{7l-1} = 4(7l-1) - 3 = 28l - 7 = 7(4l-1) \quad (l=1, 2, \dots, 85)$$
 さて、 $a_n$  が  $7^2$  の倍数、すなわち  $b_l$  が 7 の倍数となるのは、 $m$  を自然数として、  

$$4l - 1 = 7m \cdots \cdots \textcircled{3}$$
 ここで、 $4 \times 2 - 1 = 7 \times 1$  から、 $\textcircled{3}$  を変形すると、  

$$4(l-2) = 7(m-1)$$
 すると、4 と 7 は互いに素より、 $p$  を整数として  $l-2 = 7p$ 、 $m-1 = 4p$  となり、  

$$l = 7p + 2, \quad m = 4p + 1$$
 そこで、 $1 \leq l \leq 85$ 、 $m \geq 1$  から、 $1 \leq 7p + 2 \leq 85$ 、 $4p + 1 \geq 1$  となり、  

$$0 \leq p \leq \frac{83}{7} = 11 + \frac{6}{7}$$
 これより、 $p = 0, 1, \dots, 11$  となり、 $7^2$  の倍数である項の個数は 12 である。
- (3)  $a_n$  が 7 の倍数のとき、 $n = 7l - 1$  ( $l \geq 1$ ) となり、この  $n$  を書き並べると、  

$$6, \underline{13}, 20, 27, 34, 41, 48 \mid 55, \underline{62}, 69, 76, 83, 90, 97 \mid 104, \underline{111}, 118, \dots$$
 そして、この数列を 7 個ずつの区画に分け、左から第 1 群、第 2 群、 $\dots$  と呼ぶ。  
 また、 $a_n$  が  $7^2$  の倍数の項を取り出して  $c_p$  とおくと、 $l = 7p + 2$  から、  

$$n = 7(7p + 2) - 1 = 49p + 13 \quad (p \geq 0)$$

すると、上記の数列の下線をつけた数が対応して、

$$c_p = a_{49p+13} = 4(49p+13) - 3 = 196p + 49 = 7^2(4p+1) \quad (p \geq 0)$$

さらに、 $a_n$  が  $7^3$  の倍数、すなわち  $c_p$  が  $7$  の倍数になるのは、同様にすると、 $q$  を  $0$  以上の整数として、

$$4p+1 = 7q \cdots \cdots \textcircled{4}$$

そして、 $\textcircled{4}$  を満たす最小の  $p, q$  の値は  $(p, q) = (5, 3)$  であり、このときの  $n$  は、 $n = 49 \cdot 5 + 13 = 258$  となり、 $a_{258} = 4 \cdot 258 - 3 = 1029 = 7^3 \cdot 3$  である。

この  $n = 258$  は、 $7l - 1 = 258$  から  $l = 37$  となり、上記の数列の第  $6$  群に属することがわかる。

さて、積  $a_1 a_2 \cdots a_n$  が  $7^{45}$  の倍数となる最小の自然数  $n$  については、素因数  $7$  の個数に注目し、これが合計  $45$  個以上となる最小の  $n$  を考えればよい。

まず、第  $5$  群までは  $a_n$  に  $7^3$  の倍数がないので、 $1$  つの群内に素因数  $7$  が  $7+1=8$  個ずつとなり、その総数は  $8 \times 5 = 40$  個である。

すると、素因数  $7$  の残り  $5$  個について調べるために、第  $6$  群を書き並べると、

$$| \underline{251}, \underline{258}, 265, 272, \cdots \cdots$$

これより、 $a_{251}$  は  $7$  の倍数、 $a_{258}$  は  $7^3$  の倍数、 $a_{265}$  は  $7$  の倍数、 $\cdots$  となるので、積  $a_{251} a_{258} a_{265}$  に素因数  $7$  が  $5$  個あることがわかる。

以上より、積  $a_1 a_2 \cdots a_n$  が  $7^{45}$  の倍数となる最小の自然数  $n$  は、 $n = 265$  である。

## コメント

整数と数列の融合問題です。解答例では、頻出の(1)の結果を利用して、(2)につなげています。なお、(3)は群数列の考え方をもとにしていますが、 $45$  という数値が意味深長で、詰めがかなり面倒でした。

## 問題

自然数  $n$  に対して、 $10^n$  を 13 で割った余りを  $a_n$  とおく。 $a_n$  は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_{n+1}$  は  $10a_n$  を 13 で割った余りに等しいことを示せ。
- (2)  $a_1, a_2, \dots, a_6$  を求めよ。
- (3) 以下の 3 条件を満たす自然数  $N$  をすべて求めよ。
  - (i)  $N$  を十進法で表示したとき 6 桁となる。
  - (ii)  $N$  を十進法で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。
  - (iii)  $N$  は 13 で割り切れる。

[2016]

## 解答例+映像解説

- (1)  $10^n$  を 13 で割った余りが  $a_n$  より、 $q_n$  を自然数として、 $10^n = 13q_n + a_n$  と表せ、

$$10^{n+1} = 10 \cdot 10^n = 10(13q_n + a_n) = 13(10q_n) + 10a_n$$

すると、 $10^{n+1}$  を 13 で割った余り  $a_{n+1}$  は、 $10a_n$  を 13 で割った余りに等しい。

- (2)  $10^1$  を 13 で割った余りは 10 より、 $a_1 = 10$  である。

そして、(1)の結論を当てはめていくと、 $a_2$  は  $10a_1 = 100$  を 13 で割った余りに等しく、 $100 = 13 \times 7 + 9$  より  $a_2 = 9$  である。

$a_3$  は  $10a_2 = 90$  を 13 で割った余り ( $90 = 13 \times 6 + 12$ ) より、 $a_3 = 12$  である。

$a_4$  は  $10a_3 = 120$  を 13 で割った余り ( $120 = 13 \times 9 + 3$ ) より、 $a_4 = 3$  である。

$a_5$  は  $10a_4 = 30$  を 13 で割った余り ( $30 = 13 \times 2 + 4$ ) より、 $a_5 = 4$  である。

$a_6$  は  $10a_5 = 40$  を 13 で割った余り ( $40 = 13 \times 3 + 1$ ) より、 $a_6 = 1$  である。

- (3) 自然数  $N$  を十進法で表示したとき、最初の桁の数字を  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ )、最後の桁の数字を  $l$  ( $0 \leq l \leq 9$ ) とおくと、条件(i)(ii)より、

$$N = k \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + l$$

ここで、(2)の結論を合同式を用い、 $\text{mod}13$  で記すと、

$$10^5 \equiv 4, \quad 10^4 \equiv 3, \quad 10^3 \equiv 12, \quad 10^2 \equiv 9, \quad 10^1 \equiv 10$$

$$\text{これより、} N \equiv 4k + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 6 \cdot 10 + l = 4k + l + 75 \equiv 4k + l + 10$$

さらに、条件(iii)から  $N$  が 13 で割り切れることから、 $4k + l + 10$  が 13 の倍数となり、 $14 \leq 4k + l + 10 \leq 55$  より、

$$(a) \quad 4k + l + 10 = 26 \text{ のとき} \quad 4k + l = 16 \text{ から } (k, l) = (2, 8), (3, 4), (4, 0)$$

$$(b) \quad 4k + l + 10 = 39 \text{ のとき} \quad 4k + l = 29 \text{ から } (k, l) = (5, 9), (6, 5), (7, 1)$$

$$(c) \quad 4k + l + 10 = 52 \text{ のとき} \quad 4k + l = 42 \text{ から } (k, l) = (9, 6)$$

(a)~(c)より、求める自然数  $N$  は、

$$220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166$$



## コメント

うまく誘導のついた整数問題です。なお、(3)の不定方程式は、一般的に解くよりは、値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また、(1)から合同式を利用してよかったのですが……。

## 問題

以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$  が正の偶数のとき、 $2^n - 1$  は 3 の倍数であることを示せ。  
 (2)  $n$  を自然数とする。 $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素であることを示せ。  
 (3)  $p, q$  を異なる素数とする。 $2^{p-1} - 1 = pq^2$  を満たす  $p, q$  の組をすべて求めよ。

[2015]

## 解答例+映像解説

- (1)  $n$  が正の偶数のとき、 $l$  を自然数として、 $n = 2l$  とおくと、

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2l} - 1 = 4^l - 1 = (3+1)^l - 1 \\ &= (3^l + {}_lC_1 3^{l-1} + {}_lC_2 3^{l-2} + \cdots + {}_lC_{l-1} 3 + 1) - 1 \\ &= 3(3^{l-1} + {}_lC_1 3^{l-2} + {}_lC_2 3^{l-3} + \cdots + {}_lC_{l-1}) \end{aligned}$$

よって、 $2^n - 1$  は 3 の倍数である。

- (2)  $n$  を自然数とするとき、 $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  の最大公約数を  $g$  とおくと、

$$2^n + 1 = ga \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2^n - 1 = gb \cdots \cdots \textcircled{2} \quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素})$$

①-②より、 $2 = g(a-b)$  となり、 $g = 2$  または  $g = 1$  である。

$g = 2$  のとき、①は  $2^n + 1 = 2a$  となり、左辺は奇数、右辺は偶数で成立しない。

よって、 $g = 1$  から、 $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素である。

- (3) 異なる素数  $p, q$  に対して、 $2^{p-1} - 1 = pq^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

(i)  $p$  が偶数のとき

$p$  は素数より  $p = 2$ 、すると、③から  $2^1 - 1 = 2q^2$  となり、素数  $q$  は存在しない。

(ii)  $p$  が奇数のとき

$p-1$  は偶数となり、(1)の結果から  $2^{p-1} - 1$  は 3 の倍数である。すると、③から  $pq^2$  は 3 の倍数となり、 $p = 3$  または  $q = 3$  である。

(ii-i)  $p = 3$  のとき

③は  $2^2 - 1 = 3q^2$  となり、素数  $q$  は存在しない。

(ii-ii)  $q = 3$  のとき

③は  $2^{p-1} - 1 = 9p \cdots \cdots \textcircled{4}$  となり、 $k$  を自然数として、 $p = 2k+1$  とおくと、

$$2^{p-1} - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k + 1)(2^k - 1)$$

(2)から  $2^k + 1$  と  $2^k - 1$  は互いに素で、④は  $(2^k + 1)(2^k - 1) = 9(2k+1)$  となり、

$$(2^k + 1, 2^k - 1) = (9, 2k+1) \text{ または } (2k+1, 9)$$

$(2^k + 1, 2^k - 1) = (9, 2k+1)$  のとき、 $k = 3$  すなわち  $p = 7$  となる。

$(2^k + 1, 2^k - 1) = (2k+1, 9)$  のとき、満たす  $k$  は存在しない。

(i)(ii)より、③を満たす  $p, q$  の組は、 $(p, q) = (7, 3)$  のみである。

## コメント

誘導付きの整数問題です。なお、④を満たす  $p$  を求めるために、(2)の結論を利用する方法で記しましたが、グラフをイメージして、直接的に解いても構いません。

## 問題

次の問いに答えよ。

- (1) 任意の自然数  $a$  に対し,  $a^2$  を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。  
 (2) 自然数  $a, b, c$  が  $a^2 + b^2 = 3c^2$  を満たすと仮定すると,  $a, b, c$  はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。  
 (3)  $a^2 + b^2 = 3c^2$  を満たす自然数  $a, b, c$  は存在しないことを証明せよ。 [2014]

## 解答例+映像解説

- (1) まず, 自然数  $a$  に対し,  $a$  が 3 の倍数のとき  $a^2$  も 3 の倍数である。

また,  $a$  が 3 の倍数でないとき,  $a = 3k \pm 1$  ( $k$  は整数) とおくと,

$$a^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$$

すると,  $a^2$  を 3 で割った余りは 1 となる。

よって,  $a$  と  $a^2$  について 3 で割った余りを対応させると, 右表のようになり,  $a^2$  を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

$a$	0	1	2
$a^2$	0	1	1

- (2)  $a^2, b^2$  に対し,  $a^2 + b^2$  を 3 で割った余りをまとめると, 右表のようになる。

さて,  $a^2 + b^2 = 3c^2$  のとき,  $3c^2$  が 3 の倍数より,  $a^2 + b^2$  も 3 の倍数である。すると,  $a^2, b^2$  はともに 3 の倍数となり, さらに(1)より,  $a, b$  はともに 3 の倍数である。

よって,  $a_1, b_1$  を自然数として,  $a = 3a_1, b = 3b_1$  とおくと,

$$9a_1^2 + 9b_1^2 = 3c^2, \quad 3a_1^2 + 3b_1^2 = c^2$$

これより,  $c^2$  は 3 の倍数となり, (1)より,  $c$  は 3 の倍数である。

以上より,  $a^2 + b^2 = 3c^2$  のとき  $a, b, c$  はすべて 3 で割り切れなければならない。

- (3)  $a^2 + b^2 = 3c^2$  を満たす自然数  $a, b, c$  が存在すると仮定したとき, (2)より,  $a_1, b_1, c_1$  を自然数として,  $a = 3a_1, b = 3b_1, c = 3c_1$  とおくと,

$$9a_1^2 + 9b_1^2 = 3 \cdot 9c_1^2, \quad a_1^2 + b_1^2 = 3c_1^2$$

すると, (2)から,  $a_2, b_2, c_2$  を自然数として,  $a_1 = 3a_2, b_1 = 3b_2, c_1 = 3c_2$  とおくことができ,  $9a_2^2 + 9b_2^2 = 3 \cdot 9c_2^2, a_2^2 + b_2^2 = 3c_2^2$

以下, 同様に,  $a_n = 3a_{n+1}, b_n = 3b_{n+1}, c_n = 3c_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおくと,

$$a > a_1 > a_2 > \dots > 0, \quad b > b_1 > b_2 > \dots > 0, \quad c > c_1 > c_2 > \dots > 0 \dots \dots (*)$$

(\*)から, 単調に減少する自然数の列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  が存在することになり,

明らかに不適である。

よって,  $a^2 + b^2 = 3c^2$  を満たす自然数  $a, b, c$  は存在しない。

## コメント

ときどき見かける整数問題です。(1)と(2)は, メインの(3)の誘導となっています。

## 問題

数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  は,  $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) を満たしているとする。

このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  とするとき, 一般項  $a_n$  を求めよ。
- (2)  $\tan \frac{\pi}{12}$  の値を求めよ。
- (3)  $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$  とするとき,  $a_{n+k} = a_n$  ( $n=3, 4, 5, \dots$ ) を満たす最小の自然数  $k$  を求めよ。 [2011]

## 解答例

(1)  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  から,  $a_2 = \frac{2a_1}{1-a_1^2} = \sqrt{3}$  となり,

$$a_3 = \frac{2a_2}{1-a_2^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}, \quad a_4 = \frac{2a_3}{1-a_3^2} = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3})}{1-3} = \sqrt{3}$$

これより,  $k$  を自然数として, 帰納的に,

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_n = \sqrt{3} \quad (n=2k \text{ のとき}), \quad a_n = -\sqrt{3} \quad (n=2k+1 \text{ のとき})$$

(2)  $x = \tan \frac{\pi}{12}$  とおくと, 2倍角の公式より,  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{2x}{1-x^2}$  となり,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{1-x^2}, \quad 1-x^2 = 2\sqrt{3}x, \quad x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$x > 0 \text{ より, } x = -\sqrt{3} + 2$$

(3)  $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$  とするとき, 2倍角の公式より,  $a_2 = \tan \frac{2}{20}\pi$ ,  $a_3 = \tan \frac{4}{20}\pi$ ,  $\dots$  となり, 帰納的に,  $a_n = \tan \frac{2^{n-1}}{20}\pi$  である。

ここで,  $n \geq 3$  において,  $a_{n+k} = a_n$  より,  $l$  を自然数として,

$$\frac{2^{n+k-1}}{20}\pi = \frac{2^{n-1}}{20}\pi + l\pi, \quad 2^{n+k-3} = 2^{n-3} + 5l, \quad 2^{n-3}(2^k - 1) = 5l \dots \dots \dots (*)$$

すると,  $n=3$  のとき  $2^{n-3} = 1$ ,  $n \geq 4$  のとき  $2^{n-3}$  は偶数なので, (\*) から,  $2^k - 1$  は 5 の倍数となり, 自然数  $k$  の最小値は 4 である。

このとき, (\*) は,  $15 \cdot 2^{n-3} = 5l$ , すなわち  $l = 3 \cdot 2^{n-3}$  となる。

よって,  $a_{n+k} = a_n$  ( $n=3, 4, 5, \dots$ ) を満たす最小の自然数  $k$  は 4 である。

## コメント

タンジェントの 2 倍角の公式がもとになっていますので, (2) もそれに対応した方法にしましたが,  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$  とするのが普通です。なお, (1) と (3) は, ともに証明を省いています。

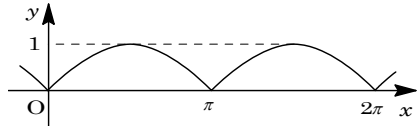
## 問題

関数  $f(x)$  が 0 でない定数  $p$  に対して、つねに  $f(x+p)=f(x)$  を満たすとき  $f(x)$  は周期関数であるといい、 $p$  を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば、関数  $\sin x$  の基本周期は  $2\pi$  である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $y=|\sin x|$  のグラフをかき、関数  $|\sin x|$  の基本周期を求めよ。
- (2) 自然数  $m, n$  に対して関数  $f(x)$  を  $f(x)=|\sin mx|\sin nx$  とおく。 $p$  が関数  $f(x)$  の周期ならば、 $f\left(\frac{p}{2}\right)=f\left(-\frac{p}{2}\right)=0$  が成り立つことを示せ。また、このとき  $mp$  は  $\pi$  の整数倍であり、 $np$  は  $2\pi$  の整数倍であることを示せ。
- (3)  $m, n$  は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2)の結果を用いて関数  $|\sin mx|\sin nx$  の基本周期を求めよ。 [2007]

## 解答例

- (1)  $\sin x \geq 0$  のとき  $|\sin x| = \sin x$ 、 $\sin x < 0$  のとき  $|\sin x| = -\sin x$  より、 $y=|\sin x|$  のグラフは右図のようになり、基本周期は  $\pi$  である。



- (2) 関数  $f(x)$  の周期が  $p$  より、

$$f(x+p) = f(x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで、} x = -\frac{p}{2} \text{ のとき、} f\left(-\frac{p}{2}+p\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right), f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

一方、 $f(-x) = |\sin(-mx)|\sin(-nx) = -|\sin mx|\sin nx = -f(x)$  から、

$$f\left(-\frac{p}{2}\right) = -f\left(\frac{p}{2}\right) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より、} f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$$

$$\text{さて、}\textcircled{1} \text{ より、} |\sin(mx+mp)|\sin(nx+np) = |\sin mx|\sin nx \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{また、} f\left(\frac{p}{2}\right) = \left|\sin \frac{mp}{2}\right|\sin \frac{np}{2} = 0 \text{ から、} \sin \frac{mp}{2} = 0 \text{ または } \sin \frac{np}{2} = 0$$

- (i)  $\sin \frac{mp}{2} = 0$  のとき

$k$  を整数として、 $\frac{mp}{2} = k\pi$  より  $mp = 2k\pi$  となり、 $mp$  は  $\pi$  の整数倍となる。

このとき、 $|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$  となり、 $\textcircled{4}$  より、

$$|\sin mx|\sin(nx+np) = |\sin mx|\sin nx$$

どんな  $x$  に対しても成立することより、 $\sin(nx+np) = \sin nx$

よって、 $np$  は  $2\pi$  の整数倍である。

(ii)  $\sin \frac{np}{2} = 0$  のとき

$l$  を整数として,  $\frac{np}{2} = l\pi$  より  $np = 2l\pi$  となり,  $np$  は  $2\pi$  の整数倍となる。

このとき,  $\sin(nx + np) = \sin nx$  となり, ④より,

$$|\sin(mx + mp)| \sin nx = |\sin mx| \sin nx$$

どんな  $x$  に対しても成立することより,  $|\sin(mx + mp)| = |\sin mx|$

よって,  $mp$  は  $\pi$  の整数倍である。

(i)(ii)より,  $mp$  は  $\pi$  の整数倍であり,  $np$  は  $2\pi$  の整数倍である。

(3) (2)より,  $mp = k\pi$ ,  $np = 2l\pi$  より,

$$p = \frac{k\pi}{m} = \frac{2l\pi}{n}, \quad kn = 2lm$$

ここで,  $m$  と  $n$  は互いに素なので,  $k$  は  $m$  の倍数となり,  $k'$  を整数として,

$$k = mk'$$

このとき,  $p = \frac{mk'\pi}{m} = k'\pi$  となることより, 周期  $p$  は  $\pi$  の整数倍であり,

$$f(x + k'\pi) = |\sin(mx + mk'\pi)| \sin(nx + nk'\pi) = (-1)^{nk'} |\sin mx| \sin nx$$

(i)  $n$  が偶数のとき

$k' = 1$  として,  $f(x + \pi) = f(x)$  となるので, 基本周期は  $\pi$  である。

(ii)  $n$  が奇数のとき

$k' = 2$  として,  $f(x + 2\pi) = f(x)$  となるので, 基本周期は  $2\pi$  である。

### コメント

(2)では  $f(x)$  が奇関数であることに注目して, 解の糸口をみつけました。なお, (2)の後半から, 誘導はあるものの, 設問の難度は著しく上昇しています。

## 問題

2つの数列 $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ は,  $a_1 = b_1 = 1$ および, 関係式

$$a_{n+1} = 2a_nb_n, \quad b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

- (1)  $n \geq 3$  のとき,  $a_n$  は 3 で割り切れるが,  $b_n$  は 3 で割り切れないことを示せ。  
 (2)  $n \geq 2$  のとき,  $a_n$  と  $b_n$  は互いに素であることを示せ。 [2006]

## 解答例

- (1)  $n \geq 3$  のとき,  $a_n$  は 3 で割り切れるが,  $b_n$  は 3 で割り切れないことを, 数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n = 3$  のとき  $a_1 = b_1 = 1$  より,  $a_2 = 2 \times 1 \times 1 = 2$ ,  $b_2 = 2 \times 1^2 + 1^2 = 3$  となり,

$$a_3 = 2 \times 2 \times 3 = 12, \quad b_3 = 2 \times 2^2 + 3^2 = 17$$

(ii)  $n = k$  のとき  $a_k$  は 3 で割り切れ,  $b_k$  は 3 で割り切れないと仮定する。

すなわち  $l, m$  を整数として,  $a_k = 3l$ ,  $b_k = 3m \pm 1$

このとき,  $a_{k+1} = 6l(3m \pm 1) = 3 \cdot 2l(3m \pm 1)$

$$b_{k+1} = 2 \cdot 9l^2 + (3m \pm 1)^2 = 3(6l^2 + 3m^2 \pm 2m) + 1$$

(i)(ii)より,  $n \geq 3$  のとき,  $a_n$  は 3 で割り切れるが,  $b_n$  は 3 で割り切れない。

- (2) まず,  $n \geq 2$  のとき,  $a_{n+1} = 2a_nb_n$  より,  $a_n$  は偶数である。

また,  $b_1 = 1$ ,  $b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$  より, 帰納的に  $b_n$  は奇数である。

さて,  $n \geq 2$  のとき  $a_n$  と  $b_n$  は互いに素であることを, 数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n = 2$  のとき  $a_2 = 2$ ,  $b_2 = 3$  から,  $a_2$  と  $b_2$  は互いに素である。

(ii)  $n = k$  のとき  $a_k$  と  $b_k$  は互いに素であると仮定する。

ここで,  $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  が 2 以上の公約数をもつとする。すると,  $a_{k+1}$  は偶数,  $b_{k+1}$  は奇数から, この公約数は 3 以上の素数を約数としてもつ。

この素数を  $g$  とし,  $a', b'$  を整数とすると,

$$a_{k+1} = 2a_kb_k = ga' \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{k+1} = 2a_k^2 + b_k^2 = gb' \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より,  $a_k$  と  $b_k$  のいずれかは  $g$  の倍数となる。

$a_k$  が  $g$  の倍数であるとき, ②より  $b_k^2$  は  $g$  の倍数, すなわち  $b_k$  は  $g$  の倍数である。また,  $b_k$  が  $g$  の倍数であるとき, ②より  $2a_k^2$  は  $g$  の倍数, すなわち  $a_k$  は奇数  $g$  の倍数である。いずれの場合も,  $a_k$  と  $b_k$  は互いに素であるという仮定に反するので,  $a_{k+1}$  と  $b_{k+1}$  は互いに素である。

(i)(ii)より,  $n \geq 2$  のとき,  $a_n$  と  $b_n$  は互いに素である。

## コメント

整数と漸化式の融合問題です。ただ, (2)の証明を考えるときに, (1)の結論に縛られすぎると, 時間を空費してしまいます。



**問題**

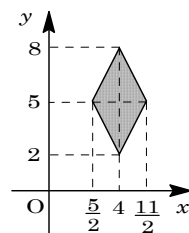
座標平面上で、不等式  $2|x-4|+|y-5| \leq 3$ ,  $2||x|-4|+||y|-5| \leq 3$  が表す領域を、それぞれ  $A, B$  とする。

- (1) 領域  $A$  を図示せよ。
- (2) 領域  $B$  を図示せよ。
- (3) 領域  $B$  の点  $(x, y)$  で、 $x$  が正の整数であり  $y$  が整数であって、 $\log_x |y|$  が有理数となる点を、理由を示してすべて求めよ。 [2003]

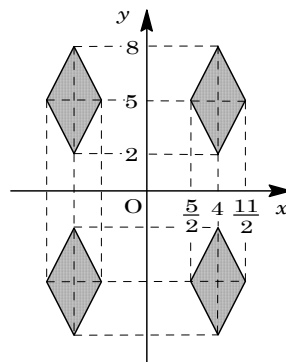
**解答例**

- (1) 不等式  $2|x|+|y| \leq 3$  ……①の表す領域は、4点  $(\frac{3}{2}, 0), (0, 3), (-\frac{3}{2}, 0), (0, -3)$  を結んでできるひし形の内部または辺上である。

これより、不等式  $2|x-4|+|y-5| \leq 3$  ……②の表す領域は、①の領域を  $x$  軸方向に 4,  $y$  軸方向に 5 だけ平行移動したものである。これを図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含まれる。



- (2) 不等式  $2||x|-4|+||y|-5| \leq 3$  ……③の表す領域は、 $x \geq 0, y \geq 0$  のときは②と一致し、 $x < 0, y \geq 0$  のときは②を  $y$  軸対称したもの、 $x < 0, y < 0$  のときは②を原点对称したもの、 $x \geq 0, y < 0$  のときは②を  $x$  軸対称したものである。これを図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含まれる。



- (3)  $\log_x |y|$  が有理数、すなわち  $\log_x |y| = \frac{q}{p}$  となるの条件は、 $x^{\frac{q}{p}} = |y|$ ,  $x^q = |y|^p$  となる整数  $p, q$  が存在することである。さて、 $x > 0, y > 0$  では、領域内の格子点は、 $x = 3$  のとき、 $(3, 4), (3, 5), (3, 6)$  であるが、いずれも  $3^q = y^p$  は成立しない。

$x = 4$  のとき、 $(4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)$  であるが、 $4^q = y^p$  が成立するのは  $(4, 2), (4, 4), (4, 8)$  の場合である。

また、 $x = 5$  のとき、 $(5, 4), (5, 5), (5, 6)$  であるが、 $5^q = y^p$  が成立するのは  $(5, 5)$  の場合だけである。

よって、 $y < 0$  のときも考え合わせると、求める点は、 $(4, \pm 2), (4, \pm 4), (4, \pm 8), (5, \pm 5)$  となる。

**コメント**

いきなり不等式③の領域を図示するのは難しいので、(1)が誘導となっています。

## 問題

正の整数  $a$  に対し、 $a$  の正の約数全体の和を  $f(a)$  で表す。ただし、1 および  $a$  自身も約数とする。たとえば、 $f(1)=1$  であり、 $a=15$  ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので、 $f(15)=24$  となる。次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  が正の奇数  $b$  と正の整数  $m$  を用いて  $a=2^m b$  と表されるとする。このとき  $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $a$  が 2 以上の整数  $p$  と正の整数  $q$  を用いて  $a=pq$  と表されるとする。このとき  $f(a)\geq(p+1)q$  が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのは、 $q=1$  かつ  $p$  が素数であるときに限ることを示せ。
- (3) 正の偶数  $a, b$  は、ある整数  $m, n$  とある奇数  $r, s$  を用いて  $a=2^m r, b=2^n s$  のように表すことができる。このとき  $a, b$  が  $f(a)=2b, f(b)=2a$  をみたせば、 $r, s$  は素数であり、かつ  $r=2^{n+1}-1, s=2^{m+1}-1$  となることを示せ。 [2002]

## 解答例

- (1) 正の奇数  $b$  の正の約数を小さい方から  $b_1, b_2, \dots, b_n$  とすると、 $a=2^m b$  より、

$$\begin{aligned} f(a) &= (1+2+2^2+\dots+2^m)(b_1+b_2+\dots+b_n) \\ &= \frac{2^{m+1}-1}{2-1} f(b) = (2^{m+1}-1)f(b) \end{aligned}$$

- (2)  $p$  は 2 以上の整数より、少なくとも 1 と  $p$  を約数としてもつ。また、 $q$  は正の整数より、少なくとも  $q$  を約数としてもつ。すると、 $a=pq$  のとき、

$$f(a) \geq p \times q + 1 \times q = (p+1)q$$

等号が成立するのは、 $a$  が  $pq$  と  $q$  だけを約数としてもつ場合であり、 $p \geq 2$  より  $q=1$  である。すると、 $a=p$  は  $p$  と 1 だけを約数としてもち、 $p$  は素数となる。

- (3)  $a=2^m r, b=2^n s$  で、 $a, b$  は正の偶数、 $r, s$  は奇数より、 $m \geq 1, n \geq 1$  である。条件より、 $f(a)=2b, f(b)=2a$  なので、

$$f(2^m r) = 2 \cdot 2^n s \dots\dots\dots \textcircled{1}, \quad f(2^n s) = 2 \cdot 2^m r \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$(1) \text{を用いると、} \textcircled{1} \text{より、} (2^{m+1}-1)f(r) = 2^{n+1}s \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より、} (2^{n+1}-1)f(s) = 2^{m+1}r \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

さて、 $f(r), f(s)$  は整数で、 $2^{m+1}, 2^{n+1}$  は偶数、 $2^{m+1}-1, 2^{n+1}-1$  は奇数なので、 $\textcircled{3}$ より  $s$  は  $2^{m+1}-1$  の倍数、 $\textcircled{4}$ より  $r$  は  $2^{n+1}-1$  の倍数となる。すなわち、 $k, l$  を正の整数として、 $s=(2^{m+1}-1)k, r=(2^{n+1}-1)l$  と表すことができる。

$$\textcircled{3} \text{より、} (2^{m+1}-1)f(r) = 2^{n+1}(2^{m+1}-1)k, \quad f(r) = 2^{n+1}k \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \text{より、} (2^{n+1}-1)f(s) = 2^{m+1}(2^{n+1}-1)l, \quad f(s) = 2^{m+1}l \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

$$\text{一方、} \textcircled{2} \text{より、} f(r) = f((2^{n+1}-1)l) \geq (2^{n+1}-1+1)l = 2^{n+1}l \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(s) = f((2^{m+1} - 1)k) \geq (2^{m+1} - 1 + 1)k = 2^{m+1}k \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑤⑦より  $2^{n+1}k \geq 2^{n+1}l$  となり  $k \geq l$ , ⑥⑧より  $2^{m+1}l \geq 2^{m+1}k$  となり  $l \geq k$ , よって  $k = l$  である。

すると, ⑤⑥より,  $f((2^{n+1} - 1)k) = (2^{n+1} - 1 + 1)k$

$$f((2^{m+1} - 1)k) = (2^{m+1} - 1 + 1)k$$

ここで,  $2^{m+1} - 1 \geq 3$ ,  $2^{n+1} - 1 \geq 3$  なので, (2)の等号成立条件から,  $2^{m+1} - 1$ ,  $2^{n+1} - 1$  は素数で,  $k = 1$  となる。

以上より,  $r = 2^{n+1} - 1$ ,  $s = 2^{m+1} - 1$  となり, ともに素数である。

### コメント

約数全体の和という有名な問題を題材にした難問です。文系に  $m = 2$ ,  $n = 4$  の場合が出題されています。

## 問題

(1) 自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

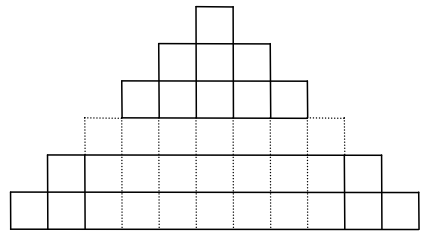
(2) 辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して、辺の長さが自然数  $m$  の正三角形をタイルで張りつめたい。

①  $m = 2, 3, 4$  のとき、どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。

② 一般に、辺の長さ  $m$  の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を  $m$  の式で表し、その式が成り立つ理由を述べよ。

(3) 辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して、すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の

台を作る。このような台を  $n$  段積み上げ、高さ  $n$  の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし、図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



[1998]

## 解答例

(1) 数学的帰納法により、証明する。

(i)  $n = 1$  のとき 左辺  $= 1^2$ , 右辺  $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$  なので、成立。

(ii)  $n = k$  のとき  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$  と仮定する。

両辺  $+(k+1)^2$  とすると、

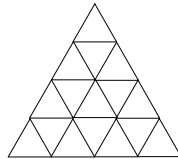
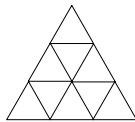
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$\text{上式の右辺} = \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

よって、 $n = k+1$  のときも成立。

(i)(ii)より、すべての自然数  $n$  で  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2)  $m = 2$                    $m = 3$                    $m = 4$



$k$  段目の個数を  $a_k$  とすると,  $a_k = 1 + 2(k-1) = 2k-1$

求めるタイルの個数を  $N_m$  とすると,  $N_m = \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m (2k-1) = m^2$

(3) 正三角柱の1つのブロックの体積を  $v_0$  ととすると,  $v_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

求める台全体の体積を  $V$  とすると,

$$\begin{aligned} V &= (N_1 + N_3 + N_5 + \cdots + N_{2n-1})v_0 = v_0 \sum_{k=1}^n N_{2k-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} n(2n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

### コメント

解きやすい問題です。特に(2)の前半の設問には驚いてしまいます。

## 問題

3桁の自然数  $N = 100a + 10b + c$  ( $a, b, c$  は、 $1 \leq a \leq 9$ ,  $0 \leq b \leq 9$ ,  $0 \leq c \leq 9$  をみたす整数) を考える。

- (1) 平方数かつ奇数である  $N$  で、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが  $x$  軸と接するよ  
うなものをすべて求めよ。
- (2) 命題「 $N$  および  $a$  が平方数のとき 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは  $x$  軸と接  
する」は正しいか。正しいければそれを示し、正しくなければ反例をあげよ。
- (3) ある  $N$  について、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは座標が整数である相異なる  
2点で  $x$  軸と交わり、グラフと  $x$  軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる。このとき  
の  $N$  を求めよ。 [1998]

## 解答例

- (1) 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフが  $x$  軸と接することより、

$$b^2 - 4ac = 0, \quad b^2 = 4ac \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①より  $b$  は偶数となり、 $b = 0, 2, 4, 6, 8$ 。また、 $N$  が奇数より  $c$  は奇数となる。

- (i)  $b = 0$  のとき

①より  $ac = 0$  となるが、 $a \geq 1$  から  $c = 0$  となり  $c$  が奇数ということに反する。

- (ii)  $b = 2$  のとき

①より  $ac = 1$  となり、 $a \geq 1$  から  $(a, c) = (1, 1)$ 。このとき、 $N = 121 = 11^2$

- (iii)  $b = 4$  のとき

①より  $ac = 4$  となり、 $a \geq 1, c$  が奇数から  $(a, c) = (4, 1)$ 。このとき、

$$N = 441 = 21^2。$$

- (iv)  $b = 6$  のとき

①より  $ac = 9$  となり、 $a \geq 1, c$  が奇数から  $(a, c) = (9, 1), (3, 3), (1, 9)$

このとき、 $N = 961 = 31^2$ ,  $N = 363 = 3 \cdot 11^2$ ,  $N = 169 = 13^2$ 。

- (v)  $b = 8$  のとき

①より  $ac = 16$  となり、 $1 \leq a \leq 9, c$  が奇数から適する  $(a, c)$  は存在しない。

以上より、 $N = 121, 169, 441, 961$

- (2) 正しくない。反例： $N = 14^2 = 196$ ,  $a = 1^2 = 1$

- (3)  $x$  軸との交点を  $x = m, n$  ( $m < n$ ) とすると、

$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n) \cdots \cdots \textcircled{2}$  となり、条件より、

$$-\int_m^n a(x - m)(x - n) dx = 4 \text{ から、} \frac{a}{6}(n - m)^3 = 4$$

$$a(n - m)^3 = 2^3 \cdot 3 \quad (1 \leq a \leq 9, 1 \leq n - m)$$

$a, m, n$  が整数より,  $a = 3, n - m = 2$

よって②より,  $y = 3(x - m)(x - m - 2) = 3x^2 - 6(m + 1)x + 3m(m + 2) \cdots \cdots \textcircled{3}$

$0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$  から,  $0 \leq -6(m + 1) \leq 9, 0 \leq 3m(m + 2) \leq 9$

$-\frac{5}{2} \leq m \leq -1$  かつ  $-3 \leq m \leq -2, 0 \leq m \leq 1$  で  $m$  は整数より,  $m = -2$

③は  $y = 3x^2 + 6x$  で  $a = 3, b = 6, c = 0$  となり, 以上より  $N = 360$

### コメント

3桁の平方数で奇数のものは,  $11^2, 13^2, \dots, 31^2$  まで 11 個ありますが, これを 1 つずつチェックするとたいへんです。上の①の条件をもとに  $b$  の値で場合分けをして解を作りました。

## 問題

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を  $n$  回続けて行う。 $k$  回目に取り出したカードの数字を  $X_k$  とし、積  $X_1 X_2 \cdots X_n$  を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n, s_n$  とする。 $p_n, q_n, r_n, s_n$  を求めよ。 [2018]

## 解答例+映像解説

1 から 4 までの 4 枚のカードが入っている箱から 1 枚カードを取り出し、もとに戻す試行を行う。このとき、 $k$  回目に取り出したカードの数字を  $X_k$  とし、積  $X_1 X_2 \cdots X_n$  を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n, s_n$  とする。

さて、 $(X_1 X_2 \cdots X_n) \times X_{n+1} = (X_1 X_2 \cdots X_n X_{n+1})$  であるが、この式の両辺について 4 で割った余りの関係を調べるために、 $\text{mod } 4$  ですべてのパターンを記述すると、右表のようになる。

$0 \times 1 \equiv 0$	$0 \times 2 \equiv 0$	$0 \times 3 \equiv 0$	$0 \times 4 \equiv 0$
$1 \times 1 \equiv 1$	$1 \times 2 \equiv 2$	$1 \times 3 \equiv 3$	$1 \times 4 \equiv 0$
$2 \times 1 \equiv 2$	$2 \times 2 \equiv 0$	$2 \times 3 \equiv 2$	$2 \times 4 \equiv 0$
$3 \times 1 \equiv 3$	$3 \times 2 \equiv 2$	$3 \times 3 \equiv 1$	$3 \times 4 \equiv 0$

そこで、この表をもとに  $X_1 X_2 \cdots X_n$  を 4 で

割った余りの確率について漸化式を作ると、 $p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = \frac{1}{4}$  で、

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}s_n \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad s_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}s_n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{4}\text{より}, \quad n \geq 2 \text{ で } q_n = s_n \text{ となり}, \quad q_1 = s_1 = \frac{1}{4} \text{ から } q_n = s_n \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{5}\text{から}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \text{ となり},$$

$$q_n = q_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\textcircled{3}\text{に代入すると}, \quad r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ となり}, \quad 2^{n+1}r_{n+1} = 2^n r_n + \frac{1}{2} \text{ から},$$

$$2^n r_n = 2r_1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n, \quad r_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

さらに、 $p_n = 1 - q_n - r_n - s_n$  から、

$$p_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

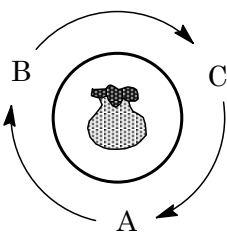
## コメント

確率と漸化式の標準的な問題です。①から④が立式できれば、その処理は難しくありません。なお、 $p_n$  は①を解いても求められますが、(等差)×(等比)という面倒な和が出てきます。



## 問題

赤玉 2 個, 青玉 1 個, 白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルのまわりに A, B, C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち, ひとりが袋から玉を 1 個取り出し, 色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し, 次のルール(a), (b), (c)に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。



(a) 赤玉を取り出したら, 取り出した人を勝者とする。

(b) 青玉を取り出したら, 次の回も同じ人が玉を取り出す。

(c) 白玉を取り出したら, 取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の 3 人が  $n$  回目に玉を取り出す確率をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) とする。ただし,  $a_1=1, b_1=c_1=0$  である。以下の問いに答えよ。

(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2)  $d_n = a_n + b_n + c_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) とおくと,  $d_n$  を求めよ。

(3) 自然数  $n \geq 3$  に対し,  $a_{n+1}$  を  $a_{n-2}$  と  $n$  を用いて表せ。

[2017]

## 解答例+映像解説

(1) 条件より, 赤玉, 青玉, 白玉を取り出す確率は, それぞれ  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$  である。

さて, 与えられたルールによって, A が 4 回目に勝つ場合は次の 2 通りである。

(i) 3 回目まで青玉 3 回取り出し, 4 回目に赤玉を取り出すとき

(ii) 3 回目まで白玉 3 回取り出し, 4 回目に赤玉を取り出すとき

(i)(ii)より, このときの確率は,  $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$  である。

次に, A が 7 回目に勝つ場合は次の 3 通りである。

(i) 6 回目まで青玉 6 回取り出し, 7 回目に赤玉を取り出すとき

(ii) 6 回目まで青玉 3 回, 白玉 3 回取り出し, 7 回目に赤玉を取り出すとき

(iii) 6 回目まで白玉 6 回取り出し, 7 回目に赤玉を取り出すとき

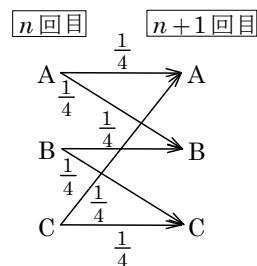
(i)~(iii)より, このときの確率は,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \frac{1}{2} + \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \frac{1}{2} = 22 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{4096}$$

(2) A, B, C が  $n$  回目に玉を取り出す確率をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n$  とすると,  $a_1=1, b_1=c_1=0$  となり,

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}c_n \dots\dots\dots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \dots\dots\dots ②$$



$$c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $d_n = a_n + b_n + c_n$  とおくと、 $\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$  から  $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n$  となり、

$$d_n = d_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (a_1 + b_1 + c_1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$(3) \textcircled{3}\textcircled{4} \text{ より, } c_{n+1} = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - a_n - c_n \right\} + \frac{1}{4}c_n, \quad c_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}a_n \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{1}$  より  $c_n = 4a_{n+1} - a_n$  となり、 $\textcircled{5}$  に代入すると、

$$4a_{n+2} - a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}a_n, \quad a_{n+2} = \frac{1}{4}a_{n+1} - \frac{1}{16}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

すると、 $n \geq 3$  に対し、 $\textcircled{6}$  から、 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{16}a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$  となり、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4}a_{n-1} - \frac{1}{16}a_{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} - \frac{1}{16}a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\ &= -\frac{1}{64}a_{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = -\frac{1}{64}a_{n-2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \end{aligned}$$

## コメント

標準的な確率と漸化式の問題ですが、(2)と(3)は(1)と関係なく解いています。

## 問題

座標平面上で円  $x^2 + y^2 = 1$  に内接する正六角形で、点  $P_0(1, 0)$  を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を  $P_0$  から反時計まわりに順に  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し、1 つのサイコロを 1 回投げ、出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

(規則) (i) 1 から 5 までの目が出た場合は、出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。たとえば、コインが  $P_4$  にあるときに 4 の目が出た場合は  $P_2$  まで動かす。

(ii) 6 の目が出た場合は、 $x$  軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし、コインが  $x$  軸上にあるときは動かさない。たとえば、コインが  $P_5$  にあるときに 6 の目が出た場合は  $P_1$  に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ  $P_0$  に置き、1 つのサイコロを続けて何回か投げて、1 回投げごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 回サイコロを投げた後に、コインが  $P_0$  の位置にある確率を求めよ。
- (2) 3 回サイコロを投げた後に、コインが  $P_0$  の位置にある確率を求めよ。
- (3)  $n$  を自然数とする。 $n$  回サイコロを投げた後に、コインが  $P_0$  の位置にある確率を求めよ。

[2016]

## 解答例+映像解説

- (1) 2 回サイコロを投げ、はじめに  $P_0$  に置かれたコインが与えられた規則にしたがって  $P_0$  に移動するのは、出たサイコロの目の (1 回目, 2 回目) の組合せが、

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2)$$

$$(5, 1), (6, 6)$$

これより、この確率は  $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$  となる。

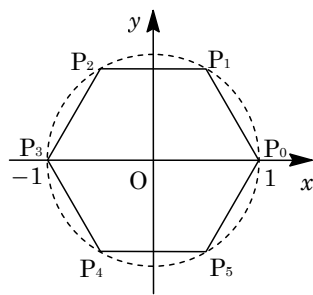
- (2) 3 回サイコロを投げ、コインが  $P_0$  の位置にあるのは、

- (i) 2 回投げた後に  $P_0$  の位置にあるとき

3 回目に出た目が 6 の場合だけより、このときの確率は(1)から  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$  である。

- (ii) 2 回投げた後に  $P_0$  以外の位置にあるとき

2 回投げた後に  $P_k$  ( $1 \leq k \leq 5$ ) にあるときは、3 回目に出た目が  $6-k$  の場合だけより、このときの確率は(1)から  $(1 - \frac{1}{6}) \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$  である。



- (i)(ii)より, 3回サイコロを投げた後に $P_0$ の位置にある確率は,  $\frac{1}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{6}$ となる。
- (3)  $n$ 回サイコロを投げ, コインが $P_0$ の位置にある確率を $a_n$ ,  $P_0$ 以外の位置にある確率を $b_n$ とする。(2)と同様に考えると,

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n = \frac{1}{6}(a_n + b_n)$$

ここで,  $a_n + b_n = 1$ から $a_{n+1} = \frac{1}{6}$ , すなわち $n \geq 2$ で $a_n = \frac{1}{6}$ である。

さらに, 1回サイコロを投げ, コインが $P_0$ の位置にあるのは, 6の目が出たときだけなので, その確率 $a_1 = \frac{1}{6}$ である。

以上より,  $n$ 回サイコロを投げた後に, コインが $P_0$ の位置にある確率は $\frac{1}{6}$ である。

### コメント

確率の基本問題ですが, 3つの設問の結論はすべて同じです。意外すぎて, とまどってしまいます。

## 問題

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

- (1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
- (2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
- (3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。
- (4) 8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。 [2015]

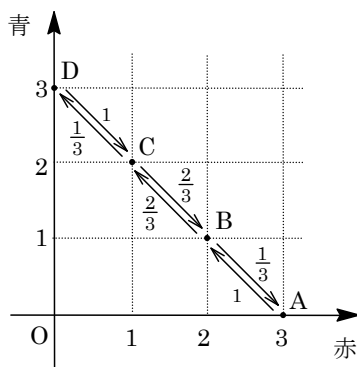
## 解答例+映像解説

- (1) まず、与えられた操作を行ったとき、袋に入っている 3 個の玉について、(赤, 青)の個数の組は、(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)のいずれかである。

そして、この 4 つの状態をそれぞれ A, B, C, D とおき、それらの間の遷移確率をまとめると、右図のようになる。

さて、B(2, 1)の状態から始め操作を 2 回行うとき、もらう硬貨の総数が 1 枚であるのは、D(0, 3)

に 1 回だけ進む B→C→D の場合より、その確率は、 $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ となる。



- (2) B(2, 1)の状態から始めて、奇数回目の操作を行ったとき、A(3, 0)またはC(1, 2)の状態になるので、このとき硬貨をもらうことはない。
- (3) まず、偶数回目の操作を行ったとき、B(2, 1)またはD(0, 3)なので、8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう、すなわち 8 回目に D(0, 3)に初めて進む場合は、A または C を○で表すと、B→○→B→○→B→○→B→C→D となる。

ここで、B→○→B となる確率は、 $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$ となるので、求める確率は、

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{686}{6561}$$

- (4) 8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚であるのは、次の場合である。

(i) 8 回目だけ D に進む場合 (3)より、その確率は $(\frac{7}{9})^3 \cdot \frac{2}{9}$ である。

(ii) 6 回目だけ D に進む場合 B→○→B→○→B→C→D→C→B からその確率は、

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3}$$

(iii) 4回目だけ D に進む場合  $B \rightarrow \bigcirc \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \bigcirc \rightarrow B$  からその確率は,

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9} = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3}$$

(iv) 2回目だけ D に進む場合  $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \bigcirc \rightarrow B \rightarrow \bigcirc \rightarrow B$  からその確率は,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3}$$

(i)~(iv)より, 求める確率は,  $\left(\frac{7}{9}\right)^3 \cdot \frac{2}{9} + \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} \times 3 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9} + 2\right) = \frac{2450}{6561}$

### コメント

状態の推移に関する問題です。後半の設問は 8 という微妙な数値のため、漸化式を立てようかとも思ったのですが、設問(2)の意味を考えて……。

## 問題

Aさんは5円硬貨を3枚、Bさんは5円硬貨1枚と10円硬貨を1枚持っている。2人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお、表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし、硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて、以下の問いに答えよ。

- (1) AさんがBさんに勝つ確率  $p$ 、および引き分けとなる確率  $q$  をそれぞれ求めよ。  
 (2) ゲーム終了後にAさんが持っている硬貨の合計金額の期待値  $E$  を求めよ。

[2014]

## 解答例+映像解説

- (1) Aさんが5円硬貨を3枚投げたとき、表3枚の場合(合計金額15円)、表2枚で裏1枚の場合(合計金額10円)、表1枚で裏2枚の場合(合計金額5円)、裏3枚の場合(合計金額0円)について、その確率は、

$$\begin{aligned} & \text{それぞれ} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}, \\ & {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}, \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ である。} \end{aligned}$$

合計金額	15円	10円	5円	0円
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

これをまとめると、右表のようになる。

Bさんが5円硬貨1枚と10円硬貨を1枚を投げたとき、2枚とも表の場合(合計金額5円)、10円表で5円裏の場合(合計金額10円)、10円裏で5円表の場合(合計金額5円)、2枚とも裏の場合(合計金額0円)について、その確率は、それぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ ずつである。これをまとめると、}$$

合計金額	15円	10円	5円	0円
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

と、右表のようになる。

以上より、AさんがBさんに勝つ確率  $p$ 、引き分けとなる確率  $q$  は、

$$p = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$q = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

- (2) ゲーム終了後、Aさんの所持金とその各々の場合の確率は以下のようにになる。

- (i) Bさんの合計金額が0円でAさんが勝った場合(所持金30円)

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{32}$$

- (ii) Bさんの合計金額が5円でAさんが勝った場合(所持金25円)

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

(iii) Bさんの合計金額が10円でAさんが勝った場合(所持金20円)

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

(iv) 引き分けの場合(所持金15円)で、確率は、(1)より  $q = \frac{1}{4}$

(v) Aさんの合計金額が10円でAさんが負けた場合(所持金10円)

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

(vi) Aさんの合計金額が5円でAさんが負けた場合(所持金5円)

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

(vii) Aさんの合計金額が0円でAさんが負けた場合(所持金0円)

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

(i)~(vii)より、ゲーム終了後のAさん所持金の期待値  $E$  は、

$$E = 0 \times \frac{3}{32} + 5 \times \frac{3}{16} + 10 \times \frac{3}{32} + 15 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{32} + 25 \times \frac{1}{8} + 30 \times \frac{7}{32} = \frac{255}{16}$$

### コメント

内容的にはセンターレベルですが、集中力がかなり要求される確率の問題です。また、(2)では、題意を取り違えないように注意しなくてはなりません。



## 問題

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して、以下の操作 L と操作 R を考える。

L: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに、3 の目が出た場合は、裏裏表表裏表 となる。

以下、「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

- (1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき、表が 1 枚となる確率を求めよ。
- (2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。
- (3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

[2013]

## 解答例+映像解説

- (1) L を 2 回続けて行うとき、左端の硬貨は、必ず表→裏→表と反転する。これより、表が 1 枚となるのは、左端の硬貨が表、それ以外は裏という場合である。

このときは、出た目が、6→1 または 1→6 のいずれかより、その確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

- (2) L, R の順に操作を行うとき、出た目と表の枚数の関係は右表のようになる。

なお、右表では、L の操作で 1 の目が出るのを L1, 2 の目が出るのを L2, 3 の目が出るのを L3, …, R の操作で 1 の目が出るのを R1, 2 の目が出るのを R2, 3 の目が出るのを R3, …と表している。

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
L1	4	3	2	1	0	1
L2	3	2	1	0	1	2
L3	2	1	0	1	2	3
L4	1	0	1	2	3	4
L5	0	1	2	3	4	5
L6	1	2	3	4	5	6

これより、表の枚数の期待値は、

$$0 \times \frac{5}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{8}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 4 \times \frac{4}{36} + 5 \times \frac{2}{36} + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{19}{9}$$

- (3) L, R, L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となるのは次の場合である。

(i) 最初の操作が L6 以外のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が 0 で、3 回目に 6 の目が出る場合より、

L1→R5→L6, L2→R4→L6, L3→R3→L6, L4→R2→L6, L5→R1→L6

この確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 5 = \frac{5}{216}$  となる。

(ii) 最初の操作が L6 のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が  $k$  のとき, 3 回目に  $6-k$  の目が出る場合より,

L6→R1→L5, L6→R2→L4, L6→R3→L3, L6→R4→L2, L6→R5→L1

この確率は、 $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 5 = \frac{5}{216}$  となる。

(i)(ii)より, 求める確率は、 $\frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{5}{108}$  である。

### コメント

パズルのような問題です。(2)では、期待値を求めるので、センター試験を解くときと同じように、すべての場合を表にまとめました。すると、これが次の(3)への誘導となっていました。

## 問題

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき、次の試行  $T$  を考える。

(試行  $T$ ) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ、その後、箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個、箱 B に白玉が 2 個入っているとき以下の問いに答えよ。

- (1) 試行  $T$  を 1 回行ったときに、箱 A に黒玉が  $n$  個入っている確率  $p_n$  ( $n=1, 2, 3$ ) を求めて既約分数で表せ。
- (2) 試行  $T$  を 2 回行ったときに、箱 A に黒玉が  $n$  個入っている確率  $q_n$  ( $n=1, 2, 3$ ) を求めて既約分数で表せ。
- (3) 試行  $T$  を 3 回行ったときに、箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。 [2012]

## 解答例

- (1) 箱 A に黒玉が 3 個入っているとき、箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると、箱 A は黒玉 1 個、箱 B は黒玉 2 個と白玉 2 個になっている。その後、箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れたとき、箱 A に黒玉が  $n$  個入っている確率  $p_n$  は、 $p_1 = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$ ,  $p_2 = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$ ,  $p_3 = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$

- (2) 箱 A に黒玉が 2 個と白玉が 1 個入っているとき、試行  $T$  によって箱 A に黒玉が  $n$  個入っている確率を  $r_n$  とすると、 $r_1 = \frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} \times \frac{{}_3C_1}{{}_4C_2} + \frac{{}_2C_1}{{}_3C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{5}{18}$   
 $r_2 = \frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} + \frac{{}_2C_1}{{}_3C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{11}{18}$ ,  $r_3 = \frac{{}_2C_1}{{}_3C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{2}{18}$

また、箱 A に黒玉が 1 個と白玉が 2 個入っているとき、試行  $T$  によって箱 A に黒玉が  $n$  個入っている確率を  $s_n$  とすると、 $s_1 = \frac{{}_2C_1}{{}_3C_2} \times \frac{{}_3C_1}{{}_4C_2} + \frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{7}{18}$

$$s_2 = \frac{{}_2C_1}{{}_3C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} + \frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{10}{18}, \quad s_3 = \frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{18}$$

これより、試行  $T$  を 2 回行ったときに、箱 A に黒玉が  $n$  個入っている確率  $q_n$  は、

$$q_1 = p_1 \cdot s_1 + p_2 \cdot r_1 + p_3 \cdot p_1 = \frac{7}{108} + \frac{10}{54} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$$

$$q_2 = p_1 \cdot s_2 + p_2 \cdot r_2 + p_3 \cdot p_2 = \frac{10}{108} + \frac{22}{54} + \frac{4}{36} = \frac{11}{18}$$

$$q_3 = p_1 \cdot s_3 + p_2 \cdot r_3 + p_3 \cdot p_3 = \frac{1}{108} + \frac{4}{54} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

- (3) 試行  $T$  を 3 回行ったときに、箱 A の中がすべて黒玉になっている確率は、

$$q_1 \cdot s_3 + q_2 \cdot r_3 + q_3 \cdot p_3 = \frac{5}{324} + \frac{22}{324} + \frac{6}{324} = \frac{11}{108}$$

## コメント

難問ではありませんが、非常に煩雑な問題です。

## 問題

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が  $i$  と  $j$  ならば、 $i$  のカードと  $j$  のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を  $n$  回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1)  $n = 2$  のとき、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2)  $n = 2$  のとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3)  $n = 2$  のとき、左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4)  $n = 3$  のとき、左端のカードの数字の期待値を求めよ。 [2011]

## 解答例

(1) 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す  ${}_4C_2 = 6$  通りの場合が同様に確からしいとし、この操作を 2 回繰り返すとする。

さて、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶのは、1 回目に  $i$  と  $j$  を取り出したとき、2 回目も  $i$  と  $j$  を取り出す場合より、その確率は、

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 6 = \frac{1}{6}$$

(2) 操作を 2 回繰り返すとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶのは、1 回目に 1 と 4 を取り出し 2 回目に 2 と 3 を取り出す場合か、1 回目に 2 と 3 を取り出し 2 回目に 1 と 4 を取り出す場合のいずれかなので、その確率は、

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{18}$$

(3) 操作を 2 回繰り返すとき、左端のカードの数字が 1 になるのは、

(i) 2 と 3, 2 と 4, 3 と 4 のいずれかを 2 回取り出すとき

$$\text{この場合の確率は、} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 3^2 = \frac{9}{36}$$

(ii) 1 と 2 を 2 回、または 1 と 3 を 2 回、または 1 と 4 を 2 回取り出すとき

$$\text{この場合の確率は、} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 3 = \frac{3}{36}$$

(i)(ii)より、求める確率は、 $\frac{9}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{3}$

(4) 操作を 3 回繰り返すとき、左端のカードの数字が 1 になるのは、(3)と同様に、

(i) 2回の操作の後、左端が1の場合

3回目に1以外の2つの数を取り出すことより、その確率は、 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6} \times 3\right) = \frac{1}{6}$

(ii) 2回の操作の後、左端が1でない場合

3回目に左端の数と1を取り出すことより、その確率は、 $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$

(i)(ii)より、左端のカードの数字が1の確率は、 $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$

また、操作を3回繰り返すとき、左端のカードの数字が2, 3, 4になることは対等なので、その確率はそれぞれ、 $\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{5}{18}\right) = \frac{13}{54}$ である。

よって、操作を3回繰り返すとき、左端のカードの数字の期待値  $E$  は、

$$E = 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{13}{54} + 3 \times \frac{13}{54} + 4 \times \frac{13}{54} = \frac{22}{9}$$

### コメント

(3)と(4)は、1のカードが動かないときと動くときに場合を分けています。