ま　え　が　き

本書には，2010 年度以降に出題された長崎大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問　題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

目　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列／論　証

複素数／極　限／微分法

積分法／積分の応用

■ 関数

1　$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=A$ とするとき，$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$ の値を A を用いて表せ。　[2018]

2　方程式 $\log_2 x^2=2+\log_2|x-2|$ を解け。　[2018]

3　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$4\sin^3\theta+3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。　[2017]

■ 図形と式

1　放物線 $C: y=x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q をとる。P，Q の x 座標をそれぞれ p，q（ただし，$p<q$）とする。直線 PQ の傾きを a とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　a を p, q を用いて表せ。

(2)　$a=1$ とする。直線 PQ と x 軸の正の向きとのなす角 θ_1（ただし，$0<\theta_1<\pi$）を求めよ。

(3)　$a=1$ とする。放物線 C 上に点 R をとる。R の x 座標を r（ただし，$r<p$）とする。三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2（ただし，$0<\theta_2<\pi$）を求めよ。また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ。さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ。

(4)　$a=2$ とする。放物線 C 上に点 S$(1,\ 1)$ をとる。三角形 PQS が $\angle\mathrm{S}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ。　[2015]

2　k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる 2 点で交わるものとする。その 2 つの交点を P, Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　k の値の範囲を求めよ。

(2)　2 点 P, Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ。

(3)　上の(2)の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする。r^2 を a と k で表せ。

(4)　点 R の座標を $(2,\ 1)$ とする。k の値が(1)で求めた範囲を動くとき，3 点 P，Q，R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ。　[2014]

3 原点Oを中心とし，半径1の円をCとする。次の問いに答えよ。

(1) 直線$y=2$上の点$\mathrm{P}(t,\ 2)$から円Cに2本の接線を引き，その接点をM，Nとする。直線OPと弦MNの交点をQとする。点Qの座標をtを用いて表せ。ただし，tは実数とする。

(2) 点Pが直線$y=2$上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ。 [2012]

4 実数x, yが連立不等式

$$10^{10}<2^x3^y<10^{11}\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}),\ \ 10^9<3^x2^y<10^{10}\cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) 連立不等式(A)，(B)が表すxy平面上の領域は，どのような図形であるか答えよ。また，その理由を述べよ。

(2) 連立不等式(A)，(B)が満たす実数x，yにおいて，$x+y$がとりうる値の範囲，および$y-x$がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(3) 連立不等式(A)，(B)が満たす整数x，yを考える。このとき，$y-x$が最大になる整数x，yを求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$として計算してよい。

[2012]

5 円$C_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$と放物線$C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$について，次の問いに答えよ。

(1) C_1と座標軸との共有点，およびC_2と座標軸との共有点の座標を求めよ。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3\leqq 0 \\ y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1 \end{cases}$ を満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域をDとする。Dの面積Sを求めよ。

(3) 点$(x,\ y)$が領域Dを動くとき，$x+y$の最大値を求めよ。 [2011]

■ 図形と計量

1　$\angle A = \dfrac{\pi}{2}$，$\angle B = \alpha$ である△ABC を考える。△ABC の外接円の半径を R とする。この外接円上の点 P が，点 A を含まない弧 BC 上を動くものとする。$\angle BAP = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABP の面積の最大値を R，α を用いて表せ。

(2)　△BPC の面積を R，θ を用いて表せ。

(3)　$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ とする。△ABP と△BPC の面積の和 S の最大値を求めよ。　[2010]

■ ベクトル

1　空間内の 3 点 A, B, C を頂点とする△ABC を考える。2 辺 BC, AC の中点をそれぞれ M, N とし，中線 AM と BN の交点を G とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AG}$ を，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2)　2 点 P, Q が $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PQ}$ を満たすとき，3 点 P, Q, G は同一直線上にあることを示せ。

(3)　△ABC の頂点の座標が $A(0,\ 0,\ 1)$，$B(7,\ 0,\ 6)$，$C(2,\ 12,\ 5)$ であるとき，xy 平面上を動く点 $P(x,\ y,\ 0)$ を考える。このとき $\left|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right|$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

(4)　(3)において，特に点 $P(x,\ y,\ 0)$ が，xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上を動くものとする。$\left|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right|$ の最大値とそのときの P の座標，および最小値とそのときの P の座標を，それぞれ求めよ。　[2017]

2 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある。右の図 1 のように, 2 辺 BC, CD 上に, $\mathrm{BS}=\mathrm{CT}=x\ (0\leqq x\leqq 2)$ を満たす点 S, T をとる。このとき, 三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

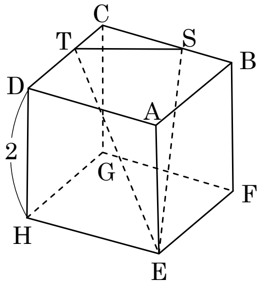


図1

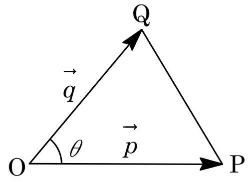


図2

(1) 右の図 2 を参考にして, 三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおくとき, 三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{c}$ とおく。立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して, $\overrightarrow{\mathrm{ES}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および x を用いて表せ。また, $|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を, それぞれ x の式として表せ。さらに, $\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は, x によらない一定の値になることを示せ。

(3) 上の(1)を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ。

(4) $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で, $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの x の値も答えよ。 [2016]

3 ひし形の紙がある(図 1)。点線で半分に折ると正三角形になった(図 2)。これを少し開いて机の上に立てると, 三角錐の形になる。その高さを次のようにして求めたい。

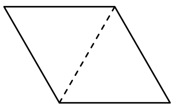


図1

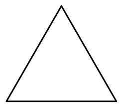


図2

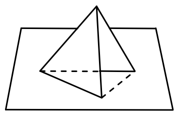


図3

図 4 において, 2 つの正三角形 OAB と OAC の 1 辺の長さを 1 とする。点 O と平面 ABC との距離が, 三角錐 OABC の高さになる。

空間ベクトルを利用してこの高さを求める。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\angle\mathrm{BOC}=\theta$ とおき, 線分 BC の中点を M とする。以下の問いに答えよ。

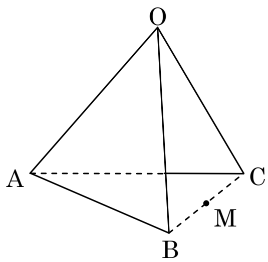


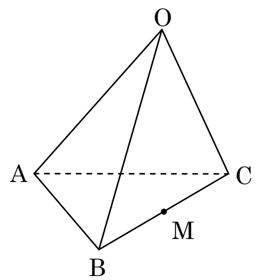
図4 (図3の拡大図)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。また, $|\vec{b}+\vec{c}|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3) 実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおくと, 点 H は直線 AM 上にある。このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つことを示せ。さらに, H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす点であるとき, t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(4) 三角錐 OABC の高さを h とする。h を $\cos\theta$ を用いて表せ。さらに, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立つとき, θ と h の値を求めよ。 [2015]



4 右図のような四面体 OABC がある。各面 ABC, OBC, OCA, OAB の重心を，それぞれ P, Q, R, S とし，辺 BC の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{m}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{m}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(2)　線分 OP と線分 AQ の交点を G とする。線分 OP 上の点 U は，実数 s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$(0\leqq s\leqq 1)$ と表され，線分 AQ 上の点 V は，実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(0\leqq t\leqq 1)$ と表される。このことを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(3)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を表せ。

(4)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中から必要なものを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ をそれぞれ表せ。また，点 G が線分 BR および線分 CS 上にあることを示せ。 [2013]

5 四面体 OABC において，

$$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=3,\ \mathrm{OC}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ,\ \angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$$

とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　平面 ABC 上に点 H をとり，s, t, u を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおく。このとき，$s+t+u=1$ となることを示せ。

(2)　(1)の $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直であるとき，s, t, u の値をそれぞれ求めよ。

(3)　平面 OAB 上に点 K をとり，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直であるとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ。 [2012]

6 3 辺の長さが $\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=5$ である直角三角形 ABC と，その内側にあって 2 辺 AB および AC に接する円 O を考える。この円の半径を r とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB との交点を H とする。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクトルを，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{u}$ $(t>0)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 AO と辺 BC の交点を M とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ の内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HO}}$ を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ および t を用いて表せ。また，円 O の半径 r を t で表せ。

(3)　円 O が辺 BC にも接するとき，その中心を I とする。すなわち，I は三角形 ABC の内心である。そのときの t の値と，内接円 I の半径を求めよ。

(4)　円 O と内接円 I が共有点をもたないような t の範囲を求めよ。 [2011]

■ 整数と数列

1 数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和をS_nとする。$S_n=6n-2a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$が成り立つとき，初項a_1および一般項a_nを求めよ。 [2018]

2 数列$\{a_n\}$の一般項が，$a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n n(n-1)$であるとき，$a_{n+1}-a_n$を n の式で表し，a_nが最大となる正の整数nをすべて求めよ。 [2017]

3 半径 1 の円に内接する正十二角形Dがある。その面積をSとする。Dの各辺の中点を順に結んで正十二角形D_1をつくる。さらに，D_1の各辺の中点を順に結んで正十二角形D_2をつくる。このように，D_{n-1}の各辺の中点を順に結んで正十二角形D_nをつくる$(n\geqq 2)$。D_nの面積をS_nとする。以下の問いに答えよ。

(1) SとS_1を求めよ。

(2) S_nをnの式で表せ$(n\geqq 1)$。

(3) $S_n\leqq\frac{1}{2}S$となる最小の整数 n を求めよ。ただし，$1.89<\log_2(2+\sqrt{3})<1.9$である。 [2016]

4 1 から$2n$までの偶数の平方の和をa_n，奇数の平方の和をb_nとする。すなわち

$$a_n=2^2+4^2+\cdots+(2n)^2,\ b_n=1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$$

である。なお，1 からnまでの自然数の平方の和については

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1) 偶数の平方の和$2^2+4^2+\cdots+20^2$と奇数の平方の和$1^2+3^2+\cdots+19^2$を求めよ。

(2) a_nとb_nを求めよ。

(3) $\frac{1}{a_n}-\frac{3}{2n(2n+1)}$および$\frac{1}{b_n}+\frac{3}{2n(2n+1)}$を計算せよ。

(4) $c_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}$とするとき，$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$を求めよ。 [2014]

5 n を 2 以上の整数とする。n 個の実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n が与えられたとき，

$$P_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,\ Q_n={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$$

とおく。次に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する a_ia_j の和を R_n とする。たとえば，$R_2=a_1a_2$, $R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$ である。同様に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する $(a_i-a_j)^2$ の和を S_n とする。たとえば，$S_2=(a_1-a_2)^2$, $S_3=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2$ である。次の問いに答えよ。

(1) P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ。

(2) すべての $n\geqq 2$ に対して，$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$ と表されることを，数学的帰納法で証明せよ。

(3) Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ。

(4) $a_1+a_2+a_3+a_4=1$ のとき，Q_4 の最小値と，そのときの a_1, a_2, a_3, a_4 の値をそれぞれ求めよ。 [2013]

6 次の問いに答えよ。

(1) 関係式 $a_1=1$, $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい。$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおいて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，a_n を求めよ。

(2) $x\neq 1$ のとき，等比数列の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}$ の両辺を x で微分せよ。その結果を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kx^k$ を求めよ。

(3) $p\neq 1$ のとき，関係式 $c_1=0$, $\dfrac{pc_{n+1}}{n}-\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。 [2011]

■ 論証

1　4 次方程式の解について，次の問いに答えよ。ただし，下のことは既知としてよい。

自然数 k, l, m が次の条件

(イ)　k と l は 1 以外の公約数をもたない　　(ロ)　k は lm の約数である

を満たすならば, k は m の約数である。

(1)　$a,\ b,\ c,\ d$ は整数で，$d \neq 0$ とする。方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は自然数であり，かつ $|d|$ の約数に限ることを証明せよ。

(2)　方程式 $2x^4 - 2x - 1 = 0$ の実数解はすべて無理数であることを証明せよ。　[2010]

■ 複素数

1　t を正の実数とし，複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ がある。等式

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t}\left|z-t\right| \cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の全体が表す図形を F とする。下の小問(1)から(4)を通して F がどのような図形を表すか調べたい。以下の問いに答えよ。

(1)　A と B はどちらも図形 F の点ではないことを示せ。

(2)　$t=1$ ならば, F はどのような図形を表すか。

(3)　$t \neq 1$ とする。図形 F の点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 AB 上に位置するような z の値は 2 つある。その値 z_1 と z_2 を求めよ。ただし，$|z_1| < |z_2|$ とする。

(4)　$t \neq 1$ とする。2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ として，m の値を求めよ。また，$\mathrm{P}(z)$ が図形 F の点であるとき，$|z-m|$ の値を求めよ。さらに，F はどのような図形を表すか。　[2018]

2　複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ が，原点を中心とする半径 3 の円の周上を動くとき，$w = \dfrac{z+3i}{z}$ で表される点 $\mathrm{Q}(w)$ はどのような図形を描くか。　[2017]

■ 極限

1 放物線 $C: y=x^2$ と定点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ および C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_1(2,\ 4)$ が与えられている。自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，以下の操作を繰り返す。

C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ p_n{}^2)$ に対し， 手順 1 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ と C との交点のうち，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}_n(q_n,\ q_n{}^2)$ とし， 手順 2 直線 $\mathrm{Q}_n\mathrm{B}$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ p_{n+1}{}^2)$ とする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を定数とする。直線 $y=ax+1$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とする。このとき，$pq=-1$ が成り立つことを示せ。また，点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 点 P_2，Q_2 および P_3 の座標を求めよ。

(3) 数列 $\{p_n\}$ および数列 $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(4) $x \geqq 0$ の範囲において，C と直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。さらに，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$ を求めよ。 [2017]

2 次の関係式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}-(\sqrt{2}+1)a_n=1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$ [2015]

3 $a,\ b$ を $a>b>0$ を満たす定数とし，

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n{}^2+b_n{}^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_1=b,\ b_{n+1}=2a_nb_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_n+b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定義するとき，その一般項 c_n を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項 a_n，b_n を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ が存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ。

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき，$a+b<1$ が成り立つことを証明せよ。 [2010]

■ 微分法

1 関数 $f(x)$ を，$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<0) \\ x & (x\geqq 0) \end{cases}$ と定義する。「微分係数の定義」にしたがって，$f(x)$ の $x=0$ における微分係数を求めよ。 [2018]

2 e を自然対数の底とする。$x>e$ の範囲において，関数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ を考える。この両辺の対数を x について微分することにより，y は減少関数であることを示せ。また，$e<a<b$ のとき，$a^b>b^a$ が成り立つことを証明せよ。 [2017]

3 xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円がある。この円の周上に 2 点 $\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ と $\mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとる。ただし，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。さらに，2 点 A, B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ C, D とする。扇形 OAB の面積を S_1，弧 AB と線分 BD, DC, CA で囲まれた図形 F の面積を S_2 とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) S_1 を α と β で表せ。

(2) S_2 を α と β で表せ。

(3) $S_1=S_2$ のとき，β を α の式で表せ。また，このとき $t=\cos\alpha-\cos\beta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) (3)のとき，扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とする。さらに，$V=V_1-V_2$ とする。V を t の式で表せ。

(5) (4)において，V の最大値，およびそのときの A, B の座標を求めよ。 [2017]

■ 積分法

1 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1) 部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2) $F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3) $n\geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n\geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4) $p(x)=x^n$ とおくとき，k 次導関数 $p^{(k)}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。 [2018]

2 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

[2015]

3 次の問いに答えよ。

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$ とする。$x=\tan\theta$ とおくことにより，$I_1=\dfrac{\pi}{3}$ を示せ。

(2) (1)の I_1 を部分積分して，I_1 と $I_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の関係式を導き，I_2 の値を求めよ。

(3) $t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。

(4) 合成関数の微分法を用いて，関数 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ。

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$ を求めよ。 [2012]

4 曲線 $y=\log x$ の接線はつねにこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ。以下, k は自然数とする。

(1) 点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする。また，$k\geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする。四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ。

(2) 次の 2 つの値の大小を比較せよ。

(ア) $\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ (ただし，$k\geqq 2$)

(イ) $\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1}\log x\,dx$ (ただし，$k\geqq 1$)

(3) $a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$$

(4) 2 以上の自然数 n について

$$U_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right),\ V_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

とおくとき，次の不等式を示せ。

$$U_n<\log(n!)<V_n$$

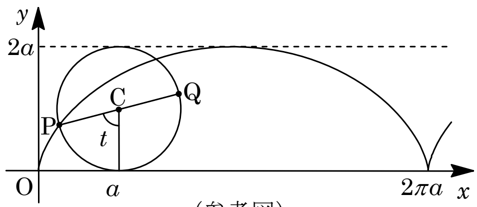
[2011]

■ 積分の応用

1 半径 a の円が x 軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき，円周上の 2 つの定点 P と Q の運動について考える。時刻 $t=0$ のとき P は原点 O にあり，Q は点 $(0,\ 2a)$ にある。円は毎秒 1 ラジアンの速さで回転する。このとき，点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ は

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

で表される。以下の問いに答えよ。



（参考図）

(1) 時刻 t における円の中心 C と点 Q の座標を，それぞれ求めよ。

(2) 時刻 t における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ。また，時刻 t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲において，速さ $\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$ の最大値と最小値，およびそのときの P の座標を求めよ。

(3) 時刻 t における点 Q の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。さらに，内積 $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。

(4) 時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ から $t=\dfrac{3\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のり L_{P} と，点 Q が動く道のり L_{Q} を，それぞれ求めよ。 [2018]

2 関数 $f(x)=xe^x$ で定まる曲線 $C:y=f(x)$ を考える。p を正の数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。また，すべての x について，$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ が成り立つような定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $l:y=c(x-p)+d$ とする。c と d の値を p を用いて表せ。さらに，区間 $x\geqq 0$ において関数

$$g(x)=f(x)-\{c(x-p)+d\}$$

の増減を調べ，不等式 $f(x)\geqq c(x-p)+d\ (x\geqq 0)$ が成り立つことを示せ。

(3) $x\geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 l，および y 軸で囲まれた図形を F とする。その面積 $S(p)$ を求めよ。

(4) 2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える。R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ。 [2016]

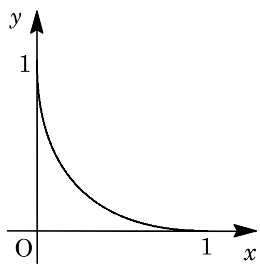
3　楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (a>0)$ と y 軸の交点を $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(0,\ -a)$ とする。θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 AP の長さを l とする。$X=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$Y=l^2$ となる関数を $Y=f(X)$ とする。$f(X)$ を X の式で表せ。

(2)　$0<a<1$ の場合。(1)の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し，そのときの X の値を求めよ。

(3)　$a=2$ の場合。(1)の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を $\mathrm{P_1}$ とする。$f(X)$ の最大値と $\mathrm{P_1}$ の座標を求めよ。また点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とし点 $\mathrm{P_1}$ を通る円を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。　[2016]

4　曲線 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸および y 軸で囲まれた右図の図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2015]



5　自然対数の底を e とする。区間 $x\geqq0$ で定義される関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ を考え，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる。それらを，$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，…とする。点 $\mathrm{P_0}$ は原点である。

自然数 $n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P_n の x 座標を求めよ。

(2)　面積 S_n を求めよ。

(3)　$I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k$ とする。このとき，I_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ。　[2015]

6 曲線$C: y=\log x$上の点$\mathrm{P}(t,\ \log t)$における接線を l とする。ただし，$1<t<e$とする。eは自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) 接線lの方程式を求めよ。

(2) 接線lとy軸との交点をQとし，接線lとx軸との交点をRとする。QとRの座標を求めよ。

(3) 接線lとx軸およびy軸によって囲まれた図形をD_1，接線lと曲線Cおよびx軸によって囲まれた図形をD_2とする。D_1の面積$S_1(t)$とD_2の面積$S_2(t)$を求めよ。

(4) $S(t)=S_1(t)+S_2(t)$とおく。このとき$S(t)$の増減を調べ，その最小値およびそのときのtの値を求めよ。 [2014]

7 区間$0\leqq x\leqq\pi$において，関数$f(x)$と関数$g(x)$を

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x,\quad g(x)=\cos\frac{x}{2}+c$$

と定義する。cは定数である。次の問いに答えよ。

(1) 区間$0\leqq x\leqq\pi$において，2 曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が$x=0$以外の点で接するように c の値を定め，接点$(p,\ q)$を求めよ。また，そのとき，区間$0\leqq x\leqq\pi$における関数$f(x)$と関数$g(x)$の大小関係を調べよ。

(2) 定数 c と接点$(p,\ q)$は(1)で求めたものとする。そのとき，区間$0\leqq x\leqq p$において，y軸および 2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形をDとする。Dをy軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vを求めよ。 [2014]

8 次の問いに答えよ。

(1) 関数$y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$の増減およびグラフの凹凸を調べよ。また，yの最大値およびそのときのxの値，yの最小値およびそのときのxの値を求めよ。

(2) 2 つの曲線$y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$と$y=-x+2+\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$によって囲まれた図形Dを座標平面上に描け。なお，Dの境界が座標軸と共有点をもつならば，その座標も記入せよ。

(3) 上の図形Dをx軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2013]

9　半径 1 の円と長さ 2 の線分がある。この線分を一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える。線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする。この図形を図 1 のように xy 平面上におく。すなわち，中心が点$(0,\ 1)$，P が点$(0,\ -1)$と一致するようにおく。

図1

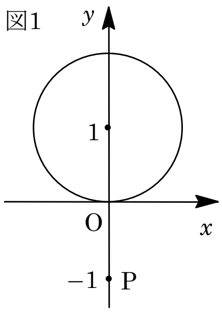
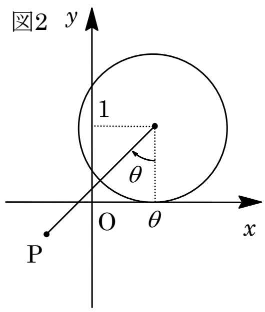


図2



次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる。図 2 は円が θ だけ回転したときの状態を表している。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，点 P が描く曲線 C について考察する。次の問いに答えよ。

(1)　図 2 における点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2)　曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ。

(3)　曲線 C と 2 直線 $y=-1$ および $x=\pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[2013]

10　xyz 空間において，底面の半径が 2，高さが 4 である直円柱 $x^2+y^2 \leqq 4$，$0 \leqq z \leqq 4$ を考える。この円柱内で，さらに $z \leqq (x-2)^2$，$z \leqq y^2$ を満たす点$(x,\ y,\ z)$からなる立体を V とする。次の問いに答えよ。

(1)　立体 V を平面 $x=t\ (-2 \leqq t \leqq 2)$ で切った切り口の面積を $A(t)$ とする。$A(t)$ を t を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。　[2010]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列／論　証

複素数／極　限／微分法

積分法／積分の応用

問　題

$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=A$ とするとき，$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$ の値を A を用いて表せ。 [2018]

解答例

$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=A$ とするとき，$P=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$ とおくと，

$$P=1+1-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

$$=2-2\Bigl(1-2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\Bigr)=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4A^2$$

コメント

三角関数の計算についての基本題です。

問　題

方程式 $\log_2 x^2 = 2 + \log_2|x-2|$ を解け。 [2018]

解答例

$\log_2 x^2 = 2 + \log_2|x-2|$ に対して，$x^2 > 0$ かつ $|x-2| > 0$ より，$x \neq 0$，$x \neq 2$

このとき，$\log_2 x^2 = 2\log_2 2 + \log_2|x-2|$，$\log_2 x^2 = \log_2 4|x-2|$ より，

$$x^2 = 4|x-2|$$

(i)　$x > 2$ のとき　$x^2 = 4(x-2)$ から $x^2 - 4x + 8 = 0$

$D/4 = 4 - 8 = -4 < 0$ となり，実数解をもたないので不適。

(ii)　$x < 2$ のとき　$x^2 = -4(x-2)$ から $x^2 + 4x - 8 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4+8} = -2 \pm 2\sqrt{3}$ となり，ともに $x < 2$，$x \neq 0$ を満たす。

(i)(ii)より，求める解は，$x = -2 \pm 2\sqrt{3}$ である。

コメント

対数方程式を解く問題です。真数条件に要注意です。

問　題

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。 [2017]

解答例

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$t = \sin\theta$ とおくと，$0 \leqq t \leqq 1$ となり，

$$f(\theta) = 4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta = 4\sin^3\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4t^3 - 3t^2 + 3$$

ここで，$g(t) = f(\theta)$ とおくと，

$$g'(t) = 12t^2 - 6t = 6t(2t-1)$$

これより，$g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$t = 1\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき最大値 4 をとり，$t = \dfrac{1}{2}\left(\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$ のとき最小値 $\dfrac{11}{4}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	4

コメント

三角関数の最大・最小に関する問題です。直接的に微分するよりは置換えの方が楽そうです。

問　題

放物線$C: y=x^2$上に異なる 2 点 P, Q をとる。P, Q のx座標をそれぞれp, q (ただし，$p<q$)とする。直線 PQ の傾きをaとおく。以下の問いに答えよ。

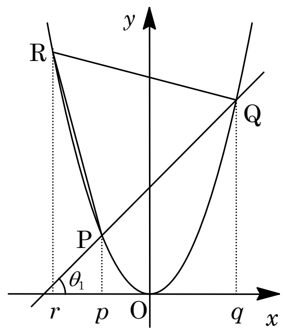
(1)　aをp, qを用いて表せ。

(2)　$a=1$とする。直線 PQ とx軸の正の向きとのなす角θ_1 (ただし，$0<\theta_1<\pi$)を求めよ。

(3)　$a=1$とする。放物線C上に点 R をとる。R のx座標をr (ただし，$r<p$)とする。三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR とx軸の正の向きとのなす角θ_2 (ただし，$0<\theta_2<\pi$)を求めよ。また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ。さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ。

(4)　$a=2$とする。放物線C上に点$\mathrm{S}(1,\ 1)$をとる。三角形 PQS が$\angle\mathrm{S}=\dfrac{\pi}{2}$である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$C: y=x^2$上の 2 点$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$に対して，直線 PQ の傾きaは，$a=\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=p+q$

(2)　$a=1$のとき，直線 PQ とx軸の正の向きとのなす角θ_1は，$\tan\theta_1=1$より$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$

(3) 直線 PR とx軸の正の向きとのなす角θ_2は，$\theta_2=\theta_1+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7}{12}\pi$となり，このとき直線 PR の傾きは,

$$\tan\theta_2=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$$

同様に，直線 QR とx軸の正の向きとのなす角θ_3は，$\theta_3=\theta_2+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{11}{12}\pi$となり，このとき，直線 QR の傾きは，$\tan\theta_3=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+1\cdot\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$

ここで，(1)から，$p+q=1$……①となり，同様にすると，

$$p+r=-2-\sqrt{3}\ \cdots\cdots\text{②},\quad q+r=-2+\sqrt{3}\ \cdots\cdots\text{③}$$

①②③から，$2(p+q+r)=-3$，$p+q+r=-\dfrac{3}{2}$……④であり，①④より$r=-\dfrac{5}{2}$，③④より$p=\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{3},\ \dfrac{13}{4}-\sqrt{3}\right)$，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{25}{4}\right)$となるので,

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(-3-\sqrt{3})^2}\right\}^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}(2\sqrt{6})^2\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$$

(4)　$a=2$ のとき，(1)から，$p+q=2$ ………⑤

さて，S(1, 1) に対して，$\overrightarrow{\mathrm{SP}}=(p-1,\ p^2-1)=(p-1)(1,\ p+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=(q-1,\ q^2-1)=(q-1)(1,\ q+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=0$ となり，$1+(p+1)(q+1)=0$

②を代入して，$1+pq+2+1=0$，$pq=-4$ ………⑥

⑤⑥から，p，q は t の 2 次方程式 $t^2-2t-4=0$ の 2 つの解となり，$p<q$ から，

$p=1-\sqrt{5}$，$q=1+\sqrt{5}$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{SP}}|=|p-1|\sqrt{1+(p+1)^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+(2-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{SQ}}|=|q-1|\sqrt{1+(q+1)^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+4\sqrt{5}}$

よって，$\triangle\mathrm{PQS}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+4\sqrt{5}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{100-80}=5\sqrt{5}$

コメント

放物線を題材にした図形と式についての基本的な問題です。

問　題

k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる 2 点で交わるものとする。その 2 つの交点を P, Q とする。次の問いに答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 2 点 P, Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ。

(3) 上の(2)の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする。r^2 を a と k で表せ。

(4) 点 R の座標を $(2,\ 1)$ とする。k の値が(1)で求めた範囲を動くとき，3 点 P, Q, R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ。 [2014]

解答例

(1) 円 $x^2+y^2=1$ ……①と直線 $x+2y=k$ ……②が異なる 2 点 P, Q で交わる条件は，円①の中心と直線②の距離が半径より小さいことに等しく，

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}<1,\ |k|<\sqrt{5},\ -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$$

(2) 2 点 P, Q を通る円の中心の軌跡は，線分 PQ の垂直二等分線である。

すなわち，円①の中心を通り，方向ベクトルが直線②の法線ベクトルとなり，その成分が $(1,\ 2)$ であることより，直線 $y=2x$ である。

(3) 2 点 P, Q を通る円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とすると，

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2,\ x^2+y^2-2ax-4ay=r^2-5a^2 \cdots\cdots\cdots③$$

すると，円①と③の共通弦は，①－③より，$2ax+4ay=1-r^2+5a^2$

$a\neq 0$ のときは，$x+2y=\dfrac{1-r^2+5a^2}{2a}$ となり，②と一致することより，

$$\frac{1-r^2+5a^2}{2a}=k,\ r^2=5a^2-2ak+1$$

なお，この式は $a=0$ のときも成立している。

(4) (3)より，円③は，$x^2+y^2-2ax-4ay=-2ak+1$ となり，$\mathrm{R}(2,\ 1)$ を通るので，

$$4+1-4a-4a=-2ak+1,\ ak=4a-2$$

$a=0$ のときは成立しないので，$k=\dfrac{4a-2}{a}$

さて，(1)から $|k|<\sqrt{5}$ なので，$\left|\dfrac{4a-2}{a}\right|<\sqrt{5}$ となり，

$$\left(\frac{4a-2}{a}\right)^2<5,\ (4a-2)^2<5a^2,\ 11a^2-16a+4<0$$

よって, 3 点 P, Q, R を通る円の中心の x 座標 a は，$\dfrac{8-2\sqrt{5}}{11}<a<\dfrac{8+2\sqrt{5}}{11}$

なお，この範囲は $a\neq 0$ を満たしている。

コメント

円と直線についての基本的な問題です。いろいろな解法が考えられます。

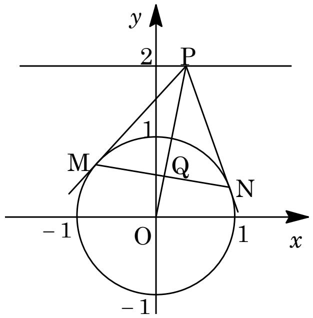
問　題

原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 C に 2 本の接線を引き，その接点を M，N とする。直線 OP と弦 MN の交点を Q とする。点 Q の座標を t を用いて表せ。ただし，t は実数とする。

(2)　点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　　[2012]

解答例



(1)　円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ における接線の方程式は，それぞれ

$$x_1x+y_1y=1,\ \ x_2x+y_2y=1$$

ともに点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ を通ることより，

$$tx_1+2y_1=1\cdots\cdots\cdots①,\ \ tx_2+2y_2=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，方程式 $tx+2y=1\cdots\cdots③$ で表される図形を考えると，これは直線を表し，①より点 M，②より点 N を通る。すなわち③は直線 MN の方程式である。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k(t,\ 2)$ とおくと，点 Q が直線 MN 上にあることより，

$$t\cdot kt+2\cdot 2k=1,\ \ k=\frac{1}{t^2+4}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{t^2+4}(t,\ 2)$ より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t}{t^2+4},\ \dfrac{2}{t^2+4}\right)$

(2)　$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，(1)より，$x=\dfrac{t}{t^2+4}\cdots\cdots\cdots④$，$y=\dfrac{2}{t^2+4}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より $x=\dfrac{t}{2}y$ となり，$y>0$ から $t=\dfrac{2x}{y}\cdots\cdots\cdots⑥$

⑥を⑤に代入して，$y\left(\dfrac{4x^2}{y^2}+4\right)=2$，$2x^2+2y^2=y$ となり，

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}y=0,\ \ x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\cdots\cdots\cdots⑦$$

よって，点 Q の軌跡は円⑦である。ただし，$y>0$ から原点は除く。

コメント

軌跡についての有名な頻出問題です。(1)(2)とも，いろいろな解法がありますが，その 1 例を記しています。

問　題

実数 x, y が連立不等式

$$10^{10} < 2^x3^y < 10^{11} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}),\ \ 10^9 < 3^x2^y < 10^{10} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) 連立不等式(A), (B)が表す xy 平面上の領域は，どのような図形であるか答えよ。また，その理由を述べよ。

(2) 連立不等式(A), (B)が満たす実数 x, y において，$x+y$ がとりうる値の範囲，および $y-x$ がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(3) 連立不等式(A), (B)が満たす整数 x, y を考える。このとき，$y-x$ が最大になる整数 x, y を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として計算してよい。

[2012]

解答例

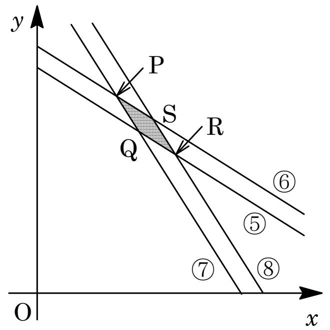
(1) $10^{10} < 2^x3^y < 10^{11}$ ……(A)より，$10 < x\log_{10}2 + y\log_{10}3 < 11$ ………①

$10^9 < 3^x2^y < 10^{10}$ ……(B)より，$9 < x\log_{10}3 + y\log_{10}2 < 10$ ………②

ここで，$\log_{10}2 = a$，$\log_{10}3 = b$ とおくと，①②は，

$$10 < ax+by < 11 \cdots\cdots\cdots ③,\ \ 9 < bx+ay < 10 \cdots\cdots\cdots ④$$

連立不等式③④で表される領域の境界線を，



$$ax+by=10,\ \ y=-\frac{a}{b}x+\frac{10}{b} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$ax+by=11,\ \ y=-\frac{a}{b}x+\frac{11}{b} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$bx+ay=9,\ \ y=-\frac{b}{a}x+\frac{9}{a} \cdots\cdots\cdots ⑦$$

$$bx+ay=10,\ \ y=-\frac{b}{a}x+\frac{10}{a} \cdots\cdots\cdots ⑧$$

すると，直線⑤と⑥は平行，直線⑦と⑧は平行であり，領域は平行四辺形である。

また，直線⑤上の点 $\left(0,\ \dfrac{10}{b}\right)$ と直線⑥の距離を d_1，直線⑦上の点 $\left(0,\ \dfrac{9}{a}\right)$ と直線⑧の距離を d_2 とおくと，

$$d_1 = \frac{\left|b\cdot\dfrac{10}{b}-11\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ d_2 = \frac{\left|a\cdot\dfrac{9}{a}-10\right|}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって，$d_1 = d_2$ より，領域はひし形となる。

(2)　まず，$0<a<b$ より，$-\dfrac{b}{a}<-1<-\dfrac{a}{b}<0$ となる。

ここで，直線⑥と⑦の交点を P とし，P の x 座標を x_p とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}=-\frac{b}{a}x_p+\frac{9}{a},\ \ x_p=\frac{-11a+9b}{b^2-a^2}$$

直線⑤と⑦の交点を Q とし，Q の x 座標を x_q とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_q+\frac{10}{b}=-\frac{b}{a}x_q+\frac{9}{a},\ \ x_q=\frac{-10a+9b}{b^2-a^2}$$

直線⑤と⑧の交点を R とし，R の x 座標を x_r とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_r+\frac{10}{b}=-\frac{b}{a}x_r+\frac{10}{a},\ \ x_r=\frac{-10a+10b}{b^2-a^2}=\frac{10}{a+b}$$

直線⑥と⑧の交点を S とし，S の x 座標を x_s とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_s+\frac{11}{b}=-\frac{b}{a}x_s+\frac{10}{a},\ \ x_s=\frac{-11a+10b}{b^2-a^2}$$

さて，$x+y$ のとりうる値の範囲は，$x+y=k$ すなわち $y=-x+k$ ……⑨として直線⑨が(1)の領域と共有点をもつ範囲として求められる。

(i)　直線⑨が点 Q を通るとき

$$x+y=x_q-\frac{a}{b}x_q+\frac{10}{b}=\frac{b-a}{b}\cdot\frac{-10a+9b}{b^2-a^2}+\frac{10}{b}=\frac{19}{a+b}=\frac{19}{\log_{10}6}$$

(ii)　直線⑨が点 S を通るとき

$$x+y=x_s-\frac{a}{b}x_s+\frac{11}{b}=\frac{b-a}{b}\cdot\frac{-11a+10b}{b^2-a^2}+\frac{11}{b}=\frac{21}{a+b}=\frac{21}{\log_{10}6}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{19}{\log_{10}6}<x+y<\dfrac{21}{\log_{10}6}$

次に，$y-x$ のとりうる値の範囲は，$y-x=l$ すなわち $y=x+l$ ……⑩として直線⑩が(1)の領域と共有点をもつ範囲として求められる。

(iii)　直線⑩が点 R を通るとき

$$y-x=-\frac{a}{b}x_r+\frac{10}{b}-x_r=-\frac{a+b}{b}\cdot\frac{10}{a+b}+\frac{10}{b}=0$$

(iv)　直線⑩が点 P を通るとき

$$y-x=-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}-x_p=-\frac{a+b}{b}\cdot\frac{-11a+9b}{b^2-a^2}+\frac{11}{b}=\frac{2}{b-a}=\frac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}$$

(iii)(iv)より，$0<y-x<\dfrac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}$

(3)　点 P において，$x_p=\dfrac{-11a+9b}{b^2-a^2}=\dfrac{-11a+9b}{(b+a)(b-a)}=\dfrac{0.9829}{0.7781\times0.1761}$

$$-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}=x_p+\frac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}=x_p+\frac{2}{0.1761}$$

よって，点$\mathrm{P}(x_p,\ y_p)$とおくと，$x_p \fallingdotseq 7.17$，$y_p \fallingdotseq 18.53$となる。

これより，$y-x$が最大になる整数として，$(x,\ y)=(8,\ 18)$が考えられ，この点が(1)の領域内にあるかどうかを調べると，

$$8a+18b=8\times0.3010+18\times0.4771=10.9958$$

$$8b+18a=8\times0.4771+18\times0.3010=9.2348$$

すると，不等式③と④をともに満たすことより，$y-x$が最大になる整数は，$(x,\ y)=(8,\ 18)$である。

コメント

内容は基本的ですが，計算によって疲労が蓄積する問題です。なお，(3)で 10.9958 というギリギリの値は，出題者の善意のためとみなし，それ以降の詰めは省きました。

問　題

円 $C_1 : x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$ と放物線 $C_2 : y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ について，次の問いに答えよ。

(1) C_1 と座標軸との共有点，および C_2 と座標軸との共有点の座標を求めよ。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3\leqq 0 \\ y\leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1 \end{cases}$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。D の面積 S を求めよ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値を求めよ。 [2011]

解答例

(1) まず，$C_1 : x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$ に対して，$y=0$ とすると，

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0,\ (x-\sqrt{3})^2=0,\ x=\sqrt{3}$$

また，$x=0$ とすると，$y^2-4y+3=0$，$y=1,\ 3$ となり，C_1 と座標軸の共有点は，

$$(\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 3)$$

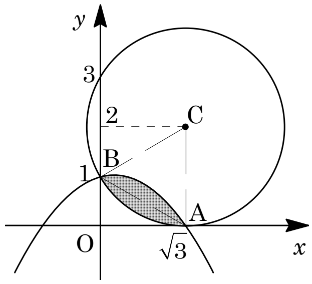
$C_2 : y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ ……(＊)に対して，$y=0$ とすると，

$$\sqrt{3}x^2-x-2\sqrt{3}=0,\ (\sqrt{3}x+2)(x-\sqrt{3})=0,\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}$$

また，$x=0$ とすると，$y=1$ となり，C_2 と座標軸の共有点は，

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right),\ (\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1)$$

(2) $x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3\leqq 0$，$y\leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ の表す領域 D は，右図の網点部となる。



そこで，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，また C_1 の中心を $\mathrm{C}(\sqrt{3},\ 2)$ とおく。領域 D の線分 AB の下側，上側の部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする。

さて，$\mathrm{CA}=\mathrm{CB}=\mathrm{AB}=2$ から，△ABC は正三角形となり，$\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{3}$ より，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$$

また，直線 $\mathrm{AB} : y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+1$ であるので，

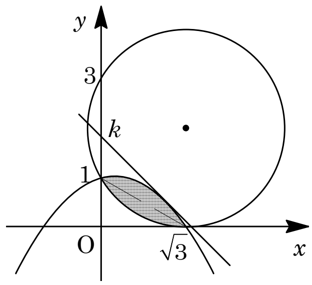
$$S_2=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1+\frac{1}{\sqrt{3}}x-1\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\sqrt{3})^3=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

すると，領域 D の面積 S は，

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{3}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(3)　$x+y=k$ とおくと，右図から，直線 $y=-x+k$ が C_2 に接するとき k は最大値をとる。



さて, (＊)より，$y'=-x+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ となり，$y'=-1$ から,

$$-x+\frac{1}{2\sqrt{3}}=-1\,,\ \ x=\frac{1}{2\sqrt{3}}+1=\frac{\sqrt{3}}{6}+1$$

(＊)を $y=-\dfrac{1}{2}x\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+1$ と変形して代入すると,

$$y=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+1\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}+1\right)+1=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}+1\right)+1=\frac{13}{24}$$

よって，$x+y$ は $(x,\ y)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+1,\ \dfrac{13}{24}\right)$ において最大となり，その最大値は,

$$\frac{\sqrt{3}}{6}+1+\frac{13}{24}=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{37}{24}$$

コメント

内容は基本的ですが，計算量のある問題です。特に(3)では，図を雑にかくと調べることが増えてきます。

問　題

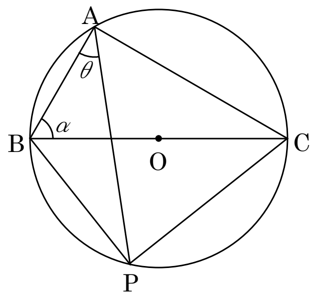
$\angle A=\frac{\pi}{2}$，$\angle B=\alpha$ である△ABC を考える。△ABC の外接円の半径を R とする。この外接円上の点 P が，点 A を含まない弧 BC 上を動くものとする。$\angle BAP=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) △ABP の面積の最大値を R, α を用いて表せ。

(2) △BPC の面積を R, θ を用いて表せ。

(3) $\alpha=\frac{\pi}{3}$ とする。△ABP と△BPC の面積の和 S の最大値を求めよ。 [2010]

解答例



(1) $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ より，△ABC の外接円の中心を O とすると，点 O は辺 BC の中点であり，BC $=2R$ となる。

まず，$\angle ABC=\alpha$ から，$AB=2R\cos\alpha$

また，$\angle PBC=\angle PAC=\frac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$BP=2R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\sin\theta$$

さらに，$\angle ABP=\alpha+\frac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}AB\cdot BP\sin\angle ABP=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\theta\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=2R^2\cos\alpha\sin\theta\cos(\theta-\alpha)=2R^2\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}$$
$$=R^2\cos\alpha\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}$$

ここで，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $-\alpha<2\theta-\alpha<\pi-\alpha$ であり，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ から $2\theta-\alpha=\frac{\pi}{2}$ となる θ が存在する。すると，この θ において $\sin(2\theta-\alpha)=1$ となり，△ABP の面積は最大値 $R^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$ をとる。

(2) $CP=2R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\cos\theta$ より，

$$\triangle BPC=\frac{1}{2}BP\cdot CP=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta=2R^2\sin\theta\cos\theta=R^2\sin 2\theta$$

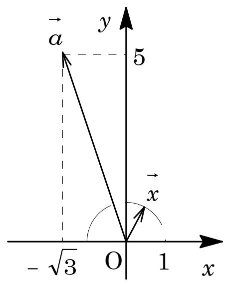
(3) $\alpha=\frac{\pi}{3}$ のとき, (1)より，$\triangle ABP=\frac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ となり，

$$S=\triangle ABP+\triangle BCP=\frac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin 2\theta\right\}$$
$$=\frac{1}{4}R^2(\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}+4\sin 2\theta)$$
$$=\frac{1}{4}R^2(-\sqrt{3}\cos 2\theta+5\sin 2\theta+\sqrt{3})$$

ここで，$\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 5)$，$\vec{x}=(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ とおくと，

$$S=\frac{1}{4}R^2(\vec{a}\cdot\vec{x}+\sqrt{3})$$

ここで，$0<2\theta<\pi$ から，$\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値が最大となるのは，$\vec{x}$ が $\vec{a}$ と同じ向きになるときであり，このとき $\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値は $|\vec{a}|\cdot|\vec{x}|=2\sqrt{7}$ である。



よって, S の最大値は，$\dfrac{1}{4}(2\sqrt{7}+\sqrt{3})R^2$ である。

コメント

(1)の結論は図からストレートに導けますが, (3)も考えて数式処理をしました。

問　題

空間内の 3 点 A, B, C を頂点とする△ABC を考える。2 辺 BC, AC の中点をそれぞれ M, N とし，中線 AM と BN の交点を G とする。以下の問いに答えよ。

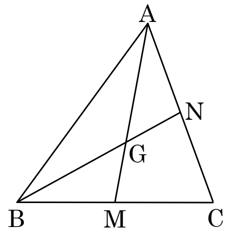
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) 2 点 P, Q が $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たすとき, 3 点 P, Q, G は同一直線上にあることを示せ。

(3) △ABC の頂点の座標が A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(7,\ 0,\ 6)$，C$(2,\ 12,\ 5)$ であるとき，xy 平面上を動く点 P$(x,\ y,\ 0)$ を考える。このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

(4) (3)において，特に点 P$(x,\ y,\ 0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ の最大値とそのときの P の座標，および最小値とそのときの P の座標を，それぞれ求めよ。 [2017]

解答例



(1) 条件より，点 G は△ABC の重心なので，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) (1)から，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}})+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}})$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}})$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，与えられた条件 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に，①を代入すると $3\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となり，これより 3 点 P, Q, G は同一直線上にある。

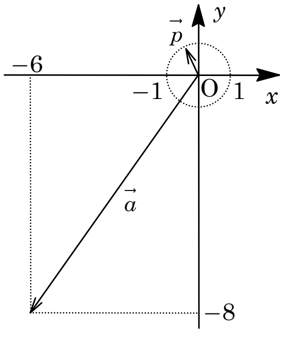
(3) A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(7,\ 0,\ 6)$，C$(2,\ 12,\ 5)$ に対して，△ABC の重心は G$(3,\ 4,\ 4)$ となり，P$(x,\ y,\ 0)$ とすると，①から，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|=3\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+16}$$

すると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ は，P$(3,\ 4,\ 0)$ で最小値 $3\sqrt{16}=12$ をとる。

(4) P$(x,\ y,\ 0)$ が xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くことより，$0\leqq\theta<2\pi$ として $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおき，(3)と同様にすると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3\sqrt{(\cos\theta-3)^2+(\sin\theta-4)^2+16}$$
$$=3\sqrt{-6\cos\theta-8\sin\theta+42}\ \cdots\cdots\cdots②$$



ここで，ベクトル $\vec{a}=(-6,\ -8)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を設定し，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を $\varphi\ (0\leqq\varphi\leqq\pi)$ とすると，

$$-6\cos\theta-8\sin\theta=\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\varphi$$
$$=10\cos\varphi\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3\sqrt{10\cos\varphi+42}$

すると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$は，$\cos\varphi=1\ (\varphi=0)$すなわち$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5},\ 0\right)$のとき最大値$3\sqrt{10+42}=6\sqrt{13}$をとり，$\cos\varphi=-1\ (\varphi=\pi)$すなわち$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5},\ 0\right)$のとき最小値$3\sqrt{-10+42}=12\sqrt{2}$をとる。

コメント

ベクトルと図形を題材にした基本的な問題です。誘導が細かいので，方針に迷うことはないでしょう。なお，(4)では$\vec{a}$と$\vec{p}$を設定し，2 つのベクトルの内積を用いて図形的に処理をしています。もちろん，サインでの合成でも構いませんが。

問　題

1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある。右の図 1 のように，2 辺 BC, CD 上に，$\mathrm{BS}=\mathrm{CT}=x\ (0\leqq x\leqq 2)$ を満たす点 S, T をとる。このとき，三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

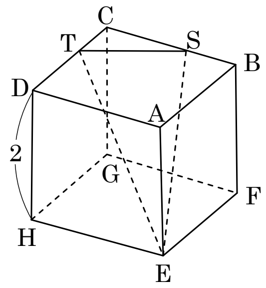


図1

(1)　右の図 2 を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ。

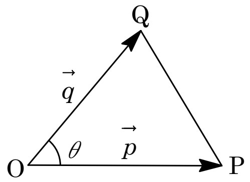


図2

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{c}$ とおく。立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ。

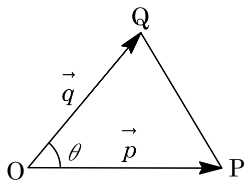
(3)　上の(1)を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ。

(4)　$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値も答えよ。　[2016]

解答例

(1)　$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2(1-\cos^2\theta)}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{ES}}=\overrightarrow{\mathrm{EB}}+\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\vec{a}+\vec{c}+\dfrac{x}{2}\vec{b}=\vec{a}+\dfrac{x}{2}\vec{b}+\vec{c}$

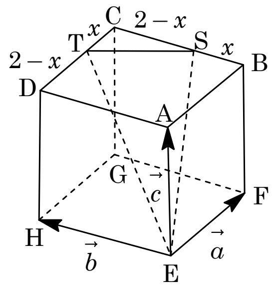
$$\overrightarrow{\mathrm{ET}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\overrightarrow{\mathrm{DT}}=\vec{b}+\vec{c}+\frac{2-x}{2}\vec{a}=\frac{2-x}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2=2^2+2^2+\frac{x^2}{4}\cdot 2^2=x^2+8$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2=\frac{(2-x)^2}{4}\cdot 2^2+2^2+2^2=x^2-4x+12$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}=\frac{2-x}{2}\cdot 2^2+\frac{x}{2}\cdot 2^2+2^2=8$$



(3)　$\triangle$EST の面積 $f(x)$ は，(1)より，

$$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)(x^2-4x+12)-8^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-4x^3+20x^2-32x+32}$$

(4)　$g(x)=x^4-4x^3+20x^2-32x+32$ とおくと，

$$g'(x)=4x^3-12x^2+40x-32$$
$$=4(x-1)(x^2-2x+8)$$
$$=4(x-1)\{(x-1)^2+7\}$$

これより，$0\leqq x\leqq 2$ における $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	32	$\searrow$	17	$\nearrow$	32

すると，$f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{g(x)}$ より，$f(x)$ は，$x=0$，2 のとき最大値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{32}=2\sqrt{2}$ をとり，$x=1$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ をとる。

コメント

空間の三角形の面積を求める問題です。対象が立方体ですので，計算は簡単です。

問　題

ひし形の紙がある(図 1)。点線で半分に折ると正三角形になった(図 2)。これを少し開いて机の上に立てると，三角錐の形になる。その高さを次のようにして求めたい。

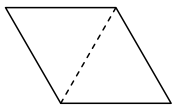


図1

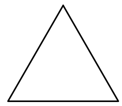


図2

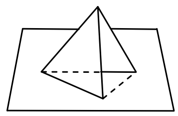


図3

図 4 において，2 つの正三角形 OAB と OAC の 1 辺の長さを 1 とする。点 O と平面 ABC との距離が，三角錐 OABC の高さになる。

空間ベクトルを利用してこの高さを求める。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ とおき，線分 BC の中点を M とする。以下の問いに答えよ。

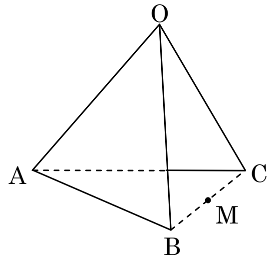


図4 (図3の拡大図)

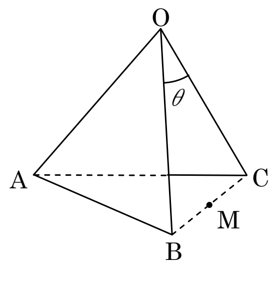
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。また，$|\vec{b}+\vec{c}|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおくと，点 H は直線 AM 上にある。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つことを示せ。さらに，H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす点であるとき，t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(4)　三角錐 OABC の高さを h とする。h を $\cos\theta$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立つとき，θ と h の値を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，M は線分 BC の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\,,\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\frac{\pi}{3}$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

また，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ から，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1^2\cdot\cos\theta=\cos\theta$ となり，

$$|\vec{b}+\vec{c}|^2=1^2+2\cos\theta+1^2=2+2\cos\theta$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-t)\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}(1-t)+\frac{t}{2}\cos\theta+\frac{t}{2}\cdot1^2-\frac{1}{2}(1-t)-\frac{t}{2}\cdot1^2-\frac{t}{2}\cos\theta=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つ。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$ から，

$$(1-t)\Big(-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\Big)+\frac{t}{2}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\Big)+\frac{t}{2}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\Big)=0$$

すると，$-\dfrac{1}{2}(1-t)+\dfrac{t}{2}\cos\theta=0$ から，$t=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ ………(＊)

(4)　(3)から(＊)のとき，$h=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=(1-t)^2+\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}t(1-t)+\frac{1}{2}t(1-t)+\frac{t^2}{2}\cos\theta$$

$$=\frac{t^2}{2}(1+\cos\theta)-t+1=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}-\frac{1}{1+\cos\theta}+1=\frac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

よって，$h=\sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}}$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のとき M は H と一致することから $t=1$ となり，(＊)より，

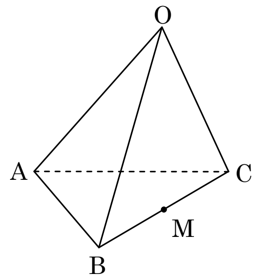
$$\frac{1}{1+\cos\theta}=1,\ \cos\theta=0$$

これより，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$h=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる。

コメント

空間ベクトルの応用問題です。細かすぎるほどの誘導が付けられています。

問　題



右図のような四面体 OABC がある。各面 ABC, OBC, OCA, OAB の重心を，それぞれ P, Q, R, S とし，辺 BC の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{m}$ とおく。次の問いに答えよ。

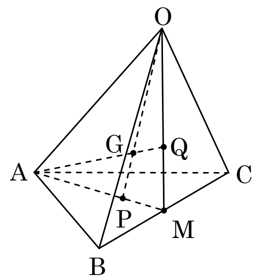
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{m}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(2)　線分 OP と線分 AQ の交点を G とする。線分 OP 上の点 U は，実数 s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$(0\leqq s\leqq 1)$ と表され，線分 AQ 上の点 V は，実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(0\leqq t\leqq 1)$ と表される。このことを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(3)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を表せ。

(4)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中から必要なものを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ をそれぞれ表せ。また，点 G が線分 BR および線分 CS 上にあることを示せ。　[2013]

解答例



(1)　面 ABC, OBC の重心は，それぞれ P, Q なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}\vec{m}，\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{m}$$

(2)　線分 OP と線分 AQ の交点 G は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}s\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{m}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{m}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{m}$ は 1 次独立なので，①②より，$\frac{1}{3}s=1-t$　$\frac{2}{3}s=\frac{2}{3}t$

すると，$s=t=\frac{3}{4}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{m}\cdots\cdots\cdots③$

(3)　③より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdots\cdots\cdots④$

(4)　面 OCA, OAB の重心は，それぞれ R, S なので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

④より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

これより，点 G は線分 BR および線分 CS 上にある。

コメント

空間ベクトルの基本問題です。誘導がくどいと感じられるほど，細かくつけられています。

問　題

四面体 OABC において,

$$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=3,\ \mathrm{OC}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ,\ \angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$$

とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 平面 ABC 上に点 H をとり, s, t, u を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおく。このとき, $s+t+u=1$ となることを示せ。

(2) (1)の $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直であるとき, s, t, u の値をそれぞれ求めよ。

(3) 平面 OAB 上に点 K をとり, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直であるとする。このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表し, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ。　[2012]

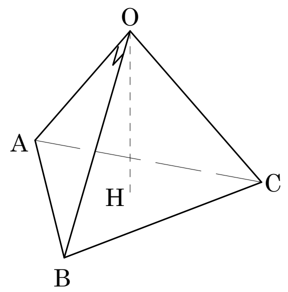
解答例

(1) 点 H が平面 ABC 上にあることより, x, y を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+y(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$=(1-x-y)\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}$$



条件より, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ なので, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次独立であることから,

$$s=1-x-y,\ t=x,\ u=y$$

よって, $s+t+u=1$ ………①

(2) 条件より, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3\cdot\cos 90^\circ=0$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\cdot2\cdot\cos120^\circ=-3,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot1\cdot\cos120^\circ=-1$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直なので, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\ s-9t+2u=0\text{ ………②}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0,\ 2s+3t-5u=0\text{ ………③}$$

②③より, $t=\frac{3}{7}u$, $s=\frac{13}{7}u$ となり, ①に代入すると,

$$\frac{13}{7}u+\frac{3}{7}u+u=1,\ \frac{23}{7}u=1$$

よって, $u=\frac{7}{23}$, $t=\frac{3}{23}$, $s=\frac{13}{23}$

(3) 点 K は平面 OAB 上にあるので, l, m を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=l\vec{a}+m\vec{b}$ と表せ,

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}=l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直なので, $\overrightarrow{\mathrm{CK}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CK}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}\cdot\vec{a}=(l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0,\ l+1=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CK}}\cdot\vec{b}=(l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0,\ 9m+3=0$$

すると，$l=-1$，$m=-\dfrac{1}{3}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=-\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}=-\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|^2=|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}=2$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|=\sqrt{2}$ から，四面体 OABC の体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

コメント

空間ベクトルの基本的な問題です。ただ, (2)と(3)は独立の設問です。

問　題

3 辺の長さが $\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=5$ である直角三角形 ABC と，その内側にあって 2 辺 AB および AC に接する円 O を考える。この円の半径を r とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB との交点を H とする。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクトルを，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{u}$ $(t>0)$ とする。次の問いに答えよ。

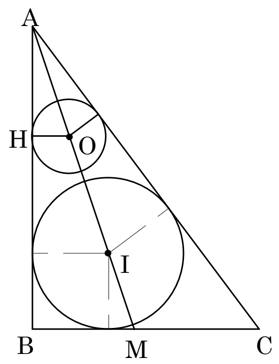
(1)　直線 AO と辺 BC の交点を M とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ の内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HO}}$ を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ および t を用いて表せ。また，円 O の半径 r を t で表せ。

(3)　円 O が辺 BC にも接するとき，その中心を I とする。すなわち，I は三角形 ABC の内心である。そのときの t の値と，内接円 I の半径を求めよ。

(4)　円 O と内接円 I が共有点をもたないような t の範囲を求めよ。　[2011]

解答例



(1)　∠BAC の二等分線 AM は，$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$ より，k を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=k(\vec{u}+\vec{v})=\frac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{k}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また, M は BC 上の点なので，$\dfrac{k}{4}+\dfrac{k}{5}=1$，$k=\dfrac{20}{9}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})=\dfrac{20}{9}\vec{u}+\dfrac{20}{9}\vec{v}$

(2)　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{4}{5}$ より，$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times1\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}$

ここで，$\mathrm{AO}:\mathrm{AM}=\mathrm{AH}:\mathrm{AB}=t:4$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{t}{4}\cdot\frac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{5}{9}t(\vec{u}+\vec{v})\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{HO}}=\dfrac{5}{9}t(\vec{u}+\vec{v})-t\vec{u}=-\dfrac{4}{9}t\vec{u}+\dfrac{5}{9}t\vec{v}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{HO}}|^2=\left(\frac{t}{9}\right)^2|-4\vec{u}+5\vec{v}|^2=\left(\frac{t}{9}\right)^2\left(16-40\times\frac{4}{5}+25\right)=\frac{t^2}{9}$$

すると，$t>0$ から，$r=|\overrightarrow{\mathrm{HO}}|=\sqrt{\dfrac{t^2}{9}}=\dfrac{t}{3}$

(3)　内接円の半径を r とおくと，$(3-r)+(4-r)=5$ より，$r=1$ となる。

すると, (2)から，$\dfrac{t}{3}=1$ となり，$t=3$ である。

(4)　$(*)$から，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{5}{9}\times3(\vec{u}+\vec{v})=\dfrac{5}{3}(\vec{u}+\vec{v})$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{9}t\right)(\vec{u}+\vec{v})$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2=\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{9}t\right)^2|\vec{u}+\vec{v}|^2=\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{9}t\right)^2\left(1+2\times\frac{4}{5}+1\right)=\frac{10}{9}(3-t)^2$$

すると，$t<3$ なので，$\mathrm{OI}=\dfrac{\sqrt{3}}{10}(3-t)$ となる。

これより，円 O と内接円 I が共有点をもたない条件は，

$$\frac{\sqrt{10}}{3}(3-t)>\frac{t}{3}+1,\ (\sqrt{10}+1)t<3\sqrt{10}-3,\ t<\frac{3(\sqrt{10}-1)}{\sqrt{10}+1}=\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$$

よって，$t>0$ と合わせて，$0<t<\dfrac{11-2\sqrt{10}}{3}$ である。

コメント

丁寧な誘導のついた平面ベクトルの問題です。ただ，(3)はあまりにも有名なので，誘導とは異なる解法になっています。

問　題

数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和をS_nとする。$S_n = 6n - 2a_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$が成り立つとき，初項a_1および一般項a_nを求めよ。 [2018]

解答例

$S_n = 6n - 2a_n$に対し，$S_1 = a_1$なので，$a_1 = 6\cdot 1 - 2a_1$から$a_1 = 2$

また，$n \geqq 2$のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$より，

$$a_n = (6n - 2a_n) - \{6(n-1) - 2a_{n-1}\} = -2a_n + 2a_{n-1} + 6$$

すると，$a_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1} + 2$となり，$a_n - 6 = \dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 6)$から，

$$a_n - 6 = (a_1 - 6)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$a_n = 6 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$となり，この式は$n = 1$のときも成り立つ。

コメント

和と一般項との関係についての基本題です。

問　題

数列$\{a_n\}$の一般項が，$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$であるとき，$a_{n+1}-a_n$を n の式で表し，a_nが最大となる正の整数nをすべて求めよ。 [2017]

解答例

$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$のとき，$a_{n+1}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}(n+1)n$となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n n\left\{\frac{3}{4}(n+1)-(n-1)\right\}=-\left(\frac{3}{4}\right)^n n\left(\frac{1}{4}n-\frac{7}{4}\right)$$

すると，$n\leqq 6$のとき$a_{n+1}>a_n$，$n=7$のとき$a_{n+1}=a_n$，$n\geqq 8$のとき$a_{n+1}<a_n$となるので，a_nが最大となる正の整数nは，$n=7$，8である。

コメント

階差数列を利用した数列の増減について，基本を確認する問題です。

問　題

半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある。その面積を S とする。D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる。さらに，D_1 の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_2 をつくる。このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる($n \geqq 2$)。D_n の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) S と S_1 を求めよ。

(2) S_n を n の式で表せ($n \geqq 1$)。

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ。ただし，$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$ である。 [2016]

解答例

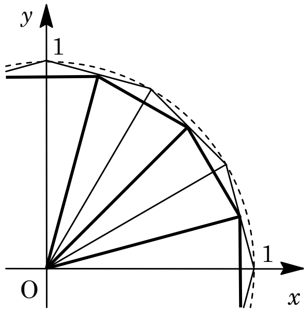
(1) 半径 1 の円に内接する正十二角形 D の面積 S は,

$$S = \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)\times 12 = 3$$

また，D の各辺の中点を順に結んでできる正十二角形 D_1 の面積 S_1 は,

$$S_1 = \left\{\frac{1}{2}\left(1\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)^2 \sin\frac{\pi}{6}\right\}\times 12 = \cos^2\frac{\pi}{12}\cdot S$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)S = \frac{2+\sqrt{3}}{4}S = \frac{3(2+\sqrt{3})}{4}$$



(2) (1)と同様に考えると，$S_{n+1} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}S_n$ $(n \geqq 1)$ より,

$$S_n = S_1\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n$$

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ とすると，$3\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \dfrac{3}{2}$ となり，$2(2+\sqrt{3})^n \leqq 4^n$ から,

$$\log_2 2 + n\log_2(2+\sqrt{3}) \leqq n\log_2 2^2,\ 1+n\log_2(2+\sqrt{3}) \leqq 2n$$

すると，$\{2-\log_2(2+\sqrt{3})\}n \geqq 1$ となり，$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$ から,

$$0.1 < 2-\log_2(2+\sqrt{3}) < 0.11$$

よって，$n \geqq \dfrac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})}$ となるので，$9.09 < \dfrac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})} < 10$ から，求める最小の整数 n は 10 である。

コメント

図形と数列の基本的な融合問題です。最後の対数計算も複雑ではありません。

問　題

1 から $2n$ までの偶数の平方の和を a_n，奇数の平方の和を b_n とする。すなわち

$$a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2,\ \ b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

である。なお，1 から n までの自然数の平方の和については

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1) 偶数の平方の和 $2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2$ と奇数の平方の和 $1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2$ を求めよ。

(2) a_n と b_n を求めよ。

(3) $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ および $\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ を計算せよ。

(4) $c_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$ とするとき，$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ を求めよ。 [2014]

解答例

(1) $a_{10} = 2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2 = 2^2(1^2 + 2^2 \cdots + 10^2) = 4\cdot\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 1540$

$$b_{10} = 1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2 - a_{10} = \frac{20\cdot 21\cdot 41}{6} - 1540 = 1330$$

(2) (1)と同様にすると，

$$a_n = 2^2(1^2 + 2^2 \cdots + n^2) = 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2 - a_n = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

(3) (2)の結果を用いて，

$$\frac{1}{a_n} - \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3}{2n(n+1)(2n+1)} - \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3(1-n-1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= -\frac{3}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$\frac{1}{b_n} + \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3}{n(2n+1)(2n-1)} + \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3(2+2n-1)}{2n(2n+1)(2n-1)}$$

$$= \frac{3}{2n(2n-1)}$$

(4) $c_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{3}{2n(2n+1)} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ から，(3)の結果を用いると，

$$c_n = -\frac{3}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{3}{2n(2n-1)} = \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{n(2n-1)} - \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right\}$$

すると，$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ より，

$$S_n = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(2k-1)} - \frac{1}{(k+1)(2k+1)}\right\} = \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 1} - \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2n^2+3n}{(n+1)(2n+1)} = \frac{3n(2n+3)}{2(n+1)(2n+1)}$$

コメント

数列の和に関する問題ですが，過剰なほどの誘導がついています。

問　題

n を 2 以上の整数とする。n 個の実数 a_1，a_2，…，a_n が与えられたとき，

$$P_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,\quad Q_n=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}$$

とおく。次に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 $i,\ j$ に対する a_ia_j の和を R_n とする。たとえば，$R_2=a_1a_2$，$R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$ である。同様に，$1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての番号 $i,\ j$ に対する $(a_i-a_j)^2$ の和を S_n とする。たとえば，$S_2=(a_1-a_2)^2$，$S_3=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2$ である。次の問いに答えよ。

(1)　P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ。

(2)　すべての $n\geqq 2$ に対して，$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$ と表されることを，数学的帰納法で証明せよ。

(3)　Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ。

(4)　$a_1+a_2+a_3+a_4=1$ のとき，Q_4 の最小値と，そのときの a_1，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ。　[2013]

解答例

(1)　条件より，$P_4=(a_1+a_2+a_3+a_4)^2$，$Q_4=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+a_4^{\ 2}$

$$R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4$$

よって，$P_4=Q_4+2R_4$ ………①

(2)　$n\geqq 2$ に対して，$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$ の成立を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$ のとき　$S_2=(a_1-a_2)^2$，$Q_2=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}$，$R_2=a_1a_2$

よって，$S_2=(2-1)Q_2-2R_2$ が成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$S_k=(k-1)Q_k-2R_k$ ……②が成立すると仮定し，

$$(a_1-a_{k+1})^2+(a_2-a_{k+1})^2+\cdots+(a_k-a_{k+1})^2$$
$$=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_k^{\ 2}+ka_{k+1}^{\ \ 2}-2(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})$$
$$=Q_k+ka_{k+1}^{\ \ 2}-2(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})\ \cdots\cdots\cdots③$$

②＋③より，

$$S_k+(a_1-a_{k+1})^2+(a_2-a_{k+1})^2+\cdots+(a_k-a_{k+1})^2$$
$$=(k-1)Q_k+Q_k+ka_{k+1}^{\ \ 2}-2R_k-2(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})$$
$$=k(Q_k+a_{k+1}^{\ \ 2})-2(R_k+a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})$$

よって，$S_{k+1}=kQ_{k+1}-2R_{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ に対して，$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$ である。

(3)　(2)から $S_4=3Q_4-2R_4$ となり，①を代入すると，

$$S_4=3Q_4-(P_4-Q_4)=-P_4+4Q_4,\quad Q_4=\frac{1}{4}P_4+\frac{1}{4}S_4$$

(4)　$a_1+a_2+a_3+a_4=1$ のとき，$P_4=1^2=1$ となり，

$$S_4=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_1-a_4)^2+(a_2-a_3)^2+(a_2-a_4)^2+(a_3-a_4)^2$$

(3)から，$Q_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}S_4$ なので，Q_4 は $S_4=0$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとり，そのときの a_1，a_2，a_3，a_4 の値は $a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{1}{4}$ となる。

コメント

Q_4 の最小値を求めるために大掛かりな設定がされています。たとえば，有名なコーシー・シュワルツの不等式を利用すれば，ストレートなのですが。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) 関係式 $a_1=1$，$na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい。$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおいて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，a_n を求めよ。

(2) $x\neq 1$ のとき，等比数列の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}$ の両辺を x で微分せよ。その結果を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kx^k$ を求めよ。

(3) $p\neq 1$ のとき，関係式 $c_1=0$，$\dfrac{pc_{n+1}}{n}-\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。 [2011]

解答例

(1) $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ より，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$ となり，$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと，

$$b_1=\frac{a_1}{1}=1,\quad b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

$n\geqq 2$ のとき，$\displaystyle b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$

よって，$a_n=nb_n=2n-1$ となる。なお，この式は，$n=1$ でも成立している。

(2) $x\neq 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}$ の両辺を x で微分すると，

$$\sum_{k=1}^{n-1}kx^{k-1}=\frac{nx^{n-1}(x-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}=\frac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$$

両辺に x をかけると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kx^k=\frac{(n-1)x^{n+1}-nx^n+x}{(x-1)^2}$

(3) $\dfrac{pc_{n+1}}{n}-\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ より，$p(n+1)c_{n+1}-nc_n=n$ となり，$d_n=nc_n$ とおくと，

$$pd_{n+1}-d_n=n,\quad p^{n+1}d_{n+1}-p^nd_n=np^n$$

さらに，$e_n=p^nd_n$ とおくと，$e_1=p^1d_1=p\cdot 1\cdot c_1=0$ で，

$$e_{n+1}-e_n=np^n$$

$n\geqq 2$ のとき，$\displaystyle e_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}kp^k=\frac{(n-1)p^{n+1}-np^n+p}{(p-1)^2}$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(i)　$p \neq 0$ のとき

$$c_n = \frac{d_n}{n} = \frac{e_n}{np^n} = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p}{np^n(p-1)^2} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{np^{n-1}(p-1)^2}$$

(ii)　$p = 0$ のとき

$-\dfrac{c_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ より，$c_n = -1$ となるが，$c_1 = 0$ に反する。

(i)(ii)より，$p \neq 0$，$p \neq 1$ のとき，$c_n = \dfrac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{np^{n-1}(p-1)^2}$ である。

コメント

(3)の数列 $\{d_n\}$ についての漸化式は，解法がいろいろありますが，(2)の結論を誘導と考えると，上に記した解答例になるでしょう。

問　題

4 次方程式の解について，次の問いに答えよ。ただし，下のことは既知としてよい。

自然数 k, l, m が次の条件

(イ)　k と l は 1 以外の公約数をもたない　　(ロ)　k は lm の約数である

を満たすならば, k は m の約数である。

(1)　$a,\ b,\ c,\ d$ は整数で，$d\neq 0$ とする。方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は自然数であり，かつ $|d|$ の約数に限ることを証明せよ。

(2)　方程式 $2x^4-2x-1=0$ の実数解はすべて無理数であることを証明せよ。　[2010]

解答例

(1)　方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(d\neq 0)$ ……①が，有理数の解 $r=\dfrac{q}{p}$ （$p>0$, $q\neq 0$, p と q は互いに素である整数）をもつことより，

$$\frac{q^4}{p^4}+a\cdot\frac{q^3}{p^3}+b\cdot\frac{q^2}{p^2}+c\cdot\frac{q}{p}+d=0,\ \ q^4+apq^3+bp^2q^2+cp^3q+dp^4=0$$

すると，$q^4=-p(aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3)$ から，

$$|q|^4=|p|\cdot|aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3|\ \cdots\cdots\cdots②$$

条件から，$|p|$ と $|q|^4$ は 1 以外の公約数をもたず，しかも②から，$|p|$ は $|q|^4\times 1$ の約数なので，$|p|$ は 1 の約数，すなわち $|p|=1$ である。

このとき，$|r|=\dfrac{|q|}{|p|}=|q|$ から，$|r|$ は自然数となる。

そこで，方程式①は整数解 r をもつことになり，$r^4+ar^3+br^2+cr+d=0$

$$d=-r(r^3+ar^2+br+c),\ \ |d|=|r|\cdot|r^3+ar^2+br+c|$$

よって，$|r|$ は $|d|$ の約数である。

(2)　方程式 $2x^4-2x-1=0$ ……③に対して，$2x=t$ とおくと，

$$\frac{t^4}{8}-t-1=0,\ \ t^4-8t-8=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，方程式④が有理数の解をもつと仮定すると，(1)から，その解は整数で，しかも 8 の約数である。ここで，$f(t)=t^4-8t-8$ とおくと，

$$f(1)=-15,\ f(-1)=1,\ f(2)=-8,\ f(-2)=24$$

$$f(4)=216,\ f(-4)=280,\ f(8)=4024,\ f(-8)=4152$$

これより，方程式④は有理数の解をもたず，実数解はすべて無理数である。

よって，方程式③の実数解はすべて無理数である。

コメント

(1)は有名問題ですが，経験がないと難しいでしょう。(2)はその応用で，最高次の係数を 1 にすれば解決です。定数項に注目して逆数をとるという手もあります。

問　題

t を正の実数とし，複素数平面上に 2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ がある。等式

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{t}\left|z-t\right|\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の全体が表す図形を F とする。下の小問(1)から(4)を通して F がどのような図形を表すか調べたい。以下の問いに答えよ。

(1)　A と B はどちらも図形 F の点ではないことを示せ。

(2)　$t=1$ ならば, F はどのような図形を表すか。

(3)　$t\neq1$ とする。図形 F の点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 AB 上に位置するような z の値は 2 つある。その値 z_1 と z_2 を求めよ。ただし，$|z_1|<|z_2|$ とする。

(4)　$t\neq1$ とする。2 点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ として, m の値を求めよ。また，$\mathrm{P}(z)$ が図形 F の点であるとき，$|z-m|$ の値を求めよ。さらに, F はどのような図形を表すか。　[2018]

解答例

(1)　$t>0$ で, 複素数平面上の点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ に対し，$t\left|z+\dfrac{1}{t}\right|=\dfrac{1}{t}\left|z-t\right|\cdots\cdots\cdots(\mathrm{a})$

まず，$z=t$ のとき(a)は $t\left|t+\dfrac{1}{t}\right|=0$ となり不成立，また $z=-\dfrac{1}{t}$ のとき(a)は $0=\dfrac{1}{t}\left|-\dfrac{1}{t}-t\right|$ となり不成立である。

すなわち, A と B はどちらも(a)を満たさず, 図形 F の点ではない。

(2)　$t=1$ のとき, (a)は $|z+1|=|z-1|$ となり，$\mathrm{P}(z)$ は 2 点 -1, 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。すなわち, F は虚軸を表す。

(3)　直線 AB 上にあり, (a)より $|z-t|:\left|z+\dfrac{1}{t}\right|=t:\dfrac{1}{t}$ を満たす点 $\mathrm{P}_1(z_1)$ と $\mathrm{P}_2(z_2)$ は, 線分 AB を $t:\dfrac{1}{t}$ に内分する点, 外分する点に一致する。

そこで, 線分 AB を内分する点 w_1，外分する点 w_2 とおくと,

$$w_1=\frac{\frac{1}{t}\cdot t+t\left(-\frac{1}{t}\right)}{t+\frac{1}{t}}=\frac{1-1}{t+\frac{1}{t}}=0,\quad w_2=\frac{-\frac{1}{t}\cdot t+t\left(-\frac{1}{t}\right)}{t-\frac{1}{t}}=\frac{-1-1}{t-\frac{1}{t}}=\frac{-2t}{t^2-1}$$

すると，$|z_1|<|z_2|$ から，$z_1=w_1=0$，$z_2=w_2=\dfrac{-2t}{t^2-1}$ である。

(4)　点 $\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$ を結ぶ線分の中点を $\mathrm{M}(m)$ とすると，$m=\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{-t}{t^2-1}$

さて(a)より，$t^2\left|z+\dfrac{1}{t}\right|^2=\dfrac{1}{t^2}\left|z-t\right|^2$ として，$t^2\left(z+\dfrac{1}{t}\right)\left(\overline{z}+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t^2}(z-t)(\overline{z}-t)$

$$t^2\left(z\overline{z}+\frac{1}{t}z+\frac{1}{t}\overline{z}+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{t^2}(z\overline{z}-tz-t\overline{z}+t^2)$$

$$\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)z\overline{z}+\left(t+\frac{1}{t}\right)z+\left(t+\frac{1}{t}\right)\overline{z}=0$$

$t+\dfrac{1}{t}>0$ より，$\left(t-\dfrac{1}{t}\right)z\overline{z}+z+\overline{z}=0$ となり，$z\overline{z}+\dfrac{t}{t^2-1}z+\dfrac{t}{t^2-1}\overline{z}=0$ から，

$$\left(z+\frac{t}{t^2-1}\right)\left(\overline{z}+\frac{t}{t^2-1}\right)=\left(\frac{t}{t^2-1}\right)^2$$

すると，$(z-m)(\overline{z}-m)=(-m)^2$ となり，$|z-m|^2=m^2$ から $|z-m|=|m|$

これより，F は中心が $\mathrm{M}(m)$ で半径が $|m|$ の円を表す。

コメント

複素数平面上の軌跡を問う超有名問題です。たいへん詳細な誘導がついています。なお, (4)がアポロニウスの円であることは経験済みと思われますが。

問　題

複素数平面上の点$\mathrm{P}(z)$が，原点を中心とする半径 3 の円の周上を動くとき，$w=\dfrac{z+3i}{z}$で表される点$\mathrm{Q}(w)$はどのような図形を描くか。 [2017]

解答例

点$\mathrm{P}(z)$は原点を中心とする半径 3 の円の周上を動くので，$|z|=3$ ………①

条件より$w=\dfrac{z+3i}{z}$から$wz=z+3i$となり，$(w-1)z=3i$より，

$$z=\frac{3i}{w-1}\quad (w\neq 1)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②を①に代入すると，$\left|\dfrac{3i}{w-1}\right|=3$から$\dfrac{3}{|w-1|}=3$となり，$|w-1|=1$

よって，点$\mathrm{Q}(w)$は点 1 を中心とする半径 1 の円を描く。なお，このとき$w\neq 1$は満たされている。

コメント

複素数平面上の変換に関する基本題です。

問　題

放物線 $C : y = x^2$ と定点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ および C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_1(2,\ 4)$ が与えられている。自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，以下の操作を繰り返す。

> C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ p_n{}^2)$ に対し，
> 手順 1　直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ と C との交点のうち，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}_n(q_n,\ q_n{}^2)$ とし，
> 手順 2　直線 $\mathrm{Q}_n\mathrm{B}$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ p_{n+1}{}^2)$ とする。

このとき，以下の問いに答えよ。

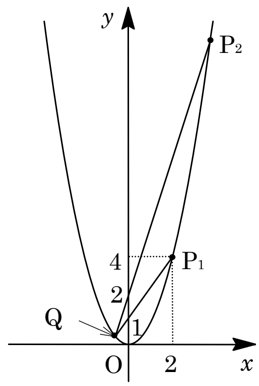
(1)　a を定数とする。直線 $y = ax + 1$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とする。このとき，$pq = -1$ が成り立つことを示せ。また，点 Q_1 の座標を求めよ。

(2)　点 P_2，Q_2 および P_3 の座標を求めよ。

(3)　数列 $\{p_n\}$ および数列 $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(4)　$x \geqq 0$ の範囲において，C と直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。さらに，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$ を求めよ。　[2017]

解答例



(1)　$C : y = x^2$ と $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通る直線 $y = ax + 1$ を連立して，

$$x^2 = ax + 1,\ \ x^2 - ax - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots①$$

①の解を $x = p,\ q\ (p > q)$ とすると，$pq = -1 \cdots\cdots\cdots②$

すると，$\mathrm{P}_1(2,\ 4)$ より，点 Q_1 の x 座標は $-\dfrac{1}{2}$ となり，

$\mathrm{Q}_1\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ である。

(2)　C と $\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通る直線 $y = bx + 2$ を連立して，

$$x^2 = bx + 2,\ \ x^2 - bx - 2 = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

③の解を $x = p,\ q\ (p > q)$ とすると，$pq = -2 \cdots\cdots\cdots④$

すると，$\mathrm{Q}_1\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ より，点 P_2 の x 座標は 4 となり $\mathrm{P}_2(4,\ 16)$ である。

同様にして，②から点 Q_2 の x 座標は $-\dfrac{1}{4}$ となり $\mathrm{Q}_2\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16}\right)$ である。さらに，④から点 P_3 の x 座標は 8 となり $\mathrm{P}_3(8,\ 64)$ である。

(3)　$\mathrm{P}_n(p_n,\ p_n{}^2)$，$\mathrm{Q}_n(q_n,\ q_n{}^2)$ に対して，$p_1 = 2$，$q_1 = -\dfrac{1}{2}$ のもとで，②④より，

$$p_nq_n = -1 \cdots\cdots\cdots⑤,\ \ p_{n+1}q_n = -2 \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=2$ となり，$p_{n+1}=2p_n$ から，

$$p_n=p_1\cdot 2^{n-1}=2^n,\ \ q_n=-\frac{1}{2^n}$$

(4) 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ は，傾きが $\dfrac{{p_n}^2-{q_n}^2}{p_n-q_n}=p_n+q_n=2^n-\dfrac{1}{2^n}$ から，その方程式は，

$$y=\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)x+1$$

$x\geqq 0$ で C と直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n は，

$$S_n=\int_0^{2^n}\left\{\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)x+1-x^2\right\}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{2^n}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 2^{3n}+\frac{1}{2}\left(2^n-\frac{1}{2^n}\right)\cdot 2^{2n}+2^n=\frac{1}{6}\cdot 2^{3n}+\frac{1}{2}\cdot 2^n=\frac{1}{6}\cdot 2^n(2^{2n}+3)$$

すると，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{2^{n+1}(2^{2n+2}+3)}{2^n(2^{2n}+3)}=\dfrac{2(2^2+3\cdot 2^{-2n})}{1+3\cdot 2^{-2n}}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{2\cdot 2^2}{1}=8$$

コメント

図形と数列の問題です。与えられた条件は簡明で誘導も詳しいので，計算ミスだけ要注意です。

問　題

次の関係式によって定められる数列$\{a_n\}$について，一般項a_nと$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}-(\sqrt{2}+1)a_n=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$ [2015]

解答例

$a_1=1$，$a_{n+1}-(\sqrt{2}+1)a_n=1$に対して，$a_{n+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=(\sqrt{2}+1)\left(a_n+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$から，

$$a_n+\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(a_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{2}+1)^{n-1}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)^{n-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}$となり，$\sqrt{2}+1>1$から$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$である。

コメント

漸化式と極限についての基本題です。

問　題

a, b を $a>b>0$ を満たす定数とし，

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n{}^2 + b_n{}^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_1 = b,\ b_{n+1} = 2a_nb_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を考える。次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{c_n\}$を$c_n = a_n + b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定義するとき，その一般項$c_n$を a, b を用いて表せ。

(2) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項a_n，b_nを a, b を用いて表せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$が存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ。

(4) 無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が収束するとき，$a+b<1$が成り立つことを証明せよ。　[2010]

解答例

(1) 条件より，$a_1 = a$，$a_{n+1} = a_n{}^2 + b_n{}^2$……①，$b_1 = b$，$b_{n+1} = 2a_nb_n$……②

①②より，$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n{}^2 + b_n{}^2 + 2a_nb_n = (a_n + b_n)^2$となり，$c_n = a_n + b_n$から，

$$c_{n+1} = c_n{}^2 \text{………③}$$

ここで，$a>b>0$から$c_1>0$となり，③から帰納的に$c_n>0$である。

③より，$a+b\neq 1$のとき，$\log_{a+b}c_{n+1} = \log_{a+b}c_n{}^2 = 2\log_{a+b}c_n$

$$\log_{a+b}c_n = 2^{n-1}\log_{a+b}(a+b) = 2^{n-1}$$

よって，$c_n = (a+b)^{2^{n-1}}$……④となり，この式は$a+b=1$のときも成立する。

(2) (1)と同様にして，$d_n = a_n - b_n$とおくと，①②より，$d_{n+1} = d_n{}^2$………⑤

ここで，$a>b>0$から$d_1>0$となり，⑤から帰納的に$d_n>0$である。

⑤より，$a-b\neq 1$のとき，$\log_{a-b}d_{n+1} = \log_{a-b}d_n{}^2 = 2\log_{a-b}d_n$

$$\log_{a-b}d_n = 2^{n-1}\log_{a-b}(a-b) = 2^{n-1}$$

よって，$d_n = (a-b)^{2^{n-1}}$……⑥となり，この式は$a-b=1$のときも成立する。

④⑥より，$a_n = \dfrac{1}{2}(c_n + d_n) = \dfrac{1}{2}\left\{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}\right\}$

$$b_n = \frac{1}{2}(c_n - d_n) = \frac{1}{2}\left\{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}\right\}$$

(3) (2)より，$\displaystyle\frac{b_n}{a_n} = \frac{(a+b)^{2^{n-1}} - (a-b)^{2^{n-1}}}{(a+b)^{2^{n-1}} + (a-b)^{2^{n-1}}} = \frac{1-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}{1+\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}}$

ここで，$a+b>a-b>0$から$0<\dfrac{a-b}{a+b}<1$となり，$\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1$$

(4)　まず，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であある。

ここで，(2)より，$a_n = \dfrac{1}{2}(a+b)^{2^{n-1}}\left\{1+\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{2^{n-1}}\right\}$と変形し，(3)と同様に考えると，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる条件は，$\lim_{n\to\infty}(a+b)^{2^{n-1}} = 0$，すなわち $a+b<1$ である。

コメント

誘導付きで漸化式を解く問題です。後半の極限の処理も基本的です。

問　題

関数 $f(x)$ を，$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x<0) \\ x & (x \geqq 0) \end{cases}$ と定義する。「微分係数の定義」にしたがって，$f(x)$ の $x=0$ における微分係数を求めよ。 [2018]

解答例

$f(0)=0$ なので，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ となり，

$$\lim_{x\to -0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to -0}(x+1)=1,\quad \lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{x}{x}=1$$

よって，$f'(0)=1$ である。

コメント

微分係数の定義の確認題です。

問　題

e を自然対数の底とする。$x>e$ の範囲において，関数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ を考える。この両辺の対数を x について微分することにより，y は減少関数であることを示せ。また，$e<a<b$ のとき，$a^b>b^a$ が成り立つことを証明せよ。 [2017]

解答例

$x>e$ のとき，$y=x^{\frac{1}{x}}$ に対して $\log y=\dfrac{1}{x}\log x$ となり，両辺を x で微分すると，

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x^2}=-\frac{\log x-1}{x^2},\quad y'=-x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\log x-1}{x^2}<0$$

よって，$x>e$ において，y は減少関数である。

これより，$e<a<b$ のとき $a^{\frac{1}{a}}>b^{\frac{1}{b}}$ となり，両辺を ab 乗すると，

$$\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^{ab}>\left(b^{\frac{1}{b}}\right)^{ab},\quad a^b>b^a$$

コメント

微分法の不等式への応用問題です。丁寧な誘導がついています。

問　題

xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円がある。この円の周上に 2 点 $\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ と $\mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとる。ただし，$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ とする。さらに，2 点 A, B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ C, D とする。扇形 OAB の面積を S_1，弧 AB と線分 BD, DC, CA で囲まれた図形 F の面積を S_2 とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 を α と β で表せ。

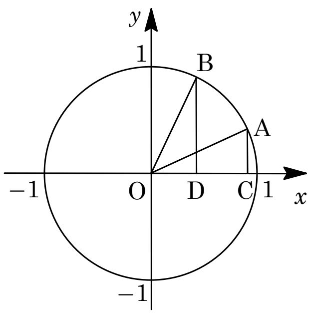
(2)　S_2 を α と β で表せ。

(3)　$S_1=S_2$ のとき，β を α の式で表せ。また，このとき $t=\cos\alpha-\cos\beta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(4)　(3)のとき，扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とする。さらに，$V=V_1-V_2$ とする。V を t の式で表せ。

(5)　(4)において，V の最大値，およびそのときの A, B の座標を求めよ。　[2017]

解答例



(1)　$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ に対して，扇形 OAB の面積 S_1 は，$\angle\mathrm{AOB}=\beta-\alpha$ より，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

(2)　$\mathrm{C}(\cos\alpha,\ 0)$，$\mathrm{D}(\cos\beta,\ 0)$ に対して，弧 AB と線分 BD, DC, CA で囲まれた図形 F の面積 S_2 は，

$$S_2=S_1+\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta$$
$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\frac{1}{4}(\sin2\alpha-\sin2\beta)$$

(3)　$S_1=S_2$ のとき，(2)より $\sin2\alpha-\sin2\beta=0$ となり，

$$2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=0$$

ここで，$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ より $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ となり，$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ ………①

さて，$t=\cos\alpha-\cos\beta$ に対して，①から，

$$t=\cos\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{3}{4}\pi\right)$$

すると，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$ から $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ となるので，$0<\sin\left(\alpha+\frac{3}{4}\pi\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$ より $0<t<1$ である。

(4)　扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とすると，

$$V_1=\frac{1}{3}(\pi\sin^2\beta)\cos\beta+V_2-\frac{1}{3}(\pi\sin^2\alpha)\cos\alpha$$

すると，$V=V_1-V_2$ に①を適用して，

$$V=\frac{1}{3}\pi(\sin^2\beta\cos\beta-\sin^2\alpha\cos\alpha)=\frac{1}{3}\pi(\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cos\alpha\sin\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

ここで，$t^2=1-2\cos\alpha\sin\alpha$ から $\cos\alpha\sin\alpha=\dfrac{1-t^2}{2}$ となり，

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1-t^2}{2}t=\frac{1}{6}\pi(t-t^3)$$

(5)　(4)より，$V'=\dfrac{1}{6}\pi(1-3t^2)$ となり，$0<t<1$ における V の値の変化は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
V'		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

これより，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき V は最大となり，最大値は $\dfrac{1}{6}\pi\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{27}\pi$ である。このとき，

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdots\cdots\cdots②,\ \ \cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots③$$

②より $\cos\alpha=\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，③に代入すると $\left(\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ から，

$$\sin^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha-\frac{1}{3}=0$$

$0<\sin\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より $\sin\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$，$\cos\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

また，①より，$\cos\beta=\sin\alpha$，$\sin\beta=\cos\alpha$ となるので，求める A, B の座標は，

$$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6},\ \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right),\ \ \mathrm{B}\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6},\ \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right)$$

コメント

微分と最大・最小問題ですが，設問が 5 題もあり，かなりの量になっています。ただ，難しい計算はありませんが。

問　題

積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1) 部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2) $F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3) $n\geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n\geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4) $p(x)=x^n$ とおくとき, k 次導関数 $p^{(k)}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。　[2018]

解答例

(1) $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して，

$$F_2(x)=\int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^2}{2}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x te^{-t}\,dt=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)$$

$$F_1(x)=\int_0^x \frac{t^1}{1!}e^{-t}\,dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+F_0(x)$$

(2) $F_0(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt=-\Big[e^{-t}\Big]_0^x=-(e^{-x}-1)=1-e^{-x}$

$$F_1(x)=-xe^{-x}+F_0(x)=-xe^{-x}+1-e^{-x}=1-(1+x)e^{-x}$$

$$F_2(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+1-(1+x)e^{-x}=1-\Big(1+x+\frac{x^2}{2}\Big)e^{-x}$$

(3) $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^n}{n!}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+F_{n-1}(x)$

すると，$n\geqq 1$ で，$F_n(x)=F_0(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{F_k(x)-F_{k-1}(x)\}$ より，

$$F_n(x)=1-e^{-x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}=1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

この式は $n=0$ のときも成立している。

(4)　$p(x)=x^n$ のとき，$p'(x)=nx^{n-1}$，$p''(x)=n(n-1)x^{n-2}$ となり，

$$p'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}=\frac{n!}{(n-3)!}x^{n-3}$$

$$p^{(4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}=\frac{n!}{(n-4)!}x^{n-4}$$

すると，帰納的に，$p^{(k)}(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ である。

さて，$n!F_n(x)=\displaystyle\int_0^x t^ne^{-t}\,dt$ より，(3)の結果を代入すると，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!\Big(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\Big)=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ となるので，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

コメント

定積分と関数列の融合問題です。本問も非常に細かな誘導がつけられています。なお，$p^{(k)}(x)$ について，気になるのであれば数学的帰納法です。

問　題

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$ [2015]

解答例

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{\frac{2}{n}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{\frac{3}{n}}{1+\left(\frac{3}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

コメント

頻出の区分求積法の確認問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$I_1=\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2+1}$ とする。$x=\tan\theta$ とおくことにより，$I_1=\dfrac{\pi}{3}$ を示せ。

(2)　(1)の I_1 を部分積分して，I_1 と $I_2=\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$ の関係式を導き，I_2 の値を求めよ。

(3)　$t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくことにより，不定積分 $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。

(4)　合成関数の微分法を用いて，関数 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ。

(5)　極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$ を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$x=\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，$x=0\to\sqrt{3}$ のとき $\theta=0\to\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$I_1=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\pi}{3}$$

(2)　$I_1=\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2+1}=\left[x\cdot\dfrac{1}{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x\cdot\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}dx$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+2I_1-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}+2I_1-2I_2$$

よって，$I_2=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{2}I_1=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\pi}{6}$

(3)　$t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくと，$dt=\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

これより，$\dfrac{dt}{t}=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ となり，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

(4)　$y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ に対して，

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(5) $P=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right\}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

すると, (3)の結果を用いて,

$$P=\left[\log(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1=\log(1+\sqrt{2})$$

コメント

微積分の計算問題です。ただ, 設問(4)の意味は不明です。

問　題

曲線 $y=\log x$ の接線はつねにこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ。以下，k は自然数とする。

(1)　点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする。また，$k\geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする。四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ。

(2)　次の 2 つの値の大小を比較せよ。

(ア)　$\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$　(ただし，$k\geqq 2$)

(イ)　$\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1}\log x\,dx$　(ただし，$k\geqq 1$)

(3)　$a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$$

(4)　2 以上の自然数 n について

$$U_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right),\ \ V_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

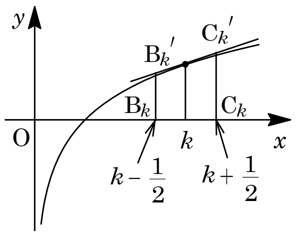
とおくとき，次の不等式を示せ。

$$U_n<\log(n!)<V_n$$

[2011]

解答例

(1)　$y=\log x$ に対して $y'=\dfrac{1}{x}$ となり，点 $\mathrm{A}_k{}'(k,\ \log k)$ における接線 l_k の方程式は，



$$y-\log k=\frac{1}{k}(x-k),\ \ y=\frac{1}{k}x-1+\log k$$

$x=k\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，複号同順で

$$y=\frac{1}{k}\left(k\pm\frac{1}{2}\right)-1+\log k=\pm\frac{1}{2k}+\log k$$

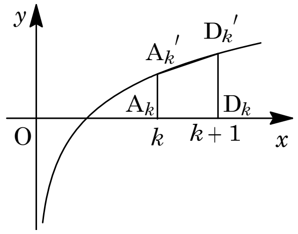
よって，$\mathrm{B}_k{}'\left(k-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2k}+\log k\right)$，$\mathrm{C}_k{}'\left(k+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2k}+\log k\right)$となる。

以上より，四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積 S_k は，

$$S_k=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k}+\log k+\frac{1}{2k}+\log k\right)\times 1=\log k$$

(2) $k \geqq 2$ のとき，$S_k > \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx$ なので, (1)より，$\log k > \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx$ ………①

$k \geqq 1$ のとき，$\mathrm{D}_k(k+1,\ 0)$，$\mathrm{D}_k{}'(k+1,\ \log(k+1))$ とおくと，四角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{D}_k\mathrm{D}_k{}'\mathrm{A}_k{}'$ の面積は,



$$\frac{1}{2}\{\log k + \log(k+1)\} \times 1 = \frac{\log k + \log(k+1)}{2}$$

さて，曲線 $y = \log x$ は上に凸であるので,

$$\frac{\log k + \log(k+1)}{2} < \int_k^{k+1} \log x\,dx \text{ ………②}$$

(3) $n \geqq 2$ のとき，まず，①より，$\sum_{k=2}^{n} \log k > \sum_{k=2}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx$ となり,

$$\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = \log(n!) > \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x\,dx$$

両辺から $\frac{1}{2}\log n$ を引いて,

$$a_n = \log(n!) - \frac{1}{2}\log n > \int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx + \int_n^{n+\frac{1}{2}} \log x\,dx - \frac{1}{2}\log n$$

ここで，$y = \log x$ は増加関数なので，$\int_n^{n+\frac{1}{2}} \log x\,dx > \int_n^{n+\frac{1}{2}} \log n\,dx = \frac{1}{2}\log n$

よって，$\int_n^{n+\frac{1}{2}} \log x\,dx - \frac{1}{2}\log n > 0$ から，$a_n > \int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx$ ………③

また，②より，$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log k + \log(k+1)}{2} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \log x\,dx$ となり,

$$\frac{\log 1 + \log 2}{2} + \cdots + \frac{\log(n-1) + \log n}{2} = \sum_{k=2}^{n} \log k - \frac{1}{2}\log n < \int_1^n \log x\,dx$$

よって，$a_n = \log(n!) - \frac{1}{2}\log n = \sum_{k=2}^{n} \log k - \frac{1}{2}\log n < \int_1^n \log x\,dx$ ………④

③④より，$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx < a_n < \int_1^n \log x\,dx$ ………⑤

(4) ⑤より，$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n < \log(n!) < \int_1^n \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n$ となり,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n &= \Big[\, x\log x - x \,\Big]_{\frac{3}{2}}^{n} + \frac{1}{2}\log n \\ &= n\log n - \frac{3}{2}\log\frac{3}{2} - n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log n \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right) = U_n\end{aligned}$$

$$\int_1^n \log x\,dx + \frac{1}{2}\log n = \left[\,x\log x - x\,\right]_1^n + \frac{1}{2}\log n = n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\log n$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 = V_n$$

以上より，$U_n < \log(n!) < V_n$ が成立する。

コメント

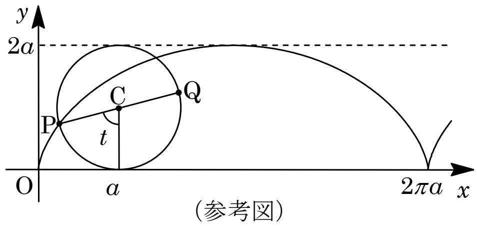
凸関数の性質を利用した不等式の証明問題です。誘導が非常に丁寧です。

問　題

半径 a の円が x 軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき，円周上の 2 つの定点 P と Q の運動について考える。時刻 $t=0$ のとき P は原点 O にあり，Q は点 $(0,\ 2a)$ にある。円は毎秒 1 ラジアンの速さで回転する。このとき，点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ は

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$$

で表される。以下の問いに答えよ。



（参考図）

(1)　時刻 t における円の中心 C と点 Q の座標を，それぞれ求めよ。

(2)　時刻 t における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ。また，時刻 t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲において，速さ $\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$ の最大値と最小値，およびそのときの P の座標を求めよ。

(3)　時刻 t における点 Q の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。さらに，内積 $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。

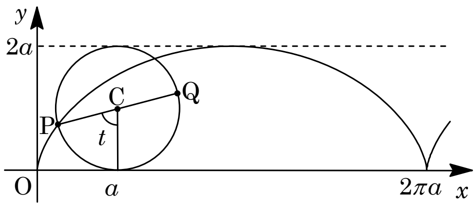
(4)　時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ から $t=\dfrac{3\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のり L_{P} と，点 Q が動く道のり L_{Q} を，それぞれ求めよ。　[2018]

解答例

(1)　条件より，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$$x=a(t-\sin t)\cdots\cdots\cdots①$$
$$y=a(1-\cos t)\cdots\cdots\cdots②$$

また，円の中心 C の座標は $\mathrm{C}(at,\ a)$ となり，さらに線分 PQ の中点が C なので，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①②から，



$$x=2at-a(t-\sin t)=a(t+\sin t)\cdots\cdots\cdots③$$
$$y=2a-a(1-\cos t)=a(1+\cos t)\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　①②より，$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(a(1-\cos t),\ a\sin t\right)$ となり，

$$\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=a^2(2-2\cos t)=2a^2(1-\cos t)$$

すると，$0\leqq t\leqq 2\pi$ において，$\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$ の最大値は $\sqrt{2a^2(1+1)}=2a$ であり，このとき $\cos t=-1$ から $t=\pi$ となるので $\mathrm{P}(\pi a,\ 2a)$ である。

また，$\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$ の最小値は $\sqrt{2a^2(1-1)}=0$ であり，このとき $\cos t=1$ から $t=0,\ 2\pi$ となるので $\mathrm{P}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(2\pi a,\ 0)$ である。

(3)　③④より，$\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(a(1+\cos t),\ -a\sin t\right)$となり，

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}=a^2(1-\cos t)(1+\cos t)-a^2\sin^2 t=a^2\{(1-\cos^2 t)-\sin^2 t\}=0$$

(4)　条件より，$L_{\mathrm{P}}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|dt$，$L_{\mathrm{Q}}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}\right|dt$なので，

$$L_{\mathrm{P}}=\sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{1-\cos t}\,dt=2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

$$=2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=-4a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}a$$

また，$\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}\right|^2=a^2(1+\cos t)^2+a^2\sin^2 t=2a^2(1+\cos t)=4a^2\cos^2\dfrac{t}{2}$より，

$$L_{\mathrm{Q}}=2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt+2a\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}-\cos\frac{t}{2}dt$$

$$=4a\left[\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-4a\left[\sin\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=4a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=4(2-\sqrt{2})a$$

コメント

サイクロイドを題材にした積分の応用問題です。ただ，問題の参考図に様々な手掛かりが明示されています。

問　題

関数 $f(x)=xe^x$ で定まる曲線 $C: y=f(x)$ を考える。p を正の数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。また，すべての x について，$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ が成り立つような定数 a, b の値を求めよ。

(2)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $l: y=c(x-p)+d$ とする。c と d の値を p を用いて表せ。さらに，区間 $x\geqq 0$ において関数

$$g(x)=f(x)-\{c(x-p)+d\}$$

の増減を調べ，不等式 $f(x)\geqq c(x-p)+d$ $(x\geqq 0)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$x\geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 l，および y 軸で囲まれた図形を F とする。その面積 $S(p)$ を求めよ。

(4)　2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える。R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$f(x)=xe^x$ に対し，$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

また，すべての x について，$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ が成り立つとき，

$$(a+ax+b)e^x=xe^x,\ \ \{(a-1)x+a+b\}e^x=0$$

すると，$a-1=a+b=0$ より，$a=1$，$b=-1$

(2)　曲線 $C: y=f(x)$ の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ $(p>0)$ における C の接線 l は，

$$y-f(p)=f'(p)(x-p),\ \ y=f'(p)(x-p)+f(p)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$が $y=c(x-p)+d$ と一致することより，

$$c=f'(p)=(p+1)e^p,\ \ d=f(p)=pe^p$$

さらに，$x\geqq 0$ において，$g(x)=f(x)-\{c(x-p)+d\}$ とおくと，

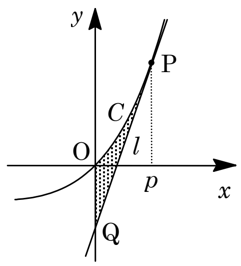
$$g(x)=f(x)-f'(p)(x-p)-f(p)$$
$$g'(x)=f'(x)-f'(p)$$
$$g''(x)=f''(x)=(x+2)e^x>0$$

すると，$g'(x)$ は単調に増加し，$g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	0	↗

よって，$x\geqq 0$ において $g(x)\geqq 0$，すなわち $f(x)\geqq c(x-p)+d$ が成り立つ。

(3)　図形 F は右図の網点部であり，その面積 $S(p)$ は,



$$S(p)=\int_0^p \{xe^x-(p+1)e^p(x-p)-pe^p\}dx$$

$$=\int_0^p \{xe^x-(p+1)e^p x+p^2e^p\}dx$$

$$=\left[(x-1)e^x-\frac{(p+1)e^p}{2}x^2+p^2e^p x\right]_0^p$$

$$=(p-1)e^p+1-\frac{(p+1)e^p}{2}p^2+p^3e^p=\frac{1}{2}(p^3-p^2+2p-2)e^p+1$$

(4)　長方形 R が F を囲んでいるとき R の面積の最小値 $T(p)$ は，$\mathrm{Q}(0,\ -p^2e^p)$ から,

$$T(p)=p\{f(p)-(-p^2e^p)\}=p(pe^p+p^2e^p)=(p^3+p^2)e^p$$

すると，$\dfrac{S(p)}{T(p)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p^3-p^2+2p-2}{p^3+p^2}+\dfrac{1}{(p^3+p^2)e^p}$ となるので,

$$\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}=\frac{1}{2}\cdot 1+0=\frac{1}{2}$$

コメント

微積分の総合問題です。設問は多めですが，内容はいずれも基本的です。

問　題

楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ $(a>0)$ と y 軸の交点を $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(0,\ -a)$ とする。θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AP の長さを l とする。$X=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$Y=l^2$ となる関数を $Y=f(X)$ とする。$f(X)$ を X の式で表せ。

(2) $0<a<1$ の場合。(1)の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し，そのときの X の値を求めよ。

(3) $a=2$ の場合。(1)の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を $\mathrm{P_1}$ とする。$f(X)$ の最大値と $\mathrm{P_1}$ の座標を求めよ。また点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とし点 $\mathrm{P_1}$ を通る円を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。 [2016]

解答例

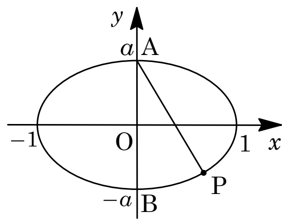
(1) 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 上の点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，

$$Y=\mathrm{AP}^2=\cos^2\theta+(a\sin\theta-a)^2=1-\sin^2\theta+a^2(\sin\theta-1)^2$$

ここで，$Y=f(X)$ とし，$X=\sin\theta$ とおくと，

$$f(X)=1-X^2+a^2(X-1)^2=(a^2-1)X^2-2a^2X+a^2+1\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $0<a<1$ のとき，①から，



$$f(X)=(a^2-1)\left(X-\frac{a^2}{a^2-1}\right)^2-\frac{1}{a^2-1}$$
$$=-(1-a^2)\left(X+\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2+\frac{1}{1-a^2}$$

(i) $-1\leqq-\dfrac{a^2}{1-a^2}<0\ \left(0<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき

$-1\leqq X\leqq1$ より $f(X)$ は $X=-\dfrac{a^2}{1-a^2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{1-a^2}$ をとる。

(ii) $-\dfrac{a^2}{1-a^2}<-1\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<1\right)$ のとき

$-1\leqq X\leqq1$ より $f(X)$ は $X=-1$ のとき最大値 $a^2-1+2a^2+a^2+1=4a^2$ をとる。

(3) $a=2$ のとき，①から，$f(X)=3X^2-8X+5=3\left(X-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}$

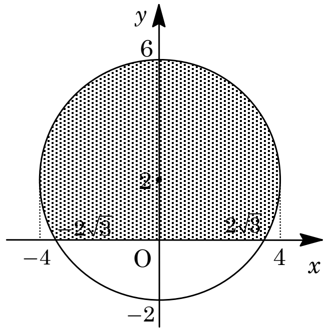
すると，$-1\leqq X\leqq1$ より $f(X)$ は $X=-1$ のとき最大値 $3+8+5=16$ をとる。

このとき，$\sin\theta=-1$ から $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\mathrm{P}=\mathrm{P_1}$ から $\mathrm{P_1}(0,\ -2)$ である。

さて，点 $A(0,\ 2)$ を中心とし点 P_1 を通る円は，

$$x^2+(y-2)^2=16\cdots\cdots\text{②}$$

そして，②で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は，右図の網点部を x 軸のまわりに回転した立体に等しい。



②から，$y=2\pm\sqrt{16-x^2}$ となり，V_1，V_2 を，

$$V_1=\pi\int_0^4(2+\sqrt{16-x^2})^2dx$$

$$V_2=\pi\int_{2\sqrt{3}}^4(2-\sqrt{16-x^2})^2dx$$

すると，求める回転体の体積 V は，$V=2(V_1-V_2)$ となる。

$V_1=\pi\displaystyle\int_0^4(20-x^2+4\sqrt{16-x^2})dx$，$V_2=\pi\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^4(20-x^2-4\sqrt{16-x^2})dx$ から，

$$V_1-V_2=\pi\int_0^{2\sqrt{3}}(20-x^2)dx+4\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx+4\pi\int_{2\sqrt{3}}^4\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$=\pi\Big[\,20x-\frac{x^3}{3}\,\Big]_0^{2\sqrt{3}}+4\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{2}+4\pi\Big(\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\Big)$$

$$=32\sqrt{3}\pi+16\pi^2+\frac{16}{3}\pi^2-8\sqrt{3}\pi=24\sqrt{3}\pi+\frac{64}{3}\pi^2$$

よって，$V=2\Big(24\sqrt{3}\pi+\dfrac{64}{3}\pi^2\Big)=48\sqrt{3}\pi+\dfrac{128}{3}\pi^2$ である。

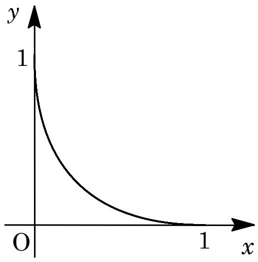
コメント

楕円と体積という 2 つの領域の融合問題です。他の問題と同じように誘導が丁寧です。なお，(3)の後半は，2012 年九大・理系の第 1 問と数値が異なるだけです。

問　題

曲線 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸および y 軸で囲まれた右図の図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

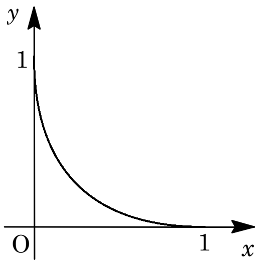
[2015]



解答例

$C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ から $y=(1-\sqrt{x})^2$ となり，C と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1(1-\sqrt{x})^4dx$$



ここで，$1-\sqrt{x}=t$ とおくと，$x=0\to1$ のとき $t=1\to0$ となり，$x=(1-t)^2$ から，$dx=-2(1-t)dt$ より，

$$V=\pi\int_1^0 t^4(-2)(1-t)dt=2\pi\int_0^1(t^4-t^5)dt=2\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{15}$$

コメント

回転体の体積計算です。解答例のように置換積分をした方が少し簡単です。

問　題

自然対数の底を e とする。区間 $x \geqq 0$ で定義される関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ を考え，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる。それらを，P_0，P_1，P_2，…とする。点 P_0 は原点である。

自然数 $n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ。

(2) 面積 S_n を求めよ。

(3) $I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ とする。このとき，I_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $x \geqq 0$ のとき $f(x)=e^{-x}\sin x$ に対して，$y=f(x)$ と x 軸との交点は，$\sin x=0$ から，$x=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$ となる。

これが P_0，P_1，P_2，P_3，…に対応するので，点 P_n の x 座標は $x=n\pi$ である。

(2) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸の上下の位置関係は変わらないので，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積 S_n は，

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|e^{-x}\sin x\right|dx=\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x\,dx\right|$$

ここで，$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$ ………①

$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$ ………②

①＋②より，$-2e^{-x}\sin x=\left\{e^{-x}(\sin x+\cos x)\right\}'$ となり，

$$S_n=\left|-\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right|=\frac{1}{2}\left|e^{-n\pi}\cos n\pi-e^{-(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|e^{-n\pi}(-1)^n-e^{-(n-1)\pi}(-1)^{n-1}\right|=\frac{e^{-n\pi}\left|(-1)^n\right|}{2}\left|1+e^{\pi}\right|=\frac{1+e^{\pi}}{2}e^{-n\pi}$$

(3) $$I_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{1+e^{\pi}}{2}\sum_{k=1}^{n}e^{-k\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{2}\cdot\frac{e^{-\pi}(1-e^{-n\pi})}{1-e^{-\pi}}=\frac{(1+e^{\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(e^{\pi}-1)}$$

そして，$n\to\infty$ のとき $e^{-n\pi}\to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1+e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$

コメント

面積と級数に関する超有名問題です。ひとひねり加えた類題が熊本大・医で出題されています。

問　題

曲線 $C: y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線を l とする。ただし，$1<t<e$ とする。e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

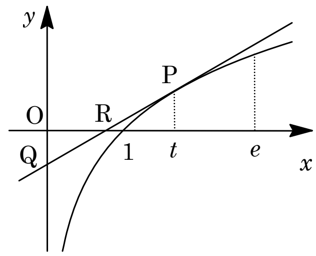
(1)　接線 l の方程式を求めよ。

(2)　接線 l と y 軸との交点を Q とし，接線 l と x 軸との交点を R とする。Q と R の座標を求めよ。

(3)　接線 l と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D_1，接線 l と曲線 C および x 軸によって囲まれた図形を D_2 とする。D_1 の面積 $S_1(t)$ と D_2 の面積 $S_2(t)$ を求めよ。

(4)　$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$ とおく。このとき $S(t)$ の増減を調べ，その最小値およびそのときの t の値を求めよ。　[2014]

解答例



(1)　$C: y=\log x$ に対して $y'=\dfrac{1}{x}$ となり，点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線 l の方程式は，

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t),\quad y=\frac{1}{t}x+\log t-1$$

(2)　l と y 軸との交点は $\mathrm{Q}(0,\ \log t-1)$，x 軸との交点は，

$$0=\frac{1}{t}x+\log t-1,\quad x=t(1-\log t)$$

よって，$\mathrm{R}(t(1-\log t),\ 0)$

(3)　l と x 軸および y 軸によって囲まれた図形の面積 $S_1(t)$ は，

$$S_1(t)=\frac{1}{2}t(1-\log t)(1-\log t)=\frac{1}{2}t(1-\log t)^2$$

また，l と C および x 軸によって囲まれた図形の面積 $S_2(t)$ は，

$$S_2(t)=\frac{1}{2}\{t-t(1-\log t)\}\log t-\int_1^t \log x\,dx=\frac{1}{2}t(\log t)^2-\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^t$$

$$=\frac{1}{2}t(\log t)^2-t\log t+t-1$$

(4)　$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$ より，

$$S(t)=\frac{1}{2}t(1-\log t)^2+\frac{1}{2}t(\log t)^2-t\log t+t-1=t(\log t)^2-2t\log t+\frac{3}{2}t-1$$

$$S'(t)=(\log t)^2+2\log t-2\log t-2+\frac{3}{2}$$

$$=(\log t)^2-\frac{1}{2}$$

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$S(t)$ の増減は右表のようになり，$t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき，最小値 $S\left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\dfrac{3}{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1=(2-\sqrt{2})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-1$ をとる。

コメント

微積分の基本問題です。ただし，$1<t<e$ に注意して，位置関係を把握することが重要です。

問　題

区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，関数$f(x)$と関数$g(x)$を

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x\,,\ \ g(x)=\cos\frac{x}{2}+c$$

と定義する。cは定数である。次の問いに答えよ。

(1) 区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，2 曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が$x=0$以外の点で接するように c の値を定め，接点$(p,\ q)$を求めよ。また，そのとき，区間$0 \leqq x \leqq \pi$における関数$f(x)$と関数$g(x)$の大小関係を調べよ。

(2) 定数 c と接点$(p,\ q)$は(1)で求めたものとする。そのとき，区間$0 \leqq x \leqq p$において，y 軸および 2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形を D とする。D をy軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vを求めよ。　　[2014]

解答例

(1) $f(x)=\frac{1}{2}\cos x$，$g(x)=\cos\frac{x}{2}+c\ \ (0 \leqq x \leqq \pi)$に対し，曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が，$p \neq 0$として，点$(p,\ q)$で接することより，

$$f(p)=g(p)\cdots\cdots\cdots①,\ \ f'(p)=g'(p)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\frac{1}{2}\cos p=\cos\frac{p}{2}+c\cdots\cdots\cdots③$

②より，$-\frac{1}{2}\sin p=-\frac{1}{2}\sin\frac{p}{2}$，$2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}=\sin\frac{p}{2}\cdots\cdots\cdots④$

④から，$\sin\frac{p}{2}\neq 0$なので，$\cos\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$，$p=\frac{2}{3}\pi$となり，$q=\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{4}$

③から，$c=\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\pi-\cos\frac{1}{3}\pi=-\frac{3}{4}$

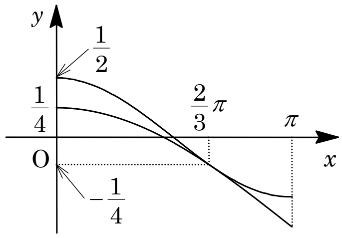
よって，接点$(p,\ q)=\left(\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{1}{4}\right)$となり，さらに区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}\cos x-\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$$

$$=\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

すなわち，$f(x) \geqq g(x)$$\left(\text{等号は}\ x=\frac{2}{3}\pi\ \text{のとき成立}\right)$である。

(2) 区間 $0 \leqq x \leqq \frac{2}{3}\pi$ において，y 軸および 2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vは,



$$V=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\{f(x)-g(x)\}dx$$

$f(x)$ と $g(x)$ を代入して,

$$V=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\Big(\frac{1}{2}\cos x-\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\Big)dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\Big(\cos x-2\cos\frac{x}{2}\Big)dx+\frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\,dx$$
$$=\pi\Big[x\Big(\sin x-4\sin\frac{x}{2}\Big)\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}-\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\Big(\sin x-4\sin\frac{x}{2}\Big)dx+\frac{3}{2}\pi\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=\frac{2}{3}\pi^2\Big(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\Big)-\pi\Big[-\cos x+8\cos\frac{x}{2}\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\frac{\pi^3}{3}$$
$$=-\sqrt{3}\pi^2-\pi\Big(\frac{9}{2}-7\Big)+\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^3}{3}-\sqrt{3}\pi^2+\frac{5}{2}\pi$$

コメント

2 曲線が接するという定義は，解答例の①かつ②です。また，(2)の求積は，いわゆる円筒分割の手法を用いています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の増減およびグラフの凹凸を調べよ。また, y の最大値およびそのときの x の値, y の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ と $y=-x+2+\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ によって囲まれた図形 D を座標平面上に描け。なお, D の境界が座標軸と共有点をもつならば, その座標も記入せよ。

(3) 上の図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ ……①に対して,

$$y'=-1-\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}},\quad y''=\frac{(1-x^2)-(-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$-1<x<1$ において, $y'=0$ とすると,

$$x=\sqrt{1-x^2},\quad x^2=1-x^2\ (x \geqq 0)$$

よって, この解は $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり, y の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	3	↘	$2-\sqrt{2}$	↗	1

すると, y の最大値は 3 $(x=-1)$, 最小値は $2-\sqrt{2}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。

また, $-1<x<1$ において, $y''>0$ からグラフは下に凸となる。

(2) $y=-x+2+\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ ……②に対して,

$$y'=-1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''=-\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	3	↗	$2+\sqrt{2}$	↘	1

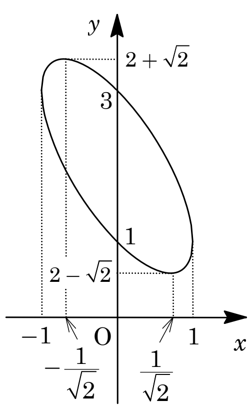
$-1<x<1$ において, $y'=0$ とすると,

$$-x=\sqrt{1-x^2},\quad x^2=1-x^2\ (x \leqq 0)$$

よって, この解は $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり, y の増減は右上表のようになる。

また, $y''<0$ からグラフは上に凸となる。

以上より, ①②のグラフで囲まれた図形 D は右図のようになる。なお, y 軸との交点の座標は $(0,\ 1)$ と $(0,\ 3)$ である。



(3)　D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は,

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\{(-x+2+\sqrt{1-x^2}\,)^2-(-x+2-\sqrt{1-x^2}\,)^2\}dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}4(-x+2)\sqrt{1-x^2}\,dx=8\pi\int_{0}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

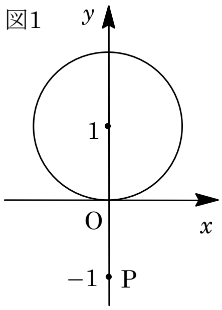
$$=16\pi\cdot\frac{1}{4}\pi=4\pi^2$$

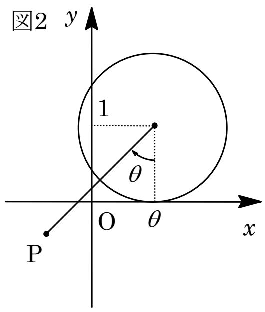
コメント

題材は, 軸が座標軸に平行でない楕円です。ポイントは, (3)の定積分を力ずくで行わないところです。

問　題

半径 1 の円と長さ 2 の線分がある。この線分を一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える。線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする。この図形を図 1 のように xy 平面上におく。すなわち，中心が点$(0,\ 1)$，P が点$(0,\ -1)$と一致するようにおく。





次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる。図 2 は円がθだけ回転したときの状態を表している。$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，点 P が描く曲線 C について考察する。次の問いに答えよ。

(1)　図 2 における点 P の x 座標と y 座標を，それぞれθを用いて表せ。

(2)　曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ。

(3)　曲線 C と 2 直線 $y=-1$ および $x=\pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[2013]

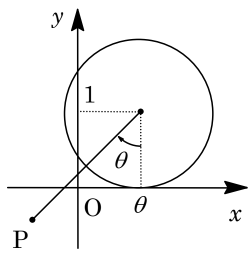
解答例

(1)　円がθだけ回転したとき，円の中心の座標は$(\theta,\ 1)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\theta,\ 1)+2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right)$$

$$=(\theta,\ 1)+2(-\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

$\mathrm{P}(x,\ y)$とおくと，$x=\theta-2\sin\theta$，$y=1-2\cos\theta$



(2)　(1)より，$\dfrac{dx}{d\theta}=1-2\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\sin\theta$

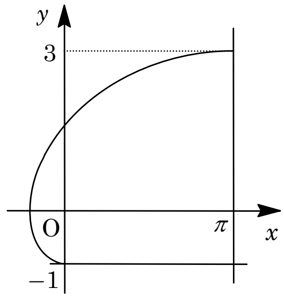
すると，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，x と y の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	0	↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$		$+$	
y	-1	↗	0	↗	3

これより，点 P が描く曲線 C 上にあって，x 座標が最小となるのは点$\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0\right)$，最大となるのは点$(\pi,\ 3)$である。

また，y 座標が最小となるのは点$(0,\ -1)$，最大となるのは点$(\pi,\ 3)$である。

(3)　曲線 C と 2 直線 $y=-1$ および $x=\pi$ によって囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_{-1}^{3}(\pi-x)\,dy=\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta+2\sin\theta)2\sin\theta\,d\theta$$

$$=2\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta\,d\theta+4\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$$

ここで，$I_1=\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta\,d\theta$，$I_2=\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$ とおくと,

$$I_1=-\big[(\pi-\theta)\cos\theta\big]_0^{\pi}+\int_{0}^{\pi}(-\cos\theta)\,d\theta=\pi$$

$$I_2=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\pi$$

したがって，$S=2I_1+4I_2=4\pi$ である。

コメント

(3)では，曲線の概形を描き，y 軸方向に積分という方針を立てました。そして，三角関数の周期性を利用して計算を行っています。なお，同じパラメータ曲線が，今年は千葉大・医系でも出題されました。

問　題

xyz 空間において，底面の半径が 2，高さが 4 である直円柱 $x^2+y^2 \leqq 4$，$0 \leqq z \leqq 4$ を考える。この円柱内で，さらに $z \leqq (x-2)^2$，$z \leqq y^2$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ からなる立体を V とする。次の問いに答えよ。

(1) 立体 V を平面 $x=t$ $(-2 \leqq t \leqq 2)$ で切った切り口の面積を $A(t)$ とする。$A(t)$ を t を用いて表せ。

(2) 立体 V の体積を求めよ。 [2010]

解答例

(1) $x^2+y^2 \leqq 4$ ……①，$0 \leqq z \leqq 4$ ……②，$z \leqq (x-2)^2$ ……③，$z \leqq y^2$ ……④で表される立体 V を平面 $x=t$ $(-2 \leqq t \leqq 2)$ で切った切り口は，

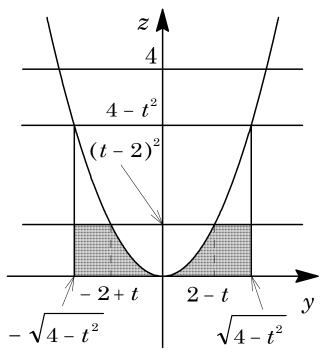
①より，$t^2+y^2 \leqq 4$，$-\sqrt{4-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{4-t^2}$ ………⑤

③より，$z \leqq (t-2)^2$ ………⑥

(i) $0 \leqq t \leqq 2$ のとき

$(t-2)^2 \leqq 4-t^2 \leqq 4$ より，②④⑤⑥で表される切り口を $x=t$ 上に図示すると，右図の網点部となる。この面積 $A(t)$ は，

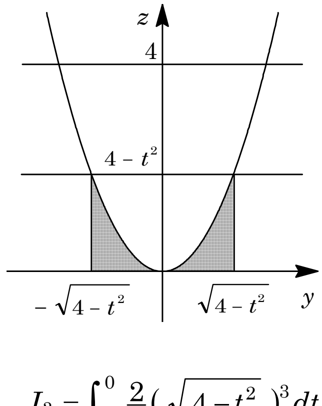
$$A(t) = 2\int_0^{2-t} y^2 dy + 2(\sqrt{4-t^2}-2+t)(t-2)^2$$
$$= \frac{2}{3}(2-t)^3 + 2(\sqrt{4-t^2}-2+t)(t-2)^2$$
$$= 2(t-2)^2\sqrt{4-t^2} + \frac{4}{3}(t-2)^3$$



(ii) $-2 \leqq t \leqq 0$ のとき

$4-t^2 \leqq 4 \leqq (t-2)^2$ より，②④⑤⑥で表される切り口を $x=t$ 上に図示すると，右図の網点部となる。この面積 $A(t)$ は，

$$A(t) = 2\int_0^{\sqrt{4-t^2}} y^2 dy$$
$$= \frac{2}{3}(\sqrt{4-t^2})^3$$



(2) 立体 V の体積を W とし，

$$I_1 = \int_0^2 2(t-2)^2\sqrt{4-t^2}\,dt,\quad I_2 = \int_0^2 \frac{4}{3}(t-2)^3 dt,\quad I_3 = \int_{-2}^0 \frac{2}{3}(\sqrt{4-t^2})^3 dt$$

すると，(1)より，$W = I_1 + I_2 + I_3$ である。

まず，I_1 に対して，

$$I_1=2\int_0^2 t^2\sqrt{4-t^2}\,dt-4\int_0^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt+8\int_0^2\sqrt{4-t^2}\,dt$$

ここで，$t=2\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$\int_0^2 t^2\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2\theta\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1-\cos 4\theta)\,d\theta=\pi$$

また，$4-t^2=s$ とおくと，

$$\int_0^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_4^0\sqrt{s}\,(-ds)=\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$$

よって，$\int_0^2\sqrt{4-t^2}\,dt=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{4}=\pi$ から，$I_1=2\pi-4\cdot\frac{16}{3}+8\pi=10\pi-\frac{64}{3}$

次に，$I_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[(t-2)^4\right]_0^2=-\frac{16}{3}$

さらに，$t=2\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$，その後，$\varphi=-\theta$ とおくと，

$$I_3=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 8\cos^3\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\frac{32}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^4\theta\,d\theta=\frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{32}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$$

以上より，立体 V の体積 W は，

$$W=10\pi-\frac{64}{3}-\frac{16}{3}+2\pi=12\pi-\frac{80}{3}$$

コメント

共通部分の体積を求める問題です。(1)の場合分けについては，$(t-2)^2$，$4-t^2$，4 の大小関係をもとにしています。省略しましたが，グラフを書いて判断しています。なお，(2)の計算は半端なものではなく，省エネのため，I_3 では，漸化式を利用して得られる公式を利用しています。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆