《2019 入試対策》

名古屋大学

理系数学

1998—2018

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された名古屋大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

なお，映像解説の一覧は，下記のページに掲載しています。

PC サイト　トップページ ≫ 名大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

2　実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。 [2014]

3　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。

(1)　$a>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。 [2011]

4　原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円に，円外の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から 2 本の接線を引く。

(1)　2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標 $(x_1,\ y_1)$ を点 P の座標 $(x_0,\ y_0)$ を用いて表せ。また $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ であることを示せ。

(2)　点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。 [2007]

5　座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 6)$ とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　ピッタリ直線が 2 本通る点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006]

6　O を原点とする座標平面上の，半径 1 の円周 $A: x^2+y^2=1$ と直線 $l: y=d$ $(0<d<1)$ との交点を P, Q とする。円周 A 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は $y>d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S, 点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき，線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。　[2003]

■ 図形と計量

1　C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a, a, $2a$ の円とする。いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき, a の値を求めよ。

[2004]

2　(1)　平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a$，$\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=b$，$\mathrm{BD}=c$，$\mathrm{AC}=d$ とする。このとき，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　3 つの正数 a, b, $c\,(0<a\leqq b\leqq c)$ が $a^2+b^2>c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体が作れることを証明せよ。　[2003]

■ ベクトル

1　xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し, S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を a, b, t を使って表せ。

(2)　l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

(3)　l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。　[2017]

2 座標空間に 8 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$P(1,\ 0,\ 0)$，$Q(1,\ 1,\ 0)$，$R(0,\ 1,\ 0)$，$A(0,\ 0,\ 1)$，$B(1,\ 0,\ 1)$，$C(1,\ 1,\ 1)$，$D(0,\ 1,\ 1)$をとり，線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を$N(0,\ 1,\ t)$とし，3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

(1) K の座標を t で表せ。

(2) 四面体 OKLP の体積を$V(t)$とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき，$V(t)$の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。 [2010]

3 三角形 ABC で辺 AC を$s:1-s$に内分する点を P，辺 BC を$t:1-t$に内分する点を Q，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき，

$$\triangle\text{APR の面積} = 2\times(\triangle\text{BQR の面積})$$

が成り立っているとする。

(1) s を t を用いて表せ。

(2) 極限$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$を求めよ。ただし，$t$ が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき，$t\to+0$と表す。 [2008]

4 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速$\frac{1}{2}$で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速$\frac{1}{2}$で，同時に動き出す。

(1) 動き出してから t 秒後$(0\leqq t\leqq 1)$のベクトル$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{OS}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および t を用いて表せ。

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t(0\leqq t\leqq 1)$の値を求め，ベクトル$\overrightarrow{OM}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。 [2005]

5 △ABC の外心（外接円の中心）O が三角形の内部にあるとし，α，β，γは$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$を満たす正数であるとする。また，直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点をA'，B'，C'とする。

(1) $\overrightarrow{OA}$，α，β，γを用いて$\overrightarrow{OA'}$を表せ。

(2) $\triangle A'B'C'$の外心が O に一致すれば$\alpha=\beta=\gamma$であることを示せ。 [2001]

6　座標空間内の 6 つの平面 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ で囲まれた立方体を C とする。$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ を $a_1>0$，$a_2>0$，$a_2>0$ を満たし，大きさが 1 のベクトルとする。H を原点 O を通りベクトル $\vec{l}$ に垂直な平面とする。このとき，ベクトル $\vec{l}$ を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を，a_1，a_2，a_3 を用いて表せ。ここに，C の影とは C 内の点から平面 H へひいた垂線の足全体のなす図形である。　[2000]

7　(1)　ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ が次の条件(＊)を満たすとき，点 $(a_1,\ a_2)$ の存在範囲を図示せよ。

(＊)　あるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ が存在して，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$ が任意のベクトル $\vec{p}$ に対して成り立つ。

(2)　(1)で求めた $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ に対して，条件(＊)にあるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1　p を素数，a, b を整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れることを示せ。

(2)　$(a+2)^p-a^p$ は偶数であることを示せ。

(3)　$(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。　[2018]

2　次の問いに答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　次の条件(＊)を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(＊)\ \begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の } 2 \text{ つの解が } c,\ d \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の } 2 \text{ つの解が } e,\ f \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の } 2 \text{ つの解が } a,\ b \text{ である。} \end{cases}$$

(2)　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件(＊＊)を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である。

このとき，

(i)　正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ii)　条件(＊＊)を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組をすべて求めよ。　[2016]

3　負でない整数 N が与えられたとき，$a_1 = N$，$a_{n+1} = \left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として数列$\{a_n\}$を定める。ただし$[a]$は，実数 a の整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。

(1)　$a_3 = 1$ となるような N をすべて求めよ。

(2)　$0 \leqq N < 2^{10}$ を満たす整数 N のうちで，N から定まる数列$\{a_n\}$のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3)　0 から $2^{100}-1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び，数列$\{a_n\}$を定める。次の条件(＊)を満たす最小の正の整数 m を求めよ。

(＊)　数列$\{a_n\}$のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる。　[2014]

4　$x > 0$ とし，$f(x) = \log x^{100}$ とおく。

(1)　次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \dfrac{100}{x}$

(2)　実数 a の整数部分($k \leqq a < k+1$ となる整数 k)を$[a]$で表す。整数$[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(1000)]$のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば，$\log 10 = 2.3026$ として計算せよ。　[2013]

5　$k,\ m,\ n$ は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k,\ \ S_k(1) = 1\ (k \geqq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m\mathrm{C}_1\,S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2\,S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3\,S_3(n) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\,S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k\,S_k(n)\quad (m \geqq 2) \end{aligned}$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。　[2013]

6　m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m + 1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4)　r を正の整数とし，$s = 3^{r-1}m$ とする。$2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。

[2012]

7　$a,\ b$ は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0,\quad y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2011]

8　$x,\ y$ を正の整数とする。

(1)　$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2)　p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x + 3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。　[2009]

9　次の問いに答えよ。

(1)　$3x + 2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。　[2008]

10　正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x_2 = 1$，$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ で定める。このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ。　[2004]

11　関係式 $x^a = y^b = z^c = xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする。　[2002]

12　n を 2 以上の自然数とする。条件 $k_1 \geqq 1,\ \cdots\cdots,\ k_{n-1} \geqq 1,\ k_n \geqq 0$ を満たす n 個の整数の組 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ に対して，自然数 $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ を次のように定める。

$$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = 2^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} - 2^{k_2 + \cdots + k_n} - 2^{k_3 + \cdots + k_n} - \cdots - 2^{k_n}$$

(1)　$1999 = m(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ となる $(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ を求めよ。

(2)　$m(k_1,\ k_2) = m(l_1,\ l_2)$ であれば，$k_1 = l_1$，$k_2 = l_2$ が成り立つことを示せ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n)$ であれば，$k_j = l_j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が成り立つことを示せ。　[1999]

■ 確率

1　図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則(a), (b)に従って移動する。

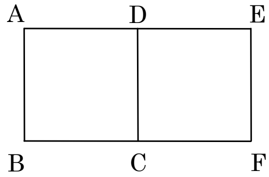


図 1

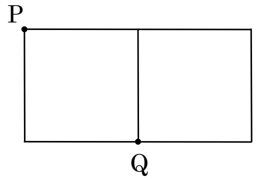


図 2

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

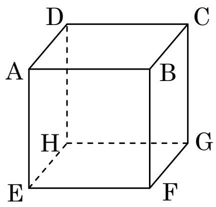
(1)　時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

(2)　a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。　[2018]

2 右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4)　自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。　[2017]

3 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。　[2016]

4 数直線上にある 1，2，3，4，5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点}\,k\ (k=2,\ 3,\ 4)\,\text{にあるならば，確率}\,\dfrac{1}{2}\,\text{で点}\,k-1\,\text{に，確率}\,\dfrac{1}{2}\,\text{で点}\,k+1\,\text{に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。また，石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$) にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回($n \geqq 1$)繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。 [2015]

5 3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。 [2013]

6　n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。　[2012]

7　はじめに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3)　a_n，b_n，c_n を求めよ。　[2010]

8　さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1)　$p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2)　$p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3)　$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

(4)　$p_n(5)$ を求めよ。　[2009]

9　袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1)　連比 $p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)$ を求めよ。

(2)　一般の N に対し $p_N(m)$ $(1 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。　[2007]

10　正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n \geqq 1)$ で表す。

(1)　$n \geqq 1$ のとき，$q_n = p_n(1) + p_n(6)$，$r_n = p_n(2) + p_n(5)$，$s_n = p_n(3) + p_n(4)$ を求めよ。

(2)　$p_n(m)$ $(n \geqq 1,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ を求めよ。　[2006]

11　整数に値をとる変数 x の値が，次の規則で変化する。

(i)　ある時刻で $x = m$ $(m \neq 0)$ のとき，1 秒後に $x = m+1$，$x = m-1$ である確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　ある時刻で $x = 0$ のとき，1 秒後に $x = 1$ である確率は q，$x = -1$ である確率は $1-q$ である $(0 \leqq q \leqq 1)$。$x = 0$ から始めて，n 秒後 $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に $x = m$ である確率を $p_n(m)$ とする。

(1)　$p_3(1) + p_3(-1)$ を求めよ。

(2)　すべての自然数 n に対して次が成り立つことを示せ。
どんな整数 m についても $p_n(m) + p_n(-m)$ は q によらない。

(3)　$p_n(0)$ を求めよ。　[2005]

12　サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_3 を求めよ。

(3)　4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。　[2004]

13 サイコロを n 回投げて，3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする。各 n について，$P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする。ただし，このような k が複数あるときは，最も大きいものを $N(n)$ とする。

(1) $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{N(n)}{n}$ を最小にする n と，そのときの $\dfrac{N(n)}{n}$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}$ を求めよ。 [2003]

14 数直線上の原点 O から出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える。毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$，裏が出れば -1，それぞれ駒を進めるとする。ただし，点 -1 または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする。

(1) k 回目に硬貨を投げた後，駒が点 1 にある確率を求めよ。

(2) k 回目に硬貨を投げた後，駒がある点 X_k の期待値 $E[\,X_k\,]$ を求めよ。 [2001]

15 図のように，平面上に点 A_0，A_1，A_2，……および B_0，B_1，B_2，……が並んでいる。点 P は A_0 から出発し，次の規則に従いこれらの点の上を移動する。

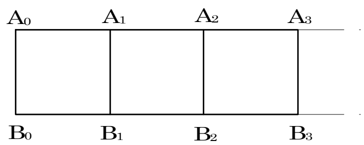
P が A_n にいるときには 1 秒後に A_{n+1} または B_n に，一方 B_n にいるときには B_{n+1} または A_n に移動する。ただし，前にいた点には戻らない。また, P が移動しうる点が複数あるときには, それぞれの点へ等確率で移動する。

P が A_n へ到る行き方が a_n 通り，B_n へ到る行き方が b_n 通りあるとする。

(1) a_3，b_3 を求めよ。

(2) a_n，b_n を求めよ。

(3) 一方，点 Q は A_8 から P と同時に出発し，1 秒ごとに順次 $\mathrm{A}_8 \to \mathrm{A}_7 \to \mathrm{A}_6 \to \cdots\cdots \to \mathrm{A}_0$ と移動し，その後は A_0 にとどまる。P と Q が出会う確率を求めよ。 [2000]



16 座標平面上に 4 点 A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに，点 Q は，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，n 秒後に頂点 A, C にいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする。a_n，c_n を求めよ。 [1998]

■ 論証

1 n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件(I), (II), (III)を満たしている。

(I) 集合 M は n 個の要素からなる。

(II) 集合 M の要素 z に対して, $\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(III) 集合 M の要素 z, w に対して, その積 zw は集合 M の要素である。ただし, $z=w$ の場合も含める。

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2) n は偶数であることを示せ。

(3) $n=4$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

(4) $n=6$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

[2017]

2 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1) $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。

(2) a, b は実数で $a\neq 0$ とする。$y=ax^2+bx$ のグラフ上に, 点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば, 無限個存在することを示せ。 [2010]

3 a, b, c を実数とし, 実数の組 $(x,\ y,\ z)$ に関する方程式

(i) $x+y-2z=3a$, $2x-y-z=3b$, $x-5y+4z=3c$

および

(ii) $x^2+y^2+z^2=1$

を考える。

(1) 方程式(i)が解をもつための a, b, c に対する条件を求めよ。またそのときの方程式(i)の解 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ。

(2) 方程式(i)と(ii)がただ 1 つの共通解をもつとき, その共通解 $(x,\ y,\ z)$ は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ を満たすことを示せ。 [2004]

4　$f(x)$を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で$0<f(x)<1$を満たすものとする。$a_1=1$とし，順に，$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$により数列$\{a_m\}$を定める。

(1)　$m\geqq 2$ に対し，$a_m>0$であり，かつ$a_1>a_2>\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots$となることを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{2002}>a_m$となる m が存在することを背理法を用いて示せ。　[2002]

■ 複素数

1　次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式$f(x)$で$f(\alpha)=0$となるもののうち，x^4の係数が 1 であるものを求めよ。

(2)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ （ただし，複号±はすべての可能性にわたる）の中で，(1)で求めた$f(x)$に対して方程式$f(x)=0$の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3)　(2)で求めた$f(x)=0$の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

[2015]

2　(1)　複素数 z を未知数とする方程式$z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解$z=p+qi$ （p，q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式$x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$が，整数の解を少なくとも 1 つもつ。　[2005]

3　次の問いに答えよ。ただし，偏角θは，$0°\leqq\theta<360°$の範囲で考えるものとする。

(1)　$|z+i|=|z-i|$を満たす複素数zは，実数に限ることを示せ。

(2)　複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数$z+i$の偏角$\arg(z+i)$の動く範囲を求めよ。

(3)　z を未知数とする方程式$(z+i)^9=(z-i)^9$のすべての解 z について$z+i$の偏角$\arg(z+i)$を求めよ。　[2002]

4　n を 3 以上の自然数とする。有限複素数列 z_1，z_2，…，z_n の各項はいずれも方程式 $z^6=1$ の解の 1 つであり，かつ関係式 $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ を満たしているとする。

(1)　z_1，z_2，…，z_n の中に 1 が含まれ，-1 が含まれていないとすれば，$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも z_1，z_2，…，z_n の中に含まれることを示せ。

(2)　$n=6$ のとき, (1)のような複素数列 z_1，z_2，…，z_6 のとり方の個数を求めよ。

[2001]

5　実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，相異なる虚数解 α，β と実数解 γ をもつとする。

(1)　$\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ。ここで，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す。

(2)　α，β，γ が等式 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ を満たし，さらに複素数平面上で α，β，γ を表す 3 点は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすものとする。このとき，実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。　[2000]

6　N を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ をみたすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ。ただし，ここで i は虚数単位（$i^2=-1$）である。

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2(N-1)\theta$　[1998]

■ 曲線

1　$a>0$, $b>0$ とする。点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$，$\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし, $s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　r, s, t を, a と b を用いて表せ。

(2)　$\triangle$ABC が正三角形となる a と r が存在するような b の値を求めよ。　[2009]

2 a, b を正数とし，xy 平面で不等式 $\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ の表す領域 D と，不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ の表す領域 E を考える。

(1) $a=2$, $b=1$ の場合に，領域 D を図示せよ。

(2) D が E に含まれるための a, b の条件を求め，ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ。 [2002]

3 座標平面上に，双曲線 $C: x^2-y^2=1$ と点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ がある。

(1) 点 A を通り双曲線 C と 1 点のみで交わる直線を求めよ。

(2) 直線 l が点 A を通り双曲線 C と相異なる 2 点で交わるように動くとき，この 2 点の中点は，あるひとつの双曲線上にあることを示せ。 [2000]

4 平面上に楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ と直線 $l: y=x+k$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1) この楕円と直線 l が 2 つの共有点をもつために k がみたすべき条件を求めよ。

(2) k は(1)の条件をみたすとし，さらに $k\neq 0$ とする。(1)における 2 つの共有点を P, Q とし，O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ。 [1998]

■ 極限

1 自然数 n に対し，定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(2) $0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI_n$ を求めよ。

(4) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。 [2018]

2　e を自然対数の底とし, t を $t>e$ となる実数とする。このとき, 曲線 $C: y=e^x$ と直線 $y=tx$ は相異なる 2 点で交わるので, 交点のうち x 座標が小さいものを P, 大きいものを Q とし, P, Q の x 座標をそれぞれ α, $\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。また, P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし, 曲線 C, x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$, $x=\beta$ で囲まれる部分の面積を S_1, 曲線 C および 2 つの直線 PR, QR で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ。

(2)　$\alpha<\dfrac{e}{t}$, $\beta<2\log t$ となることを示し, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。必要ならば, $x>0$ のとき $e^x>x^2$ であることを証明なしに用いてよい。　[2015]

3　xy 平面の $y\geqq 0$ の部分にあり, x 軸に接する円の列 C_1, C_2, C_3, $\cdots$ を次のように定める。

・C_1 と C_2 は半径 1 の円で, 互いに外接する。

・正の整数 n に対し, C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し, C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

(1)　等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2)　すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}=s\alpha^n+t\beta^n$ が成り立つように, n によらない定数 α, β, s, t の値を一組与えよ。

(3)　$n\to\infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め, そのときの極限値を求めよ。　[2014]

4　xy 平面上に曲線 $C: y=\log x\ (x>0)$ を考える。

(1)　曲線 C の接線で点 $(0,\ b)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2)　平面上に 2 組の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$, $\{\mathrm{B}_n\}$ を次のように定める。A_1 を $(1,\ 0)$ とする。A_n が定まったとき, A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし, B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき, 2 つの線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで, $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることを用いてよい。　[2006]

■ 微分法

1　a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。　[2018]

2　2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2)　(1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3)　点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2), (3)においては，3 点 O, P, Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。　[2016]

3　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^x \quad (x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2)　方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。　[2015]

4　関数 $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，任意の自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2)　$a>0$ とする。点 $(0,\ a)$ を通る $y=f(x)$ のグラフの接線が 1 本だけ存在するような a の値を求めよ。また，a がその値をとるとき，$y=f(x)$ のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

5　曲線$C: y=\log x$上の点$\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点$\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$をとる。点 P, Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P, Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

[2008]

6　(1)　関数$f(x)=2x^3-3x^2+1$のグラフをかけ。

(2)　方程式$f(x)=a$（a は実数）が相異なる 3 つの実数解$\alpha<\beta<\gamma$をもつとする。$l=\gamma-\alpha$をβのみを用いて表せ。

(3)　aが(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。　[2007]

7　放物線$R: y=-x^2+3$と直線$l: y=2x$との交点を A, B とする。直線$y=2x+t$ $(t>0)$は放物線 R と相異なる 2 点$\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$で交わるものとする。

(1)　放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2)　4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$を頂点とする台形の面積を$S(t)$とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$とおく。$f(t)$の最大値を求めよ。　[2005]

8　(1)　xを正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$と$\dfrac{1}{x+1}$の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$の大小を比較せよ。　[2002]

9　e を自然対数の底とする。$e\leqq p<q$ のとき，不等式$\log(\log q)-\log(\log p)<\dfrac{q-p}{e}$が成り立つことを証明せよ。　[2001]

10　曲線$C: y=x^3$上を動く点$\mathrm{P}(t,\ t^3)$（ただし，$t\neq 0$）がある。点 P における C の接線と C とのもう一つの交点を Q とし，点 Q における C の接線と C とのもう一つの交点を R とする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PQR}$のとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

11　平面上に放物線$y=x^2$と直線$l: y=k$を考える。

(1)　放物線上の点$(a,\ a^2)$での法線と直線 l との交点を P とし，その x 座標を b とする。b を a と k で表せ。

(2)　直線 l 上の点$\mathrm{P}(b,\ k)$を放物線の異なる 3 法線が通るような b の範囲を求めよ。

[1998]

■ 積分法

1　$f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，$f_n(x)=\int_{-x}^{x}f_{n-1}(t)dt+f_{n-1}{}'(x)$ により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1)　$f_1(x)$ を求めよ。

(2)　$g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t dt$ とするとき，定積分 $\int_{-c}^{c}g(x)dx$ を求めよ。ただし，a，b，c は定数とする。

(3)　正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。　[2012]

2　関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta) \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ を求めよ。

(3)　$y=g(\theta)$ のグラフをかけ。　[2009]

3　(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ。　[2005]

4　多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

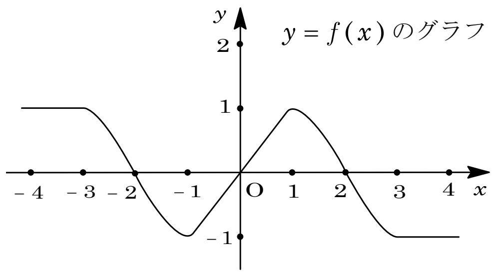
を満たすとする。

(1)　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\int_{x_n}^{2}f_n(x)dx$ の値を求めよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^{2}f_n(x)dx$ の値を求めよ。　[2004]

5 各点で微分可能な関数 $y=f(x)$ のグラフが右の図で与えられている。このとき，$y=f'(x)$ と $y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフの概形を描け。また，そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ。



[2003]

6 閉区間 $[0,\ 2\pi]$ 上で定義された x の関数 $f(x)=\int_0^{\pi}\sin\left(|t-x|+\dfrac{\pi}{4}\right)dt$ の最大値および最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。 [2001]

7 N 個（$N\geqq 2$）の箱の中に 1 回に 1 つずつ無作為に玉を入れてゆく。玉が 2 つ入った箱ができたら，そこでその手続きを中止する。ちょうど k 回目で玉が 2 つ入った箱ができる確率を $P(N,\ k)$ とする。

(1) $2\leqq k\leqq N+1$ のとき，$P(N,\ k)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)$ を区分求積法を用いて求めよ。 [1999]

■ 積分の応用

1 不等式 $0<a<1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C: y=a-1-\log x\ (x>0)$ を考える。s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする。このとき，次の問いに答えよ。必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ を証明なしで使ってよい。

(1) 関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ。

(2) 関数 $t=u(s)$，$t=v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ。

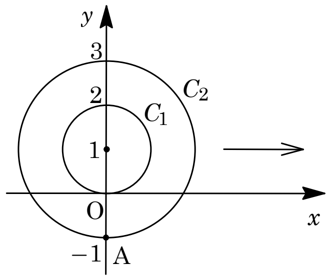
(3) 関数 $t=u(s)$，$t=v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2017]

2　空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1)　B の中心と l との距離を求めよ。

(2)　l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2014]

3　半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する。図のように，時刻 $t=0$ において C_1 は $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で x 軸に接し，A は座標 $(0,\ -1)$ の位置にある。2 つの円盤は一体となり，C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t,\ 1)$ にあるように転がるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。



(1)　時刻 t における A の座標を $(x(t),\ y(t))$ で表す。$(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2)　$x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標をすべて求めよ。

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2013]

4　a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1)　C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2)　b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3)　C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。　[2012]

5　$-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。　[2011]

6　数列 $\{a_n\}$ $(a_n>0)$ を次の規則によって定める。

$$a_1=1,\ \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

曲線 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ と，x 軸および 2 直線 $x=a_n$，$x=a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n$ を求めよ。　[2007]

7　この問題では, e は自然対数の底, log は自然対数を表す。

実数 $a,\ b$ に対して，直線 $l:y=ax+b$ は曲線 $C:y=\log(x+1)$ と，x 座標が $0\leqq x\leqq e-1$ を満たす点で接しているとする。

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め, ab 平面上に図示せよ。

(2)　曲線 C および 3 つの直線 $l,\ x=0,\ x=e-1$ で囲まれた図形の面積を最小にする $a,\ b$ の値と，このときの面積を求めよ。　[2000]

8　曲線 $y=\log x$　$(x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$　$(a>1)$ での接線を l とし，P から x 軸へおろした垂線の足を H とする。さらに，接線 l と x 軸，および曲線 $y=\log x$ で囲まれた図形の面積を S_1，曲線と x 軸，および線分 PH で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1)　S_1，S_2 を求めよ。

(2)　$a\to\infty$ のときの $\frac{S_1}{S_2\cdot\mathrm{PH}}$ の極限を求めよ。　[1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

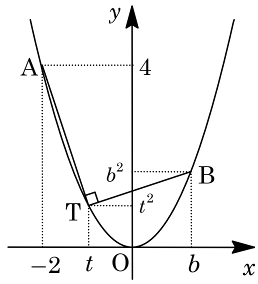
問　題

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

解答例＋映像解説



$\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-2<t<b)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+2,\ t^2-4)=(t+2)(1,\ t-2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，ある t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\quad 1+(t-2)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-2)t-2b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たす t が $-2<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\dfrac{b-2}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+4b}{4}$ とおくと，

$$f(-2)=-4b+9,\quad f(b)=2b^2-4b+1=2(b-1)^2-1$$

これより，$b>\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)\geqq0$ となり，また $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき $f(b)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b$ のとき $f(b)\geqq0$

(i)　$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)\geqq0$ より，求める条件は，

$$-2<-\frac{b-2}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\quad -\frac{b^2+4b}{4}\leqq0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-2<4$ となり，$\dfrac{2}{3}<b<6$

②より，$b(b+4)\geqq0$ となり，$b\leqq-4,\ 0\leqq b$

$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ と合わせると，適する b は存在しない。

(ii)　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)<0$ より適する。

(iii)　$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2)\geqq0$ かつ $f(b)\geqq0$ から，(i)と同様である。

求める条件は，①②より $\dfrac{2}{3}<b<6$ かつ$(b\leqq-4,\ 0\leqq b)$となり，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ と合わせると，適する b は $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ である。

(iv)　$b > \dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2) < 0$ かつ $f(b) > 0$ より適する。

(i)～(iv)より，求める条件は，$b > \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ となる。

コメント

図形的な条件を数式化した後は, 2 次方程式の解の配置の問題になります。$f(-2)$, $f(b)$ の符号をもとに場合分けをしています。

問　題

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線 l の方程式は,

$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t),\quad y=(2t+1)x-t^2-t\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず，$(*)$の x の値を $x=a$ と固定し，y のとり得る値の範囲を求める。
ここで，$y=f(t)$ とおくと,

$$f(t)=(2t+1)a-t^2-t=-t^2+(2a-1)t+a=-\left(t-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4}$$

さて，t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき,

(i)　$a\leqq-\frac{1}{2}$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f(-1)=-a$

(ii)　$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

(iii)　$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

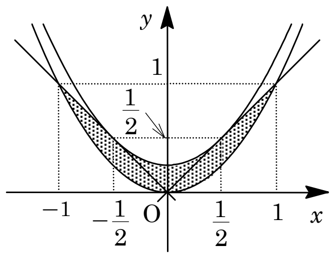
(iv)　$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f(0)=a$

(i)～(iv)より，直線 l が通過してできる領域は,

$$x\leqq y\leqq -x\ \left(x\leqq-\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\quad x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0\text{のとき}\right)$$

$$-x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\quad -x\leqq y\leqq x\ \left(x\geqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

これを利用すると，線分 PQ が通過してできる図形は，直線 l が通過してできる領域の放物線 $y=x^2$ の上側にある部分なので，図示すると右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。この図形の面積 S は，y 軸に関する対称性より,



$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x^2\right)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

コメント

線分の通過領域についての頻出問題です。文系と異なり，誘導は付いていません。

問　題

xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ がある。

(1) $a>0$ とする。OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2) $a>0$, $b>0$ とする。OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。　[2011]

解答例

(1) O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$ に対し，OP : AP $=1:a$ を満たす点 P$(x,\ y)$ は，AP $=a$OP，AP$^2=a^2$OP^2 より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\ (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

(i)　$a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　$a\neq 1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2) OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡は，(1)より，$a=1$ のとき直線 $x=\dfrac{1}{2}$，$a\neq 1$ のとき中心$\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径$\dfrac{a}{|a^2-1|}$の円である。

また，O$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ に対し，OP : BP $=1:b$ を満たす点 P の軌跡は，$b=1$ のとき直線 $y=\dfrac{1}{2}$，$b\neq 1$ のとき中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径$\dfrac{b}{|b^2-1|}$の円である。

よって，OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は，

(i)　$a=1$ かつ $b=1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ を満たす点 P$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ が存在する。

(ii)　$a=1$ かつ $b\neq 1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$で半径$\dfrac{b}{|b^2-1|}$の円を満たす点 P が存在するには，

$$\frac{b}{|b^2-1|}\geqq\frac{1}{2},\ |b^2-1|\leqq 2b$$

$b>0$ から，$-2b\leqq b^2-1\leqq 2b$ となり，$b^2+2b-1\geqq 0$ かつ $b^2-2b-1\leqq 0$ より，

$$-1+\sqrt{2}\leqq b\leqq 1+\sqrt{2}\quad (b\neq 1)$$

(iii) $a\neq 1$ かつ $b=1$ のとき

(ii)と同様にして，$-1+\sqrt{2}\leqq a\leqq 1+\sqrt{2}\quad (a\neq 1)$

(iv)　$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき

中心 $\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$ で半径 $\dfrac{a}{|a^2-1|}$ の円と，中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$ で半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円

を満たす点 P が存在するには，

$$\left|\frac{a}{|a^2-1|}-\frac{b}{|b^2-1|}\right| \leqq \sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2} \leqq \frac{a}{|a^2-1|}+\frac{b}{|b^2-1|}$$

$$\left|a|b^2-1|-b|a^2-1|\right| \leqq \sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2} \leqq a|b^2-1|+b|a^2-1|$$

この不等式の各辺を 2 乗すると，次の連立不等式に等しく，

$$\left\{a|b^2-1|-b|a^2-1|\right\}^2 \leqq (a^2-1)^2+(b^2-1)^2 \cdots\cdots\text{②}$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2 \leqq \left\{a|b^2-1|+b|a^2-1|\right\}^2 \cdots\cdots\text{③}$$

②より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab|a^2-1||b^2-1| \leqq 0$ ………④

③より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab|a^2-1||b^2-1| \geqq 0$ ………⑤

(iv-i)　($a>1$ かつ $b>1$)または($0<a<1$ かつ $0<b<1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab \leqq 0$ となり，$(a-b)^2 \leqq 2$，$|a-b| \leqq \sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab \geqq 0$ となり，$(a+b)^2 \geqq 2$，$a+b \geqq \sqrt{2}$

(iv-ii)　($a>1$ かつ $0<b<1$)または($0<a<1$ かつ $b>1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab \geqq 0$ となり，$(a+b)^2 \geqq 2$，$a+b \geqq \sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab \leqq 0$ となり，$(a-b)^2 \leqq 2$，$|a-b| \leqq \sqrt{2}$

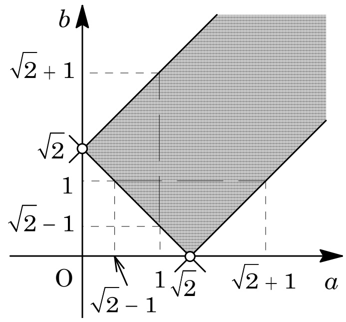
(iv-i) (iv-ii)より，$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき，

$$|a-b| \leqq \sqrt{2},\quad a+b \geqq \sqrt{2}$$

(i)～(iv)をまとめると，求める条件は，

$$a>0,\quad b>0,\quad |a-b| \leqq \sqrt{2},\quad a+b \geqq \sqrt{2}$$

これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含むが，白丸は領域に含まない。



コメント

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に並々ならぬ注意力が必要です。

問　題

原点$O(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円に，円外の点$P(x_0,\ y_0)$から 2 本の接線を引く。

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標$(x_1,\ y_1)$を点 P の座標$(x_0,\ y_0)$を用いて表せ。また$OP\cdot OQ=1$であることを示せ。

(2) 点 P が直線$x+y=2$上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2007]

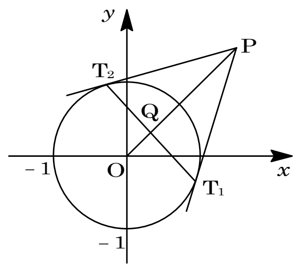
解答例

(1) 2 つの接点を$T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$とおくと，接線の方程式はそれぞれ，

$$s_1x+t_1y=1\,,\ s_2x+t_2y=1$$

点$P(x_0,\ y_0)$を通ることより，

$$s_1x_0+t_1y_0=1\cdots\cdots①,\ s_2x_0+t_2y_0=1\cdots\cdots②$$



ここで，方程式$x_0x+y_0y=1\cdots\cdots③$は直線を表し，①から$T_1(s_1,\ t_1)$，②から$T_2(s_2,\ t_2)$を通過することがわかる。すなわち，③は直線T_1T_2を表す。

さて，直線T_1T_2の法線ベクトルは，$\overrightarrow{OP}=(x_0,\ y_0)$となり，2 直線 OP，$T_1T_2$は直交する。言い換えると，2 点$T_1$，$T_2$の中点 Q は 2 直線 OP，$T_1T_2$の交点である。

ここで，直線 OP は，kを実数として，

$$(x,\ y)=k(x_0,\ y_0)\,,\ y_0x-x_0y=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$となるので，$Q\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$

$$OP\cdot OQ=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\frac{{x_0}^2}{({x_0}^2+{y_0}^2)^2}+\frac{{y_0}^2}{({x_0}^2+{y_0}^2)^2}}$$

$$=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{{x_0}^2+{y_0}^2}}=1$$

(2) $Q(x_1,\ y_1)$より，$x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdots\cdots\cdots⑤$

(1)から$OP\cdot OQ=1$なので，$({x_0}^2+{y_0}^2)({x_1}^2+{y_1}^2)=1$となり，⑤より，

$$x_0=x_1({x_0}^2+{y_0}^2)=\frac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}\,,\ y_0=y_1({x_0}^2+{y_0}^2)=\frac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，条件より，$x_0+y_0=2$なので，⑥より$\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}+\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}=2$

$$2{x_1}^2+2{y_1}^2-x_1-y_1=0\,,\ (x_1,\ y_1)\neq(0,\ 0)$$

すると，$\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ から，点 Q の軌跡は円 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ である。ただし，原点は除く。

コメント

有名な頻出問題です。なお，点 Q が 2 直線 OP，T_1T_2 の交点であることは対称性から明らかですが，ここでは二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線の足が，底辺の中点であることを用いています。

問　題

座標平面上に 3 点O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 2)$，B$(6,\ 0)$を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

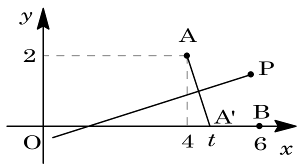
(1) 点P$(p,\ q)$を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を A$'(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 6)$とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点P$(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点P$(p,\ q)$を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点P$(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006]

解答例

(1) ピッタリ直線 l は，線分 AA$'$ の垂直二等分線より，PA = PA$'$ となり，



$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$
$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$………①

(2) ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点A$'(t,\ 0)$が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$………②，$-p^2+8p+4q-20<0$………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$………⑤

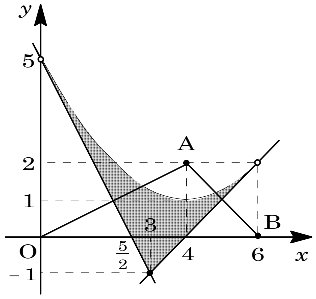
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$………③$'$

④より $q\geqq -2p+5$………④$'$，⑤より $q\geqq p-4$………⑤$'$

さて，領域③$'$の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③$'$と領域④$'$の境界線，領域③$'$と領域⑤$'$の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③$'$④$'$⑤$'$より，点P$(p,\ q)$の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3) ①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，A$'_1(t_1,\ 0)$，A$'_2(t_2,\ 0)$とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}'_1}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{\mathrm{AA}'_2}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{\mathrm{AA}'_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AA}'_2}=0$ となり，

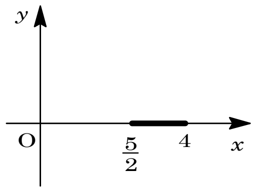
$$(t_1-4)(t_2-4)+4=0,\ \ t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$$t_1+t_2=2p,\ \ t_1t_2=8p+4q-20$$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2) の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。



コメント

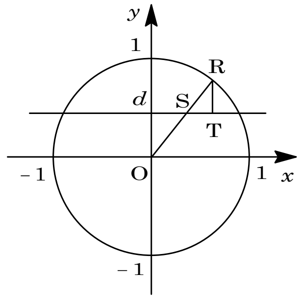
線対称を題材にした問題で，ひとひねりが加えられています。

問　題

O を原点とする座標平面上の，半径 1 の円周 $A: x^2+y^2=1$ と直線 $l: y=d$ $(0<d<1)$ との交点を P, Q とする。円周 A 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は $y>d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S，点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき，線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。　[2003]

解答例

点 R が $(0,\ 1)$ のとき，$\mathrm{ST}=0$ であり，y 軸に関する対称性から，点 R が第 1 象限にあると考えても一般性を失わない。



さて，$t>0$ として，$\mathrm{R}(t,\ \sqrt{1-t^2})$ とおくと，$\mathrm{T}(t,\ d)$ となり，

$$\sqrt{1-t^2}>d,\ 1-t^2>d^2,\ 0<t<\sqrt{1-d^2}$$

直線 $\mathrm{OR}: y=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}x$ と直線 $l: y=d$ の交点は,

$$\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x=d,\ x=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

よって，$\mathrm{S}\Big(\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ d\Big)$ となり，$\mathrm{ST}=t-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ である。

ここで，$f(t)=t-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ とおくと，

$$f'(t)=1-d\cdot\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}=\frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}-d}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$$

$f'(t)=0$ とすると，$(1-t^2)\sqrt{1-t^2}=d$，$(1-t^2)^3=d^2$ より，

$$1-t^2=d^{\frac{2}{3}},\ t=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$	$\cdots$	$\sqrt{1-d^2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$0<d<1$ なので，右の増減表より，$t=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$ のとき $f(t)=\mathrm{ST}$ は最大となり，その最大値は,

$$\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}-\frac{d\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}}{d^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}-d^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}=(1-d^{\frac{2}{3}})\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$$

コメント

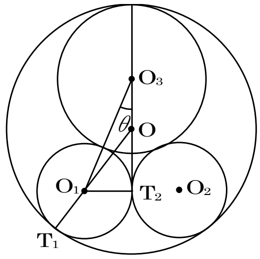
点 R の x 座標を普通に設定しましたが，微分の計算は繁雑ではありませんでした。最初は, R を媒介変数表示した方がよいのかどうかと迷っていたのですが。

問　題

C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a，a，$2a$ の円とする。いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ。[2004]

解答例

円 C_1，C_2，C_3，C の中心を，それぞれ O_1，O_2，O_3，O とおく。また，C_1 と C，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ T_1，T_2 とおき，$\angle \mathrm{O}_1\mathrm{O}_3\mathrm{T}_2=\theta$ とすると，



$$\mathrm{OO}_3=1-2a\,,\ \ \mathrm{O}_3\mathrm{O}_1=2a+a=3a\,,\ \ \mathrm{OO}_1=1-a$$

また，$\angle \mathrm{O}_1\mathrm{T}_2\mathrm{O}_3=90^\circ$ より $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{O}_1\mathrm{T}_2}{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3}=\dfrac{a}{3a}=\dfrac{1}{3}$ となり，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

そこで，$\triangle \mathrm{O}_3\mathrm{O}_1\mathrm{O}$ に余弦定理を適用すると，

$$(1-a)^2=(3a)^2+(1-2a)^2-2\cdot 3a(1-2a)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(6+4\sqrt{2})a^2-(1+2\sqrt{2})=0$$

$a>0$ から，$a=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}}=\sqrt{\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}}$

コメント

いろいろな解法が考えられますが，いずれにせよ，2 円が接するとき，中心間距離が半径の和や差に等しいことを利用します。

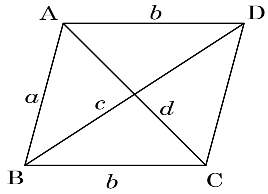
問　題

(1)　平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a$，$\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=b$，$\mathrm{BD}=c$，$\mathrm{AC}=d$ とする。このとき，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　3 つの正数 a, b, $c\,(0<a\leqq b\leqq c)$ が $a^2+b^2>c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体が作れることを証明せよ。　[2003]

解答例

(1)　$\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ABC}=180°-\theta$ となり，$\triangle\mathrm{ABD}$，$\triangle\mathrm{ABC}$ にそれぞれ余弦定理を適用すると，



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta\cdots\cdots\cdots①$$
$$d^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\theta)$$
$$=a^2+b^2+2ab\cos\theta\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$c^2+d^2=2a^2+2b^2$，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$

(2)　$0<a\leqq b\leqq c$ かつ $a^2+b^2>c^2$ より，3 辺の長さが a, b, c の三角形は鋭角三角形であるので,

$$a^2+b^2>c^2,\ b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2\cdots\cdots\cdots③$$

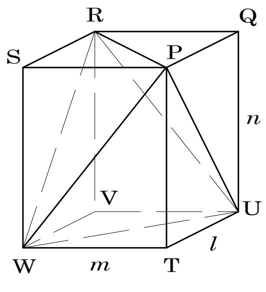
③より, $l>0$, $m>0$, $n>0$ として，l^2，m^2，n^2 を次式で定義することができる。

$$l^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),\ m^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2),\ n^2=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)$$

a^2，b^2，c^2 について解くと，$a^2=l^2+m^2$，$b^2=l^2+n^2$，$c^2=m^2+n^2$

$$a=\sqrt{l^2+m^2},\ b=\sqrt{l^2+n^2},\ c=\sqrt{m^2+n^2}$$

さて，直方体 PQRS-TUVW において，$\mathrm{PQ}=l$，$\mathrm{PS}=m$，$\mathrm{PT}=n$ とすると,



$$\mathrm{PR}=\mathrm{WU}=a,\ \mathrm{PU}=\mathrm{RW}=b,\ \mathrm{PW}=\mathrm{RU}=c$$

よって，各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体を作ることができる。

コメント

(2)の問題を見て「直方体に埋め込まれた等面四面体」ということに気持ちが集約してしまい, (1)の利用という考えは吹っ飛んでしまいました。。

問　題

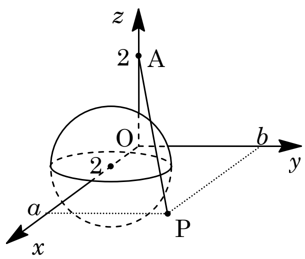
xyz 空間の 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，P$(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を $a,\ b,\ t$ を使って表せ。

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。　[2017]

解答例＋映像解説



(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,\ 0,\ 2)+t(a,\ b,\ -2)$$

よって，Q$(at,\ bt,\ 2-2t)$ となる。

(2) (1)から，$l:(x,\ y,\ z)=(at,\ bt,\ 2-2t)$ ………①

$$S:(x-2)^2+y^2+z^2=2 \text{ ………②}$$

①②を連立して，$(at-2)^2+b^2t^2+(2-2t)^2=2$

$$(a^2+b^2+4)t^2-4(a+2)t+6=0 \text{ ………③}$$

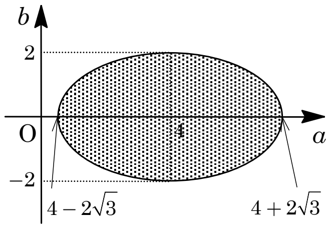
l が S と相異なる 2 点で交わるので，③から，

$$D/4=4(a+2)^2-6(a^2+b^2+4)>0,\ \ a^2-8a+3b^2+4<0$$

すると，$(a-4)^2+3b^2<12$ となり，

$$\frac{(a-4)^2}{12}+\frac{b^2}{4}<1 \text{ ………④}$$

④を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



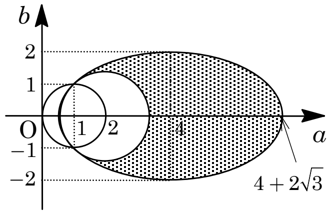
(3) $T:(x-2)^2+y^2+z^2=2$ かつ $z>0$ なので，l が T と相異なる 2 点で交わる条件は，①から $2-2t>0$ すなわち $t<1$ となるので，③が $t<1$ である相異なる 2 解をもつことに対応する。すると，④に加えて，

$$\frac{2(a+2)}{a^2+b^2+4}<1 \text{ ………⑤，} \ (a^2+b^2+4)-4(a+2)+6>0 \text{ ………⑥}$$

⑤より，$a^2+b^2+4>2(a+2)$ となり，$(a-1)^2+b^2>1$ ………⑦

⑥より，$a^2+b^2-4a+2>0$ となり，$(a-2)^2+b^2>2$ ………⑧

④⑦⑧を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



コメント

空間図形を題材とし，2 次方程式の解の配置を関連させた基本的な問題です。ただ，領域の図示については，時間をかなり費やしてしまいます。

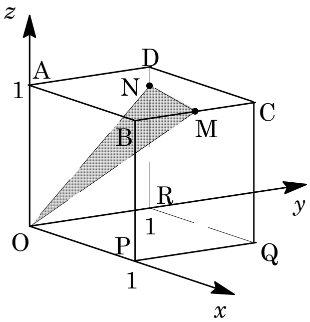
問　題

座標空間に 8 点 $O(0,\ 0,\ 0)$, $P(1,\ 0,\ 0)$, $Q(1,\ 1,\ 0)$, $R(0,\ 1,\ 0)$, $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(1,\ 0,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 1)$, $D(0,\ 1,\ 1)$をとり，線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を$N(0,\ 1,\ t)$とし，3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

(1) K の座標を t で表せ。

(2) 四面体 OKLP の体積を$V(t)$とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき，$V(t)$の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。　[2010]

解答例



(1) まず，$\overrightarrow{ON}=(0,\ 1,\ t)$で，M は線分 BC の中点より，

$$\overrightarrow{OM}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{2}(2,\ 1,\ 2)$$

さて，平面 OMN の法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$\vec{n}$は$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{OM}$に垂直なので，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{ON}=b+tc=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}=2a+b+2c=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b=-tc$，$a=\dfrac{t-2}{2}c$

よって，$\vec{n}=\dfrac{c}{2}(t-2,\ -2t,\ 2)$であることより，平面 OMN の方程式は，

$$(t-2)x-2ty+2z=0\cdots\cdots\cdots③$$

また，直線 PD は，u をパラメータとして，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{OP}+u\overrightarrow{PD}=(1,\ 0,\ 0)+u(-1,\ 1,\ 1)=(1-u,\ u,\ u)\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(t-2)(1-u)-2tu+2u=0$，$(t-2)+(4-3t)u=0$

$0\leqq t\leqq 1$ から $u=\dfrac{2-t}{4-3t}$ となり，④より，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$

よって，平面 OMN と直線 PD の交点 K は，$K\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$となる。

(2) 平面 OMN と直線 PB : $x=1$，$y=0$ の交点 L の z 座標は，③より，

$$(t-2)+2z=0,\quad z=\frac{2-t}{2}$$

これより，四面体 OKLP の体積$V(t)$は，△OPL を底面と考えて，

$$V(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2-t}{2}\right)\frac{2-t}{4-3t}=\frac{(2-t)^2}{12(4-3t)}$$

$$V'(t)=\frac{-2(2-t)(4-3t)+3(2-t)^2}{12(4-3t)^2}=\frac{(2-t)(3t-2)}{12(4-3t)^2}$$

これより，$V(t)$ は $t=0$ または $t=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{12}$ をとり，$t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{2}{27}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$\dfrac{1}{12}$	$\searrow$	$\dfrac{2}{27}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{12}$

コメント

交点 K, L の座標を求めるとき，計算を単純にするため，平面の方程式を利用しています。配布された公式集にも載っていることですし。

問　題

三角形 ABC で辺 AC を $s:1-s$ に内分する点を P，辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき，

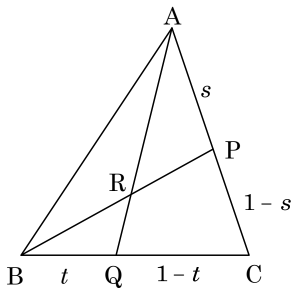
$$\triangle\mathrm{APR}\text{ の面積} = 2\times(\triangle\mathrm{BQR}\text{ の面積})$$

が成り立っているとする。

(1) s を t を用いて表せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$ を求めよ。ただし，t が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき，$t\to+0$ と表す。 [2008]

解答例



(1) まず，$\mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=k:1-k$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+kt\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=l:1-l$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+ls\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$k(1-t)=1-l\cdots\cdots\cdots③,\quad kt=ls\cdots\cdots\cdots④$$

さらに，$\triangle\mathrm{APR}=2\times\triangle\mathrm{BQR}$ より，

$$k(1-l)=2l(1-k),\quad kl+k-2l=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

③より $l=1-k+kt$ となり，④に代入すると，

$$kt=(1-k+kt)s,\quad k(s+t-st)=s$$

よって，$k=\dfrac{s}{s+t-st}\cdots\cdots$⑥となり，③から，

$$l=1-\frac{s}{s+t-st}+\frac{st}{s+t-st}=\frac{t}{s+t-st}\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦を⑤に代入すると，

$$\frac{st}{(s+t-st)^2}+\frac{s}{s+t-st}-\frac{2t}{s+t-st}=0,\quad st+(s-2t)(s+t-st)=0$$

s についてまとめると，$(1-t)s^2+2t^2s-2t^2=0$ となるので，$s>0$ から，

$$s=\frac{-t^2+\sqrt{t^4+2(1-t)t^2}}{1-t}=\frac{-t^2+t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$$

(2) (1)より，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{-t+\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}=\sqrt{2}$

コメント

対頂角は等しいことから，三角形の面積比を，隣り合う 2 辺の長さの比の積として表しています。なお，(2)の計算には，唖然としてしまいます。

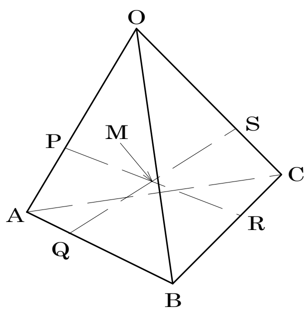
問　題

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\dfrac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\dfrac{1}{2}$ で，同時に動き出す。

(1) 動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　[2005]

解答例



(1) t 秒後には，$\mathrm{OP}=\mathrm{BR}=t$，$\mathrm{AQ}=\mathrm{CS}=\dfrac{1}{2}t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

(2) QS と PR の交点が M なので，まず M は QS 上にあることより，k を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OS}}$$
$$=k\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}kt\vec{b}+(1-k)\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

また，M は PR 上にあることより，l を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=l\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=lt\vec{a}+(1-l)(1-t)\vec{b}+(1-l)t\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$k\left(1-\frac{1}{2}t\right)=lt\cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{1}{2}kt=(1-l)(1-t)\cdots\cdots\cdots②$$

$$(1-k)\left(1-\frac{1}{2}t\right)=(1-l)t\cdots\cdots\cdots③$$

①＋③から，$1-\dfrac{1}{2}t=t$ より，$t=\dfrac{2}{3}$

①に代入して $k=l$，②に代入して $k+l=1$ となるので，$k=l=\dfrac{1}{2}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

コメント

よく見かける空間ベクトルの基本問題です。

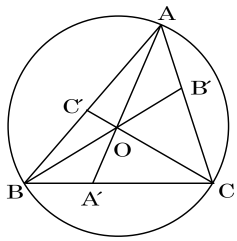
問　題

$\triangle$ABC の外心（外接円の中心）O が三角形の内部にあるとし，α，β，γ は $\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たす正数であるとする。また，直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A′，B′，C′ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ を表せ。

(2) $\triangle$A′B′C′ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ。　[2001]

解答例



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\cdot\frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\alpha}=-k\left(\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

点 A′ は線分 BC 上にあるので，

$$-k\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=1,\quad k=-\frac{-\alpha}{\beta+\gamma}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ………①

(2) (1)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ………②，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ………③

$\triangle$A′B′C′ の外心が O に一致するとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$

①②③より，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ なので，

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\frac{\beta}{\gamma+\alpha}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\neq 0$ なので，$\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$

よって，正の数 l が存在して，$\alpha=l(\beta+\gamma)$，$\beta=l(\gamma+\alpha)$，$\gamma=l(\alpha+\beta)$

$$\alpha+\beta+\gamma=2l(\alpha+\beta+\gamma)$$

$\alpha+\beta+\gamma>0$ より $l=\dfrac{1}{2}$ となるので，

$$2\alpha=\beta+\gamma\ \cdots\cdots\cdots④,\quad 2\beta=\gamma+\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad 2\gamma=\alpha+\beta\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤より $\alpha=\beta$，⑤⑥より $\beta=\gamma$，よって $\alpha=\beta=\gamma$ となる。

コメント

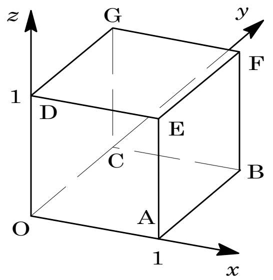
ベクトルの基本問題です。(1)の誘導を利用すると, (2)の結論も簡単に導けます。

問　題

座標空間内の 6 つの平面$x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$，$z=0$，$z=1$で囲まれた立方体を C とする。$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$を$a_1>0$，$a_2>0$，$a_2>0$を満たし，大きさが 1 のベクトルとする。$H$ を原点 O を通りベクトル$\vec{l}$に垂直な平面とする。このとき，ベクトル$\vec{l}$を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を，a_1，a_2，a_3を用いて表せ。ここに，C の影とは C 内の点から平面 H へひいた垂線の足全体のなす図形である。 [2000]

解答例

立方体 C を平面 H へ正射影した図形は，面 OABC，面 OAED，面 OCGD を H へ正射影した図形となる。



まず，面 OABC の法線ベクトルを$\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$，また，平面 H の法線ベクトルが$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$なので，面 OABC と平面 H のなす角をθ_1 $(0°\leqq\theta_1\leqq 90°)$とすると，

$$\cos\theta_1=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_3|}{1\times 1}=a_3$$

すると，面 OABC の面積が 1 より，H へ正射影した図形の面積は，

$$1\times\cos\theta_1=a_3$$

同様にして，面 OAED，面 OCGD は，法線ベクトルがそれぞれ$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ 0)$となり，平面 H とのなす角をθ_2，θ_3 $(0°\leqq\theta_2\leqq 90°,\ 0°\leqq\theta_3\leqq 90°)$とすると，

$$\cos\theta_2=\frac{|\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_2|}{1\times 1}=a_2,\quad \cos\theta_3=\frac{|\overrightarrow{n_3}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_3}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_1|}{1\times 1}=a_1$$

すると，面 OAED，面 OCGD の面積が 1 より，H へ正射影した図形の面積は，それぞれ，

$$1\times\cos\theta_2=a_2,\ 1\times\cos\theta_3=a_1$$

以上より，求める立方体 C の影の面積は，$a_1+a_2+a_3$となる。

コメント

この問題を読んだ瞬間，名大の過去問を思い出しました。凸多面体を平面へ正射影する典型題として，よく採用されていたのですが，出題年度を調べたところ 1987 年でした。もう時効でしょうか。

問　題

(1)　ベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$が次の条件(＊)を満たすとき，点$(a_1,\ a_2)$の存在範囲を図示せよ。

(＊)　あるベクトル$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$が存在して，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$が任意のベクトル$\vec{p}$に対して成り立つ。

(2)　(1)で求めた$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$に対して，条件(＊)にあるベクトル$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$x,\ y$を任意の実数として，$\vec{p}=(x,\ y)$とおく。

条件より，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$なので，

$$(a_1x+a_2y)^2+(b_1x+b_2y)^2=x^2+y^2\cdots\cdots\cdots①$$

$(x,\ y)=(1,\ 0)$に対して①が成立することより，$a_1{}^2+b_1{}^2=1\cdots\cdots\cdots②$

$(x,\ y)=(0,\ 1)$に対して①が成立することより，$a_2{}^2+b_2{}^2=1\cdots\cdots\cdots③$

$(x,\ y)=(1,\ 1)$に対して①が成立することより，$(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=2$

②③を代入して，$a_1a_2+b_1b_2=0\cdots\cdots\cdots④$

逆に②③④が成立するとき，任意の実数$x,\ y$に対して，①は明らかに成立する。

よって，求める条件は，ある$(b_1,\ b_2)$に対して，②③④が成立する条件となる。

まず，②より$a_1=\cos\theta,\ b_1=\sin\theta$，③より$a_2=\cos\varphi,\ b_2=\sin\varphi$とおくことができる。

④に代入して，$\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=0$，$\cos(\theta-\varphi)=0$

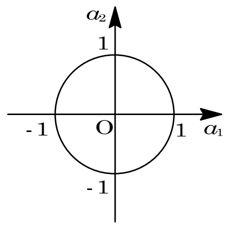
すると$\theta-\varphi=\pm 90^\circ$より，$\varphi=\theta\mp 90^\circ$となる。

以下，複号同順で，

$$a_1=\cos\theta,\ a_2=\cos(\theta\mp 90^\circ)=\pm\sin\theta\cdots\cdots\cdots⑤$$

θは任意より，$a_1{}^2+a_2{}^2=1$

以上より，点$(a_1,\ a_2)$は原点中心の単位円周上に存在し，図示すると右図のようになる。



(2)　(1)より，$b_1=\sin\theta,\ b_2=\sin(\theta\mp 90^\circ)=\mp\cos\theta$

⑤より，$b_1=\pm a_2,\ b_2=\mp a_1$

よって，$\vec{b}=(a_2,\ -a_1)$または$\vec{b}=(-a_2,\ a_1)$

コメント

かなり丁寧に解を書きました。任意の$x,\ y$に対し，①が成立する必要十分条件については，もっとあっさり書いても構わないと思います。

問　題

p を素数，a, b を整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れることを示せ。

(2)　$(a+2)^p-a^p$ は偶数であることを示せ。

(3)　$(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　p を素数，a, b を整数とするとき，二項定理より，

$$(a+b)^p-a^p-b^p=\sum_{k=0}^{p}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}b^k-a^p-b^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}b^k$$

ここで，$1\leqq k\leqq p-1$ のとき，$k!$ および $(p-k)!$ はともに p で割り切れない。これより，${}_p\mathrm{C}_k=\dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}$ は p の倍数となる。

よって，$(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れる。

(2)　(1)と同様に，二項定理より，

$$(a+2)^p-a^p=\sum_{k=1}^{p}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}\cdot 2^k$$

ここで，$1\leqq k\leqq p$ のとき 2^k は 2 の倍数となるので，$(a+2)^p-a^p$ は偶数である。

(3)　$A=(a+2)^p-a^p$ とおくと，(2)より A は偶数なので，l を整数として，

$$A=2l\cdots\cdots\cdots①$$

(1)より，$(a+2)^p-a^p-2^p$ は p で割り切れることより，m を整数として，

$$A-2^p=pm,\ \ A=pm+2^p\cdots\cdots\cdots②$$

さて，2^p を p で割った余りを求めるために，(2)と同様に二項定理を利用すると，

$$2^p=(1+1)^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k+1^p+1^p=2+\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k$$

すると，$1\leqq k\leqq p-1$ のとき ${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数より，2^p を p で割った余りは 2 を p で割った余りに等しいので，素数 p を $p=2$ と $p\geqq 3$ で場合分けをする。

(i)　$p=2$ のとき　このとき，$A=(a+2)^2-a^2=4(a+1)$ となる。

これより，A を $2p=4$ で割った余りは 0 である。

(ii)　$p\geqq 3$ のとき　2^p を p で割った余りは 2 より，②から，n を整数として，

$$A=pm+(pn+2)=p(m+n)+2\cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$2l=p(m+n)+2$ から $2(l-1)=p(m+n)$

2 と p は互いに素なので，i を整数として，$l-1=pi$　$(l=pi+1)$ と表せるので，

$$A=2(pi+1)=2pi+2$$

よって，A を $2p$ で割った余りは 2 である。

コメント

二項定理の絡んだ整数問題です。誘導が細かく付いていますので，それに従って解いていけばよいでしょう。なお，(3)は 2^p を p で割った余りがポイントです。

問　題

次の問いに答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　次の条件(＊)を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(＊)\ \begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,\ d \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,\ f \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,\ b \text{ である。} \end{cases}$$

(2)　2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，次の条件(＊＊)を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である。

このとき，

(i)　正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ii)　条件(＊＊)を満たす数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の組をすべて求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　整数 a, b, c, d, e, f に対し，2 次方程式$x^2+ax+b=0$ の 2 つの解がc，d より，

$c+d=-a$ ………①，$cd=b$ ………②

また，2 次方程式$x^2+cx+d=0$ の 2 つの解がe，f より，

$e+f=-c$ ………③，$ef=d$ ………④

さらに，2 次方程式$x^2+ex+f=0$ の 2 つの解がa，b より，

$a+b=-e$ ………⑤，$ab=f$ ………⑥

②④⑥より，$abcdef=bdf$，$bdf(ace-1)=0$ ………⑦

(i)　$bdf=0$のとき

$b=0$とすると，⑥より $f=0$ となり，④より $d=0$

$d=0$ とすると，②より $b=0$ となり，⑥より $f=0$

$f=0$ とすると，④より $d=0$ となり，②より $b=0$

よって，いずれの場合も$b=d=f=0$ である。

すると，①より $c=-a$，③より $e=-c$，⑤より $a=-e$ から，$a=-e=c=-a$

$a=c=e=0$

(ii)　$bdf\neq 0$のとき　⑦より $ace=1$ となり, a, c, e は整数より,

(ii-i)　$(a,\ c,\ e)=(1,\ 1,\ 1)$のとき

①より $1+d=-1$，③より $1+f=-1$，⑤より $1+b=-1$ から，$b=d=f=-2$

なお，この値は②④⑥を満たす。

(ii-ii)　$(a,\ c,\ e)=(1,\ -1,\ -1)$のとき　①より $-1+d=-1$ から $d=0$ で不適

(ii-iii)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ 1,\ -1)$のとき　③より $-1+f=-1$ から $f=0$ で不適

(ii-iv)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ -1,\ 1)$ のとき　⑤より $-1+b=-1$ から $b=0$ で不適

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ -2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2)$

(2)　整数 a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} に対し，$x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} より，

$a_n=-a_{n+1}-b_{n+1}$ ………①，$b_n=a_{n+1}b_{n+1}$ ………②

(i)　正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示す。

(a)　すべての n に対して $b_n\neq0$ のとき

②より，$a_{n+1}\neq0$ から $|a_{n+1}|\geqq1$ となり，$|b_n|=|a_{n+1}||b_{n+1}|\geqq|b_{n+1}|$ から，

$|b_1|\geqq|b_2|\geqq\cdots\geqq|b_n|\geqq|b_{n+1}|\geqq\cdots$　………③

不等式③で等号が成立しない場合は，ある正の整数 l に対し $|b_l|<0$ となり不適。

これより，ある正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在する。

(b)　ある正の整数 k に対して $b_k=0$ のとき

①②において，$n=k$ とおくと，

$a_k=-a_{k+1}-b_{k+1}$ ………④，$0=a_{k+1}b_{k+1}$ ………⑤

ここで，$b_{k+1}\neq0$ と仮定すると，⑤より $a_{k+1}=0$，④に代入して $b_{k+1}=-a_k$

すると，$x^2+a_{k+1}x+b_{k+1}=0$ すなわち $x^2-a_k=0$ の解が整数 a_{k+2}，b_{k+2} であることより a_k は平方数となり，$a_k\neq0$ から α を正の整数として $a_k=\alpha^2$ とおくと，

$(a_{k+2},\ b_{k+2})=(\pm\alpha,\ \mp\alpha)$（以下，複号同順）

さらに，$x^2+a_{k+2}x+b_{k+2}=0$ すなわち $x^2\pm\alpha x\mp\alpha=0$ の解が整数 a_{k+3}，b_{k+3} であることより，

$\pm\alpha=-a_{k+3}-b_{k+3}$ ………⑥，$\mp\alpha=a_{k+3}b_{k+3}$ ………⑦

⑥⑦から，$a_{k+3}b_{k+3}-a_{k+3}-b_{k+3}=0$ となり，$(a_{k+3}-1)(b_{k+3}-1)=1$

(b-1)　$(a_{k+3}-1,\ b_{k+3}-1)=(1,\ 1)$ のとき

$(a_{k+3},\ b_{k+3})=(2,\ 2)$ となり，$x^2+2x+2=0$ の解は整数 a_{k+4}，b_{k+4} であるが，$D/4=-1<0$ から虚数解となり不適である。

(b-2)　$(a_{k+3}-1,\ b_{k+3}-1)=(-1,\ -1)$ のとき

$(a_{k+3},\ b_{k+3})=(0,\ 0)$ となり，$\alpha>0$ から⑥⑦は成立しない。

したがって，ある k で $b_k=0$ のとき $b_{k+1}=0$ となる。そして同様に，$b_{k+2}=0$，$b_{k+3}=0$，…となり，k を m に置き換えると，

$0=b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$

以上より，(a)(b)のいずれの場合も，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となる。

(ii)　(i)の場合分けに従って，①②を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組を求める。

(a)　すべての n に対して $b_n\neq0$ のとき

β を正の整数として，(i)から，$\beta=|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$　………⑧

さて，②で $n=m$ とすると，$b_m=a_{m+1}b_{m+1}$ となり，$|b_m|=|a_{m+1}||b_{m+1}|$ より，

$\beta=|a_{m+1}|\beta$，$|a_{m+1}|=1$

同様にして，$b_{m+1}=a_{m+2}b_{m+2}$ から $|a_{m+2}|=1$ なので，同様に繰り返すと，

$1=|a_{m+1}|=|a_{m+2}|=|a_{m+3}|=\cdots$ ………⑨

さて，⑧より $b_{m+1}=\pm\beta$ であるが，まず $b_{m+1}=\beta$ のときについて調べる。

すると，$x^2+a_{m+1}x+b_{m+1}=0$ すなわち $x^2+a_{m+1}x+\beta=0$ の解は整数 a_{m+2}，b_{m+2} であるが，⑨に注意すると，$D={a_{m+1}}^2-4\beta=|a_{m+1}|^2-4\beta=1-4\beta<0$ より虚数解となり不適である。

よって，$b_{m+1}\neq\beta$ から $b_{m+1}=-\beta$ となる。同様に，$b_{m+2}=-\beta$ となり繰り返すと，

$-\beta=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑩

②から $b_{m+1}=a_{m+2}b_{m+2}$ に⑩を代入すると，$a_{m+2}=1$ となる。同様にすると，$a_{m+3}=1$ となり，繰り返すと，

$1=a_{m+2}=a_{m+3}=a_{m+4}=\cdots$ ………⑪

ここで，①から $a_{m+2}=-a_{m+3}-b_{m+3}$ に代入すると，$1=-1+\beta$，$\beta=2$ となり，

$-2=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑫

さらに，①より，$a_{m+1}=-a_{m+2}-b_{m+2}=-1-(-2)=1$

$a_m=-a_{m+1}-b_{m+1}=-1-(-2)=1$

また，②より，$b_m=a_{m+1}b_{m+1}=1\times(-2)=-2$ となり，同様に繰り返すと，

$a_1=a_2=\cdots=a_m=a_{m+1}=1$，$b_1=b_2=\cdots=b_m=-2$ ………⑬

以上より，⑪⑫⑬をまとめると，$n\geqq1$ で，$a_n=1$，$b_n=-2$

(b)　ある正の整数 m に対して $b_m=0$ のとき

(i)より，$0=b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑭

ここで，②より，$b_{m-1}=a_mb_m=0$，$b_{m-2}=a_{m-1}b_{m-1}=0$ となり，繰り返すと，

$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{m-2}=b_{m-1}=0$ ………⑮

⑭⑮をまとめると，$n\geqq1$ で，$b_n=0$

すると，①より，$a_1=-a_2-b_2=-a_2$，$a_2=-a_3-b_3=-a_3$ となり，

$a_n=-a_{n+1}-b_{n+1}=-a_{n+1}$

これより，$a_2=-a_1$，$a_3=-a_2$，…，$a_{n+1}=-a_n$ となり，$n\geqq1$ で，

$a_n=a_1(-1)^{n-1}$

(a)(b)より，$(a_n,\ b_n)=(1,\ -2)$ または $(a_n,\ b_n)=\left(a_1(-1)^{n-1},\ 0\right)$（$a_1$ は整数）

コメント

(1)は整数が絡んだ連立方程式の問題ですが，(2)は整数と漸化式についての時間無制限の難問です。2 次方程式から生成される整数解の数列という，非常にきつい条件が与えられているので，初めのうちはなんとかうまくいっても，そのうち破綻し，そこが付け目という気持ちで考えています。

問　題

負でない整数 N が与えられたとき，$a_1=N$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として数列$\{a_n\}$を定める。ただし$[a]$は，実数 a の整数部分（$k\leqq a<k+1$ となる整数 k）を表す。

(1) $a_3=1$ となるような N をすべて求めよ。

(2) $0\leqq N<2^{10}$ を満たす整数 N のうちで，N から定まる数列$\{a_n\}$のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3) 0 から $2^{100}-1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び，数列$\{a_n\}$を定める。次の条件(＊)を満たす最小の正の整数 m を求めよ。

　(＊)　数列$\{a_n\}$のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる。　[2014]

解答例＋映像解説

(1) $a_1=N\geqq 0$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$に対して，$a_3=1$ とすると，$\left[\dfrac{a_2}{2}\right]=1$ から $a_2=2,\ 3$

すると，$a_2=2$ のとき $\left[\dfrac{a_1}{2}\right]=2$ から $a_1=4,\ 5$，$a_2=3$ のとき $\left[\dfrac{a_1}{2}\right]=3$ から $a_1=6,\ 7$ となり，まとめると，$a_1=N=4,\ 5,\ 6,\ 7$ である。

(2) 一般的に，負でない整数 $i,\ j$ $(i<j)$ に対して，$i\leqq\left[\dfrac{x}{2}\right]<j$ を満たす整数 x は，

$$x=2i,\ 2i+1,\ 2i+2,\ \cdots,\ 2j-1$$

すなわち，$2i\leqq x<2j$ となり，$2j-2i$ 個の x が存在する。

さて，ある正の整数 l に対して，$a_l=2$ とすると，$a_{l-1}=4,\ 5$ となり，

$$4\leqq a_{l-1}<6,\ 8\leqq a_{l-2}<12,\ 16\leqq a_{l-3}<24,\ \cdots,\ 2^l\leqq a_1<3\cdot 2^{l-1}$$

ここで，条件から $0\leqq N<2^{10}$ すなわち $0\leqq a_1<2^{10}$ より，$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$

よって，$a_l=2$ となる整数 N の個数は，

$$\sum_{l=1}^{9}(3\cdot 2^{l-1}-2^l)=\sum_{l=1}^{9}2^{l-1}=\frac{2^9-1}{2-1}=511$$

(3) ある正の整数 l に対して，$a_l=m$ とすると，$a_{l-1}=2m,\ 2m+1$ となり，

$$2m\leqq a_{l-1}<2(m+1),\ 4m\leqq a_{l-2}<4(m+1),\ \cdots,\ 2^{l-1}m\leqq a_1<2^{l-1}(m+1)$$

さて，$0\leqq N\leqq 2^{100}-1$ において，$2^{l-1}m\leqq 2^{100}-1<2^{l-1}(m+1)-1$ と仮定すると，

$$m\leqq 2^{101-l}-\frac{1}{2^{l-1}}<m+1-\frac{1}{2^{l-1}}$$

まとめると，$m\leqq 2^{101-l}-\dfrac{1}{2^{l-1}}$ かつ $m>2^{101-l}-1$ となり，これを満たす整数 m は存在しない。

これより，$a_l = m$ となる確率は，整数 N の個数に注目して，

$$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=1}^{l}\{2^{k-1}(m+1)-2^{k-1}m\} = \frac{1}{2^{100}}\sum_{k=1}^{l}2^{k-1} = \frac{1}{2^{100}}\cdot\frac{2^l-1}{2-1} = \frac{2^l-1}{2^{100}}$$

条件から，$\dfrac{2^l-1}{2^{100}} \leqq \dfrac{1}{100}$ より，$2^l \leqq \dfrac{2^{100}}{100}+1 = \dfrac{128}{100}\cdot 2^{93}+1 = \dfrac{32}{25}\cdot 2^{93}+1$ となり，

$$l = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 93$$

よって，$1 \leqq l \leqq 93$ のとき $0 \leqq N \leqq 2^{100}-1$ に含まれ，$l \geqq 94$ のとき $N > 2^{100}-1$ となることから，求める正の整数 m の条件は，

$$2^{100}-1 < 2^{93}m$$

すると， m の最小値は $m > 2^7 - \dfrac{1}{2^{93}}$ より，$m = 2^7 = 128$ である。

コメント

(1)(2)は実験で具体的に計算すればよいだけですが，それをベースにした(3)の設問はかなり難度が高く，記述も容易とはいえないものになっています。

問　題

$x>0$ とし，$f(x)=\log x^{100}$ とおく。

(1) 次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2) 実数 a の整数部分($k\leqq a<k+1$ となる整数 k)を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(1000)]$のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば，$\log 10=2.3026$ として計算せよ。 [2013]

解答例＋映像解説

(1) $f(x)=\log x^{100}=100\log x$ より，$f'(x)=\dfrac{100}{x}$ となるので，$0<x<c<x+1$ を満たすある c に対して，平均値の定理から，

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\frac{100}{c},\quad f(x+1)-f(x)=\frac{100}{c}$$

すると，$\dfrac{100}{x+1}<\dfrac{100}{c}<\dfrac{100}{x}$ より，$\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2) n を整数とすると，(1)より，$\dfrac{100}{n+1}<f(n+1)-f(n)<\dfrac{100}{n}$

ここで，$\dfrac{100}{n+1}\geqq 1$ とすると $n\leqq 99$ となり，このとき $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が 1 より大となるので，整数$[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(100)]$はすべて異なる。

また，$\dfrac{100}{n}\leqq 1$ とすると $n\geqq 100$ であり，このとき $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が 1 より小となり，$[f(100)]$，$[f(101)]$，$[f(102)]$，…，$[f(1000)]$は，$[f(100)]$以上$[f(1000)]$以下のいずれかの整数をもれなくとり，

$$[f(100)]=[100\log 100]=[200\log 10]=[460.52]=460$$
$$[f(1000)]=[100\log 1000]=[300\log 10]=[690.78]=690$$

以上より，$[f(1)]$，$[f(2)]$，…，$[f(1000)]$のうちで異なるものの個数は，

$$100+(690-460+1)-1=330$$

コメント

(2)では，隣接する $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が，$n=100$ を境に，1 より大から 1 より小に変化するという感覚が，個数を数えるポイントとなっています。

問　題

$k,\ m,\ n$ は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k,\ S_k(1) = 1\ (k \geqq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n)\quad (m \geqq 2)$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1)　二項定理を利用すると，$S_k(1)=1$，$S_k(2)=1^k+2^k$ より，

$$T_m(1) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(1) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(1) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(1) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(1)$$

$$= {}_m\mathrm{C}_1 + {}_m\mathrm{C}_2 + {}_m\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} = (1+1)^m - {}_m\mathrm{C}_0 - {}_m\mathrm{C}_m = 2^m - 2$$

$$T_m(2) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(2) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(2) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(2) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(2)$$

$$= {}_m\mathrm{C}_1 (1+2^1) + {}_m\mathrm{C}_2 (1+2^2) + {}_m\mathrm{C}_3 (1+2^3) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} (1+2^{m-1})$$

$$= T_m(1) + \{(1+2)^m - {}_m\mathrm{C}_0 2^0 - {}_m\mathrm{C}_m 2^m\}$$

$$= 2^m - 2 + 3^m - 1 - 2^m = 3^m - 3$$

(2)　$T_m(n) = (n+1)^m - (n+1)$ であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　(1)より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$T_m(l) = (l+1)^m - (l+1)$ であると仮定すると，条件より，

$$T_m(l+1) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(l+1) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(l+1) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(l+1)$$

$$= {}_m\mathrm{C}_1 \{1+2+\cdots+l+(l+1)\} + {}_m\mathrm{C}_2 \{1^2+2^2+\cdots+l^2+(l+1)^2\}$$

$$+ \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} \{1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+l^{m-1}+(l+1)^{m-1}\}$$

$$= T_m(l) + {}_m\mathrm{C}_1 (l+1) + {}_m\mathrm{C}_2 (l+1)^2 + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} (l+1)^{m-1}$$

$$= (l+1)^m - (l+1) + \{(1+l+1)^m - {}_m\mathrm{C}_0 (l+1)^0 - {}_m\mathrm{C}_m (l+1)^m\}$$

$$= (l+1)^m - (l+1) + (l+2)^m - 1 - (l+1)^m = (l+2)^m - (l+2)$$

(i)(ii)より，$T_m(n) = (n+1)^m - (n+1)$ ………(＊)

(3)　まず，$p=3$ のときは，$S_1(2) = 1+2$ は 3 の倍数となり題意を満たし，$S_k(p-1)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

次に，p が 5 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$k=1$ のとき

$m=2$，$n=p-1$ とすると，条件より，$T_2(p-1)={}_2\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)$

すると，(＊)から，$(p-1+1)^2-(p-1+1)=2S_1(p-1)$

$$2S_1(p-1)=p(p-1)$$

p は 5 以上の素数より，$S_1(p-1)$ は p の倍数である。

(ii)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l$　$(l\leqq p-3)$ のとき

$S_k(p-1)$ が p の倍数であると仮定すると，条件より，

$$T_{l+2}(p-1)={}_{l+2}\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_2\,S_2(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_3\,S_3(p-1)$$
$$+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_l\,S_l(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1}\,S_{l+1}(p-1)$$

(＊)から，$T_{l+2}(p-1)=p^{l+2}-p=p(p^{l+1}-1)$ となり，

$$(l+2)S_{l+1}(p-1)=p(p^{l+1}-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_2\,S_2(p-1)$$
$$-{}_{l+2}\mathrm{C}_3\,S_3(p-1)-\cdots-{}_{l+2}\mathrm{C}_l\,S_l(p-1)$$

これより，$(l+2)S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数となる。

すると，p は 5 以上の素数で，$l+2\leqq p-1$ から，$l+2$ と p は互いに素となるので，$S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数である。

(i)(ii)より，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

コメント

二項定理と整数の融合問題です。(3)の証明に対して，巧妙な誘導がつけられています。また，帰納法における $l\leqq p-3$ という条件から，$p=3$ は特別に扱っています。

問　題

m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4)　r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

[2012]

解答例

(1)　二項定理より，$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の係数は,

$$_{101}\mathrm{C}_2\cdot(-1)^{99}=-\frac{101\times100}{2}=-5050$$

(2)　m, p は 3 以上の奇数から，二項定理を用いると，

$$(p-1)^m+1=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+1=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+(-1)^m+1$$

$$=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=p\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-1}$$

よって，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れる。

(3)　(2)より，$(p-1)^m+1=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+{}_m\mathrm{C}_1(-1)^{m-1}p$

$$=p^2\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-2}+mp$$

m は p で割り切れないので，mp は p^2 で割り切れない。すなわち，$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れない。

(4)　r を正の整数，$s=3^{r-1}m$ のとき，2^s+1 は 3^r で割り切れることを，r に関する数学的帰納法で示す。

(i)　$r=1$ のとき

$s=3^0m=m$ となり，(2)の結論に $p=3$ を適用すると，$2^m+1=(3-1)^m+1$ は 3 すなわち 3^1 で割り切れる。よって，$r=1$ のとき成立する。

(ii)　$r=l$ のとき

$2^{3^{l-1}m}+1$ が 3^l で割り切れると仮定し，n を整数として，$2^{3^{l-1}m}+1=3^ln$ とおく。

$$2^{3^lm}+1=2^{3^{l-1}\cdot3m}+1=\left(2^{3^{l-1}m}\right)^3+1=\left(3^ln-1\right)^3+1$$

$$=(3^ln)^3-3(3^ln)^2+3(3^ln)-1+1=3^{l+1}(3^{2l-1}n^3-3^ln^2+n)$$

よって，$2^{3^lm}+1$ は 3^{l+1} で割り切れる。

(i)(ii)より，$s=3^{r-1}m$ のとき，2^s+1 は 3^r で割り切れる。

コメント

二項定理の応用問題です。(4)は数学的帰納法という手段を決めれば，スムーズに論理が展開できます。

問　題

$a,\ b$ は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0\ ,\ \ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2011]

解答例

(1)　まず，2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ ……①，$y^2 + by + a = 0$ ……②が，それぞれ整数解をもつとき，$a,\ b$ が整数より，①と②の 2 つの解はともに整数である。

さて，$a = b > 0$ とするとき，②は①に一致し，整数 $k,\ l$ $(k \leqq l)$ を用いて，①は，

$$(x + k)(x + l) = 0\ ,\ \ x^2 + (k + l)x + kl = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

①③の係数を比べると，$k + l = a$ ……④，$kl = a$ ……⑤となり，④⑤より，

$$kl = k + l\ ,\ \ (k-1)(l-1) = 1 \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，④⑤から $a > 0$ に注意すると，$k,\ l$ は自然数となり，$1 \leqq k \leqq l$ である。

すると，⑥より，$(k-1,\ l-1) = (1,\ 1)$，$(k,\ l) = (2,\ 2)$

よって，$a = 4$ である。

(2)　$a > b > 0$ とするとき，(1)と同様に，整数 $k,\ l$ $(k \leqq l)$ を用いて，①は，

$$(x + k)(x + l) = 0\ ,\ \ x^2 + (k + l)x + kl = 0$$

よって，$k + l = a$ ……⑦，$kl = b$ ……⑧となり，$a > b$ と⑦⑧から，

$$kl < k + l\ ,\ \ (k-1)(l-1) < 1 \cdots\cdots\cdots⑨$$

一方，$a > 0$，$b > 0$ から $k,\ l$ は自然数となり，$1 \leqq k \leqq l$ であることから，

$$(k-1)(l-1) \geqq 0 \cdots\cdots\cdots⑩$$

⑨⑩より，$(k-1)(l-1) = 0$ となり，$k = 1$ である。

すると，⑦から $a = l + 1$，⑧から $b = l$ となり，2 次方程式②は，

$$y^2 + ly + (l + 1) = 0 \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，(1)と同様にして，整数 $m,\ n$ $(m \leqq n)$ を用いて，⑪は，

$$(y + m)(y + n) = 0\ ,\ \ y^2 + (m + n)x + mn = 0 \cdots\cdots\cdots⑫$$

⑪⑫の係数を比べると，$m + n = l$ ……⑬，$mn = l + 1$ ……⑭となり，⑬⑭より，

$$mn = m + n + 1\ ,\ \ (m-1)(n-1) = 2 \cdots\cdots\cdots⑮$$

ここで，⑬⑭から $l > 0$ に注意すると，$m,\ n$ は自然数となり，$1 \leqq m \leqq n$ である。

すると，⑮より，$(m-1,\ n-1) = (1,\ 2)$，$(m,\ n) = (2,\ 3)$

よって，$l = 5$ から，$a = 6$，$b = 5$ である。

コメント

2 つの自然数の和と積の大小関係を，和と積が等しいのは$2+2=2\times2$，和が積より大きいのは$1+*>1\times*$というイメージを用いて解いています。他の解法もいろいろ考えられそうな，演習に価値ある整数問題です。

問　題

x, y を正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。 [2009]

解答例

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ より，$xy-4x-8y=0$ となり，

$$(x-8)(y-4)=32$$

ここで, x, y は整数であり，$x-8>-8$，$y-4>-4$ から, 32 の約数をとり，

$$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$$

$$(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$$

(2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ より，$xy-px-2py=0$ となり，

$$(x-2p)(y-p)=2p^2$$

ここで，$x-2p>-2p$，$y-p>-p$ であり, p が 3 以上の素数から,

$$(x-2p,\ y-p)=(1,\ 2p^2),\ (2,\ p^2),\ (p,\ 2p),\ (2p,\ p),\ (p^2,\ 2),\ (2p^2,\ 1)$$

さて，$A=2x+3y-7p=2(x-2p)+3(y-p)$ とおくと, A の値は順に,

$$A=2+6p^2,\ 4+3p^2,\ 8p,\ 7p,\ 2p^2+6,\ 4p^2+3$$

ここで, $p\geqq 3$ を用いると,

$$(2+6p^2)-(4+3p^2)=-2+3p^2>0,\ 2+6p^2>4+3p^2$$

$$8p-7p=p>0,\ 8p>7p$$

$$(2p^2+6)-(4p^2+3)=-2p^2+3<0,\ 4p^2+3>2p^2+6$$

さらに，$(4+3p^2)-(2p^2+6)=p^2-2>0$，$4+3p^2>2p^2+6$ ………①

$$(2p^2+6)-7p=(2p-3)(p-2)>0,\ 2p^2+6>7p \cdots\cdots\text{②}$$

①②より, A の最小値は $7p$ であり，このとき，$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p)$ となる。

すると，$2x+3y=A+7p$ から，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は,

$$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p),\ (x,\ y)=(4p,\ 2p)$$

コメント

有名な型の不定方程式です。なお, (2)の大小関係については，初めはグラフということも考えましたが，煩雑になりそうなので止めました。そこで，まず似た式どうしの大小を比べ，この予選を通過した式の大小を比べるという方法を採っています。

問　題

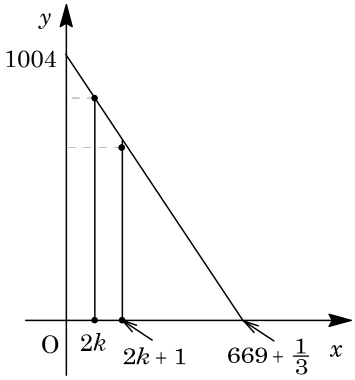
次の問いに答えよ。

(1)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で，不等式 $3x+2y \leqq 2008$ を満たす格子点の個数を, x を固定して数える。



(i)　$x=2k$ $(0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}(2008-3\cdot 2k)=1004-3k$$

よって，直線 $x=2k$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k$ より，格子点は $1005-3k$ 個ある。

(ii)　$x=2k+1$ $(0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}\{2008-3(2k+1)\}=1004-3k-\frac{3}{2}$$

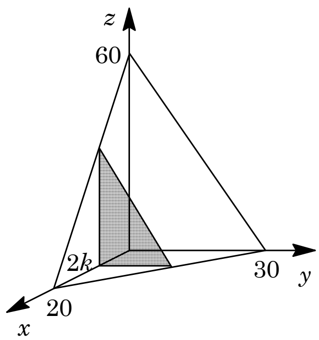
よって，直線 $x=2k+1$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k-2=1002-3k$ より，格子点は $1003-3k$ 個ある。

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は,

$$N=\sum_{k=0}^{334}(1005-3k)+\sum_{k=0}^{334}(1003-3k)=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)$$

$$=2008\times 335-6\times\frac{1}{2}\cdot 334\cdot 335=337010$$

(2)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ で，不等式 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ すなわち $3x+2y+z \leqq 60$ を満たす格子点の個数 N を，まず x を固定して数える。



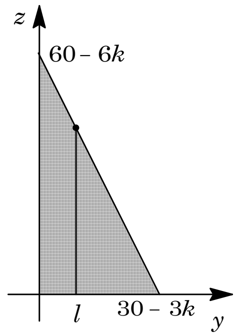
(i)　$x=2k$ $(0 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k$ 上の格子点の個数を N_{2k} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y+60-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y=l$ $(0 \leqq l \leqq 30-3k)$ 上で, $0 \leqq z \leqq -2l+60-6k$ より，格子点は $-2l+61-6k$ 個あるので,

$$N_{2k} = \sum_{k=0}^{30-3k}(-2l+61-6k)$$
$$= -2\cdot\frac{1}{2}(30-3k)(31-3k)+(61-6k)(31-3k)$$
$$= (31-3k)^2$$



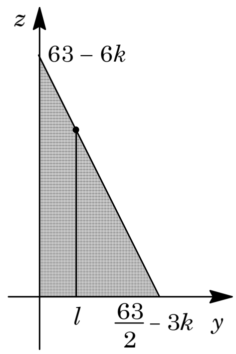
(ii)　$x = 2k-1\ (1 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x = 2k-1$ 上の格子点の個数を N_{2k-1} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y+60-3(2k-1) = -2y+63-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y = l\ (0 \leqq l \leqq 31-3k)$ 上では，$0 \leqq z \leqq -2l+63-6k$ より，格子点は $-2l+64-6k$ 個あるので,

$$N_{2k-1} = \sum_{k=0}^{31-3k}(-2l+64-6k)$$
$$= -2\cdot\frac{1}{2}(31-3k)(32-3k)+(64-6k)(32-3k)$$
$$= (33-3k)(32-3k)$$



(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は,

$$N = \sum_{k=0}^{10} N_{2k} + \sum_{k=1}^{10} N_{2k-1} = N_0 + \sum_{k=1}^{10}(N_{2k}+N_{2k-1})$$
$$= 31^2 + \sum_{k=1}^{10}\left\{(31-3k)^2+(33-3k)(32-3k)\right\}$$
$$= 31^2 + \sum_{k=1}^{10}(2017-381k+18k^2)$$
$$= 31\times31+2017\times10-381\times\frac{1}{2}\times10\times11+18\times\frac{1}{6}\times10\times11\times21$$
$$= 7106$$

コメント

格子点の個数を数える有名問題です。平面と空間の 2 題が出されましたが，どちらも，かなりの量の計算が要求されます。

問　題

正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列$\{x_n\}$を$x_1=x_2=1$，$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}\ (n\geqq 2)$で定める。このときすべての正の整数 n に対してx_{n+1}とx_nが互いに素であることを示せ。 [2004]

解答例

まず，x_nとbが互いに素であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$のとき　$x_1=x_2=1$より，x_1とb，x_2とbは互いに素である。

(ii)　$n=k,\ k+1$のとき　x_kとb，x_{k+1}とbは互いに素であるとする。

ここで，x_{k+2}とbに2以上の公約数gの存在を仮定すると，

$$x_{k+2}=gx'_{k+2},\ b=gb'\quad(x'_{k+2}\text{と}b'\text{は整数})$$

すると，$x_{k+2}=ax_{k+1}+bx_k$から，$ax_{k+1}=g(x'_{k+2}-b'x_k)$………①

これより，ax_{k+1}はgの倍数となるが，条件よりaとbは互いに素，またx_{k+1}とbも互いに素なので，①の成立はありえない。

よって，x_{k+2}とbには2以上の公約数gが存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_nとbは互いに素である。

次に，x_nとbが互いに素であることを利用して，x_{n+1}とx_nが互いに素であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$のとき　$x_1=x_2=1$より，x_2とx_1は互いに素である。

(ii)　$n=l$のとき　x_{l+1}とx_lが互いに素であるとする。

ここで，x_{l+2}とx_{l+1}に2以上の公約数Gの存在を仮定すると，

$$x_{l+2}=Gx''_{l+2},\ x_{l+1}=Gx''_{l+1}\quad(x''_{l+2}\text{と}x''_{l+1}\text{は整数})$$

すると，$x_{l+2}=ax_{l+1}+bx_l$から，$bx_l=G(x''_{l+2}-ax''_{l+1})$………②

これより，bx_lはGの倍数となるが，bとx_{l+1}は互いに素，またx_lとx_{l+1}も互いに素なので，②の成立はありえない。

よって，x_{l+2}とx_{l+1}には2以上の公約数Gが存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_{n+1}とx_nは互いに素である。

コメント

漸化式$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$において，aとbが互いに素，しかもx_nとx_{n-1}も互いに素であるとき，x_{n+1}とx_nが互いに素でない例はすぐに見つけられます。たとえば，$33=7\times3+6\times2$です。ということは，このような例を出現させないためには何を示せばよいのか……，と考えていきました。

問　題

関係式$x^a=y^b=z^c=xyz$を満たす1とは異なる3つの正の実数の組$(x,\ y,\ z)$が，少なくとも1組存在するような，正の整数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。ただし，$a\leqq b\leqq c$とする。　[2002]

解答例

$x^a=y^b=z^c=xyz$ ($x>0,\ y>0,\ z>0$)より，$\log x^a=\log y^b=\log z^c=\log xyz$

$$a\log x=b\log y=c\log z=\log x+\log y+\log z$$

ここで，$\log x=X,\ \log y=Y,\ \log z=Z$とおくと，$x\neq 1,\ y\neq 1,\ z\neq 1$から，

$$aX=bY=cZ=X+Y+Z\ (X\neq 0,\ Y\neq 0,\ Z\neq 0)$$

$$aX=bY\cdots\cdots①,\ aX=cZ\cdots\cdots②,\ aX=X+Y+Z\cdots\cdots③$$

①より$Y=\dfrac{a}{b}X$，②より$Z=\dfrac{a}{c}X$，③に代入して，$aX=X+\dfrac{a}{b}X+\dfrac{a}{c}X$

$X\neq 0$より，$a=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\cdots\cdots\cdots④$

さて，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ より，$\dfrac{1}{a}\geqq\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$となり，④から$\dfrac{3}{a}\geqq 1$，$a\leqq 3$ である。また，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1-\dfrac{1}{a}>0$より$a>1$となる。よって，$a=2,\ 3$である。

(i)　$a=2$のとき　④より$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$より$\dfrac{2}{b}\geqq\dfrac{1}{2}$から$b\leqq 4$で，$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b}>0$から$b>2$となる。

$b=3$のとき$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$より$c=6$，また$b=4$のとき$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$より$c=4$である。

(ii)　$a=3$のとき　④より$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$より$\dfrac{2}{b}\geqq\dfrac{2}{3}$から$b\leqq 3$で，$3=a\leqq b$より$b=3$となる。

このとき，$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$より$c=3$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

コメント

対数をとって変形をしていけば，④というよく見かける不定方程式が現れてきます。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。条件 $k_1 \geqq 1$, ……, $k_{n-1} \geqq 1$, $k_n \geqq 0$ を満たす n 個の整数の組 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ に対して，自然数 $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ を次のように定める。

$$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_n} - 2^{k_2+\cdots+k_n} - 2^{k_3+\cdots+k_n} - \cdots - 2^{k_n}$$

(1)　$1999 = m(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ となる $(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ を求めよ。

(2)　$m(k_1,\ k_2) = m(l_1,\ l_2)$ であれば，$k_1 = l_1$，$k_2 = l_2$ が成り立つことを示せ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n)$ であれば，$k_j = l_j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が成り立つことを示せ。　[1999]

解答例

(1)　$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_4) = 2^{k_1+k_2+k_3+k_4} - 2^{k_2+k_3+k_4} - 2^{k_3+k_4} - 2^{k_4}$

$$= 2^{k_4}(2^{k_1+k_2+k_3} - 2^{k_2+k_3} - 2^{k_3} - 1)$$

$k_1 \geqq 1$, $k_2 \geqq 1$, $k_3 \geqq 1$ より，$2^{k_1+k_2+k_3} - 2^{k_2+k_3} - 2^{k_3} - 1$ は奇数であり，また $k_4 = 0$ のとき 2^{k_4} は奇数，$k_4 \geqq 1$ のとき 2^{k_4} は偶数となる。

1999 は奇数より $k_4 = 0$ となり，このとき $2^{k_1+k_2+k_3} - 2^{k_2+k_3} - 2^{k_3} - 1 = 1999$

$$2^{k_3}(2^{k_1+k_2} - 2^{k_2} - 1) = 2000 = 2^4 \times 125$$

$2^{k_1+k_2} - 2^{k_2} - 1$ は奇数より $k_3 = 4$ となり，このとき $2^{k_1+k_2} - 2^{k_2} - 1 = 125$

$$2^{k_2}(2^{k_1} - 1) = 126 = 2 \times 63$$

$2^{k_1} - 1$ は奇数より $k_2 = 1$ となり，このとき $2^{k_1} - 1 = 63$

$2^{k_1} = 64 = 2^6$ より，$k_1 = 6$ となるので，$(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4) = (6,\ 1,\ 4,\ 0)$

(2)　$m(k_1,\ k_2) = m(l_1,\ l_2) = N$ とおくと，$2^{k_2}(2^{k_1} - 1) = 2^{l_2}(2^{l_1} - 1) = N$

ただし，$k_1 \geqq 1$, $k_2 \geqq 0$, $l_1 \geqq 1$, $l_2 \geqq 0$ である。

N が奇数のとき，$k_2 = l_2 = 0$ となり，$2^{k_1} - 1 = 2^{l_1} - 1$ より $k_1 = l_1$

N が偶数のとき，$N = 2^i M$（i は自然数, M は奇数）とおくと，

$$2^{k_2}(2^{k_1} - 1) = 2^{l_2}(2^{l_1} - 1) = 2^i M$$

よって，$k_2 = l_2 = i$ となり，$2^{k_1} - 1 = 2^{l_1} - 1$ より $k_1 = l_1$

したがって, N の偶奇にかかわらず, $k_1 = l_1$，$k_2 = l_2$ が成り立つ。

(3)　(2)との結果と合わせて, $n \geqq 2$ において，題意成立を数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n = 2$ のとき　(2)より成立する。

(ii)　$n = p$ のとき　題意の成立を仮定する。

ここで，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p,\ k_{p+1}) = m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p,\ l_{p+1}) = N$ とすると，

$$2^{k_{p+1}}(2^{k_1+\cdots+k_p} - 2^{k_2+\cdots+k_p} - \cdots - 2^{k_p} - 1) = 2^{l_{p+1}}(2^{l_1+\cdots+l_p} - 2^{l_2+\cdots+l_p} - \cdots - 2^{l_p} - 1)$$

$$2^{k_{p+1}}\{m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p) - 1\} = 2^{l_{p+1}}\{m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p) - 1\} = N$$

$k_1 \geqq 1$, ……, $k_p \geqq 1$, $l_1 \geqq 1$, ……, $l_p \geqq 1$ より, $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)-1$, $m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)-1$ はともに奇数となる。

すると, N が奇数では $k_{p+1}=l_{p+1}=0$ となり, N が偶数では $k_{p+1}=l_{p+1}\geqq 1$ となることより, N の偶奇にかかわらず, $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)=m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)$

仮定より $k_j=l_j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ なので, $n=p+1$ のときも題意が成立する。

(i)(ii)より, $n\geqq 2$ において, 題意が成立する。

コメント

(1)によって(2)(3)の方針が決まります。おもしろい問題です。

問　題

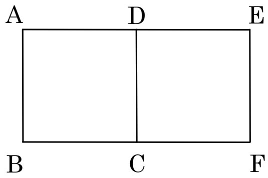


図1

図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則(a), (b)に従って移動する。

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

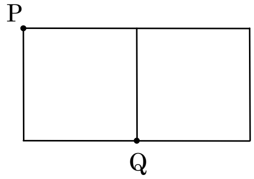


図2

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

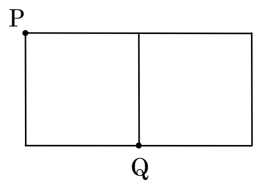
(2)　a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

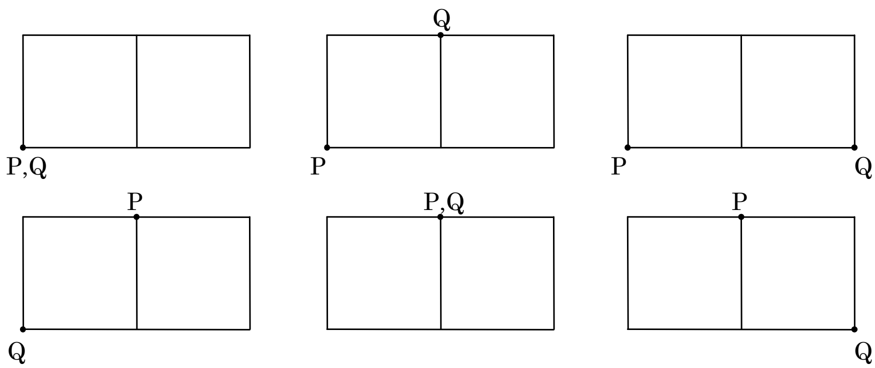
(3)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　条件より，時刻 0 での点 P, Q の配置が右図のとき，点 P, Q は独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動するので，時刻 1 での点 P, Q の可能な配置は，次の 6 パターンである。



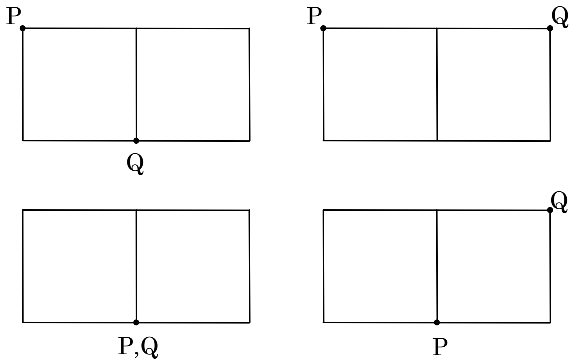


(2)　まず，時刻 1 までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることがなく，かつ時刻 1 に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいるのは，時刻 1 での左下，中上，右下の図の場合より，その確率 a_1 は $a_1 = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ である。

また，時刻 1 までに 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることがなく，かつ時刻 1 に 2 点 P，Q が異なる正方形上にいるのは，時刻 1 での右上の図の場合より，その確率 b_1 は $b_1=\dfrac{1}{6}$ である。

ここで，対称性を考慮すると，一般的に 2 点 P，Q が同じ正方形の異なる頂点にいるのは，その正方形の対角線上に位置する場合であり，これを状態 X とする。また，2 点 P，Q が異なる正方形の頂点にいるのは，辺 CD について対称の位置にある場合であり，これを状態 Y とする。

すると，時刻 0 から時刻 1 への状態から，一般的に $X\to X$ の推移確率は $\dfrac{1}{2}$，$X\to Y$ の推移確率は $\dfrac{1}{6}$ となる。

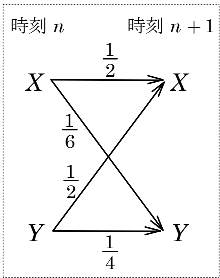


また，時刻 1 での右上図の点 P，Q の配置から，時刻 2 での点 P，Q の可能な配置は，右の 4 パターンである。すると，一般的に $Y\to X$ の推移確率は $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$Y\to Y$ の推移確率は $\dfrac{1}{4}$ となる。

まとめると，状態の推移は右図となり，$n=1$ のときは，

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$b_2=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{4}b_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$$



(3) (2)と同様にして，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\ \cdots\cdots\cdots ①,\quad b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{4}b_n\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(4) $p_n\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき　$p_1=a_1+b_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}\leqq\dfrac{3}{4}$ となり，成り立っている。

(ii) $n=k$ のとき　$p_k\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$ と仮定すると，①②から，

$$p_{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}=\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}b_k\right)+\left(\frac{1}{6}a_k+\frac{1}{4}b_k\right)=\frac{2}{3}a_k+\frac{3}{4}b_k$$

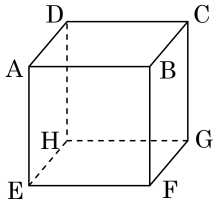
$$\leqq\frac{3}{4}a_k+\frac{3}{4}b_k=\frac{3}{4}(a_k+b_k)=\frac{3}{4}p_k\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

(i)(ii)より，$p_n\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ である。

コメント

確率と漸化式の問題です。読解力と記述力が，かなり要求されます。

問　題



右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻$n+1$では，それぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数$n \geqq 1$に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。

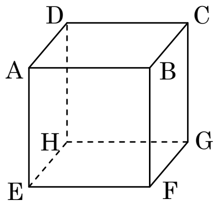
(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数$m \geqq 1$に対して，点 P が時刻$2m$で頂点 A に初めて戻る確率s_mを求めよ。

(4)　自然数$m \geqq 2$に対して，点 P が時刻$2m$で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率をt_mとする。このとき，$t_m < s_m$となる m をすべて求めよ。　[2017]

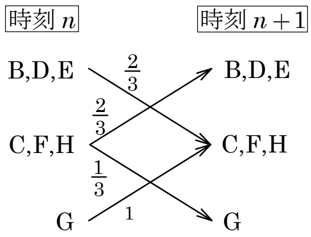
解答例＋映像解説



(1)　時刻 0 で A にいた点 P が，時刻 n において，A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n，A に戻らず C，F，H のいずれかにいる確率q_n，A に戻らず G にいる確率r_nについて，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n \cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + r_n \cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \cdots\cdots\cdots③$$



ここで，$p_1 = 1$，$q_1 = r_1 = 0$なので，①②③より，

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = 0,\quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \frac{2}{3},\quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = 0$$

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \frac{4}{9},\quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = 0,\quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \frac{2}{9}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，①より $p_n = \dfrac{2}{3}q_{n-1}$，③より $r_n = \dfrac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると，$q_{n+1} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}q_{n-1} + \dfrac{1}{3}q_{n-1}$，$q_{n+1} = \dfrac{7}{9}q_{n-1} \cdots\cdots\cdots④$

さて，④に$n = 2k$ を代入すると $q_{2k+1} = \dfrac{7}{9}q_{2k-1}$ となり，$q_{2k-1} = q_1\left(\dfrac{7}{9}\right)^{k-1} = 0$

$$p_{2k} = \frac{2}{3}q_{2k-1} = 0,\quad r_{2k} = \frac{1}{3}q_{2k-1} = 0$$

④に $n=2k+1$ を代入すると $q_{2k+2}=\frac{7}{9}q_{2k}$ となり，$q_{2k}=q_2\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\ r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より，$q_n=0\,(n$ が奇数$)$，$q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}(n$ が偶数$)$

また，$n=2k+1$ のとき，$k-1=\frac{n-3}{2}$ から，

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}(n\text{ が 3 以上の奇数}),\ p_n=0\,(n\text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}(n\text{ が 3 以上の奇数}),\ r_n=0\,(n\text{ が偶数})$$

(3)　時刻 $2m$ で頂点Aに初めて戻る確率 s_m は，$m\geqq 2$ のとき，

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお，$m=1$ のときは，$s_1=\frac{1}{3}p_1=\frac{1}{3}$ である。

(4)　(3)より，m の値を $m=2$，$m=3$，$m\geqq 4$ と場合分けをする。

(i)　$m=2$ のとき　$s_2=\frac{4}{27}$，$t_2={s_1}^2=\frac{1}{9}$ となり，$t_2<s_2$ である。

(ii)　$m=3$ のとき　$s_3=\frac{4}{27}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{243}$，$t_3=s_1s_2+s_2s_1=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27}=\frac{8}{81}$

これより，$t_3<s_3$ である。

(iii)　$m\geqq 4$ のとき　$s_m=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$，$t_m=\sum_{k=1}^{m-1}s_ks_{m-k}=s_1s_{m-1}+s_{m-1}s_1+\sum_{k=2}^{m-2}s_ks_{m-k}$

$$t_m=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}+\sum_{k=2}^{m-2}\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-2}\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-k-2}$$

$$=\frac{4}{27}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}+\frac{4}{27}\sum_{k=2}^{m-2}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}\right\}=\frac{4}{27}\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}+\frac{4}{27}(m-3)\right\}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$$=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$$t_m-s_m=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}-\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

$$=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}-\frac{49}{81}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m-\frac{43}{81}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$m\geqq 4$ のとき，$\frac{4}{27}m-\frac{43}{81}\geqq\frac{16}{27}-\frac{43}{81}>0$ となり，$t_m>s_m$ である。

(i)～(iii)より，$t_m<s_m$ となる m は，$m=2,\ 3$ である。

コメント

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，n を偶奇に分けて記しています。なお，理系単独の(4)については，詰めの数値計算が面倒です。

問　題

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　袋 A に赤玉 2 個，袋 B に白玉 2 個の状態から始めて，与えられた操作を 1 回行った後，袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について，その確率 $P_1(k)$ は，

(i)　$k=0$ のとき　B→A に白，次に A→B に白の場合より，$P_1(0)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii)　$k=1$ のとき　B→A に白，次に A→B に赤の場合より，$P_1(1)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(iii)　$k=2$ のとき　この場合は起こりえないので，$P_1(2)=0$

(2)　袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について，

(i)　与えられた操作を n 回行った後，$k=0$ のときに操作をもう 1 回行うとき

(1)から，$k=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(ii)　与えられた操作を n 回行った後，$k=1$ のときに操作をもう 1 回行うとき

$k=0$ となるのは，B→A に赤，次に A→B に白の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$k=1$ となるのは，B→A に赤，次に A→B に赤の場合，もしくは B→A に白，次に A→B に白の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$k=2$ となるのは，B→A に白，次に A→B に赤の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(iii)　与えられた操作を n 回行った後，$k=2$ のときに操作をもう 1 回行うとき

(i)と同様に考えて，$k=2$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(i)～(iii)より，$P_n(k)$ と $P_{n+1}(k)$ の関係は，$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$ に留意すると，

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)\cdots\cdots\cdots①$$

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)=\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$P_n(1)=\frac{2}{3}$ $(n\geqq 2)$ となり，(1)から $P_1(1)=\frac{2}{3}$ なので，$P_n(1)=\frac{2}{3}$ $(n\geqq 1)$

①に代入すると，$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9}$となり，$P_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{P_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left\{P_1(0)-\frac{1}{6}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，$P_n(0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$となり，

$$P_n(2)=1-P_n(0)-P_n(1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

コメント

確率と漸化式について，よく見かける頻出問題です。

問　題

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき,

石が点 1 にあるならば, 確率 1 で点 2 に移動する
石が点 k ($k=2,\ 3,\ 4$) にあるならば, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で点 $k-1$ に, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で点 $k+1$ に移動する
石が点 5 にあるならば, 確率 1 で点 4 に移動する

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め, この試行を繰り返す。また, 石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき, 次の問いに答えよ。

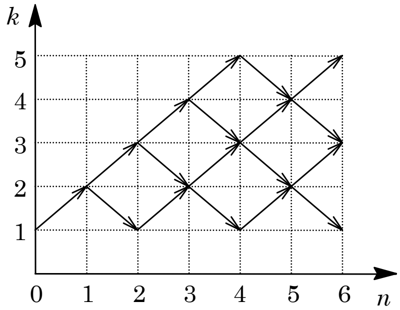
(1) 試行を 6 回繰り返した後に, 石が点 k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$) にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回($n\geqq 1$)繰り返した後に, ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1) 与えられた試行により, 石が点 k にある確率を $P_n(k)$ とすると, 初めは点 1 にあることより, 右図より計算すると,



$$P_1(1)=0,\ P_1(2)=1,\ P_1(3)=0,$$
$$P_1(4)=0,\ P_1(5)=0$$
$$P_2(1)=\frac{1}{2},\ P_2(2)=0,\ P_2(3)=\frac{1}{2},$$
$$P_2(4)=0,\ P_2(5)=0$$
$$P_3(1)=0,\ P_3(2)=\frac{3}{4},\ P_3(3)=0,\ P_3(4)=\frac{1}{4},\ P_3(5)=0$$
$$P_4(1)=\frac{3}{8},\ P_4(2)=0,\ P_4(3)=\frac{1}{2},\ P_4(4)=0,\ P_4(5)=\frac{1}{8}$$
$$P_5(1)=0,\ P_5(2)=\frac{5}{8},\ P_5(3)=0,\ P_5(4)=\frac{3}{8},\ P_5(5)=0$$
$$P_6(1)=\frac{5}{16},\ P_6(2)=0,\ P_6(3)=\frac{1}{2},\ P_6(4)=0,\ P_6(5)=\frac{3}{16}$$

(2) 試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点にすべてに印がついているのは,

(i) 4 回目に 5 のとき　5 回目以降は任意なので, その確率は $P_4(5)\cdot 1=\dfrac{1}{8}$ となる。

(ii)　4 回目に 3 のとき　5 回目に 4 で，6 回目に 5 のときだけなので，その確率は $P_4(3)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　まず，試行を n 回繰り返した後に，印が 3 つの点についているとき，点 1 と 2 は必ず印がつくことより，印のつく 3 つの点は 1 と 2 と 3 である。言い換えると，点 3 に少なくとも 1 回印がつき，点 4 と 5 には印がつかない場合となる。

さて，点 2→点 3→点 2 となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，点 2→点 1→点 2 となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$ である。これより，点 1 と 2 と 3 に印がつく確率は，l を自然数として，

(i)　n が奇数 $(n=2l+1)$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^{l}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{l}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

なお，$n=1$ のときも成立している。

(ii)　n が偶数 $(n=2l)$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^{l-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{l}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

コメント

頻出のランダムウォークが題材になっている確率の問題です。具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。

問　題

3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1)　p_1，q_1 を求めよ。

(2)　p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3)　ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1)　3 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は $3^3=27$ 通りあり，これらの場合が同様に確からしい。

さて，2 人勝ち残るのは，勝った人の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りで，その手の出方が 3 通りであるので，確率 p_1 は，$p_1=\dfrac{3\times 3}{27}=\dfrac{1}{3}$ である。

また，3 人残るのは，3 人とも同じ手を出す 3 通りか，3 人とも異なる手を出す $3!=6$ 通りのいずれかより，その確率 q_1 は，$q_1=\dfrac{3+6}{27}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　まず，2 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は $3^2=9$ 通りあり，これらの場合が同様に確からしい。そこで，2 人残るのは，2 人とも同じ手を出すアイコの 3 通りの場合だけであり，その確率は，$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ である。

さて，$n+1$ 回目終了時に 2 人が残っているのは，n 回目終了時に 2 人が残ってアイコのときか，n 回目終了時に 3 人が残って 2 人が勝ち残るときのいずれかより，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$ 回目終了時に 3 人が残っているのは，n 回目終了時に 3 人が残ってアイコのときより，

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$q_n=q_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

①に代入して，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ となり，$3^{n+1}p_{n+1}=3^np_n+1$ と変形すると，

$$3^np_n=3^1p_1+(n-1)=1+n-1=n,\quad p_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　$n \geqq 2$ のとき，ちょうど n 回目で 1 人勝ち残りが決まるのは，次の場合である。

(i)　$n-1$ 回目終了時に 2 人が残って n 回目にアイコでないとき

$$p_{n-1} \times \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(ii)　$n-1$ 回目終了時に 3 人が残って n 回目に 1 人勝ち残るとき

$$q_{n-1} \times (1-p_1-q_1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(i)(ii)より，求める確率は，$2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = (2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

なお，この式は $n=1$ のときも成立する。

コメント

有名問題ですが，漸化式を立てるメリットがほとんど感じられないものです。

問　題

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　n 枚のカードをもとに戻しながら 1 枚ずつ取り出す試行を 3 回繰り返すとき，n^3 通りの場合が同様に確からしい。

さて，書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とするとき，$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$ であるのは，j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚のカードを 3 回取り出すことより，その確率 $P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

(2)　「$X=j$ かつ $Y=j+k$」となるのは，「$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$」の場合から「$j+1 \leqq X$ または $Y \leqq j+k-1$」の場合を除いたものになる。

ここで，(1)と同様に考えると，$P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \dfrac{k^3}{n^3}$

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{k^3}{n^3},\quad P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{(k-1)^3}{n^3}$$

すると，求める確率 $P(j=X \text{かつ} Y=j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) - P(j+1 \leqq X \text{または} Y \leqq j+k-1)$$
$$= \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{(k+1)^3}{n^3} - \frac{2k^3}{n^3} + \frac{(k-1)^3}{n^3} = \frac{6k}{n^3}$$

(3)　(2)より，$X=j$ かつ $Y=j+s$　$(1 \leqq j \leqq n-s)$ となる確率は，それぞれ $\dfrac{6s}{n^3}$ であり，

$Y-X=s$ となる確率 $P(s)$ は，

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = -\frac{6}{n^3}(s^2-ns)$$

(4)　(3)より，$P(s)=-\dfrac{6}{n^3}\left(s-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2n}$

すると，n は偶数より，$s=\dfrac{n}{2}$ のとき $P(s)$ は最大となる。

コメント

最大，最小の確率を問う有名問題です。(2)の考え方はオーソドックスなものです。

問　題

はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える。この操作を n 回($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれa_n, b_n, c_nとおく。

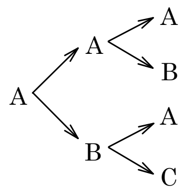
(1)　a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2を求めよ。

(2)　a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}をa_n, b_n, c_nで表せ。

(3)　a_n, b_n, c_nを求めよ。　[2010]

解答例

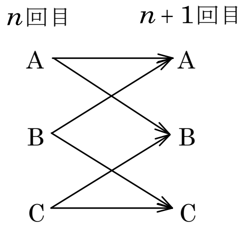
(1)　はじめに, A が赤玉を持っていて, 題意の操作をしたところ, 赤玉は右図のように移動する。その確率は, いずれも$\frac{1}{2}$なので,



$$a_1=b_1=\frac{1}{2},\ c_1=0$$

$$a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\ b_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\ c_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(2)　n 回目の操作後から, $n+1$回目の操作後への赤玉の移動は右図のようになり, 移動の確率は, いずれも$\frac{1}{2}$から,



$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots\cdots③$$

(3)　$a_n+b_n+c_n=1$なので, ②から, $b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)$となり,

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

よって, $b_n-\frac{1}{3}=\left(b_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$より, $b_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots④$

また, ①③より, $a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n)$となり,

$$a_n-c_n=(a_0-c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より, $a_n+c_n=1-b_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より, $a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

コメント

確率と連立漸化式についての有名問題で, ポイントは$a_n+b_n+c_n=1$です。