《2019 入試対策》

岡山大学

文系数学

1998—2018

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の$\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　角αは$0 \leqq \alpha \leqq \pi$を満たし，$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$とする。角$\theta$は$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$の範囲を動くものとする。$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2$とおく。また，$t = \sin\theta + \cos\theta$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$の値を求めよ。

(2)　tの値の範囲を求めよ。

(3)　$f(\theta)$をtの式で表せ。

(4)　$f(\theta)$の最小値を求めよ。　[2018]

2　kを実数とし，xについての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2 - kx + 3k - 4 = 0$が虚数解をもつようなkの値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2 - kx + 3k - 4 = 0$が虚数解αをもち，α^4が実数になるようなkの値をすべて求めよ。　[2018]

3　aを実数とする。xを 2 次関数$f(x) = x^2 + ax + 1$の区間$a - 1 \leqq x \leqq a + 1$における最小値を$m(a)$とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)$を求めよ。

(2)　$m(a)$をaの値で場合分けして求めよ。

(3)　aが実数全体を動くとき，$m(a)$の最小値を求めよ。　[2017]

4　関数$f(x)$を，$f(x) = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2$と定める。ここで，$[x]$は$n \leqq x$を満たす最大の整数$n$を表す。

(1)　$f(x) \geqq x$であることを示せ。

(2)　$f(x+1) = f(x) + 1$であることを示せ。

(3)　$0 \leqq x \leqq 2$において$y = f(x)$のグラフを描け。

(4)　$0 \leqq a < 1$とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$を求めよ。　[2014]

5　a, b を実数とし，$a \neq 0$ とする。x についての 3 次方程式

$$ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a=b=1$ のとき，①の実数解を求めよ。

(2)　①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を a, b を用いて表せ。　[2010]

6　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta-\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。

(3)　$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -1$ のとき，$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。[2008]

7　次の問いに答えよ。

(1)　x の方程式 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2)　$t=x-\dfrac{1}{x}$ とするとき，$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2$ を a と t の式で表せ。

(3)　座標平面上の円 $C_1:(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ と関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ C_2 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。　[2006]

8　xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点 $(1,\ 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点 $(-1,\ 0)$ を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2)　A と B が点 $(0,\ 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3)　$n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点 $(-2,\ 0)$ を含む側）にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。　[2003]

9　$0° < \theta < 90°$ とする。x についての 2 次方程式

$$(1-\cos\theta)x^2+4(\sin^2\theta)x+(1+\cos\theta)=0$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　この方程式が，ただ 1 つの解をもつような θ の値と，そのときの解を求めよ。

(2)　この方程式が，-1 以上の解をもつような θ の値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 微分と積分

1 関数 $f(x)=x^3-3x$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線を L とする。ただし $0<t<1$ とする。曲線 C と接線 L の接点 A 以外の共有点を B とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を t を用いて表せ。

(2) 2 点 A, B の y 座標の差の絶対値が最大となる t の値を求めよ。 [2018]

2 a を実数とする。座標平面内の曲線 $C: y=x^3-ax$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $a=5$ のとき，C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2) C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

3 関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。 [2016]

4 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ を通るものとする。ただし，$0<a<1$ である。関数 $y=x^2$ のグラフを C，関数 $y=f(x)$ のグラフを D とし，C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m，D の接線の傾きを n とするとき，$(2a-1)m=2an$ が成り立つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を x と a の式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ の $0<a<1$ における最大値を求めよ。 [2015]

5 C を xy 平面上の放物線 $y=x^2$ とする。不等式 $y<x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。また，2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，等式 $\displaystyle\int_p^q (x-p)^2dx=\frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を α，β を用いて表せ。

(2) $S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ。

(3) 点 P が曲線 $y=x^3-1\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに，S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。 [2013]

6 $0\leqq a\leqq 1$ に対して，$f(a)=\displaystyle\int_0^1\left|(x-a)(x-3+a)\right|dx$ と定める。$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

7 p を定数とする。$f(x)=x^3+x^2+px+1$ とおく。$y=f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。このとき，次の問いに答えよ。

(1) p の範囲を求めよ。

(2) 2 つの接点の x 座標を α，β とする。$(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3) 2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき，線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4) 2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。 [2011]

8 a を正の実数とする。放物線 $P: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を l_1 とし，点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また，l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。さらに，点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし，l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする。

(1) $b+c=2a$ であることを示せ。

(2) 放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。S を a を用いて表し，S が最小となるときの S と a の値を求めよ。 [2010]

9　次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$x \leqq 0$ において，つねに $x^3+4x^2 \leqq ax+18$ が成り立っているものとする。このとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式

$$x^3+4x^2 \leqq a_0x+18$$

を解け。　[2009]

10　xy 平面上に，円 $C_1 : x^2+y^2=1$，放物線 $C_2 : y=x^2+5$ がある。また点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。

(2)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの，y_1 の値の範囲を求めよ。

(3)　円 C_1 の接線で，その接点の y 座標が負であり，放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。

(4)　(3)の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2008]

11　関数 $y=x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ をとる。ただし，$\alpha<\beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ。

(2)　線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは，線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また，その最大値を l を用いて表せ。　[2007]

12　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x| & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$

と定め，$g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(t-x)\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　$g(1)$ の値を求めよ。

(3)　$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。　[2006]

13　関数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ の極大値が 5，極小値が 1 となるとき，定数 a，b の値を求めよ。　[2005]

14　曲線 $y=x^2$ を C とし，C 上の異なる 2 点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。A を通り，A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り，B における C の接線と直交する直線を m とする。

(1)　l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。

(2)　l と m が直交するように点 A, B が動くとき，交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。　[2003]

15　座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ $(2,\ 0)$ を P とし，他の 1 つを Q とする。

(1)　点 Q の座標を求めよ。

(2)　円 C の劣弧 PQ と放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。ただし，劣弧 PQ とは，点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち，長さが短い方の弧である。　[2002]

16　関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} 4x^2-7x+4 & (x \leqq 1\text{の場合}) \\ x & (x>1\text{の場合}) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　実数 t に対して $F(t)$ を，$F(t)=\int_t^{t+1} f(x)\,dx$ で定義するとき，関数 $F(t)$ の増減を調べ，そのグラフの概形を描け。また，$F(t)$ の最小値を求めよ。　[2001]

17　xy 平面上の曲線 $C: y=|2x-1|-x^2+2x+1$ について次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形を描け。

(2)　直線 $l: y=ax+b$ が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの a, b の値を求めよ。

(3)　(2)の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　[2000]

18　円 $x^2+(y-1)^2=3$ 上の点 P から放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ に異なる 2 本の接線を引くことができるものとし，その 2 つの接点を Q, R とする。このとき線分 QR とこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点 P の座標と，そのときの面積を求めよ。　[1999]

19　$f(x)=-ax(x-2b)$ とする。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=ax^2$ とで囲まれた部分の面積 S を a と b で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ の頂点 P が直線 $3x+2y=6$ の上にあるとき，面積 S の最大値を求めよ。　[1998]

20　$f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-1)x$ とする。ただし a は定数とする。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，常に $f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　等式 $|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ を満たす xy 平面上の点 $(x,\ y)$ からなる図形を T とする。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。　[2013]

2　a を正の定数とし，x, y に関する次の不等式を考える。

$3y\geqq 5x$ ………①，$4y\geqq 7a$ ………②，$x-y\geqq 3-a$ ………③

(1)　①，②を同時に満たす点 $(x,\ y)$ のなす領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　①，②，③を同時に満たす実数の組 $(x,\ y)$ が存在するような a の範囲を求めよ。

[2012]

3　三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は，1 点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま，座標平面上の曲線 $K: y=\dfrac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　三角形 ABC の垂心は，曲線 K 上にあることを示せ。

(2)　三角形 ABH の垂心は，点 C に一致することを示せ。　[2009]

4　座標平面上に 2 点 $A(1,\ 0)$，$B(-b,\ 0)$をとる。ただし，$b>0$とする。点 A を中心とし原点 $O(0,\ 0)$を通る円 C_1 と，点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く。円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第 1 象限にあるものを P とし，三角形 POA において $\angle$POA を θ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P の x 座標を b の式で表せ。

(2)　$\sin\theta$ を b の式で表せ。

(3)　点 B と直線 AP の距離が $\dfrac{20}{9}$ であるとき，b の値と $\sin\theta$ の値を求めよ。　[2006]

5　2 つの単位ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数 $f(x)=|x\vec{a}+\vec{b}|^2$ の $x\geqq 0$ における最小値を求めよ。

(2)　θ が $0°\leqq\theta\leqq 180°$ の範囲を動くとき，放物線 $y=f(x)$ の頂点が描く軌跡を求めよ。

(3)　(2)で求めた軌跡と x 軸が囲む図形の面積を求めよ。　[2005]

6　放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(2,\ 4)$をとる。放物線の A における接線を l とする。線分 AB 上に A, B と異なる点 P をとる。P を通り y 軸に平行な直線が l と交わる点を Q とし，放物線と交わる点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　QR : RP = AP : PB であることを示せ。　[2004]

■ 図形と計量

1　3 辺の長さが AB＝3，BC＝5，CA＝7 の三角形 ABC がある。辺 AB, BC, CA 上の点 P, Q, R を，AP＝BQ＝CR＝x となるようにとる。ただし，$0<x<3$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle$ABC の値を求めよ。

(2)　三角形 BPQ の面積を x の式で表せ。

(3)　三角形 PQR の面積が最小となるときの x の値を求めよ。　[2015]

2　1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある。この板から，1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし，板の厚さは無視する。

(1)　図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり，これを単位として切り出すとする。ただし，平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき，正四面体の体積が最大となるような x と，そのときの体積を求めよ。

(2)　図 2 ように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり，切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような x を求めよ。

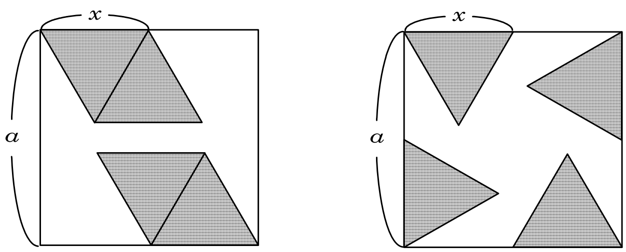


図1　　図2

[2001]

■ ベクトル

1　xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ -1)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分 BC 上の点を $\mathrm{P}(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし，球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1，球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　球面 K の方程式を求めよ。

(2)　S_1 を s と t で表せ。

(3)　点 P は線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4)　(3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。　[2018]

2　座標平面の原点を$\mathrm{O}(0,\ 0)$とする。以下の問いに答えよ。

(1)　座標平面上の異なる 3 点 P, Q, R が，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$を満たしているとする。このとき$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$となることを示せ。

(2)　点 Q の座標を$(3,\ 4)$とし，点 R は$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$を満たしているとする。さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$を満たすすべての点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq 0$が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。　[2017]

3　座標空間内に，原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ -1)$がある。O と異なる点$\mathrm{P}(s,\ t,\ 0)$に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を$\mathrm{R}(u,\ v,\ 0)$とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2)　$s,\ t$ をそれぞれ $u,\ v$ を用いて表せ。

(3)　点 P が xy 平面内の直線$ax+by=1\ (a^2+b^2\neq 0)$上を動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。　[2016]

4　四面体 OABC において，AB の中点を P，PC の中点を Q，OQ を$m:n$に内分する点を R とする。ただし，$m>0$，$n>0$とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおいて以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$, m, n を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}$を m, n を用いて表せ。　[2014]

5　四角形 ABCD は平行四辺形ではないとし，辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

(1)　線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。

(2)　線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ。

[2012]

6　平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。この平面上の点 P が，$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　P の軌跡が円となることを示せ。

(2)　(1)の円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3)　O との距離が最小となる(1)の円周上の点を $\mathrm{P_0}$ とする。A, B が条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

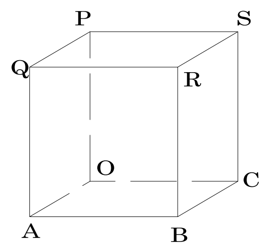
を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる $s,\ t$ の値を求めよ。　[2011]

7　三角錐 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=3$，$\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DB}=2$ とする。また，辺 BC を $1:3$ に内分する点を E とする。このとき，三角形 ADE に対して次の問いに答えよ。

(1)　辺 DE, AE の長さを求めよ。

(2)　三角形 ADE の面積を求めよ。　[2000]

8　辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を 3 つのベクトル $\vec{d},\ \vec{f},\ \vec{g}$ で表せ。ただし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$，$\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とする。

(2)　5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3)　五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4)　辺 BR を $3:1$ の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし，五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1　自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3})=R(2^n)$ となることを示せ。

(2)　$R(2^{2017})$ を求めよ。

(3)　自然数 m が $R(2^{2017}m+2^{29})=5$ を満たすとき，$R(m)$ の値を求めよ。　[2017]

2 複素数$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$について，以下の問いに答えよ。

(1) $\omega^2+\omega^4$，$\omega^5+\omega^{10}$の値を求めよ。

(2) nを正の整数とするとき，$\omega^n+\omega^{2n}$の値を求めよ。

(3) nを正の整数とするとき，$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$が整数であることを証明せよ。

[2016]

3 数列$\{a_n\}$は，関係式 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) b_{n+1}とb_nの間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。 [2015]

4 数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=a_n(5-a_{n+1})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとき，以下の問いに答えよ。

(1) nに関する数学的帰納法で，$a_n>0$であることを証明せよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおくとき，b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(3) a_nを求めよ。 [2014]

5 以下の問いに答えよ。

(1) 整数x, yが$25x-31y=1$を満たすとき，$x-5$は31の倍数であることを示せ。

(2) $1\leqq y\leqq 100$とする。このとき，不等式 $0\leqq 25x-31y\leqq 1$を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ。 [2013]

6 数列$\{a_n\}$が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_{10}を求めよ。

(2) nが奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4}をa_nで表せ。

(3) a_nを3で割ったときの余りを求めよ。 [2011]

7　自然数 m, n に対して，自然数 $m \diamond n$ を次のように定める。

$\diamond$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	4	6	8	10	12	$\cdots$
2	9	13	17	21	25	$\cdots$
3	16	22	28	34	40	$\cdots$
4	25	33	41	49	57	$\cdots$
5	36	46	56	66	76	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\diamond$	n
m	$m \diamond n$

例えば，$1 \diamond 1 = 4$，$1 \diamond 2 = 6$，$2 \diamond 1 = 9$，$4 \diamond 2 = 33$，$5 \diamond 3 = 56$，$1 \diamond 6 = 14$，$6 \diamond 1 = 49$ である。

(1)　数列 $8 \diamond 1$，$8 \diamond 2$，$8 \diamond 3$，……の初項 $8 \diamond 1$ から第 25 項 $8 \diamond 25$ までの和を求めよ。

(2)　$m \diamond n = 474$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。　[2010]

8　p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。　[2008]

9　k が 4 より大きい自然数であるとき，$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$ を，$\angle \mathrm{O} = \left(\dfrac{360}{k}\right)^\circ$，$\angle \mathrm{A_0} = 90^\circ$ で，面積が 1 であるような直角三角形とする。また，$n = 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ に対して，点 A_n を，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ が $\triangle \mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と相似であるように定める。$r = \cos\angle \mathrm{O}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$，$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$，…，$\triangle \mathrm{OA}_{k-1}\mathrm{A}_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。

(2)　$\angle \mathrm{O} = 45^\circ$ のときの S の値と $\angle \mathrm{O} = 30^\circ$ のときの S の値を比較し，どちらが大きいか答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。　[2007]

10 座標平面の原点を O とし，4 点$(1,\ 3)$，$(-1,\ 3)$，$(-1,\ -3)$，$(1,\ -3)$を頂点とする長方形の周を R とする。$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対し，$(1,\ 0)$を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置をP_nとし，OP_nとOP_{n+2}のなす角度をθ_nとおく。次の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta_0$，$\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$を求めよ。

(2) すべての n に対して，$\cos\theta_{n+k}=\cos\theta_n$が成り立つような自然数 k のうち，もっとも値が小さいものを求めよ。

(3) θ_nが最小となるときのP_nの座標をすべて求めよ。 [2007]

11 自然数 $n,\ k$ が $n\geqq k$ を満たすとき，${}_n\mathrm{C}_k$は二項係数を表す。次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $a>b>c$ と等式${}_a\mathrm{C}_3+{}_b\mathrm{C}_2+{}_c\mathrm{C}_1=29$をともに満たす 3 つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$を 1 つ求めよ。

(2) n を自然数とする。次の等式を証明せよ。 ${}_{n+3}\mathrm{C}_3={}_{n+2}\mathrm{C}_3+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1+1$

(3) 自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ は $a>b>c>d$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。 ${}_a\mathrm{C}_3>{}_b\mathrm{C}_3+{}_c\mathrm{C}_2+{}_d\mathrm{C}_1$ [2006]

12 数列$\{a_n\}$を$a_n=n^2+1$で定め，数列$\{b_n\}$を$b_n=3n^2+3$で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を$\{c_n\}$とする。たとえば，初めの 3 項は，$c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=6$となっている。このうち，$\{a_n\}$から来る項は$c_1=a_1$，$c_2=a_2$，$\{b_n\}$から来る項は$c_3=b_1$である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) c_4，c_5，c_6を求めよ。

(2) $n=3k,\ 3k-1,\ 3k-2$（k は自然数）の場合に分けて考えることにより，a_nは 3 の倍数ではなく，したがってa_nは$\{b_n\}$のどの項とも一致しないことを示せ。

(3) $\{c_n\}$において，$\{b_n\}$から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを，背理法を用いて示せ。 [2004]

13 $r,\ s,\ t$ は 0 でない定数とする。数列$\{a_n\}$は条件$ra_{n+1}+sa_n+t=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとし，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおく。

(1) 数列$\{b_n\}$は等比数列であることを示せ。

(2) $a_1=1$，$a_2=4$，$a_2<a_3$，$a_4=13+3\sqrt{3}$であるとき，一般項a_nを求めよ。

(3) (2)の条件の下で，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$を求めよ。 [2003]

14 k を自然数の定数とする。自然数 n に対して，$S_n=|n-1|+|n-2|+\cdots+|n-k|$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) S_n を求めよ。

(2) S_n の最小値と，そのときの n の値を求めよ。 [2002]

15 n を自然数とする。$f(x)$ は 2 次関数で，曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$ を通るとする。

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) この関数 $f(x)$ について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ の値を n を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

16 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=6$ で漸化式 $a_{n+1}-a_n=2n+4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす。また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の第 $n+1$ 項 b_{n+1} から第 $2n$ 項 b_{2n} までの和を求めよ。 [2000]

17 数列 $\{a_n\}$ は初項と漸化式 $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ で定義されている。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。 [1998]

■ 確率

1 1つのサイコロを3回振り，出た目を順に u，v，w とする。そして座標平面上の2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を

$$a_1=u,\ a_2=0,\ b_1=v\cos\frac{(w+2)\pi}{12},\ b_2=v\sin\frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点 $(0,\ 0)$ とする。

(1) △OAB が正三角形となる確率を求めよ。

(2) △OAB が大きさ $\dfrac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。 [2016]

2 n を2以上の自然数とし，1から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から2枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2) 引いたカード2枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3) 引いたカード2枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4) 引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を p_n とする。不等式 $p_n \geqq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。 [2015]

3 A と B が続けて試合を行い，先に3勝した方が優勝するというゲームを考える。1試合ごとに A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q，引き分ける確率を $1-p-q$ とする。

(1) 3試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(2) 5試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(3) $p=q=\dfrac{1}{3}$ としたとき，5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。

(4) $p=q=\dfrac{1}{2}$ としたとき，優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。

[2014]

4 　正 n 角形の頂点を A_0, A_1, …, A_{n-1} とする。頂点 A_1, A_2, …, A_{n-1} から 2 点をとり, それらと A_0 を頂点とする三角形を作る。このようにして得られる三角形の総数を a_n , そのうちの二等辺三角形の総数を b_n とする。ただし正三角形は二等辺三角形とみなす。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　a_6 および b_6 を求めよ。

(2)　整数 $m \geqq 3$ に対し, $S = \displaystyle\sum_{k=3}^{m} a_k$ を求めよ。

(3)　b_9 を求めよ。　[2012]

5 　空間内に点 $O(0,\ 0,\ 0)$ と点 $A(2,\ 2,\ 2)$ がある。点 P は O から出発し, 1 回につき x 軸, y 軸, z 軸いずれか 1 つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1)　P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2)　さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し, 4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し, 6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3)　(2)と同じルールで, さいころを 6 回投げて P が点 $B(1,\ 1,\ 1)$ を通って A に到達する確率を求めよ。　[2011]

6 　男性 M_1, …, M_4 の 4 人と女性 F_1, …, F_4 の 4 人が, 横一列に並んだ座席 S_1, …, S_8 に座る場合を考える。

(1)　同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2)　(1)の座り方の中で, M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか。

(3)　(1)の座り方の中で, M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか。　[2010]

7　1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\dfrac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。　[2009]

8　1，2，3，4 の数字が書かれたカードを各 1 枚，数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び，左から順に横一列に並べる。このとき，先頭のカードの数字が 0 でなければ，カードの数字の列は，選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について，次の問いに答えよ。

(1)　0，1，2，3，4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ，計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。

(2)　用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。

[2007]

9　次の問いに答えよ。

(1)　英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊取り出すとき，英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が，$\dfrac{7}{40}$ となる。このとき，日本語の本は何冊あるか答えよ。

(2)　各組が 12 枚ずつからなる赤，青，黄色の 3 組のカードがあり，各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき，数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。　[2005]

10　定数 a は，$0<a<1$ を満たすものとする。空間に，次の 3 つのグループからなる 12 点をとる。

$$X=\{(1,\ a,\ 0),\ (1,\ -a,\ 0),\ (-1,\ a,\ 0),\ (-1,\ -a,\ 0)\}$$
$$Y=\{(0,\ 1,\ a),\ (0,\ 1,\ -a),\ (0,\ -1,\ a),\ (0,\ -1,\ -a)\}$$
$$Z=\{(a,\ 0,\ 1),\ (-a,\ 0,\ 1),\ (a,\ 0,\ -1),\ (-a,\ 0,\ -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は，

(ア)　同一グループ内の 2 点となる場合

(イ)　異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる。このとき，次の問いに答えよ。

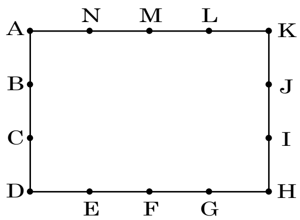
(1)　(ア), (イ)それぞれの場合の数を求めよ(答のみでよい)。

(2)　(ア)の場合，2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(3)　(イ)の場合，2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(4)　(2)で求めた距離と(3)で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ。また，そのとき選んだ 2 点の位置ベクトルのなす角を θ として，$\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，位置ベクトルは原点 O を基準とする。　[2004]

11　図のように，A から N までの 14 個の点が，縦の長さが 3，横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか。

(2)　これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか。　[2002]

■ 論証

1　実数 x_i，a_i，b_i，c_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ は，以下の条件(い)〜(に)を満たすものとする。

(い)　$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$

(ろ)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i \geqq 0$，$b_i \geqq 0$，$c_i \geqq 0$

(は)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i + b_i + c_i = 1$

(に)　$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 1$

実数 y_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ を

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,\quad y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,\quad y_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3$ を示せ。

(2)　$y_1 \geqq x_1$ を示せ。

(3)　$y_1 + y_2 \geqq x_1 + x_2$ を示せ。　[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

角αは$0 \leqq \alpha \leqq \pi$を満たし，$\cos\alpha = \frac{1}{3}$とする。角θは$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$の範囲を動くものとする。$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2$とおく。また，$t = \sin\theta + \cos\theta$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$の値を求めよ。

(2)　tの値の範囲を求めよ。

(3)　$f(\theta)$をtの式で表せ。

(4)　$f(\theta)$の最小値を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$のとき，$\cos\alpha = \frac{1}{3}$から$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$となるので，

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2)　$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$に対して，$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$より，

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$より$\cos\frac{\pi}{2} < \cos\alpha < \cos\frac{\pi}{4}$となり，$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$から，

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\sin\frac{5}{4}\pi \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$となり，(1)から，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6},\quad -1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

よって，$-1 \leqq t \leqq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdots\cdots ③$である。

(3)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1 = t^2 - 1$より，

$$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2 = (t^2 - 1) - t + 2 = t^2 - t + 1$$

(4)　(3)より，$f(\theta)$を，$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$と変形すると，$t = \frac{1}{2}$は③を満たす。

よって，$f(\theta)$は，$t = \sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$のとき最小値$\frac{3}{4}$をとる。

コメント

基本的な三角関数の計算問題です。

問　題

k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。　[2018]

解答例

(1)　実数 k に対し，2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ ……①が虚数解をもつ条件は，

$$D=k^2-4(3k-4)<0,\ k^2-12k+16<0$$

よって，$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ ………②

(2)　まず，x^4 を $x^2-kx+3k-4$ で割り，余りを $r(x)$ とおくと，

$$x^4=(x^2-kx+3k-4)(x^2+kx+k^2-3k+4)+r(x)$$

ただし，$r(x)=(k^3-6k^2+8k)x-(3k-4)(k^2-3k+4)$

さて，①の虚数解 α に対し，$\alpha^2-k\alpha+3k-4=0$ であることに注意すると，

$$\alpha^4=r(\alpha)=(k^3-6k^2+8k)\alpha-(3k-4)(k^2-3k+4)$$

すると，α^4 が実数となる条件は，k が実数であることより，

$$k^3-6k^2+8k=0,\ k(k-2)(k-4)=0$$

よって，求める k の値は，②より，$k=2,\ 4$ である。

コメント

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは，整式の除法の計算だけです。

問　題

a を実数とする。x を 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2)　$m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3)　a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$f(x)=x^2+ax+1=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とすると，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\quad\left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$$

よって，$m\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{15}{16}$ である。

(2)　(i)　$-\dfrac{a}{2}<a-1\left(a>\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$$m(a)=f(a-1)=(a-1)^2+a(a-1)+1=2a^2-3a+2$$

(ii)　$a-1\leqq-\dfrac{a}{2}\leqq a+1\left(-\dfrac{2}{3}\leqq a\leqq\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}+1$$

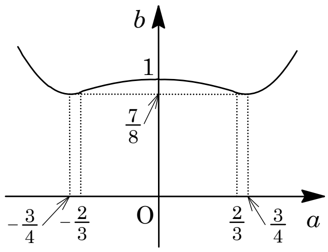
(iii)　$-\dfrac{a}{2}>a+1\left(a<-\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$$m(a)=f(a+1)=(a+1)^2+a(a+1)+1=2a^2+3a+2$$

(3)　(2)より，$m(a)$ は，$m(a)=2\left(a-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}\quad\left(a>\dfrac{2}{3}\right)$

$$m(a)=-\frac{a^2}{4}+1\quad\left(-\frac{2}{3}\leqq a\leqq\frac{2}{3}\right)$$

$$m(a)=2\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\quad\left(a<-\frac{2}{3}\right)$$



これより，$b=m(a)$ のグラフをかくと右図のようになり，$m(a)$ の最小値は $m\left(\pm\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{7}{8}$ である。

コメント

2 次関数の最大・最小に関する基本的な問題です。(2)では図を省きましたが，グラフの軸と区間との位置関係で場合分けをしています。

問　題

関数 $f(x)$ を，$f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n\leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1)　$f(x)\geqq x$ であることを示せ。

(2)　$f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4)　$0\leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$f(x)-x=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2-x=(x-[x])-(x-[x])^2$

ここで，$t=x-[x]$ とおくと，$0\leqq t<1$ となり，

$$f(x)-x=t-t^2=t(1-t)\geqq 0$$

よって，$f(x)\geqq x$（等号は x が整数のとき成立）

(2)　$n\leqq x<n+1$ のとき，$[x]=n$，$[x+1]=n+1$ となり，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=[x+1]+2(x+1-[x+1])-(x+1-[x+1])^2\\&=n+1+2(x+1-n-1)-(x+1-n-1)^2\\&=n+2(x-n)-(x-n)^2+1=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2+1\\&=f(x)+1\end{aligned}$$

(3)　(i)　$0\leqq x<1$ のとき　$[x]=0$ より，

$$f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$$

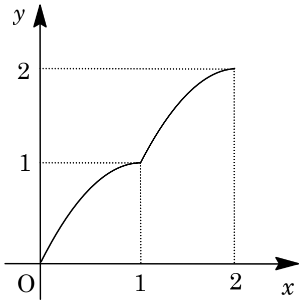
(ii)　$1\leqq x<2$ のとき　(2)より，$f(x)=f(x-1)+1$

すると，$0\leqq x-1<1$ より，

$$f(x)=-(x-1-1)^2+1+1=-(x-2)^2+2$$

(iii)　$x=2$ のとき　(1)より，$f(x)=2$

(i)～(iii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(4)　$0\leqq a<1$ のとき，$\displaystyle\int_1^{a+1} f(x)\,dx=\int_0^a\{f(x)+1\}\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+a$ なので，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+1} f(x)\,dx&=\int_a^1 f(x)\,dx+\int_1^{a+1} f(x)\,dx\\&=\int_a^1 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx+a=\int_0^1 f(x)\,dx+a\\&=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_0^1+a=a+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

コメント

ガウス記号のついた関数が題材で，誘導つきであるものの慣れないとやや難しめと思われます。(4)については，(3)のグラフから面積を対応させて計算していますが，内容的には置換積分となっています。文系では範囲外ですが。

問　題

$a,\ b$ を実数とし，$a\neq 0$ とする。x についての 3 次方程式

$$ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0 \cdots\cdots\cdots①$$

を考える。

(1)　$a=b=1$ のとき，①の実数解を求めよ。

(2)　①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を $a,\ b$ を用いて表せ。　[2010]

解答例

(1) 方程式 $ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0\ (a\neq 0)\cdots\cdots①$に対して，$a=b=1$ のとき，

$$x^3+2x^2+2x+1=0,\ (x+1)(x^2+x+1)=0$$

$x^2+x+1=0$ は実数解をもたないので，①の実数解は $x=-1$ である。

(2)　まず，①より，$(x+1)(ax^2+x+b)=0\cdots\cdots\cdots②$

ここで，②より，$f(x)=ax^2+x+b$ おくと，①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　$f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，その一方が $x=-1$ であるとき

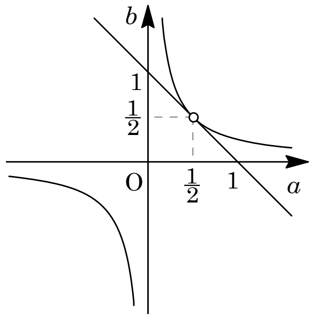
$$D=1-4ab>0,\ f(-1)=a-1+b=0$$

よって，$ab<\dfrac{1}{4}$，$a+b=1$

(ii)　$f(x)=0$ が $x\neq -1$ である重解をもつとき

$$D=1-4ab=0,\ f(-1)=a-1+b\neq 0$$

よって，$ab=\dfrac{1}{4}$，$a+b\neq 1$



(i)(ii)より，ab 平面上で図示すると，右図のようになる。

よって，求める条件は，$a\neq 0$ を考え合わせて，

$$a+b=1,\ ab=\frac{1}{4},\ (a,\ b)\neq\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (a,\ b)\neq(0,\ 1)$$

コメント

私大の入試によく見かける問題です。条件がやや複雑なので，まとめる際に，図を用いています。

問　題

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta-\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$の値を求めよ。

(3)　$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -1$ のとき，$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。 [2008]

解答例

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ より，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$

さて，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\cos\theta-\sin\theta<0$ となり，

$$\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}=-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=-\frac{3}{\sqrt{5}}$$

(2)　(1)より，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ であり，

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=-\frac{3}{5}$$

すると，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos 2\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+2\sin 2\theta\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{5}$

(3)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ のもとで，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -1$ の解は,

$$\frac{2}{3}\pi \leqq 2\theta-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi,\ \ \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi\cdots\cdots\cdots(*)$$

そこで，$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ と変形すると，$(*)$のとき，最大値は $\sqrt{3}\ \left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$，最小値は $0\left(\theta=\dfrac{5}{6}\pi\right)$ となる。

コメント

三角関数の式変形の問題です。なお, 3 つの問いの関係は考えずに解きました。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　x の方程式 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2)　$t=x-\dfrac{1}{x}$ とするとき，$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2$ を a と t の式で表せ。

(3)　座標平面上の円 $C_1:(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ と関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ C_2 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。　[2006]

解答例

(1)　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ より，$\left(x-\dfrac{1}{x}-1\right)\left(x-\dfrac{1}{x}-2\right)=0$

$$x-\frac{1}{x}-1=0,\ x-\frac{1}{x}-2=0$$

よって，$x^2-x-1=0$，$x^2-2x-1=0$ から，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$1\pm\sqrt{2}$

(2)　
$$\begin{aligned}(x-a)^2+\left(\frac{1}{x}+a\right)^2&=x^2+\frac{1}{x^2}-2a\left(x-\frac{1}{x}\right)+2a^2\\&=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\frac{1}{x}-2a\left(x-\frac{1}{x}\right)+2a^2\\&=t^2-2at+2a^2+2\end{aligned}$$

(3)　$C_1:(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ ……①と $C_2:y=\dfrac{1}{x}$ ……②の共有点の x 座標は，

$$(x-a)^2+\left(\frac{1}{x}+a\right)^2=r^2$$

(2)より，$t^2-2at+2a^2+2-r^2=0$ ………③

ここで，$t=x-\dfrac{1}{x}$ から，$x^2-tx-1=0$ となり，その判別式は，

$$D=t^2+4>0$$

よって，どんな t の値に対しても，$x\neq0$ は 2 個ずつ対応する。すなわち，①と②が 2 個の共有点をもつ条件は，③が重解をもつことと同値である。③の判別式は，

$$D/4=a^2-(2a^2+2-r^2)=0,\ r^2=a^2+2$$

よって，$r>0$ より，$r=\sqrt{a^2+2}$

コメント

xt 平面上に $t=x-\dfrac{1}{x}$ のグラフを描くと，1 個の t の値に対して 2 個の x の値が対応することは明らかです。ただし，文系の範囲ではありませんが。

問　題

xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を, A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し, 時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

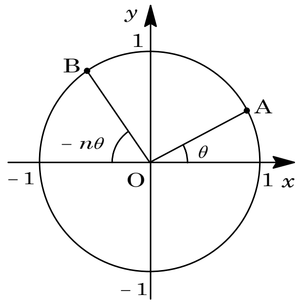
(1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3) $n=7$ とする。A が, B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。 [2003]

解答例

(1) A と B が 1 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta$, 2 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2\pi$ であり, 同様に考えると, k 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2(k-1)\pi$, すなわち $2(k-1)\pi=(n+1)\theta-\pi$ ……①である。



ここで, $0<\theta\leqq 2\pi$ より,

$$-\pi<(n+1)\theta-\pi\leqq(2n+1)\pi$$

①から, $-\pi<2(k-1)\pi\leqq(2n+1)\pi$, $\dfrac{1}{2}<k\leqq n+\dfrac{3}{2}$

よって, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ より, A と B は $n+1$ 回出会う。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うとき, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ なので, ①より,

$$2(k-1)\pi=(n+1)\frac{\pi}{2}-\pi,\ \ n=4(k-1)+1$$

よって, $n\geqq 2$ から, n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

(3) $0<\theta\leqq 2\pi$ として, $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{B}(\cos(\pi-7\theta),\ \sin(\pi-7\theta))$ とおくことができ, 条件より, $\cos\theta<\cos(\pi-7\theta)$ である。

$$\cos\theta<-\cos 7\theta,\ \ \cos 7\theta+\cos\theta<0,\ \ 2\cos 4\theta\cos 3\theta<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで, $\cos 4\theta=0$ の解は,

$$\theta=\frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$$

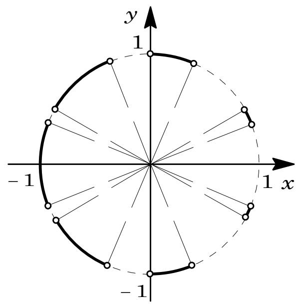
$\cos 3\theta=0$ の解は,

$$\theta=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

さて，$\theta = 2\pi$ は②を満たさないことから，不等式②の解は,

$$\frac{1}{8}\pi < \theta < \frac{1}{6}\pi,\ \frac{3}{8}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{8}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi$$
$$\frac{7}{8}\pi < \theta < \frac{9}{8}\pi,\ \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{8}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{13}{8}\pi$$
$$\frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{15}{8}\pi$$

以上より，求める点 A の範囲を図示すると，右図の実線部となる。



コメント

(3)は不等式②を解き図示するだけですが，たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが，あまりにも繁雑すぎるため，弧度法に切り換えました。

問　題

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。x についての 2 次方程式

$$(1-\cos\theta)x^2+4(\sin^2\theta)x+(1+\cos\theta)=0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この方程式が，ただ 1 つの解をもつような θ の値と，そのときの解を求めよ。

(2) この方程式が，-1 以上の解をもつような θ の値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

(1) $(1-\cos\theta)x^2+4(\sin^2\theta)x+(1+\cos\theta)=0\cdots\cdots\cdots①$

条件より，①の判別式 $D/4=4\sin^4\theta-(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)=0$

$$4\sin^4\theta-\sin^2\theta=0,\ \ \sin^2\theta(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0<\sin\theta<1$ なので，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって，$\theta=30^\circ$

このとき，①の重解は，$x=\dfrac{-2\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=-2(1+\cos\theta)=-2-\sqrt{3}$

(2) ①の左辺を $f(x)$ とおくと，放物線 $y=f(x)$ の軸は，

$$x=\frac{-2\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=-2(1+\cos\theta)$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0<\cos\theta<1$ なので，$-2(1+\cos\theta)<-2$

したがって，$f(x)=0$ すなわち①は，-1 以上に 2 つの解をもつ場合はないので，①が -1 以上の解をもつ条件は $f(-1)\leqq 0$ となる。

$$(1-\cos\theta)-4\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\leqq 0,\ \ 2\sin^2\theta-1\geqq 0$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0<\sin\theta<1$ なので，$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$45^\circ\leqq\theta<90^\circ$

コメント

(2)の題意は，少なくとも 1 つの解が -1 以上ということなので，解の個数が 1 個のときと 2 個のときで場合分けをしようと，まず考えました。ところが，軸に注目すると，2 個の場合はありませんでした。

問　題

関数 $f(x)=x^3-3x$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線を L とする。ただし $0<t<1$ とする。曲線 C と接線 L の接点 A 以外の共有点を B とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を t を用いて表せ。

(2) 2 点 A, B の y 座標の差の絶対値が最大となる t の値を求めよ。 [2018]

解答例

(1) $f(x)=x^3-3x$ に対して，$C: y=f(x)$ ……①上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線 L の方程式は，$f'(x)=3x^2-3$ より，

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t),\quad y=(3t^2-3)x-2t^3 \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$x^3-3x=(3t^2-3)x-2t^3$ となり，

$$x^3-3t^2x+2t^3=0,\ (x-t)^2(x+2t)=0$$

すると，A 以外の共有点 B の x 座標は $x=-2t$ より，$\mathrm{B}(-2t,\ -8t^3+6t)$ となる。

(2) 2 点 A, B の y 座標の差の絶対値を d とおくと，

$$d=\left|t^3-3t-(-8t^3+6t)\right|=\left|9t^3-9t\right|=9\left|t(t+1)(t-1)\right|$$

$0<t<1$ より，$t(t+1)(t-1)<0$ となり，

$$d=-9(t^3-t)$$

すると，$d'=-9(3t^2-1)$ から，$0<t<1$ における d の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
d'		$+$	0	$-$	
d		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき d は最大となる。

コメント

微分の応用についての基本事項の確認問題です。

問　題

a を実数とする。座標平面内の曲線 $C: y = x^3 - ax$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a = 5$ のとき，C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2)　C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

解答例

(1)　$C: y = x^3 - ax$ ……①に対して，$a = 5$ のとき $y = x^3 - 5x$ となる。

すると，$y' = 3x^2 - 5$ から，接点 $(t,\ t^3 - 5t)$ における接線の方程式は，

$$y - (t^3 - 5t) = (3t^2 - 5)(x - t),\quad y = (3t^2 - 5)x - 2t^3 \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，②が点 $(1,\ 0)$ を通ることより，$0 = 3t^2 - 5 - 2t^3$ となり，

$$2t^3 - 3t^2 + 5 = 0,\quad (t+1)(2t^2 - 5t + 5) = 0$$

ここで，$2t^2 - 5t + 5 = 0$ は，判別式 $D = -15 < 0$ から実数解をもたない。

よって，$t = -1$ となり，②に代入すると，接線の方程式は $y = -2x + 2$ である。

(2)　(1)と同様にすると，$y' = 3x^2 - a$ から，接線の方程式は，

$$y = (3t^2 - a)x - 2t^3$$

点 $(1,\ 0)$ を通ることより，$2t^3 - 3t^2 + a = 0$，$-2t^3 + 3t^2 = a$ ………③

ここで，$f(t) = -2t^3 + 3t^2$ とおくと，

$$f'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

そこで，点 $(1,\ 0)$ を通る C の接線が 3 本存在する条件は，方程式③が異なる 3 つの実数解をもつことに対応するので，求める a の値の範囲は，$0 < a < 1$ である。

コメント

微分の応用についての基本的で頻出の問題です。

問　題

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3)　不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。　[2016]

解答例

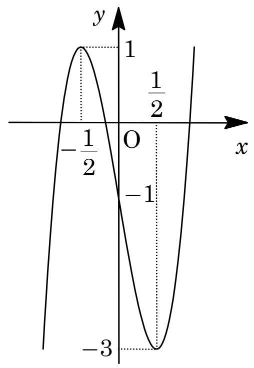
(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ に対し，

$$f'(x)=24x^2-6$$
$$=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。

したがって，$f(x)=0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。



(2)　$\theta=\dfrac{5}{9}\pi$ とおき，$a=\cos\theta$ のとき，

$$f(a)=8a^3-6a-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1$$
$$=2\cos 3\theta-1=2\cos\frac{5\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

(3)　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{5\pi}{9}<\dfrac{2\pi}{3}$ より，$\cos\dfrac{\pi}{2}>\cos\dfrac{5\pi}{9}>\cos\dfrac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

すると，(2)より，a は $f(x)=0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

$$f\Big(-\frac{1}{5}\Big)=-\frac{8}{125}+\frac{6}{5}-1=\frac{17}{125}>0,\ f\Big(-\frac{1}{6}\Big)=-\frac{1}{27}+1-1=-\frac{1}{27}<0$$

よって，$-\dfrac{1}{5}<a<-\dfrac{1}{6}$，すなわち $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ である。

コメント

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

問　題

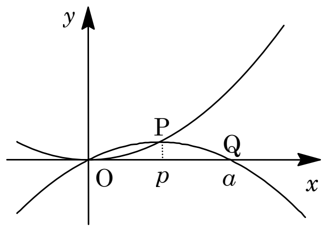
2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ を通るものとする。ただし，$0<a<1$ である。関数 $y=x^2$ のグラフを C，関数 $y=f(x)$ のグラフを D とし，C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m，D の接線の傾きを n とするとき，$(2a-1)m=2an$ が成り立つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を x と a の式で表せ。

(2)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3)　(2)で求めた $S(a)$ の $0<a<1$ における最大値を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　条件より，$k<0$ として，$f(x)=kx(x-a)$ とおく。

$C: y=x^2$ ……①，$D: y=f(x)=kx(x-a)$ ……②

を連立すると，

$$x^2=kx(x-a),\ (k-1)x^2-akx=0$$

よって，$x=0,\ \dfrac{ak}{k-1}$ ………③

C と D の共有点のうち，原点と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ とおくと，③より，

$$p=\frac{ak}{k-1}\ \text{………④。}$$

ここで，①から $y'=2x$ となり，点 P における C の接線の傾き m は $m=2p$，②から $y'=2kx-ak$ となり，点 P における D の接線の傾き n は，$n=2kp-ak$

そこで，条件 $(2a-1)m=2an$ に代入すると，

$$(2a-1)2p=2a(2kp-ak),\ (2ak-2a+1)p-a^2k=0\ \text{………⑤}$$

④⑤より，$(2ak-2a+1)ak-a^2k(k-1)=0$ となり，

$$(2ak-2a+1)-a(k-1)=0,\ ak-a+1=0$$

よって，$k=\dfrac{a-1}{a}$ となり，$f(x)=\dfrac{a-1}{a}x(x-a)$

(2)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^a\frac{a-1}{a}x(x-a)\,dx=-\frac{a-1}{6a}\cdot a^3=\frac{a^2(1-a)}{6}$$

(3)　$S'(a)=\dfrac{2a-3a^2}{6}=\dfrac{-a(3a-2)}{6}$

これより，$0<a<1$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。

よって，$S(a)$ の最大値は $\dfrac{2}{81}$ である。

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{2}{81}$	$\searrow$	

コメント

微積分の総合問題です。(1)の計算はやや量がありますが，その後の設問は基本的なものです。

問　題

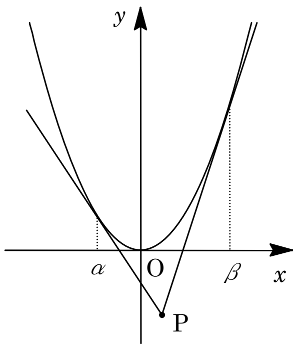
C を xy 平面上の放物線 $y=x^2$ とする。不等式 $y<x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。また，2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，等式 $\displaystyle\int_p^q (x-p)^2 dx=\frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

(1)　点 P の座標 $(a,\ b)$ を α，β を用いて表せ。

(2)　$S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ。

(3)　点 P が曲線 $y=x^3-1\ \ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに，S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　$C: y=x^2$ より $y'=2x$ となり，C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線は，$y-t^2=2t(x-t)$，$y=2tx-t^2$ ………①

ここで，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，①が通過することより，

$$b=2ta-t^2,\ t^2-2at+b=0 \text{ ………②}$$

点 P は領域 $y<x^2$ にあることより $b<a^2$ であり，これから②の判別式 $D/4=a^2-b>0$ となるので，②は異なる 2 実数解をもつ。これを $x=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha+\beta=2a\,,\ \alpha\beta=b$$

よって，点 P の座標は，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\Big)$ である。

(2)　(1)より，2 つの接線は，$y=2\alpha x-\alpha^2$，$y=2\beta x-\beta^2$ となり，この 2 つの接線と C で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2 dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2 dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)^3-\frac{1}{3}\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)^3=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

(3)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が $y=x^3-1\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くので，$b=a^3-1\ (-1\leqq a\leqq 1)$ となり,

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-4b=4a^2-4(a^3-1)$$

$$=-4a^3+4a^2+4$$

ここで，$f(a)=-4a^3+4a^2+4$ とおくと，

$$f'(a)=-4(3a^2-2a)$$
$$=-4a(3a-2)$$

すると，$-1\leqq a\leqq 1$ における $f(a)$ の値の増減は，右表のようになる。

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(a)$	12	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{124}{27}$	$\searrow$	4

これより，$(\beta-\alpha)^2$ のとりうる値の範囲は，$4\leqq(\beta-\alpha)^2\leqq 12$ である。

さて，(2)より，$S=\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{12}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$ となるので，S が最大値をとるのは，$a=-1$，$b=-2$ のときから $\mathrm{P}(-1,\ -2)$ である。

また，S が最小値をとるのは，$a=0$，$b=-1$ または $a=1$，$b=0$ のときから $\mathrm{P}(0,\ -1)$ または $\mathrm{P}(1,\ 0)$ である。

コメント

放物線と接線についての超頻出の問題です。誘導も細かく付けられています。

問　題

$0 \leqq a \leqq 1$ に対して，$f(a) = \int_0^1 \left|(x-a)(x-3+a)\right| dx$ と定める。$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

解答例

$0 \leqq a \leqq 1$ に対して，$2 \leqq 3-a \leqq 3$ となり，$0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$\left|(x-a)(x-3+a)\right| = \begin{cases} (x-a)(x-3+a) & (0 \leqq x \leqq a) \\ -(x-a)(x-3+a) & (a \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

これより，$f(a) = \int_0^1 \left|(x-a)(x-3+a)\right| dx$

$$= \int_0^a (x-a)(x-3+a)dx + \int_a^1 -(x-a)(x-3+a)dx$$

$$= \int_0^a (x^2-3x+3a-a^2)dx - \int_a^1 (x^2-3x+3a-a^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + (3a-a^2)x\right]_0^a - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + (3a-a^2)x\right]_a^1$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{3}{2}a^2 + (3a-a^2)a - \frac{1-a^3}{3} + \frac{3}{2}(1-a^2) - (3a-a^2)(1-a)$$

$$= -\frac{4}{3}a^3 + 4a^2 - 3a + \frac{7}{6}$$

$$f'(a) = -4a^2 + 8a - 3$$
$$= -(2a-1)(2a-3)$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は最大値 $\frac{7}{6}$ $(a=0)$，最小値 $\frac{1}{2}$ $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ をとる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{6}$

コメント

微積分の基本的な計算問題です。

問　題

p を定数とする。$f(x)=x^3+x^2+px+1$ とおく。$y=f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p の範囲を求めよ。

(2)　2 つの接点の x 座標を α，β とする。$(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3)　2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき，線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4)　2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+x^2+px+1$ より，$f'(x)=3x^2+2x+p$

条件から，$f'(x)=1$，すなわち $3x^2+2x+p-1=0\cdots\cdots(*)$は，異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$D/4=1-3(p-1)=-3p+4>0,\ \ p<\frac{4}{3}$$

(2)　$(*)$の実数解が α，β より，$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}$，$\alpha\beta=\dfrac{p-1}{3}$ となり，

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4}{9}-\frac{4}{3}(p-1)=\frac{4(4-3p)}{9}$$

(3)　接線の方程式は，その傾きが 1 より，$y-f(\alpha)=x-\alpha$，$y-f(\beta)=x-\beta$

これより，y 軸との交点は，$\mathrm{A}(0,\ f(\alpha)-\alpha)$，$\mathrm{B}(0,\ f(\beta)-\beta)$ となり，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\left|(f(\alpha)-\alpha)-(f(\beta)-\beta)\right|=\left|\alpha^3-\beta^3+\alpha^2-\beta^2+(p-1)(\alpha-\beta)\right|\\&=|\alpha-\beta|\left|(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta+(\alpha+\beta)+(p-1)\right|\\&=\frac{2}{3}\sqrt{4-3p}\left|\frac{4(4-3p)}{9}+(p-1)-\frac{2}{3}+(p-1)\right|\\&=\frac{2}{3}\sqrt{4-3p}\cdot\frac{2}{9}|3p-4|=\frac{4}{27}\left(\sqrt{4-3p}\right)^3\end{aligned}$$

(4)　2 つの接線は，傾きがともに 1 より，その距離は $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}}$ となり，条件から，

$$\frac{4}{27\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-3p}\right)^3=\frac{8}{27},\ \ \left(\sqrt{4-3p}\right)^3=2\sqrt{2}$$

よって，$4-3p=2$ から，$p=\dfrac{2}{3}$ である。

コメント

接線についての基本題です。丁寧な誘導つきです。

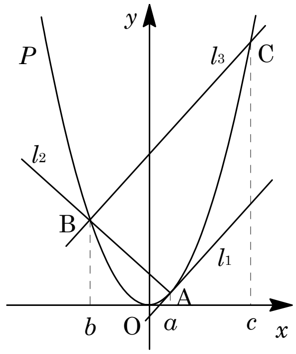
問　題

a を正の実数とする。放物線 $P: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を l_1 とし，点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また，l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。さらに，点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし，l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする。

(1)　$b+c=2a$ であることを示せ。

(2)　放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。S を a を用いて表し，S が最小となるときの S と a の値を求めよ。　[2010]

解答例



(1)　$P: y=x^2$ ……①に対して，$y'=2x$ となり，

$$l_2: y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$x^2-a^2=-\dfrac{1}{2a}(x-a)$

$x\neq a$ の解は，$x+a=-\dfrac{1}{2a}$，$x=-a-\dfrac{1}{2a}$ となり，

$$b=-a-\frac{1}{2a}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

また，$l_3: y-b^2=2a(x-b)$ より，

$$y=2ax-2ab+b^2\ \cdots\cdots\cdots ④$$

①④を連立して，$x^2-2ax+2ab-b^2=0$ ………⑤

⑤の解が，$x=b$，c より，解と係数の関係を用いると，$b+c=2a$ ………⑥

(2)　P と l_3 で囲まれた部分の面積 S は，③⑥を用いると，

$$S=\int_b^c(2ax-2ab+b^2-x^2)\,dx=-\int_b^c(x-b)(x-c)\,dx=\frac{1}{6}(c-b)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2a-b-b)^3=\frac{4}{3}(a-b)^3=\frac{4}{3}\Big(2a+\frac{1}{2a}\Big)^3$$

ここで，$a>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

なお，等号は $2a=\dfrac{1}{2a}$ $\Big(a=\dfrac{1}{2}\Big)$ のときに成立する。

よって，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{4}{3}\cdot 2^3=\dfrac{32}{3}$ をとる。

コメント

放物線と直線に囲まれた部分の面積を求める典型題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$x \leqq 0$ において，つねに $x^3+4x^2 \leqq ax+18$ が成り立っているものとする。このとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式

$$x^3+4x^2 \leqq a_0x+18$$

を解け。　[2009]

解答例

(1)　$x^3+4x^2 \leqq ax+18$ より，

$$x^3+4x^2-18 \leqq ax \cdots\cdots\cdots ①$$

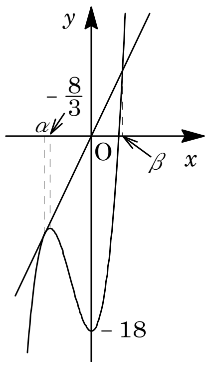
さて，$f(x)=x^3+4x^2-18$ とおくと，

$$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)$$

x	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	-18	$\nearrow$

ここで，$x \leqq 0$ において不等式①が成立する条件は，$x \leqq 0$ のとき曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=ax$ の下方に位置することである。

さて，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が，$x=\alpha$ で接し，$x=\beta$ で交わるとすると，



$$x^3+4x^2-ax-18=(x-\alpha)^2(x-\beta) \cdots\cdots\cdots ②$$

②の係数を比べると，

$$2\alpha+\beta=-4 \cdots\cdots\cdots ③，\ \alpha^2+2\alpha\beta=-a \cdots\cdots\cdots ④$$

$$\alpha^2\beta=18 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③⑤より，$\alpha^2(-4-2\alpha)=18$，$\alpha^3+2\alpha^2+9=0$

すると，$(\alpha+3)(\alpha^2-\alpha+3)=0$ となり，α は実数から，$\alpha=-3$ であり，

$$\beta=-4-2\cdot(-3)=2$$

④に代入して，$a=-\alpha^2-2\alpha\beta=3$

したがって, $x \leqq 0$ において不等式①が成立する条件は，図より，$a \leqq 3$ である。

(2)　(1)より，$a_0=3$ となり，このとき不等式①は,

$$x^3+4x^2-3x-18 \leqq 0，\ (x+3)^2(x-2) \leqq 0$$

よって，求める解は, $x \leqq 2$ である。

コメント

3 次関数のグラフを対応させて, 3 次不等式の解を求める基本問題です。

問　題

xy 平面上に，円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$，放物線 $C_2 : y = x^2 + 5$ がある。また点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。

(2)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの，y_1 の値の範囲を求めよ。

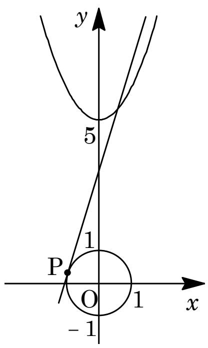
(3)　円 C_1 の接線で，その接点の y 座標が負であり，放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。

(4)　(3)の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 l の方程式は，

$$x_1 x + y_1 y = 1 \cdots\cdots\cdots①$$



(2)　l と $C_2 : y = x^2 + 5 \cdots\cdots②$に対して，

②を①に代入すると，$x_1 x + y_1 (x^2 + 5) = 1$

$$y_1 x^2 + x_1 x + 5y_1 - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$y_1 = 0$ のとき　$x_1 = \pm 1$ から，③は実数解をもつ。

(ii)　$y_1 \neq 0$ のとき　③が実数解をもつ条件は，

$$D = {x_1}^2 - 4y_1(5y_1 - 1) = (1 - {y_1}^2) - 20{y_1}^2 + 4y_1$$
$$= -21{y_1}^2 + 4y_1 + 1 \geqq 0$$

よって，$(3y_1 - 1)(7y_1 + 1) \leqq 0$ から，$-\dfrac{1}{7} \leqq y_1 \leqq \dfrac{1}{3}$ $(y_1 \neq 0)$

(i)(ii)より，l と C_2 が共有点をもつ条件は，$-\dfrac{1}{7} \leqq y_1 \leqq \dfrac{1}{3}$ である。

(3)　l と C_2 が接するのは，③が重解をもつ，すなわち $D = 0$ のときである。

このとき，$y_1 < 0$ となるのは $y_1 = -\dfrac{1}{7}$ であり，$x_1 = \pm\sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{7}\right)^2} = \pm\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$

すると，③の重解は，$x = \dfrac{-x_1}{2y_1} = \pm 2\sqrt{3}$ となり，このとき，②より，

$$y = (\pm 2\sqrt{3})^2 + 5 = 17$$

よって，円 C_1 の接線と放物線 C_2 と接する点の座標は，$(\pm 2\sqrt{3},\ 17)$ である。

(4)　(3)より，円 C_1 の接線と C_2 は $x = \pm 2\sqrt{3}$ 接する。

そこで，求める図形の面積を S とおくと，y 軸に関する対称性より，

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{3}} (x - 2\sqrt{3})^2 dx = \frac{2}{3}\Big[(x - 2\sqrt{3})^3\Big]_0^{2\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}(-2\sqrt{3})^3 = 16\sqrt{3}$$

コメント

微積分の基本問題です。空欄形式にすると，センター数学ⅡB の問題です。

問　題

関数 $y=x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ をとる。ただし，$\alpha<\beta$ とする。次の問いに答えよ。

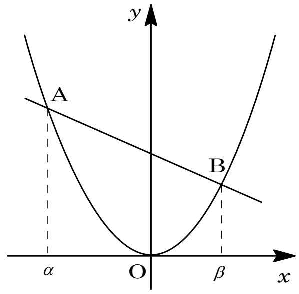
(1)　線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ。

(2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは，線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また，その最大値を l を用いて表せ。　[2007]

解答例

(1)　直線 AB の方程式は，

$$y-\alpha^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha),\quad y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$



すると，線分 AB と C で囲まれる部分の面積 S は，

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx\\
&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx\\
&=-\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx=-\Big[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\Big]_\alpha^\beta\\
&=-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{AB}=l$ より，$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2}=l$ となり，

$$(\beta-\alpha)\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}=l,\quad \beta-\alpha=\frac{l}{\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}}$$

すると，(1)より，$S=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{l^3}{\left(\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}\right)^3}$

よって，S が最大となるのは，$\beta+\alpha=0$ のときであり，最大値は $\dfrac{l^3}{6}$ である。

このとき，線分 AB の方程式は $y=-\alpha\beta$ となり，x 軸に平行である。

コメント

有名な $\dfrac{1}{6}$ 公式の証明とその応用です。

問　題

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

と定め，$g(x)=\int_0^1 f(t-x)\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

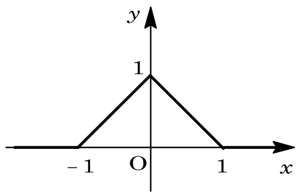
(2)　$g(1)$ の値を求めよ。

(3)　$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。　[2006]

解答例

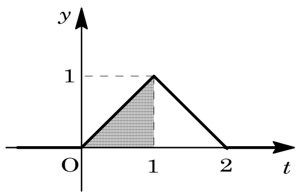
(1)　$|x|\leqq 1$ において $f(x)=1-|x|$ より，$y=f(x)$ のグラフは $y=-|x|$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

　また，$|x|>1$ において $f(x)=0$ より，$y=f(x)$ のグラフは右図の太線部となる。



(2)　$y=f(t-1)$ のグラフは，$y=f(t)$ のグラフを t 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

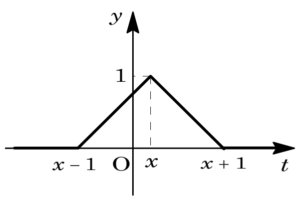
　すると，$g(1)=\int_0^1 f(t-1)\,dt$ より，$g(1)$ は右図の網点部の面積を表す。



$$g(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$

(3)　$y=f(t-x)$ のグラフは，$y=f(t)$ のグラフを t 軸方向に x だけ平行移動したものである。

　また，(2)と同様に考えて，$g(x)$ は $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で，$y=f(t-x)$ のグラフと t 軸にはさまれた部分の面積を表す。



(i)　$x+1\leqq 0$ $(x\leqq -1)$ のとき　$g(x)=0$

(ii)　$x\leqq 0$，$0\leqq x+1$ $(-1\leqq x\leqq 0)$ のとき　$g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2$

(iii)　$x-1\leqq 0$，$0\leqq x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}(1-x)^2-\frac{1}{2}(x+1-1)^2$$

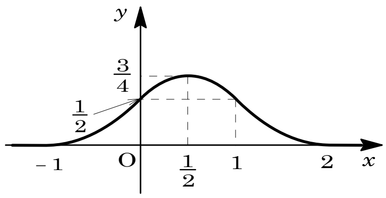
$$=-x^2+x+\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

(iv)　$x-1\leqq 1,\ 1\leqq x\ (1\leqq x\leqq 2)$のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}(1-x+1)^2=\frac{1}{2}(x-2)^2$$

(v)　$x-1\geqq 1\ (x\geqq 2)$のとき　$g(x)=0$

以上より，$y=g(x)$のグラフは右図の太線部となる。



コメント

絶対値付きの関数の積分ですが，面積を対応させれば，積分計算を実行するまでもありません。

問　題

関数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ の極大値が 5，極小値が 1 となるとき，定数 a，b の値を求めよ。　[2005]

解答例

$f(x)=x^3-ax^2+b$ に対し，$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$

$f'(x)=0$ の解は，$x=0,\ \dfrac{2}{3}a$ となり，極値をもつことから $a\neq 0$ である。

(i)　$a>0$ のとき

極大値が 5，極小値が 1 より，

$f(0)=b=5$ ………①

$f\left(\dfrac{2}{3}a\right)=-\dfrac{4}{27}a^3+b=1$ ………②

①②より，$-\dfrac{4}{27}a^3=-4$，$a=3$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii)　$a<0$ のとき

極大値が 5，極小値が 1 より，

$f\left(\dfrac{2}{3}a\right)=-\dfrac{4}{27}a^3+b=5$ ………③

$f(0)=b=1$ ………④

③④より，$-\dfrac{4}{27}a^3=4$，$a=-3$

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (-3,\ 1)$

コメント

3 次関数の増減を調べる微分の基本題です。

問　題

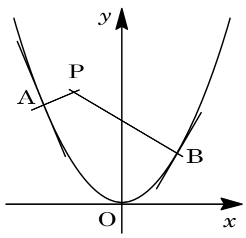
曲線 $y=x^2$ を C とし，C 上の異なる 2 点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。A を通り，A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り，B における C の接線と直交する直線を m とする。

(1)　l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。

(2)　l と m が直交するように点 A, B が動くとき，交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。　[2003]

解答例



(1)　$y=x^2$ より $y'=2x$ なので，点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線の方向ベクトル $(1,\ 2a)$ が，法線 l の法線ベクトルとなるので，l の方程式は，

$$x-a+2a(y-a^2)=0\,,\ \ x+2ay=a+2a^3\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，法線 m の方程式は，

$$x+2by=b+2b^3\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$2(a-b)y=a-b+2(a^3-b^3)$

$$y=\frac{1}{2}+a^2+ab+b^2\,,\ \ x=a+2a^3-2a\left(\frac{1}{2}+a^2+ab+b^2\right)=-2ab(a+b)$$

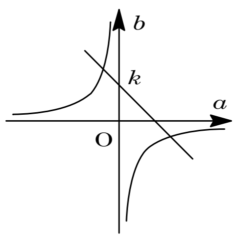
よって，$\mathrm{P}\left(-2ab(a+b),\ \dfrac{1}{2}+a^2+ab+b^2\right)$ となる。

(2)　l と m が直交するとき，l と m の法線ベクトルどうしも直交するので，

$$1+2a\cdot 2b=0\,,\ \ ab=-\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

このとき，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，③を代入して，

$$x=\frac{1}{2}(a+b)\cdots\cdots\cdots④,\ \ y=\frac{1}{2}+(a+b)^2-ab=(a+b)^2+\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots⑤$$



さて，$a+b=k$ ……⑥とおくと，ab 平面上で，どんな k に対しても③と⑥は共有点をもつ。すなわち $a+b$ は任意の値をとり，④より $a+b=2x$ を⑤に代入すると，点 P の軌跡の方程式は，$y=4x^2+\dfrac{3}{4}$ ……⑦となる。

(3)　⑦より $y'=8x$ なので，⑦上の接点を $\left(t,\ 4t^2+\dfrac{3}{4}\right)$ とおくと，

接線の方程式は，

$$y-\left(4t^2+\frac{3}{4}\right)=8t(x-t)\,,\ \ y=8tx-4t^2+\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots⑧$$

$y=x^2$ と⑧の交点は，$x^2-8tx+4t^2-\frac{3}{4}=0$，$x=4t\pm\sqrt{12t^2+\frac{3}{4}}$

これを $x=\alpha$，β ($\alpha<\beta$) とおくと，$y=x^2$ と⑧で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\left(8tx-4t^2+\frac{3}{4}-x^2\right)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{12t^2+\frac{3}{4}}\right)^3$$

よって，$t=0$ のとき S は最小値 $\frac{1}{6}\left(2\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

コメント

微積分の総合問題で，しかも超頻出のものです。

問　題

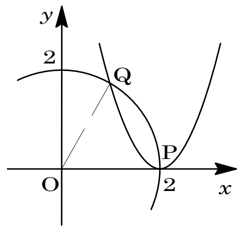
座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ$(2,\ 0)$をPとし，他の 1 つを Q とする。

(1)　点 Q の座標を求めよ。

(2)　円 C の劣弧 PQ と放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。
ただし，劣弧 PQ とは，点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち，長さが短い方の弧である。 [2002]

解答例

(1)　円 $C: x^2+y^2=4$ ……①，放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ ……②の交点は，①②より，



$$x^2+3(x-2)^4-4=0,\ (x+2)(x-2)+3(x-2)^4=0$$
$$(x-2)\{(x+2)+3(x^3-6x^2+12x-8)\}=0$$
$$(x-2)(x-1)(3x^2-15x+22)=0$$

$x\neq 2$ より $x=1$，②より $y=\sqrt{3}$ となり，$\mathrm{Q}(1,\ \sqrt{3})$ である。

(2)　$\angle\mathrm{QOP}=60^\circ$ より，求める図形の面積を S とすると，

$$S=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}-\int_1^2\sqrt{3}(x-2)^2dx=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[(x-2)^3\Big]_1^2$$
$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{5}{6}\sqrt{3}$$

コメント

落とせない積分の基本題です。

問　題

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-7x+4 & (x\leqq 1\text{の場合})\\ x & (x>1\text{の場合})\end{cases}$$

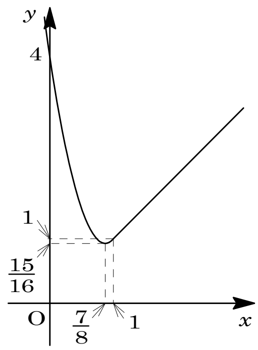
このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) 実数 t に対して $F(t)$ を，$F(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}f(x)\,dx$ で定義するとき，関数 $F(t)$ の増減を調べ，そのグラフの概形を描け。また，$F(t)$ の最小値を求めよ。 [2001]

解答例

(1) $x\leqq 1$ のとき $f(x)=4x^2-7x+4=4\left(x-\dfrac{7}{8}\right)^2+\dfrac{15}{16}$，$x>1$ のとき $f(x)=x$ より，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2) $F(t)$ は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸，および $x=t$，$x=t+1$ によって囲まれた領域の面積を表す。

(i) $t\leqq 0$ のとき

$$F(t)=\int_t^{t+1}(4x^2-7x+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_t^{t+1}$$
$$=\frac{4}{3}\{(t+1)^3-t^3\}-\frac{7}{2}\{(t+1)^2-t^2\}+4\{(t+1)-t\}$$
$$=4t^2-3t+\frac{11}{6}=4\left(t-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{61}{48}$$

(ii) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$$F(t)=\int_t^1(4x^2-7x+4)\,dx+\int_1^{t+1}x\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_t^1+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{t+1}$$
$$=\frac{4}{3}(1-t^3)-\frac{7}{2}(1-t^2)+4(1-t)+\frac{1}{2}\{(t+1)^2-1\}$$
$$=-\frac{4}{3}t^3+4t^2-3t+\frac{11}{6}$$

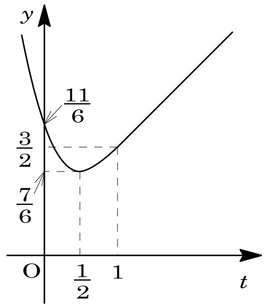
$F'(t)=-4t^2+8t-3=-(2t-1)(2t-3)$ より，$F(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$F'(t)$		$-$	0	$+$	
$F(t)$	$\frac{11}{6}$	$\searrow$	$\frac{7}{6}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

(iii) $t\geqq 1$ のとき

$$F(t)=\int_t^{t+1}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_t^{t+1}=\frac{1}{2}\{(t+1)^2-t^2\}$$
$$=t+\frac{1}{2}$$

以上より，$y=F(t)$ のグラフの概形は右図のようになる。また，$F(t)$ の最小値は $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{6}$ である。



コメント

$F(t)$ を求めるのに場合分けが必要ですが，(1)の $y=f(x)$ のグラフを利用すれば難しくはありません。

問　題

xy 平面上の曲線 $C: y = |2x-1| - x^2 + 2x + 1$ について次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形を描け。

(2) 直線 $l: y = ax + b$ が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの a, b の値を求めよ。

(3) (2)の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。 [2000]

解答例

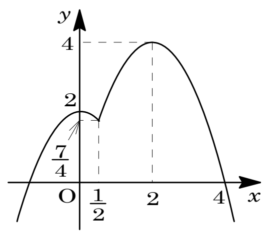
(1) $C: y = |2x-1| - x^2 + 2x + 1$ に対して，

(i) $x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$y = 2x - 1 - x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 4x$

$= -(x-2)^2 + 4$ ………①

(ii) $x < \dfrac{1}{2}$ のとき　$y = -(2x-1) - x^2 + 2x + 1$

$= -x^2 + 2$ ………②



(2) ①より，$y' = -2x + 4$

ここで，$t > \dfrac{1}{2}$ として，接点を $(t,\ -t^2 + 4t)$ とすると，接線の方程式は，

$y - (-t^2 + 4t) = (-2t + 4)(x - t)$，$y = (-2t + 4)x + t^2$ ………③

②と③の共有点は，$-x^2 + 2 = (-2t + 4)x + t^2$

$x^2 - 2(t-2)x + t^2 - 2 = 0$ ………④

接する場合は，$D/4 = (t-2)^2 - (t^2 - 2) = 0$ から，$t = \dfrac{3}{2}$

このとき，④の重解は $x = t - 2 = -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$ となり，題意に適する。

よって，求める接線 l は③より，$y = x + \dfrac{9}{4}$ となり，$a = 1$，$b = \dfrac{9}{4}$

(3) $S = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ x + \frac{9}{4} - (-x^2 + 2) \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{ x + \frac{9}{4} - (-x^2 + 4x) \right\} dx$

$= \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) dx$

$= \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

コメント

微積分の総合問題です。計算ミスに注意して完答しましょう。

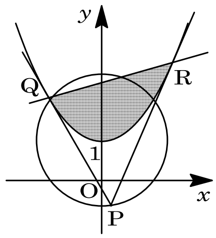
問　題

円 $x^2+(y-1)^2=3$ 上の点 P から放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ に異なる 2 本の接線を引くことができるものとし，その 2 つの接点を Q，R とする。このとき線分 QR とこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点 P の座標と，そのときの面積を求めよ。

[1999]

解答例

円 $x^2+(y-1)^2=3$ ……①，放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ ……②



①上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと，$s^2+(t-1)^2=3$ ………③

②より，$y'=x$ なので，点 $\left(u,\ \dfrac{1}{2}u^2+1\right)$ における接線は，

$$y=u(x-u)+\frac{1}{2}u^2+1=ux-\frac{1}{2}u^2+1$$

$\mathrm{P}(s,\ t)$ を通るので，$t=us-\dfrac{1}{2}u^2+1$

$$u^2-2su+2t-2=0 \text{………④}$$

④が異なる 2 実数解をもつことより，$D/4=s^2-2t+2>0$

③より，$3-(t-1)^2-2t+2>0$，$4-t^2>0$

ここで，④の解 $u=s\pm\sqrt{s^2-2t+2}=s\pm\sqrt{4-t^2}$ を $u=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=s-\sqrt{4-t^2},\ \beta=s+\sqrt{4-t^2}$$

線分 QR を $y=mx+n$ とすると，線分 QR と放物線で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left(mx+n-\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{4-t^2}\right)^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4-t^2}\right)^3$$

よって，$t=0$ のとき S は最大値 $\dfrac{2}{3}(\sqrt{4})^3=\dfrac{16}{3}$ をとる。

このとき③より，$\mathrm{P}(\pm\sqrt{2},\ 0)$ となる。

コメント

よくある構図の問題です。いわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる典型題です。

問　題

$f(x)=-ax(x-2b)$ とする。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

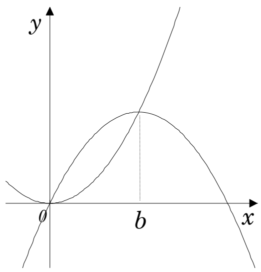
(1)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=ax^2$ とで囲まれた部分の面積 S を a と b で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ の頂点 P が直線 $3x+2y=6$ の上にあるとき，面積 S の最大値を求めよ。 [1998]

解答例

(1)　$y=-ax(x-2b)$ と $y=ax^2$ の交点は,

$-ax^2+2abx=ax^2$，$2ax^2-2abx=0$ より，$x=0$，b



よって，$S=\int_0^b -(2ax^2-2abx)\,dx$

$$=-2a\int_0^b x(x-b)\,dx$$

$$=-2a\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)b^3=\frac{1}{3}ab^3\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$f(x)=-ax(x-2b)=-a(x-b)^2+ab^2$

これより，$\mathrm{P}(b,\ ab^2)$ となり，点 P が直線 $3x+2y=6$ の上にあるので,

$$3b+2ab^2=6\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$a=\dfrac{6-3b}{2b^2}$ となり，これを①に代入すると,

$$S=\frac{1}{3}\cdot\frac{6-3b}{2b^2}\cdot b^3=-\frac{1}{2}(b^2-2b)=-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{2}$$

以上より，$b=1$，②から $a=\dfrac{3}{2}$ のとき, S は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

コメント

数Ⅱの積分の基本題です。