《2019 入試対策》

岡山大学

理系数学

1998―2018

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。
(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 (1)　すべての実数 $x,\ y$ に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1\geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 $a,\ b$ が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。　[2014]

2　xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P_1}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P_2}(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})$ を

$$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する。いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3)　点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値を求めよ。　[2013]

3　xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点 $(1,\ 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点 $(-1,\ 0)$ を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

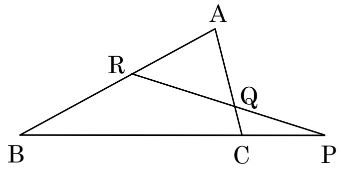
(2)　A と B が点 $(0,\ 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3)　$n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点 $(-2,\ 0)$ を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ。　[2003]

4　座標平面上に点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0)$ があり，線分 AB 上の点 P から x 軸，y 軸におろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする。点 P が A から B まで動くとき，線分 QR の通過する部分の面積を求めよ。　[2002]

■ 図形と計量

1 　三角形 ABC において，$AB=BC=2$，$CA=1$ とする。$0\leqq x\leqq 1$ を満たす x に対して，辺 BC の延長上に点 P を，辺 CA 上に点 Q を，それぞれ $CP=AQ=x$ となるようにとる。さらに，直線 PQ と辺 AB の交点を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。



(1)　AR を x の関数として表せ。

(2)　(1)の関数を $f(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。　[2014]

2 　原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。　[2001]

■ ベクトル

1 　xyz 空間内に 3 点 $A(2,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 3,\ -1)$，$C(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分 BC 上の点を $P(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし，球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1，球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　球面 K の方程式を求めよ。

(2)　S_1 を s と t の式で表せ。

(3)　点 P は線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4)　(3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。　[2018]

2 座標空間内に，原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 0,\ -1)$ がある。O と異なる点 $P(s,\ t,\ 0)$ に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u,\ v,\ 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を $u,\ v$ を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で，原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。 [2016]

3 座標空間内に 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$ の内積が 0 になるような点 $P(x,\ y,\ z)$ の集合を S とする。3 点 A, B, C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r を求めよ。

(2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。

(3) (1)で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ。

(4) (1)で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を l とする。球面 S と直線 l のすべての共有点について，その座標を求めよ。 [2015]

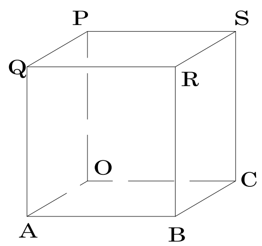
4 座標空間内の 8 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を考える。$0<t<3$ のとき，3 点 $(t,\ 0,\ 0)$，$(0,\ t,\ 0)$，$(0,\ 0,\ t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし，$f(0)=f(3)=0$ とする。関数 $f(t)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $0\leqq t\leqq 3$ ののとき，$f(t)$ を t の式で表せ。

(2) 関数 $f(t)$ の $0\leqq t\leqq 3$ における最大値を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ の値を求めよ。 [2015]

5　辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき, 次の問いに答えよ。



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を 3 つのベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ で表せ。ただし, $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とする。

(2) 5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3) 五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4) 辺 BR を $3:1$ の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし, 五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。 [1999]

■ 整数と数列

1　p は素数とする。正の整数 n に対し, p^d が n の約数となる整数 d $(d\geqq 0)$ のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $p=3$, $n=3^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(2) $p=5$, $n=5^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(3) m が正の整数で $n=p^m!$ のとき $f(n)$ を求めよ。 [2016]

2　$f(x)=4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x)=f(x),\ f_{n+1}(x)=f_n(f(x))\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f_2(x)=0$ を解け。

(2) $0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対し, 方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$, $\beta(t)$ とする。c が $0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき, $\alpha(c)$, $\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ。

(3) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し, 一般項 S_n を求めよ。 [2012]

3 数列$\{a_n\}$は次のように定められている。

$$a_1=1,\ a_{n+1}(a_n+1)=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}{}^2+a_{n+1}-1$をa_nを用いて表せ。

(2) 数列$\{b_n\}$を$b_n=a_n{}^2+a_n-1$で定める。このとき，b_{2n-1}は正，b_{2n}は負であることを示せ。

(3) 数列$\{a_n\}$について，不等式$a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a_{2n-1}$が成り立つことを示せ。

[2004]

4 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ は，$x=1,\ -1,\ -2$ で整数値 $f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$をとるとする。

(1) $a,\ b,\ c$を$r,\ s,\ t$の式で表せ。

(2) すべての整数nについて，$f(n)$は整数になることを示せ。 [2003]

5 n を自然数とする。$f(x)$は 2 次関数で，曲線$y=f(x)$は座標平面上の 3 点$(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$を通るとする。

(1) 2 次関数$f(x)$を求めよ。

(2) この関数$f(x)$について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$の値を n を用いて表せ。

(3) (2)で求めたSの値が整数であるためには，$n+2$が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

6 $n,\ k$ を自然数とする。等式$x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1\cdots\cdots$①を満たす自然数$x_1,\ x_2,\cdots,x_k$の組の個数を$a(n,\ k)$とするとき，次の問いに答えよ。ただし，例えば$(x_1,\ x_2)=(1,\ 2)$と$(x_1,\ x_2)=(2,\ 1)$とは別の組と考える。

(1) 式①におけるx_kのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 関係式$a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$が成り立つことを示せ。

(3) $a(n,\ 1)$，$a(n,\ 2)$，$a(n,\ 3)$，$a(n,\ 4)$を求め，$a(n,\ k)$を推定せよ。

(4) (3)において，$a(1,\ k)$，$a(2,\ k)$，$\cdots$，$a(n,\ k)$の推定が正しいとしたとき，$a(n,\ k+1)$の推定が正しいことを証明せよ。 [1999]

■ 確率

1　図 1 のような経路の図があり，次のようなゲームを考える。最初はⒶから出発し，1 回の操作で，1 個のさいころを投げて，出た目の数字が矢印にあればその方向に進み，なければその場にとどまる。この操作を繰り返し，Ⓓに到達したらゲームは終了する。

例えばⒷにいるときは，1，3，5 の目が出ればⒸへ進み，4 の目が出ればⒹへ進み，2，6 の目が出ればその場にとどまる。n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

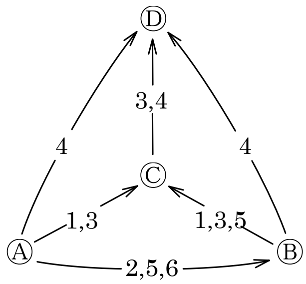


図1：経路の図

(1)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒷにいる確率を n の式で表せ。

(2)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒸにいる確率を n の式で表せ。

(3)　ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。　[2018]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　A, B, C, D, E, F, G, H の 8 人から 7 人を選び，さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける。A，B の 2 人がともに選ばれて，かつ同じ組になる確率を求めよ。

[2017]

3　n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2)　引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4)　引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち，2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ。　[2015]

4　n を 3 以上の整数とし, a, b, c は 1 以上 n 以下の整数とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(2)　$a\leqq b\leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(3)　$a<b$ かつ $a\leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。　[2014]

5　表の出る確率が p, 裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p, q は正の定数で, $p+q=1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$$

とし, D 上を動く点 Q を考える。Q は点 $(0,\ 0)$ から出発し, 硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み, 裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお, この規則で D 上を進めないときには, その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。

(2)　硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき, p の値を求めよ。　[2012]

6　n を 3 以上の整数とする。$3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

(1)　3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。　[2011]

7　男性 M_1, …, M_4 の 4 人と女性 F_1, …, F_4 の 4 人が, 横一列に並んだ座席 S_1, …, S_8 に座る場合を考える。

(1)　同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2)　(1)の座り方の中で, M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか。

(3)　(1)の座り方の中で, M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか。　[2010]

8 1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1) さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2) さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。 [2009]

9 n を 3 以上の整数とする。A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ。どの数を選ぶ確率も等しく $\frac{1}{n}$ とする。A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 人のうち，少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ。

(2) a と b が等しくなる確率を求めよ。

(3) 2 人が同じ数，他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ。

(4) $a<b<c$ となる確率を求めよ。 [2008]

10 A, B, C の 3 人のうち 2 人が，1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き，大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし，最初に A と B が対戦し，その後は，直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また，カードを引く順番は最初は A から，その後は直前の対戦の勝者からとする。なお，対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし，引いたカードは対戦後，直ちに元の束に戻すものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。

(2) 4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。

(3) 5 回の対戦を行うとき，A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

[2007]

■ 論証

1 実数 x, y, z について，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し，等号がいつ成り立つか答えよ。これを用いて，命題

「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」

が真となる最小の正の実数 a を求めよ。 [2005]

■ 複素数

1 k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2) $x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。 [2018]

2 α は $0<|\alpha|<1$ を満たす虚数であるとする。複素数平面上の点の列 z_1，z_2，z_3，$\cdots$を，$z_1=0$，$z_2=1$ および

$$z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}(z_{2n+1}-z_{2n})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，虚数とは虚部が 0 でない複素数のことであり，また，$\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2})\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) 偶数番目の点の列 z_2，z_4，z_6，$\cdots$および奇数番目の点の列 z_1，z_3，z_5，$\cdots$は，それぞれ同一直線上にあることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0$ を満たす複素数 w を求めよ。 [2017]

3　O を原点とする複素数平面上で，複素数 z を表す点 X は O を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする。z の偏角を θ と表す。$w = z^2 + \dfrac{1}{z}$ とおき，w を表す点を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，θ は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

(1)　$w = 0$ となる θ をすべて求めよ。

(2)　$w \neq 0$ のとき, w の偏角 β を θ で表せ。ただし，β は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

(3)　三角形 OXY の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の個数を求めよ。　[2005]

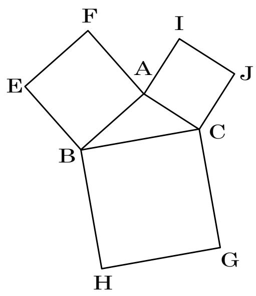
4　次の条件(a), (b)をともに満たす実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。

(a)　$p,\ q,\ r$ の絶対値は等しい。

(b)　3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ は，絶対値が 1 であるような虚数解をもつ。

[2004]

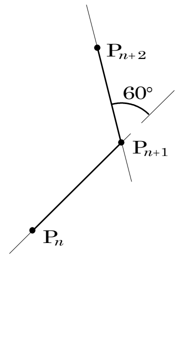
5　複素数平面上において，右の図のように三角形 ABC の各辺の外側に正方形 ABEF，BCGH，CAIJ を作る。



(1)　点 A, B, C がそれぞれ複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ で表されているとき，点 F, H, J を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の式で表せ。

(2)　3 つの正方形 ABEF，BCGH，CAIJ の中心をそれぞれ P, Q, R とする。このとき線分 AQ と線分 PR の長さは等しく，AQ $\perp$ PR であることを証明せよ。　[2003]

6　複素数平面上で次のように点の列 P_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ をつくる。点 P_0，P_1 はそれぞれ 0, 1 を表し，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ の長さは線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さの r 倍 $(r > 0)$ で直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ から直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ へ図のようにはかった角は $60°$ である。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　P_3 を求めよ。

(2)　P_{6n} を表す複素数 $a + bi$ の実部 a と虚部 b を求めよ。　[2002]

7 α を 0 でない複素数とし，その偏角 θ は $0° < \theta < 90°$ を満たすものとする。原点を O とする複素数平面において α，$\dfrac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれ X, Y とする。

(1) 実数 1 の表す点を A とする。4 点 O，X，A，Y の順に結んでできる四角形において，$\angle$A を $\angle$O で表せ。

(2) 実数 t の表す点を T とする。α によらず点 T がつねに三角形 OXY の外部にあるとき，実数 t はどのような範囲にあるか。 [2001]

8 原点を O とする複素数平面上で，0 でない複素数 z，w の表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ とする。z に対して w を，O を始点とする半直線 $\mathrm{OP}(z)$ 上に $\mathrm{Q}(w)$ があり，$|w| = \dfrac{2}{|z|}$ を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $w = \dfrac{2}{\overline{z}}$ を示せ。

(2) ± 2，$\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $\mathrm{P}(z)$ が動く。このとき，$\mathrm{Q}(w) = \mathrm{P}(z)$ となる z を求めよ。

(3) $\mathrm{P}(z)$ が(2)の正方形の周上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ の描く図形を求めて図示せよ。

[2000]

9 複素平面上で $z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{4} z_0$，$z_2 = -\dfrac{1}{z_0}$ を表す点をそれぞれ P_0，P_1，P_2 とする。

(1) z_1 を極形式で表せ。

(2) z_2 を極形式で表せ。

(3) 原点 O，P_0，P_1，P_2 の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ。 [1998]

■ 曲線

1 O を原点とする座標平面における曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に，点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

(1) C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。

(2) 点 Q が C 上を動くとき，$\triangle$OPQ の面積の最大値と，最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。 [2012]

２　座標平面において，曲線 C 上の点 P における接線に垂直で P を通る直線を，P における C の法線とよぶ。双曲線 $C_1: y=\dfrac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における C_1 の法線の方程式を求めよ。ただし，$p \neq 0$ とする。

(2)　点 $\mathrm{Q}(q,\ -q)$ を中心とする円 C_2 と C_1 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_2 の半径 r を q の式で表せ。　[2006]

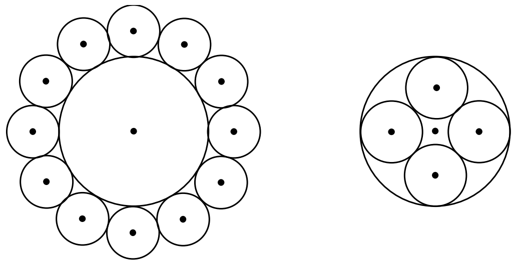
■ 極限

１　n を自然数とする。曲線 $y=x^2(1-x)^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする。

(1)　S_n を求めよ。

(2)　$T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ。　[2011]

２　平面上に半径 1 の円 C がある。この円に外接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 1）のように配置し，その一つの円の半径を R_n とする。また，円 C に内接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 2）のように配置し，その一つの円の半径を r_n とする。ただし，$n \geqq 3$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



例1　$n=12$ の場合　　　例2　$n=4$ の場合

(1)　R_6，r_6 を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(R_n - r_n)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を用いてよい。　[2010]

3 xを実数とし，次の無限級数を考える。

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2-x^4}+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}}+\cdots$$

(1)　この無限級数が収束するようなxの範囲を求めよ。

(2)　この無限級数が収束するとき，その和として得られる x の関数を$f(x)$とかく。また，$h(x)=f\left(\sqrt{|x|}\right)-|x|$とおく。このとき，$\lim_{x\to 0}h(x)$を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値をαとするとき，$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}$は存在するか。理由を付けて答えよ。　[2009]

4 次の各問いに答えよ。

(1)　$p,\ q$を0でない定数とする。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$b_n=(-1)^{n-1}\log\frac{n+2}{n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定められる数列$\{b_n\}$に対して，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$とする。このとき，$\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。　[2008]

5 $a,\ b$を正の実数とし，2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を

$$a_1=a,\quad b_1=b$$

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n+a_n{}^2}{a_n{}^2+5a_nb_n},\quad b_{n+1}=\frac{3a_nb_n}{a_n{}^2+5a_nb_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1)　$c_n=\frac{a_n}{b_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおく。数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty}a_n$，$\lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ。　[2005]

■ 微分法

1 座標平面内の 2 つの曲線$C_1:y=\log(2x)$，$C_2:y=2\log x$の共通接線を l とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　直線lの方程式を求めよ。

(2)　C_1，C_2およびlで囲まれる領域の面積を求めよ。　[2017]

2 関数$f(x)=8x^3-6x-1$について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。

(2) $a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$とするとき，$f(a)$の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$を証明せよ。 [2016]

3 xy平面において，点$(1,\ 2)$を通る傾きtの直線をlとする。また，lに垂直で原点を通る直線とlとの交点をPとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点Pの座標をtを用いて表せ。

(2) 点Pの軌跡が2次曲線$2x^2-ay=0$と3点のみを共有するようなaの値を求めよ。また，そのとき3つの共有点の座標を求めよ。ただし$a\neq0$とする。 [2013]

4 $f(x)=e^{-x^2}$とする。曲線$y=f(x)$上の点$\mathrm{A}(a,\ f(a))$における接線をl，原点Oを通りlに垂直な直線をl'とし，lとl'との交点をPとする。

(1) 線分OPの長さを求めよ。

(2) lとy軸との交点をQとし，$\angle\mathrm{POQ}$を$\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$とする。$\sin\theta$を$a$を用いて表せ。

(3) (2)で求めた$\sin\theta$を最大にするaの値と，そのときの$\sin\theta$の値を求めよ。

[2011]

5 原点を中心とする半径1の円をC_1とし，原点を中心とする半径$\dfrac{1}{2}$の円をC_2とする。C_1上に点$\mathrm{P}_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$があり，また$C_2$上に点$\mathrm{P}_2\left(\dfrac{1}{2}\cos3\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin3\theta\right)$がある。ただし，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$であるとする。線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の中点をQとし，点Qの原点からの距離を$r(\theta)$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点Qのx座標のとりうる範囲を求めよ。

(2) 点Qがy軸上にあるときのθの値をαとする。このとき，αおよび定積分$\displaystyle\int_0^\alpha\{r(\theta)\}^2d\theta$を求めよ。 [2010]

6　座標平面上に，$f(x)=2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$ で与えられる曲線 $C: y=f(x)$ と，直線 $l: y=ax$ （a は実数）を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C と l がちょうど 2 個の共有点をもつための a の条件を求めよ。もし必要であれば，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を使ってもよい。

(2)　C と l が第 1 象限で接するとき，C と l，および x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。　[2009]

7　xy 平面の曲線 $C: x=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$，$y=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C 上の $t=\theta$ に対応する点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$における C の接線 l の方程式を求めよ。

(2)　$\alpha=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$における C の接線 l と x 軸，y 軸で囲まれた三角形の面積 S を α の式で表せ。

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, (2)で求めた面積 S の値の範囲を求めよ。　[2008]

8　$f(x)=x^3-3a^2x-b$ とする。ただし，a，b は実数の定数であり，$a\geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　3 次方程式 $f(x)=0$ のすべての解が区間 $-1\leqq x\leqq 1$ に含まれる実数解であるための条件を, a と b に関する不等式で表せ。

(2)　座標平面上で，(1)で求めた条件を満たす点$(a,\ b)$の集合が表す領域を D とする。D の概形を描き，その面積を求めよ。　[2007]

9　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　実数 a, b は $b>a>0$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b>(b+1)^a$$

[2006]

10　a を正の実数とする。$x\geqq 0$ のとき，$y=\dfrac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

[2005]

11 次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ。

(2) $x>0$ のとき，不等式 $\log(1+x)>1-e^{-x}$ が成り立つことを示せ。

(3) 実数 $x,\ y$ が $0\leqq x\leqq e^y-1$，$0\leqq y\leqq 1-e^{-x}$ を満たせば，$x=y=0$ でなければならないことを示せ。 [2002]

12 x を 1 でない正の実数とし，$f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=2$ の解を求めよ。

(2) 不等式 $f(x)\geqq 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ。 [2000]

13 $a,\ b$ を正の数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=ae^x+be^{-x}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフが，y 軸に平行なある直線に関して対称であることを証明せよ。

(3) x についての方程式 $f(x)=1$ の解のうち，$x\geqq 0$ を満たすものがただ 1 つであるような $a,\ b$ の範囲を ab 平面に図示せよ。 [1999]

14 曲線 C と D_a を次のように定める。

C: 放物線 $y=x^2$

D_a : 中心が $(-1,\ a)$ で 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ と原点 O を通る円

(1) 不等式 $x>0$ によって表される領域において D_a が C と共有点をもつための a の条件を求めよ。

(2) 点 P が第 1 象限の C 上を動くとする。$\angle\mathrm{APO}$ が最大となるときの点 P の座標を求めよ。また，そのときの $\sin\angle\mathrm{APO}$ の値を求めよ。 [1998]

■ 積分法

1　a を 0 以上の実数, n を正の整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq e^a$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq\frac{a^2e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。　[2008]

2　関数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq\dfrac{3}{4\pi}$ ならば，$f'(x)>0$ であることを示せ。

(2)　$b\geqq a>0$，$b\geqq\dfrac{2}{\pi}$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx\leqq(b-a)f(b)\leqq b-a$ が成り立つことを示せ。　[2007]

3　$f(t)$ を連続関数, x を実数として，関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x)=\int_0^1|f(t)-x|dt$$

(1)　$f(t)=e^t$ のとき，関数 $g(x)$ の増減を調べ，$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$e=2.71828\cdots$ は自然対数の底である。

(2)　$f(t)$ は微分可能な単調増加関数で，その逆関数も微分可能とし，$a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とおく。このとき，$g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ。　[2001]

4　関数 $f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ について次の問いに答えよ。

(1)　$t=\cos x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2)　$f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた x に対して，$f'(x)$ の値を求めよ。

(4)　定積分 $\displaystyle\int_0^\pi|f(x)|dx$ の値を求めよ。　[2000]

■ 積分の応用

1 関数 $f(x)=(1+x)e^x$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ について，原点を通るすべての接線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ について，原点を通る接線のうち，接点の x 座標が最大のものを L とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 L および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2018]

2 座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2) 四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2017]

3 a は正の数とし，次の関数 $y=f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x)=axe^{-\frac{x}{a}}\quad (x\geqq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) a が区間 $1\leqq a\leqq 2$ 全体を動くとき，点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。

(3) $x\geqq 0$ における曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ と(2)の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2016]

4 自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$ を考える。

(1) 曲線 $y=f_n(x)$ 上の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における接線が原点を通るとき，a_n を n の式で表せ。ただし，$a_n>0$ とする。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする。また，(1)で求めた a_n に対して，$0\leqq x\leqq a_n$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$，x 軸，および直線 $x=a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする。B_n および C_n を n の式で表せ。

(3) (2)で求めた B_n および C_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい。 [2015]

5　曲線 $y=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$ $(x>0)$ と直線 $y=2$ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

[2013]

6　a を正の定数とし，座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y=e^{x^2}$，$C_2 : y=ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ であることを用いてもよい。

(1)　$t>0$ の範囲で，関数 $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 の共有点の個数を求めよ。

(3)　C_1，C_2 の共有点の個数が 2 のとき，これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2012]

7　座標平面において，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ である。l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標 α，β を θ の式で表せ。

(2)　θ を $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき，直線 $y=\sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

8　O を原点とする座標平面において，点 A の座標を $(2,\ 0)$ とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき, P が描く曲線の長さを求めよ。　[2005]

9　座標空間に定点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ をとる。点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から yz 平面に下ろした垂線の足を H とする。$k>1$ である定数 k に対して，$\mathrm{PH}:\mathrm{PA}=k:1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。

(2)　S のうちで，$y\geqq 0$ かつ $z=0$ を満たす部分を C とする。S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ。

(3)　S で囲まれる立体の体積を求めよ。　[2004]

10　$1<a<b$ とする。原点 O と点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$を通る直線，原点 O と点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$を通る直線，および曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ で囲まれた部分を R とする。R の面積を E，R を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。

(1)　E を a と b の式で表せ。

(2)　$c>1$ とし，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$から直線 $y=-x$ に下ろした垂線を PQ とする。線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2=s^2+2$ となることを示せ。

(3)　V を a と b の式で表せ。

(4)　$b=a+1$ のとき $\lim\limits_{a\to\infty}E$，$\lim\limits_{a\to\infty}V$ を求めよ。　[2003]

11　a，b を実数とする。2 つの関数 $f(x)=\log(x^2+1)$，$g(x)=ax^2+b$ について次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ。

(3)　(2)の条件において，$a=\dfrac{1}{4}$，$b\neq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[1999]

12　xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ は

$$x(t)=f(t)\cos t,\quad y(t)=f(t)\sin t$$

で与えられているとする。ただし，$f(t)$ は微分可能で $f'(t)$ は連続とする。

$t=a$ から $t=b$ までに点 P が動く道のりを L とする。

(1)　$L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$ が成り立つことを示せ。

(2)　$L\leqq\displaystyle\int_a^b\left\{|f(t)|+|f'(t)|\right\}dt$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(t)=e^{-\sqrt{t}}$，$a=1$，$b=4$ のとき，(2)の不等式を用いて，$L\leqq\dfrac{5}{e}-\dfrac{7}{e^2}$ が成り立つことを示せ。　[1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

(1)　すべての実数 x, y に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1\geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 a, b が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$F=x^2+y^2+2axy+2bx+1$ とおくと，

$$F=y^2+2axy+x^2+2bx+1=(y+ax)^2+(1-a^2)x^2+2bx+1$$

これより，すべての実数 y に対して $F\geqq 0$ が成立する条件は，

$$(1-a^2)x^2+2bx+1\geqq 0$$

さらに，$G=(1-a^2)x^2+2bx+1$ とおき，すべての実数 x に対して $G\geqq 0$ である条件を求める。

(i)　$1-a^2=0$ $(a=\pm 1)$ のとき

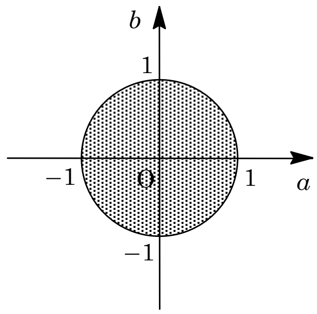
$G=2bx+1$ より，求める条件は $b=0$ である。

(ii)　$1-a^2\neq 0$ $(a\neq \pm 1)$ のとき

$G=(1-a^2)\left(x+\dfrac{b}{1-a^2}\right)^2-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1$ より，求める条件は，

$1-a^2>0$ ………①，$-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1\geqq 0$ ………②

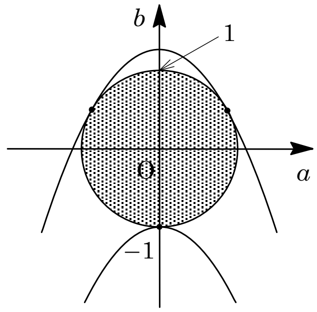
①②より，$a^2+b^2\leqq 1$ $(-1<a<1)$



(i)(ii)より，実数 a, b が満たすべき条件は，$a^2+b^2\leqq 1$ となり，点 $(a,\ b)$ のなす領域は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。

(2)　$a^2+b=k$ とおくと，$b=-a^2+k$ ………③

右図より，$(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき，k は最小値 -1 をとる。



また，境界線 $a^2+b^2=1$ と③を連立すると，

$$b=b^2-1+k,\ b^2-b-1+k=0\ \text{………④}$$

共有点の b 座標が 1 つである条件は，

$$D=1-4(-1+k)=0,\ k=\frac{5}{4}$$

このとき，④より $b=\dfrac{1}{2}$，③より $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，k は最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

コメント

2 変数関数の最小値に関する問題です。まず, x を固定し y を変化させたときの最小値を求め, 次にその最小値について, x を変化させることにより 2 変数についての最小値を求めるという手順に従っています。

問　題

xy 平面上の 2 点 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(P_1,\ P_2)$ を

$$d(P_1,\ P_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する。いま点 $A(3,\ 0)$ と点 $B(-3,\ 0)$ に対して，$d(Q,\ A)=2d(Q,\ B)$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3) 点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(D,\ C)$ の最小値を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $Q(x,\ y)$ とおくと，$d(Q,\ A)=2d(Q,\ B)$ より，

$$T:|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$$

ここで，T 上に点 $(a,\ b)$ があれば，$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$

すると，$|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$ から，点 $(a,\ -b)$ も T 上にある。

(2) (1)より，図形 T は x 軸対称となるので，以下，$y\geqq 0$ で考えると，

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y),\quad y=|x-3|-2|x+3|$$

(i) $x<-3$ のとき　$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

すると，$y\geqq 0$ より，$-9\leqq x<3$ となる。

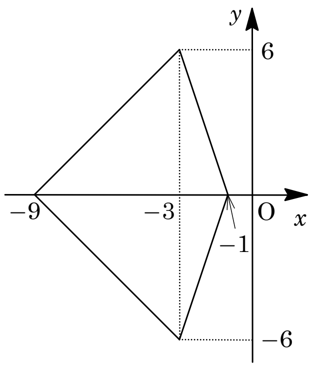
(ii) $-3\leqq x<3$ のとき　$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

すると，$y\geqq 0$ より，$-3\leqq x\leqq -1$ となる。

(iii) $x\geqq 3$ のとき

$$y=(x-3)-2(x+3)=-x-9$$

このとき，$y\geqq 0$ を満たす x は存在しない。



(i)～(iii)の結果をもとに，x 軸対称すると図形 T は右図のようになり，囲まれる領域の面積 S は,

$$S=\left\{\frac{1}{2}(-1+9)\cdot 6\right\}\cdot 2=48$$

(3) $D(x,\ y)$ が図形 T 上を動くとき，$x\leqq -1$，$y\leqq 6$ より，

$$d(D,\ C)=|x-13|+|y-8|=-(x-13)-(y-8)=21-(x+y)$$

ここで，$d(D,\ C)$ が最小となるのは，$x+y$ が最大となるときで，上図より，$(x,\ y)=(-3,\ 6)$ の場合である。

これより，$d(D,\ C)$ の最小値は，$21-(-3+6)=18$ である。

コメント

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題で，丁寧な場合分けがすべてです。

問　題

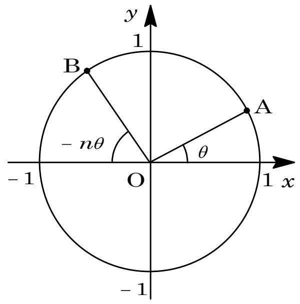
xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3) $n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ。　[2003]

解答例



(1) A と B が 1 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta$，2 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2\pi$ であり，同様に考えると，k 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2(k-1)\pi$，すなわち $2(k-1)\pi=(n+1)\theta-\pi$ ……①である。

ここで，$0<\theta\leqq 2\pi$ より，

$$-\pi<(n+1)\theta-\pi\leqq(2n+1)\pi$$

①から，$-\pi<2(k-1)\pi\leqq(2n+1)\pi$，$\dfrac{1}{2}<k\leqq n+\dfrac{3}{2}$

よって，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ より，A と B は $n+1$ 回出会う。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ なので，①より，

$$2(k-1)\pi=(n+1)\frac{\pi}{2}-\pi,\ \ n=4(k-1)+1$$

よって，$n\geqq 2$ から，n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

(3) $0<\theta\leqq 2\pi$ として，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(\cos(\pi-7\theta),\ \sin(\pi-7\theta))$ とおくことができ，条件より，$\cos\theta<\cos(\pi-7\theta)$ である。

$$\cos\theta<-\cos 7\theta,\ \ \cos 7\theta+\cos\theta<0,\ \ 2\cos 4\theta\cos 3\theta<0\ \cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$\cos 4\theta=0$ の解は，

$$\theta=\frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$$

$\cos 3\theta=0$ の解は，

$$\theta=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

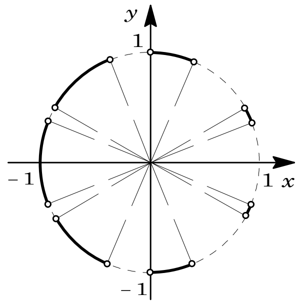
さて，$\theta = 2\pi$ は②を満たさないことから，不等式②の解は，

$$\frac{1}{8}\pi < \theta < \frac{1}{6}\pi,\ \frac{3}{8}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{8}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{7}{8}\pi < \theta < \frac{9}{8}\pi,\ \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{8}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{13}{8}\pi$$

$$\frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{15}{8}\pi$$

以上より，求める点 A の範囲を図示すると，右図の実線部となる。



コメント

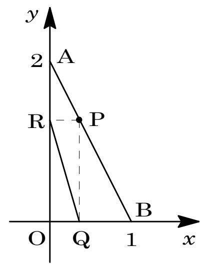
(3)は不等式②を解き図示するだけですが，たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが，あまりにも繁雑すぎるため，弧度法に切り換えました。

問　題

座標平面上に点A$(0,\ 2)$と点B$(1,\ 0)$があり，線分AB上の点Pからx軸，y軸におろした垂線の足をそれぞれQ，Rとする。点PがAからBまで動くとき，線分QRの通過する部分の面積を求めよ。　[2002]

解答例

直線ABの方程式は，$y=-2x+2$より，$\mathrm{P}(t,\ -2t+2)$とおく。ただし，$0\leqq t\leqq 1$である。このとき，$\mathrm{Q}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ -2t+2)$となる。



さて，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(t,\ 2t-2)$より，直線RQは法線ベクトルを$(2t-2,\ -t)$とすることができ，その方程式は，

$$(2t-2)(x-t)-ty=0\cdots\cdots\cdots①$$

$0\leqq t\leqq 1$のとき，①が通過する領域は，①をtに関する方程式としてみたとき，$0\leqq t\leqq 1$に少なくとも1つの実数解をもつ$(x,\ y)$の条件として求められる。

①より，$2t^2-(2x-y+2)t+2x=0\cdots\cdots\cdots②$

②の左辺を$f(t)$とおくと，$f(0)=2x$，$f(1)=2-2x+y-2+2x=y$

ここで，線分QRの通過領域は△OABの内部または周上なので，

$$x\geqq 0,\ \ y\geqq 0,\ \ y\leqq -2x+2\cdots\cdots\cdots③$$

よって，$f(0)\geqq 0$，$f(1)\geqq 0$となる。

そこで，$f(t)=2\left(t-\dfrac{2x-y+2}{4}\right)^2-\dfrac{(2x-y+2)^2}{8}+2x$から，求める条件は，

$$0\leqq\frac{2x-y+2}{4}\leqq 1\cdots\cdots④,\ \ -\frac{(2x-y+2)^2}{8}+2x\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より，$0\leqq 2x-y+2\leqq 4$，$2x-2\leqq y\leqq 2x+2\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤より，$(2x-y+2)^2-16x\geqq 0$，$(2x-y+2+4\sqrt{x})(2x-y+2-4\sqrt{x})\geqq 0$

⑥より$2x-y+2+4\sqrt{x}\geqq 0$なので，$2x-y+2-4\sqrt{x}\geqq 0$

$$y\leqq 2x-4\sqrt{x}+2\cdots\cdots\cdots⑦$$

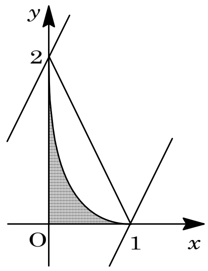
ここで，⑦の境界線$y=2x-4\sqrt{x}+2$に対して，

$$y'=2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$$

$$y''=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{x\sqrt{x}}>0$$

x	0	$\cdots$	1
y'	×	$-$	0
y	2	↘	0

以上より，③⑥⑦を満たす領域は，右図の網点部になるので，この面積を S とすると，



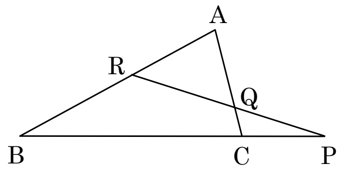
$$S=\int_0^1(2x-4\sqrt{x}+2)\,dx=\left[x^2-4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

コメント

直線の通過領域を求める頻出題です。実数解条件を用いて解いています。

問　題

三角形 ABC において，$AB=BC=2$，$CA=1$ とする。$0\leqq x\leqq 1$ を満たす x に対して，辺 BC の延長上に点 P を，辺 CA 上に点 Q を，それぞれ $CP=AQ=x$ となるようにとる。さらに，直線 PQ と辺 AB の交点を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

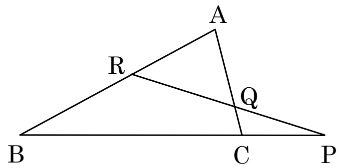


(1) AR を x の関数として表せ。

(2) (1)の関数を $f(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。 [2014]

解答例

(1) $\triangle ABC$ と直線 PR について，メネラウスの定理を適用すると，



$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

ここで，$AB=BC=2$，$CA=1$，$CP=AQ=x$ より，

$0<x<1$ のとき，

$$\frac{y}{2-y}\cdot\frac{2+x}{x}\cdot\frac{1-x}{x}=1,\quad \frac{2-y}{y}=\frac{2+x}{x}\cdot\frac{1-x}{x},\quad \frac{2}{y}=\frac{2-x-x^2}{x^2}+1=\frac{2-x}{x^2}$$

よって，$y=\dfrac{2x^2}{2-x}$ となり，この式は $x=0,\ 1$ のときも満たしている。

(2) (1)より，$f(x)=\dfrac{2x^2}{2-x}=-2x-4-\dfrac{8}{x-2}$ より，

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(-2x-4-\frac{8}{x-2}\right)dx=\Big[-x^2-4x-8\log|x-2|\Big]_0^1$$
$$=-1-4-8(-\log 2)=8\log 2-5$$

コメント

メネラウスの定理の適用問題であることは，図を見た瞬間にわかると思われます。もちろんベクトルを利用しても構いませんが。

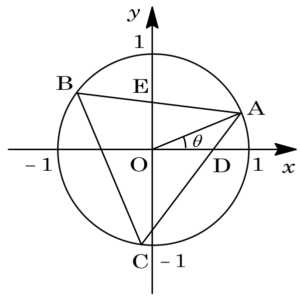
問　題

原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。 [2001]

解答例

正三角形 ABC に対して $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，対称性から $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ の場合だけを考えても一般性を失わない。

(i) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき



△OAD において，$\angle ADO = \pi - \left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{6}\pi - \theta$

$$\frac{OD}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)}$$

$$OD = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$$

△OAE において，$\angle OEA = \pi - \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{3}\pi + \theta$ より，

$$\frac{OE}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \theta\right)},\quad OE = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$$

△ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

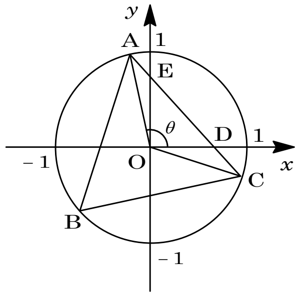
$$S = \frac{1}{2}OD\sin\theta + \frac{1}{2}OE\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta}{\sqrt{3}\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}\cos^2\theta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin 2\theta + 1}{2\sin 2\theta + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4(2\sin 2\theta + \sqrt{3})}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので，$0 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ となる。

よって，$\sin 2\theta = 1$ のとき最大値 $S = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2(2+\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\sin 2\theta = 0$ のとき最小値 $S = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ をとる。



(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき

△OCD において，$\angle \text{ODC} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right) = \dfrac{\pi}{6} + \theta$

$$\frac{\text{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)}$$

$$\text{OD} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$$

△OAE において，$\angle \text{OEA} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{3}\pi - \theta$ より，

$$\frac{\text{OE}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta\right)},\quad \text{OE} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$$

△ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\text{OD}\cdot\text{OE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 4\sin\theta\cos\theta} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta}$$

$$= -\frac{1}{4\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より $\dfrac{4}{3}\pi \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ なので，$-1 \leqq \sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

よって，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $S = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$ のとき最小値 $S = \dfrac{1}{4}$ をとる。

(i)(ii)より, S は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

コメント

よくありそうな問題です。内容的には正弦定理の応用ですが，意外に奥が深いという感じがします。

問　題

xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ -1)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分 BC 上の点を $\mathrm{P}(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし，球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1，球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 球面 K の方程式を求めよ。

(2) S_1 を s と t の式で表せ。

(3) 点 P は線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。　[2018]

解答例

(1) 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ -1)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ -3)$，および線分 BC 上の点 $\mathrm{P}(0,\ 3,\ s)$ $(-3\leqq s\leqq -1)$ に対して，線分 AP を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点 Q の座標は，$\mathrm{Q}(2-2t,\ 3t,\ st-t+1)$ となる。

このとき，点 Q を中心とする半径 3 の球面 K の方程式は，

$$\{x-(2-2t)\}^2+(y-3t)^2+\{z-(st-t+1)\}^2=9\cdots\cdots\cdots①$$

(2) K と xy 平面が交わってできる円は，①に $z=0$ を代入して，

$$\{x-(2-2t)\}^2+(y-3t)^2=9-(st-t+1)^2\ \ \text{かつ}\ \ z=0$$

すると，その面積 S_1 は，$S_1=\pi\{9-(st-t+1)^2\}\cdots\cdots\cdots②$

(3) K と yz 平面が交わってできる円は，①に $x=0$ を代入して，

$$(y-3t)^2+\{z-(st-t+1)\}^2=9-(2-2t)^2\ \ \text{かつ}\ \ x=0$$

すると，その面積 S_2 は，$S_2=\pi\{9-(2-2t)^2\}\cdots\cdots\cdots③$

さて，$S=S_1+S_2$ とおくと，②③より，

$$S=\pi\{9-(st-t+1)^2+9-(2-2t)^2\}=\pi\{18-(st-t+1)^2-(2-2t)^2\}$$

ここで，点 P を線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動かすという条件を，s を $s=s_0$ $(-3\leqq s_0\leqq -1)$ と固定し，t を $0<t<1$ で動かすと考えて，

$$S=\pi\{18-f(t)\},\ f(t)=(s_0t-t+1)^2+(2-2t)^2$$

すると，S が最大値をとるとき，$f(t)$ は最小となることより，

$$\begin{aligned}f(t)&=(s_0-1)^2t^2+2(s_0-1)t+1+4t^2-8t+4\\&=\{(s_0-1)^2+4\}t^2+2(s_0-5)t+5\\&=\{(s_0-1)^2+4\}\Big\{t+\frac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}\Big\}^2-\frac{(s_0-5)^2}{(s_0-1)^2+4}+5\end{aligned}$$

ここで，$-3 \leqq s_0 \leqq -1$ より，$-\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4} > 0$ となり，

$$-\frac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}-1=\frac{-{s_0}^2+s_0}{(s_0-1)^2+4}=\frac{-s_0(s_0-1)}{(s_0-1)^2+4}<0$$

よって，$0 < -\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4} < 1$ となり，$f(t)$ は $t=-\dfrac{s_0-5}{(s_0-1)^2+4}$ で最小となる。

すなわち，S が最大値をとるのは，$t=-\dfrac{s-5}{(s-1)^2+4}$ のときである。

(4)　点 Q が線分 AP の中点，すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のとき S は最大値をとるので，

$$\frac{1}{2}=-\frac{s-5}{(s-1)^2+4},\quad s^2-2s+5=-2s+10$$

すると，$s^2=5$ となり，$-3 \leqq s \leqq -1$ から，$s=-\sqrt{5}$ となる。

コメント

空間図形を題材とした複雑そうな問題設定ですが，内容は基本的です。最もエネルギーが必要なのは，平方完成をして軸の位置のチェックの箇所ですので。

問　題

座標空間内に，原点O(0, 0, 0)を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点A(0, 0, 1)，B(0, 0, −1)がある。O と異なる点P(s, t, 0)に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点をR(u, v, 0)とする。このとき以下の問いに答えよ。

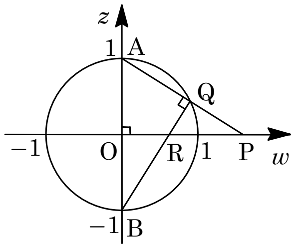
(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を u, v を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で，原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。　[2016]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を w 軸の正の向きとし，球面 S を wz 平面で切断したときの切り口を考える。



(i) 点 P が球面 S の外部にあるとき

△OAP と△ORB は相似なので，

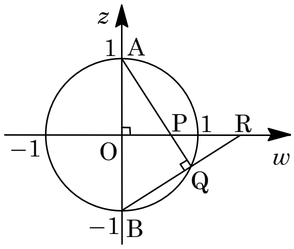
$$\mathrm{OA} : \mathrm{OR} = \mathrm{OP} : \mathrm{OB}$$

よって，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = 1$ である。

(ii) 点 P が球面 S 上にあるとき

点 Q，点 R は点 P と一致するので，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR} = 1$

(iii) 点 P が球面 S の内部にあるとき



(i)と同様に，△OAP と△ORB は相似なので，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR} = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = 1$$

(2) P(s, t, 0)，R(u, v, 0)より，$\mathrm{OP} = \sqrt{s^2+t^2}$，$\mathrm{OR} = \sqrt{u^2+v^2}$ となり，(1)から，

$$\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{u^2+v^2} = 1,\ (s^2+t^2)(u^2+v^2) = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は同じ向きなので，k を正の定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OR}},\ (s,\ t,\ 0) = k(u,\ v,\ 0) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$(k^2u^2+k^2v^2)(u^2+v^2) = 1$ となり，$k = \dfrac{1}{u^2+v^2}$ から，

$$s = \frac{u}{u^2+v^2} \cdots\cdots\cdots ③,\ t = \frac{v}{u^2+v^2} \cdots\cdots\cdots ④$$

(3) xy 平面内の原点を通らない直線 l を，$ax+by=1$，$z=0$　$(a^2+b^2 \neq 0)$ とする。

さて，点 P が l 上にあるので，$as+bt=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

③④を⑤に代入すると，$\dfrac{au}{u^2+v^2}+\dfrac{bv}{u^2+v^2}=1$となり，

$$u^2+v^2-au-bv=0\,,\ \left(u-\frac{a}{2}\right)^2+\left(v-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

よって，点 R は xy 平面内の，中心$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2},\ 0\right)$で半径$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$の円周上にある。

コメント

球面と直線の交わりに関する問題ですが，断面をみると有名な構図になっています。(1)の誘導から，数式的に処理するのではなく，図形的に考えることが示唆されています。しかし，このようなときは，位置関係に注意しなくてはいけません。

問　題

座標空間内に 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$ の内積が 0 になるような点 $P(x,\ y,\ z)$ の集合を S とする。3 点 A, B, C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r を求めよ。

(2)　原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。

(3)　(1)で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ。

(4)　(1)で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を l とする。球面 S と直線 l のすべての共有点について，その座標を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ に対し，線分 BC の中点 M は $M\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ となり，

$$\frac{\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}}{2}=\overrightarrow{MP},\quad \overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{MP}$$

また，$A(1,\ 0,\ 0)$ に対し，条件より $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP})=0$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MP}=0$

すると，$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{MP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{MP}$ となり，点 P は 2 点 A, M を直径の両端とする球面を描く。

よって，その中心 Q は線分 AM の中点より，$Q\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ であり，半径 r は，

$$r=AQ=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

(2)　$OQ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ より，球面 S は原点 O を通る。

これより，O から最も遠い距離にある S 上の点を R とすると，$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OQ}$ より，$R\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ である。

(3)　(1)より，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ と表せる。

すると，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ から，点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面 α 上にある。

(4)　(1)より，$S:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$ ………①

また，平面 α に垂直な直線の方向ベクトルを $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=(a,\ b,\ c)\cdot(-1,\ 1,\ 0)=0$，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=(a,\ b,\ c)\cdot(-1,\ 0,\ 1)=0$

すると，$a=b$ かつ $a=c$ より，$\vec{u}=a(1,\ 1,\ 1)$ となり，直線 l は，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)+t(1,\ 1,\ 1)\ （t\text{ は実数}）\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t^2+t^2+t^2=\dfrac{3}{8}$ から $t^2=\dfrac{1}{8}$ となり，$t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

よって，S と l の共有点の座標は，複号同順で，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4}\right)$$

コメント

空間図形の問題です。なお，平面 α の方程式は $x+y+z=1$ ですので，これを利用すると，後半の記述量を圧縮できます。

問　題

座標空間内の 8 点$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$を頂点とする立方体を考える。$0<t<3$のとき，3 点$(t,\ 0,\ 0)$，$(0,\ t,\ 0)$，$(0,\ 0,\ t)$を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を$f(t)$とし，$f(0)=f(3)=0$とする。関数$f(t)$について，次の問いに答えよ。

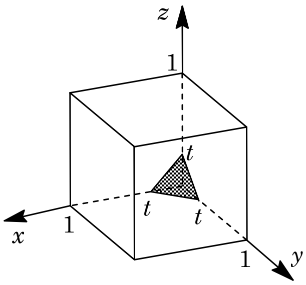
(1)　$0\leqq t\leqq 3$ののとき，$f(t)$をtの式で表せ。

(2)　関数$f(t)$の$0\leqq t\leqq 3$における最大値を求めよ。

(3)　定積分$\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$の値を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　まず，1 辺の長さが 1 の立方体に対して，$0<t<3$において，3 点$\mathrm{A}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ t)$を通る平面αで切断したとき，切り口は右図の網点部にようになり，その面積を$f(t)$とすると，

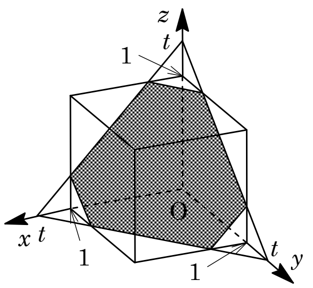


(i)　$0<t\leqq 1$のとき

切り口は 1 辺の長さが$\sqrt{2}t$の正三角形 ABC なので，

$$f(t)=\frac{1}{2}(\sqrt{2}t)^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

(ii)　$1<t<2$のとき



切り口は六角形となる。また，平面α上の立方体の外部の 3 つの正三角形は，正三角形 ABC と相似になり，その相似比は$(t-1):t$から，

$$f(t)=\left\{1-3\left(\frac{t-1}{t}\right)^2\right\}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\{t^2-3(t-1)^2\}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(2t^2-6t+3)$$

(iii)　$2\leqq t<3$のとき

切り口は正三角形となり，その面積は(i)の$f(t)$と$t=\dfrac{3}{2}$について対称になるので，

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2$$

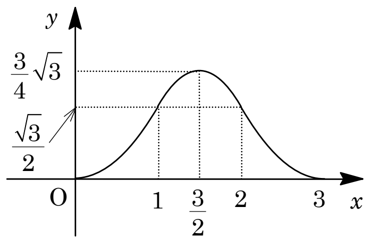
(i)～(iii)より，$f(0)=f(3)=0$も合わせると，$f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2\ \ (0\leqq t\leqq 1)$，

$$f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(2t^2-6t+3)\ \ (1<t<2),\quad f(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2\ \ (2\leqq t\leqq 3)$$

(2)　(1)から，$1<t<2$ のとき，

$$f(t)=-\sqrt{3}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

すると，$0\leqq t\leqq 3$ において，$y=f(t)$ のグラフをかくと，右図のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大となり，最大値は $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ である。



(3)　$I=\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 t^2dt-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^2(2t^2-6t+3)\,dt+\frac{\sqrt{3}}{2}\int_2^3(3-t)^2dt$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{2}{3}t^3-3t^2+3t\Big]_1^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big[\frac{(3-t)^3}{3}\Big]_2^3$$

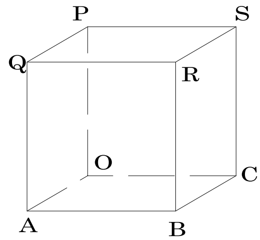
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 7-3\cdot 3+3\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$$

コメント

まったく同じ問題が繰り返し出題されている超有名問題です。また，3 点 A, B, C を通る平面の方程式は $x+y+z=t$ より，この式を用いて立方体の辺との交点の座標を求めても構いません。なお，(2)と(3)の設問は付録扱いでしょう。

問　題

辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき, 次の問いに答えよ。



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を 3 つのベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ で表せ。ただし, $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とする。

(2) 5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3) 五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4) 辺 BR を $3:1$ の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし, 五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。 [1999]

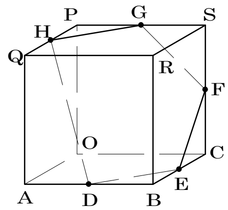
解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおく。

$$\vec{d}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots①,\quad \vec{f}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdots\cdots②,\quad \vec{g}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots③$$

②③より, $\frac{3}{2}\vec{c}=2\vec{f}-\vec{g}$, $\vec{c}=\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots④$

①④より, $\vec{a}=\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{c}=\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑤$



よって, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}+\frac{1}{2}\left(\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\right)$

$$=\frac{1}{2}\vec{d}+\vec{f}-\frac{1}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑥$$

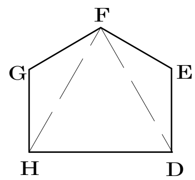
(2) ⑥より $\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=1$ なので, 点 E は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

また③④より, $\vec{p}=\vec{g}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}\right)=-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{4}{3}\vec{g}$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{4}{3}\vec{g}+\frac{1}{2}\left(\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\right)=\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{f}+\frac{3}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑦より $\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}=1$ なので, 点 H は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

(3) 五角形 DEFGH において, $\mathrm{DE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FG}=\mathrm{GH}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ となり, また $\mathrm{AH}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ より $\mathrm{HD}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+2^2}=2\sqrt{6}$, さらに $\mathrm{FH}=\mathrm{FD}=\mathrm{HD}$ なので,

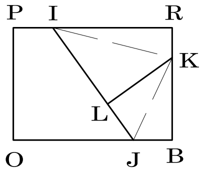


$$\triangle\mathrm{FGH}=\triangle\mathrm{FDE}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$$

$$\triangle\mathrm{FHD}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}\cdot\sin60^\circ=6\sqrt{3}$$

五角形 DEFGH の面積は, $2\sqrt{3}\times2+6\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

(4)　点 K から五角形 DEFGH に下ろした垂線の足を L とすると，対称性より L は長方形 OPRB 上にある。また長方形 OPRB と線分 GH，DE との交点をそれぞれ I, J とおくと,



$$\mathrm{IR}=\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{2}=3\sqrt{2},\quad \mathrm{JB}=\frac{1}{4}\cdot 4\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3=5\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{IJ}\cdot\mathrm{KL}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DH}\cdot\mathrm{KL}=\sqrt{6}\mathrm{KL}$$

よって，$\sqrt{6}\,\mathrm{KL}=5\sqrt{2}$，$\mathrm{KL}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ より，五角錐の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{50}{3}$

コメント

(4)では, OR が五角形 DEFGH に垂直であることを用いると計算量が減ります。

問　題

p は素数とする。正の整数 n に対し，p^d が n の約数となる整数 d $(d \geqq 0)$ のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$p=3$，$n=3^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(2)　$p=5$，$n=5^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(3)　m が正の整数で $n=p^m!$ のとき $f(n)$ を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　3^d が $3^2!=9!=1\times2\times3\times\cdots\times9$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(3^2!)$ は，$3^2!$ の素因数 3 の個数より，

$$f(3^2!)=f(9!)=\frac{9}{3}+\frac{9}{3^2}=3+1=4$$

(2)　5^d が $5^2!=25!=1\times2\times3\times\cdots\times25$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(5^2!)$ は，$5^2!$ の素因数 5 の個数より，

$$f(5^2!)=f(25!)=\frac{25}{5}+\frac{25}{5^2}=5+1=6$$

(3)　p を素数，m を正の整数として，p^d が $p^m!$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(p^m!)$ は，$p^m!$ の素因数 p の個数より，

$$f(p^m!)=\frac{p^m}{p}+\frac{p^m}{p^2}+\cdots+\frac{p^m}{p^m}=p^{m-1}+p^{m-2}+\cdots+1=\frac{p^m-1}{p-1}$$

コメント

自然数の積と素因数の個数についての問題です。教科書にも触れられている基本事項の 1 つです。

問　題

$f(x)=4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x)=f(x),\ f_{n+1}(x)=f_n(f(x))\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f_2(x)=0$ を解け。

(2) $0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ とする。c が $0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ。

(3) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $f(x)=4x(1-x)$ に対して，条件より，

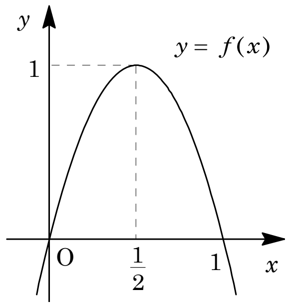
$$f_2(x)=f_1(f(x))=f(f(x))=4f(x)(1-f(x))$$

すると，$f_2(x)=0$ の解は，

(i) $f(x)=0$ のとき　$x=0,\ 1$

(ii) $f(x)=1$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より，$x=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$



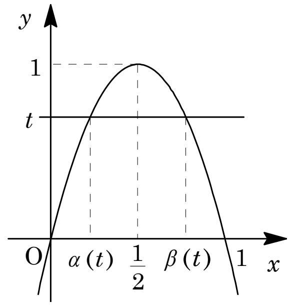
(2) $0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対して，$f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ $(\alpha(t)<\beta(t))$ とすると，

$$0\leqq\alpha(t)<\frac{1}{2}<\beta(t)\leqq 1$$

さて，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))$ より，$0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たす c に対して，

$$f_{n+1}(\alpha(c))=f_n(f(\alpha(c)))=f_n(c)=0$$
$$f_{n+1}(\beta(c))=f_n(f(\beta(c)))=f_n(c)=0$$

よって，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解である。



(3) まず，$x=0,\ 1$ が $f_n(x)=0$ の解であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき　$f_1(x)=4x(1-x)$ より，$x=0,\ 1$ は $f_1(x)=0$ の解である。

(ii) $n=k$ のとき　$x=0,\ 1$ が $f_k(x)=0$ の解であると仮定すると，

$$f_{k+1}(0)=f_k(f(0))=f_k(0)=0,\ f_{k+1}(1)=f_k(f(1))=f_k(0)=0$$

$x=0,\ 1$ は $f_{k+1}(x)=0$ の解である。

(i)(ii)より，$x=0,\ 1$ は，ともに $f_n(x)=0$ の解である。

さて，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，$f_n(x)=0$ の異なる S_n 個の解を，

$$0=c_1<c_2<c_3<\cdots<c_{S_n-1}<c_{S_n}=1$$

すると，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))=0$ の解は，$f(x)=c_1$，c_2，c_3，$\cdots$，c_{S_n-1}，c_{S_n} より求めることができる。

(a)　$f(x)=c_1$，c_2，c_3，$\cdots$，c_{S_n-1} のとき

(2)より，$\alpha(c_i)$，$\beta(c_i)$　$(1 \leqq i \leqq S_n-1)$ は，$f_{n+1}(x)=0$ の異なる解となり，その個数は $2(S_n-1)$ である。ただし，$0 \leqq \alpha(c_i)<\dfrac{1}{2}<\beta(c_i) \leqq 1$ である。

(b)　$f(x)=c_{S_n}$ のとき

$f(x)=1$ より $x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1}{2}$ が $f_{n+1}(x)=0$ の解である。

(a)(b)より，$f_n(x)=0$ の異なる解の個数 S_n について，$S_1=2$ で，

$$S_{n+1}=2(S_n-1)+1,\quad S_{n+1}=2S_n-1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を $S_{n+1}-1=2(S_n-1)$ と変形すると，$S_n-1=(S_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ となり，

$$S_n=2^{n-1}+1$$

コメント

合成関数の解の個数を題材としたおもしろい問題です。(1)と(2)が秀逸な誘導となっています。$n=1,\ 2,\ 3$ と具体的に考えて方針を立てましたが，解答例の記述には，かなり難航しました。

問　題

数列$\{a_n\}$は次のように定められている。

$$a_1=1,\ a_{n+1}(a_n+1)=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) ${a_{n+1}}^2+a_{n+1}-1$をa_nを用いて表せ。

(2) 数列$\{b_n\}$を$b_n={a_n}^2+a_n-1$で定める。このとき，b_{2n-1}は正，b_{2n}は負であることを示せ。

(3) 数列$\{a_n\}$について，不等式$a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a_{2n-1}$が成り立つことを示せ。

[2004]

解答例

(1) $a_{n+1}(a_n+1)=1$から，$a_n+1\neq 0$なので，$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n+1}$ ………①

すると，${a_{n+1}}^2+a_{n+1}-1=\dfrac{1}{(a_n+1)^2}+\dfrac{1}{a_n+1}-1=\dfrac{1+(a_n+1)-(a_n+1)^2}{(a_n+1)^2}$

$$=\frac{1-a_n-{a_n}^2}{(a_n+1)^2}=-\frac{{a_n}^2+a_n-1}{(a_n+1)^2}$$

(2) $b_n={a_n}^2+a_n-1$とおくと，(1)より，$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{(a_n+1)^2}$ ………②

ここで，$b_{2n-1}>0$であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$のとき　$b_1={a_1}^2+a_1-1=1>0$

(ii) $n=k$のとき　$b_{2k-1}>0$と仮定する。

②より，$b_{2k}=-\dfrac{b_{2k-1}}{(a_{2k-1}+1)^2}<0$，$b_{2k+1}=-\dfrac{b_{2k}}{(a_{2k}+1)^2}>0$

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$b_{2n-1}>0$である。

さらに，②から，$b_{2n}=-\dfrac{b_{2n-1}}{(a_{2n-1}+1)^2}<0$となる。

(3) (2)より，$b_{2n-1}={a_{2n-1}}^2+a_{2n-1}-1>0$

①より，帰納的に$a_n>0$なので，$a_{2n-1}>0$から，$a_{2n-1}>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

また，$b_{2n}={a_{2n}}^2+a_{2n}-1<0$で，$a_{2n}>0$から，$0<a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

以上より，$a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a_{2n-1}$

コメント

誘導が細かく付いていますので, (3)の結論がスムーズに導けます。

問　題

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ は，$x=1,\ -1,\ -2$ で整数値 $f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$ をとるとする。

(1) $a,\ b,\ c$ を $r,\ s,\ t$ の式で表せ。

(2) すべての整数 n について，$f(n)$ は整数になることを示せ。 [2003]

解答例

(1) $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ に対して，$f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$ より，

$$a+b+c=r\cdots\cdots①,\quad -a+b-c=s\cdots\cdots②,\quad -8a+4b-2c=t\cdots\cdots③$$

①②より，$2b=r+s$，$b=\dfrac{r+s}{2}\cdots\cdots\cdots④$

①③より $-6a+6b=2r+t$ となり，④を代入して，

$$6a=6\cdot\frac{r+s}{2}-2r-t=r+3s-t,\quad a=\frac{r+3s-t}{6}\cdots\cdots\cdots⑤$$

①に④⑤を代入すると，$c=r-\dfrac{r+3s-t}{6}-\dfrac{r+s}{2}=\dfrac{2r-6s+t}{6}$

(2) (1)より，
$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{r+3s-t}{6}n^3+\frac{r+s}{2}n^2+\frac{2r-6s+t}{6}n\\&=\frac{r}{6}(n^3+3n^2+2n)+\frac{s}{2}(n^3+n^2-2n)-\frac{t}{6}(n^3-n)\\&=\frac{r}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{s}{2}(n-1)n(n+2)-\frac{t}{6}(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

ここで，$n(n+1)(n+2)$ および $(n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積なので 6 の倍数となる。また，$(n-1)n$ は連続 2 整数の積なので 2 の倍数である。

よって，すべての整数 n について，$f(n)$ は整数になる。

コメント

(1)の誘導に従うと，(2)の結論までストレートに進むことができます。整数を題材にした頻出問題の 1 つです。

問　題

n を自然数とする。$f(x)$ は 2 次関数で，曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$ を通るとする。

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) この関数 $f(x)$ について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ の値を n を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

解答例

(1) $f(0)=1$ より，$f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと，

$f(-1)=0$ から，$a-b+1=0$ ………①

$f(n)=n$ から，$an^2+bn+1=n$ ………②

①より $b=a+1$，②に代入して $an^2+(a+1)n+1=n$，$a(n^2+n)=-1$

$$a=-\frac{1}{n^2+n},\ b=-\frac{1}{n^2+n}+1=\frac{n^2+n-1}{n^2+n}$$

よって，$f(x)=-\dfrac{1}{n^2+n}x^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}x+1$

(2) (1)より，$f(k)=-\dfrac{1}{n^2+n}k^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}k+1$ なので，

$$S=\sum_{k=0}^{n}f(k)=-\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n^2+n-1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$$
$$=-\frac{1}{6}(2n+1)+\frac{1}{2}(n^2+n-1)+n+1=\frac{1}{6}(n+2)(3n+1)$$

(3) $(n+2)(3n+1)=(n+2)(2n+n+1)=2n(n+2)+(n+1)(n+2)$ と変形すると，$2n(n+2)$ は偶数，さらに $n+1$，$n+2$ のいずれかは偶数なので，$(n+1)(n+2)$ も偶数となり，$(n+2)(3n+1)$ は偶数となる。

また，$(n+2)(3n+1)$ が 3 の倍数となる条件は，$3n+1$ が 3 の倍数でないので，$n+2$ が 3 の倍数となることである。

よって，S の値が整数であるためには，$(n+2)(3n+1)$ が 6 の倍数，すなわち $n+2$ が 3 の倍数であることことが必要十分である。

コメント

(2)の結果から，(3)では $(n+2)(3n+1)$ が偶数になることをいえば，題意の証明ができます。n を偶奇で分けてもよいのですが，上の解では式変形をしてみました。

問　題

$n,\ k$ を自然数とする。等式 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$ ……①を満たす自然数 x_1, $x_2,\cdots,x_k$ の組の個数を $a(n,\ k)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，例えば $(x_1,\ x_2)=(1,\ 2)$ と $(x_1,\ x_2)=(2,\ 1)$ とは別の組と考える。

(1) 式①における x_k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 関係式 $a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$ が成り立つことを示せ。

(3) $a(n,\ 1)$, $a(n,\ 2)$, $a(n,\ 3)$, $a(n,\ 4)$ を求め，$a(n,\ k)$ を推定せよ。

(4) (3)において，$a(1,\ k)$, $a(2,\ k)$, $\cdots$, $a(n,\ k)$ の推定が正しいとしたとき，$a(n,\ k+1)$ の推定が正しいことを証明せよ。 [1999]

解答例

(1) $x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$ ……①から, $k\geqq 2$ で,

$$x_k=n+k-1-(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1})\ \cdots\cdots\text{②}$$

$x_i\geqq 1\ \ (1\leqq i\leqq k)$ なので, ②より $1\leqq x_k\leqq n+k-1-(k-1)=n$

$k=1$ のときは $x_1=n$ となるので, $k\geqq 2$ の場合と合わせて $1\leqq x_k\leqq n$ となる。

(2) $a(n,\ k+1)$ は $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n+k$ を満たす自然数解の個数を表す。

ここで, (1)より $1\leqq x_{k+1}\leqq n$ なので，$x_{k+1}=n-j+1\ \ (1\leqq j\leqq n)$ のときは,

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+(n-j+1)=n+k,\ \ x_1+x_2+\cdots+x_k=j+k-1$$

となり，この式を満たす自然数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$ の個数は $a(j,\ k)$ である。

したがって，$a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$

(3) まず，$a(n,\ 1)$ は①より $x_1=n$ の解の個数より，$a(n,\ 1)=1$

(2)より，$a(n,\ 2)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 1)=\sum_{j=1}^{n}1=n$

$$a(n,\ 3)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 2)=\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$a(n,\ 4)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 3)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j(j+1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

以上より，$a(n,\ k)=\dfrac{n(n+1)\cdots\cdots(n+k-2)}{(k-1)!}=\dfrac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!}$ と推測できる。

(4)　$1 \leqq j \leqq n$ に対して，$a(j,\ k) = \dfrac{j(j+1)\cdots\cdots(j+k-2)}{(k-1)!}$ と仮定したとき，

$$a(n,\ k+1) = \sum_{j=1}^{n} a(j,\ k) = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k-2)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\left\{j(j+1)\cdots(j+k-2)(j+k-1)-(j-1)j\cdots(j+k-2)\right\}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdots(n+k-2)(n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

コメント

おもしろい誘導のついた問題です。しかし，①の自然数解の個数は○を $n+k-1$ 個並べ，その間の $n+k-2$ か所に $k-1$ 個の仕切りを 1 つずつ割り込ませるという有名な方法で直接的に求まってしまいます。

問　題

図 1 のような経路の図があり，次のようなゲームを考える。最初はⒶから出発し，1 回の操作で，1 個のさいころを投げて，出た目の数字が矢印にあればその方向に進み，なければその場にとどまる。この操作を繰り返し，Ⓓに到達したらゲームは終了する。

例えばⒷにいるときは，1, 3, 5 の目が出ればⒸへ進み，4 の目が出ればⒹへ進み，2, 6 の目が出ればその場にとどまる。n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

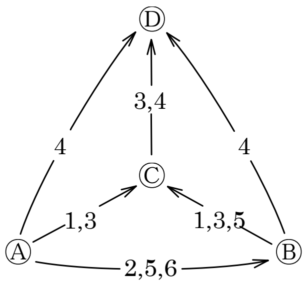


図1：経路の図

(1) ちょうど n 回の操作を行った後にⒷにいる確率を n の式で表せ。

(2) ちょうど n 回の操作を行った後にⒸにいる確率を n の式で表せ。

(3) ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。　[2018]

解答例

(1) n 回の操作の後，Ⓐ, Ⓑ, Ⓒにいる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とおくと，条件より，$a_n=0\ (n\geqq 1)$ である。

また，$b_1=\dfrac{1}{2}$ のもとで，条件より，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{1}{3}b_n$$

よって，$b_n=b_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ ………①

(2) $c_1=\dfrac{1}{3}$ のもとで，条件より，

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n=\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n$$

①を代入すると，$c_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}c_n$ ………②

ここで，②を満たす 1 つの数列を，α を定数として，$c_n=\alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ とおくと，

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

すると，$\dfrac{1}{3}\alpha=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\alpha$ から $\alpha=-\dfrac{3}{4}$ となるので，

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②－③より，$c_{n+1}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}=\dfrac{2}{3}\left\{c_n+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ となり，

$$c_n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left\{c_1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right\}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$c_n=\dfrac{13}{12}\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^{n-1}-\dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{1}{3}\Big)^{n-1}$

(3)　Ⓓに到達したらゲームは終了するので，その確率をP_nとおくと，

(i)　$n=1$のとき　Ⓐ→Ⓓの場合から，$P_1=\dfrac{1}{6}$

(ii)　$n\geqq 2$のとき　$a_n=0$から，Ⓑ→ⒹまたはⒸ→Ⓓの場合より，

$$P_m=\frac{1}{6}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-2}+\frac{1}{3}\Big\{\frac{13}{12}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-2}-\frac{3}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-2}\Big\}$$
$$=\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1}+\frac{13}{24}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1}-\frac{3}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1}=\frac{13}{24}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1}-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1}$$

コメント

確率と漸化式の標準的な問題です。与えられた図から，立式は容易です。なお，漸化式②の解法については，「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　A, B, C, D, E, F, G, H の 8 人から 7 人を選び, さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける。A, B の 2 人がともに選ばれて, かつ同じ組になる確率を求めよ。

[2017]

解答例

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は, 2 人ずつの 3 組を区別しないことより,

$$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{3!}=\frac{15\times6}{6}=15\ （通り）$$

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は, 2 人ずつの 2 組については区別しないことより,

$$\frac{{}_7C_2\times{}_5C_2}{2!}=\frac{21\times10}{2}=105\ （通り）$$

(3)　A～H の 8 人から 7 人を選び, さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分けるとき, 組を区別して, Ⅰ組(2 人), Ⅱ組(2 人), Ⅲ組(3 人)とすると, その方法は,

$${}_8C_7\times{}_7C_2\times{}_5C_2=8\times21\times10\ （通り）$$

その中で A, B の 2 人がともに選ばれて, かつ同じ組になるのは, A, B 以外の 5 人が選ばれる方法が ${}_6C_5$ 通りであることに注意すると,

(i)　Ⅰ組で同じ組となるとき　${}_6C_5\times{}_5C_2=6\times10=60$ （通り）

(ii)　Ⅱ組で同じ組となるとき　${}_6C_5\times{}_5C_2=6\times10=60$ （通り）

(iii)　Ⅲ組で同じ組となるとき　${}_6C_5\times{}_5C_1\times{}_4C_2=6\times5\times6=180$ （通り）

(i)～(iii)より, $60+60+180=300$ 通りとなる。

以上より, 求める確率は, $\dfrac{300}{8\times21\times10}=\dfrac{5}{28}$ である。

コメント

有名な組分け問題です。ただ, (3)では, 同じ人数の組も区別するという立場で確率を計算しています。もちろん(2)と同様でも構いませんが。

問　題

n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4) 引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち，2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ。 [2015]

解答例

(1) 番号 k のカードは k 枚なので，用意したカードを N 枚とすると，

$$N=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) N 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_N\mathrm{C}_2$ 通りが同様に確からしく，

$$\begin{aligned}{}_N\mathrm{C}_2&=\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}\\&=\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n-2)=\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

このとき，引いた 2 枚のカードの番号がともに k である場合は，$k\geqq 2$ では，${}_k\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}k(k-1)$ 通りより，求める確率は，

$$\frac{\frac{1}{2}k(k-1)}{\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

なお，この式は $k=1$ のときも成立している。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を q_n とおくと，(2)より，

$$\begin{aligned}q_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\\&=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\\&=\frac{2}{(n-1)(n+2)}\left\{\frac{1}{3}(2n+1)-1\right\}=\frac{4}{3(n+2)}\end{aligned}$$

(4) 引いたカード 2 枚の番号が k と $k+1$ のとき，その確率は，

$$\frac{{}_k\mathrm{C}_1\,{}_{k+1}\mathrm{C}_1}{\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{8k(k+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

すると，引いたカード 2 枚の番号が連続している確率 p_n は，

$$p_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{8k(k+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\sum_{k=2}^{n}\frac{8(k-1)k}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{8(k-1)k}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=2q_n=\frac{8}{3(n+2)}$$

コメント

確率についての基本的な問題です。

問　題

n を 3 以上の整数とし，a，b，c は 1 以上 n 以下の整数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(2)　$a\leqq b\leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(3)　$a<b$ かつ $a\leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。　[2014]

解答例

(1)　$1\leqq a<b<c\leqq n$ を満たす a, b, c の組は,

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\ (\text{通り})$$

(2)　$a'=a$，$b'=b+1$，$c'=c+2$ とおくとき，$1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq n$ を満たす a, b, c の組の数は，$1\leqq a'<b'<c'\leqq n+2$ を満たす a'，b'，c' の組の数に等しいので,

$${}_{n+2}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n\ (\text{通り})$$

(3)　$a<b$ かつ $a\leqq c$ となる場合の数は，次の通りである。

(i)　$1\leqq a<b<c\leqq n$ のとき　(1)より，$\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(ii)　$1\leqq a<b=c\leqq n$ のとき　${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(iii)　$1\leqq a<c<b\leqq n$ のとき　(i)と同様に，$\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(iv)　$1\leqq a=c<b\leqq n$ のとき　(ii)と同様に，$\dfrac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(i)～(iv)より，求める場合の数は,

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\times 2+\frac{1}{2}n(n-1)\times 2=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)\ (\text{通り})$$

コメント

場合の数の典型問題です。(3)は(1)を利用して場合分けをしました。

問　題

表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p，q は正の定数で，$p+q=1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$$

とし，D 上を動く点 Q を考える。Q は点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。

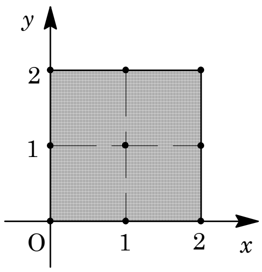
(2)　硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を 4 回投げて，Q が点 $(2,\ 2)$ に到達するには，表が 2 回，裏が 2 回出る場合より，その確率 P_4 は，

$$P_4={}_4\mathrm{C}_2p^2q^2=6p^2q^2$$



(2)　硬貨を 5 回投げて，Q が 5 回目に初めて点 $(2,\ 2)$ に到達するには，

(i)　4 回目に点 $(2,\ 1)$ に到達するとき

4 回目までに表 3 回，裏 1 回出て，5 回目に裏が出る場合より，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_3p^3q\times q=4p^3q^2$$

(ii)　4 回目に点 $(1,\ 2)$ に到達するとき

4 回目までに表 1 回，裏 3 回出て，5 回目に表が出る場合より，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_1pq^3\times p=4p^2q^3$$

(i)(ii)より，$P_5=4p^3q^2+4p^2q^3=4p^2q^2(p+q)=4p^2q^2$

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ より，(2)から $4p^2q^2=\dfrac{1}{9}$ となり，$6pq=1$ であるので，

$$6p(1-p)=1,\ 6p^2-6p+1=0$$

よって，$p=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ となり，この値はともに $0<p<1$ を満たしている。

コメント

確率の基本的な問題です。ただ，設問(3)の意図は何でしょうか。

問　題

n を 3 以上の整数とする。$3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

(1)　3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。　[2011]

解答例

(1)　$3n$ 枚のカードから 3 枚を取り出す ${}_{3n}\mathrm{C}_3$ 通りが同様に確からしいとする。

ここで，3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である取り出し方は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りより，その確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

(2)　まず, $3n$ 枚のカードを，書かれた数字によって，次の 3 つのタイプに分類する。

すなわち，書かれた数字が 3 の倍数の n 枚のカード，(3 の倍数＋1)の n 枚のカード，(3 の倍数＋2)の n 枚のカードである。

すると，3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数であるのは，同じタイプから 3 枚を取り出す ${}_n\mathrm{C}_3\times 3$ 通り，3 つのタイプから 1 枚ずつ取り出す $({}_n\mathrm{C}_1)^3=n^3$ 通りの場合がある。これより，その確率は,

$$\frac{3\,{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-1)(n-2)+6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{3n^2-3n+2}{(3n-1)(3n-2)}$$

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率 p_1 は，余事象を考えて，

$$p_1=1-\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

また, 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率 p_2 は, (2)より，

$$p_2=1-\frac{3\,{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

これより，$p_1-p_2=-\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}+\dfrac{3\,{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$ となり，

$$(p_1-p_2)\,{}_{3n}\mathrm{C}_3=-\frac{2n}{6}(2n-1)(2n-2)+\frac{3}{6}n(n-1)(n-2)+n^3$$
$$=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)>0$$

よって，$p_1>p_2$ から，積が 3 の倍数である確率の方が大きい。

コメント

確率の基本問題です。なお, (2)の分類方法は必須事項です。

問　題

男性M_1，…，M_4の 4 人と女性F_1，…，F_4の 4 人が，横一列に並んだ座席S_1，…，S_8に座る場合を考える。

(1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2) (1)の座り方の中で，M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は何通りあるか。

(3) (1)の座り方の中で，M_1とF_1が隣り合わない座り方は何通りあるか。　[2010]

解答例

$\boxed{S_1}\ \boxed{S_2}\ \boxed{S_3}\ \boxed{S_4}\ \boxed{S_5}\ \boxed{S_6}\ \boxed{S_7}\ \boxed{S_8}$

(1) 男性がS_1，S_3，S_5，S_7に座る場合，S_2，S_4，S_6，S_8に座る場合があるので，同性どうしが隣り合わない座り方は，

$$2\times 4!\times 4!=1152 \text{（通り）}$$

(2) まず，M_1の座席はS_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7のいずれかであり，またF_1とF_2については$F_1\ M_1\ F_2$の場合と$F_2\ M_1\ F_1$の 2 つの場合がある。さらに，残りの男性 3 人，女性 2 人の座り方を合わせて考えると，M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は，

$$6\times 2\times 3!\times 2!=144 \text{（通り）}$$

(3) まず，M_1とF_1が隣り合う座り方を考える。

(i) M_1がS_1またはS_8に座るとき

F_1の座席は 1 通りに決まるので，残り男性 3 人，女性 3 人の座り方を考えて，

$$2\times 1\times 3!\times 3!=72 \text{（通り）}$$

(ii) M_1がS_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7のいずれかに座るとき

F_1の座席は 2 通りずつ決まるので，残り男性 3 人，女性 3 人の座り方を考えて，

$$6\times 2\times 3!\times 3!=432 \text{（通り）}$$

(i)(ii)より，M_1とF_1が隣り合う座り方は，$72+432=504$通りとなる。

よって，M_1とF_1が隣り合わない座り方は，(1)の結論を用いると，

$$1152-504=648 \text{（通り）}$$

コメント

順列の基本問題です。(3)では，図を描いて，直接的に数えても大差はありません。

問　題

1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。　[2009]

解答例

(1)　回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ になる目の出方は，右表より，

出た目	1	2	3	4	5	6
回転角	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$

(i)　1 回振ったとき　2

(ii)　2 回振ったとき　3→6, 4→4, 6→3

(iii) 3 回振ったとき　6→6→6

(2)　$P_4 = P_0$ となるのは，4 回振って，回転した角の合計が 2π または 4π の場合である。

(i)　回転した角の合計が 2π になるとき

出た目を a, b, c, d として，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は, $a \leqq b \leqq c \leqq d$ では,

$$(1,\ 2,\ 4,\ 4),\ (1,\ 2,\ 3,\ 6),\ (1,\ 3,\ 3,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2,\ 2)$$

すると，目の出方は，$\frac{4!}{2!} + 4! + \frac{4!}{3!} + 1 = 41$ 通りとなる。

(ii)　回転した角の合計が 4π になるとき

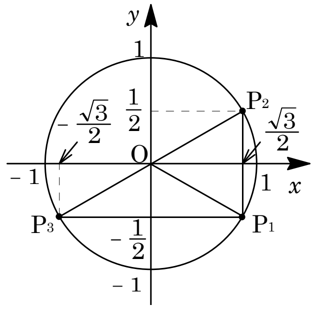
出た目が $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の場合のみで, 1 通りである。

(i)(ii)より，$P_4 = P_0$ となる目の出方は，$41 + 1 = 42$ 通り。

(3)　条件より，原点 O に対し，$\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{3}$ なので，

$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$としても一般性は失わない。

そこで, O を中心とし，OP_2 を角 $\frac{\pi}{k}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ だけ回転して OP_3 を決める。



このとき，$\triangle P_1P_2P_3$ の面積が最大になるのは，$P_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$のとき，すなわち出た目 k が 1 のときである。

コメント

場合の数を漏れなく数え上げる問題です。特に, (2)の(ii)が要注意です。

問　題

n を 3 以上の整数とする。A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ。どの数を選ぶ確率も等しく $\frac{1}{n}$ とする。A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 人のうち，少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ。

(2) a と b が等しくなる確率を求めよ。

(3) 2 人が同じ数，他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ。

(4) $a<b<c$ となる確率を求めよ。 [2008]

解答例

(1) 3 人とも n を選ばない確率は $\left(\frac{n-1}{n}\right)^3$ より，少なくとも 1 人が n を選ぶ確率は，

$$1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^3=\frac{3n^2-3n+1}{n^3}$$

(2) $a=b$ となる確率は, c が任意なので，$\left(\frac{1}{n}\right)^2\times n\times 1=\frac{1}{n}$

(3) $a=b\neq c$ となる確率は，$\left(\frac{1}{n}\right)^2\times n\times\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{n^2}$ である。

また，$a=c\neq b$，$b=c\neq a$ の場合の確率も，同じく $\frac{n-1}{n^2}$ となる。

よって, 2 人が同じ数，他の 1 人が異なる数を選ぶ確率は，$\frac{3(n-1)}{n^2}$ である。

(4) $a<b<c$ となる場合は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りあるので，その確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{n^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}=\frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}$$

コメント

不気味なほど基本的な設問 4 題で，構成されています。

問　題

A, B, C の 3 人のうち 2 人が，1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き，大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし，最初に A と B が対戦し，その後は，直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また，カードを引く順番は最初は A から，その後は直前の対戦の勝者からとする。なお，対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし，引いたカードは対戦後，直ちに元の束に戻すものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。

(2)　4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。

(3)　5 回の対戦を行うとき，A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

[2007]

解答例

(1)　A と B が対戦して，A が k のカードで勝つのは，B が $k-1$ 以下のカードのときであり，その確率 p_k は，

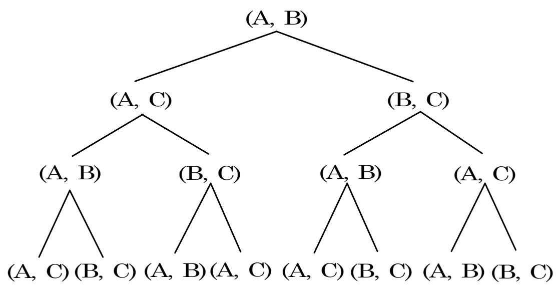
$$p_k=\frac{k-1}{13\cdot12}\quad(2\leqq k\leqq13)$$

よって, A が勝つ確率は,

$$\sum_{k=2}^{13}p_k=\sum_{k=2}^{13}\frac{k-1}{13\cdot12}=\sum_{k=1}^{12}\frac{k}{13\cdot12}=\frac{1}{13\cdot12}\cdot\frac{1}{2}\cdot12\cdot13=\frac{1}{2}$$

(2)　(1)より，対戦の結果，一方が勝者となる確率は $\frac{1}{2}$ ずつである。

さて, 4 回目までの対戦をまとめると，右図のようになる。



4 回目の対戦に A が出場するのは, (A, C)が 3 通り, (A, B)が 2 通りの合わせて 5 通りあるので, この確率は,

$$5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{8}$$

(3)　5 回の対戦を行うとき, A が一番先に連勝するのは,

(i)　勝者が A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(ii)　勝者が A→C→B→A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(iii) 勝者が B→C→A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(i)(ii)(iii)より, A が一番先に連勝する確率は,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}=\frac{11}{32}$$

コメント

巴戦を題材にした有名問題です。(1)は丁寧に記述しましたが，引き分けはないので，A が勝つ確率は明らかに $\frac{1}{2}$ です。

問　題

実数 x, y, z について，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し，等号がいつ成り立つか答えよ。これを用いて，命題

「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」

が真となる最小の正の実数 a を求めよ。 [2005]

解答例

まず，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ の証明をする。

右辺と左辺の差をとり，

$$3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 = 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$$
$$= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0$$

よって，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$………(*)

等号は，$x-y=y-z=z-x=0$，すなわち $x=y=z$ のときに成立する。

さて，$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ が成立するとき，(*)より，

$$(x+y+z)^2 \leqq 3a, \quad -\sqrt{3a} \leqq x+y+z \leqq \sqrt{3a}$$

なお，等号の成立するのは，$x=y=z=\pm\dfrac{\sqrt{3a}}{3}$ のときである。

このとき，$x+y+z \leqq a$ が成立する条件は，

$$\sqrt{3a} \leqq a, \quad 3a \leqq a^2, \quad 3 \leqq a$$

よって，求める最小の正の実数 a は 3 である。

コメント

有名な不等式の証明問題とその応用題です。