《2019 入試対策》

大阪大学

文系数学

1998—2018

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された大阪大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 ， 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

なお，映像解説の一覧は，下記のページに掲載しています。

PC サイト トップページ ≫ 阪大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

１　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

２　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　実数の組$(x,\ y,\ z)$で, どのような整数$l,\ m,\ n$に対しても, 等式

$$l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。　[2011]

2　連立方程式

$$2^x+3^y=43,\ \log_2 x-\log_3 y=1$$

を考える。

(1)　この連立方程式を満たす自然数$x,\ y$の組を求めよ。

(2)　この連立方程式を満たす正の実数$x,\ y$は, (1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。　[2010]

3　自然数$m,\ n$と$0<a<1$を満たす実数aを, 等式

$$\log_2 6=m+\frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1)　自然数$m,\ n$を求めよ。

(2)　不等式$a>\dfrac{2}{3}$が成り立つことを示せ。　[2006]

4　座標平面上の 4 点$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 8)$, $\mathrm{D}(1,\ 8)$を頂点とする長方形をRとする。また$0<t<4$に対し, 原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$, 点$\mathrm{E}(4,\ 0)$, および点$\mathrm{P}(t,\ 8t-2t^2)$の 3 点を頂点とする三角形を$T(t)$とする。

(1)　Rの内部と$T(t)$の内部との共通部分の面積$f(t)$を求めよ。

(2)　tが$0<t<4$の範囲で動くとき, $f(t)$を最大にするtの値と, そのときの最大値を求めよ。　[2001]

5　各整数kに対し, 座標平面上の点$\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{500},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}_k\left(\dfrac{k}{500},\ 1\right)$をとり, 3 点$\mathrm{P}_{k-1}$, P_k, Q_kを頂点とする三角形T_kを考える。また, 各自然数nに対し

$$f_n(x)=2\times 10^{-nx}$$

とおく。曲線$y=f_n(x)$上の動点Rが, 点$(0,\ 2)$から出発してx座標が大きくなる方向に動くとき, 三角形T_kのうち, Rが最初にその内部を通過するものがT_8となるようなnをすべて求めよ。ただし, $\log_{10}2=0.3010$とする。　[2001]

6 p, q を実数，$q \neq 0$ とする。$p+qi$ （$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）が方程式

$$x^3+px+10=0$$

の解であるとき, p と q の値を求めよ。 [2000]

7 (1) xy 平面上で，次の不等式を満たす点$(x,\ y)$の存在する領域を図示せよ。

$$100^{\log_{10}x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10}y-\log_{10}3)}\leqq 0$$

(2) 点$(x,\ y)$が(1)の領域を動くとき，

$$u=\sin\left(360°\times(x+y)\right)-\sqrt{3}\cos\left(360°\times(x+y)\right)$$

がとる値の範囲を求めよ。 [1999]

8 単位円周上の 3 点

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{Q}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\ \mathrm{R}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$$

を考える。θが $0°$ から $360°$ まで動くとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2$ がとる値の範囲を求めよ。

[1998]

■ 微分と積分

1 関数 $f(t)=(\sin t-\cos t)\sin 2t$ を考える。

(1) $x=\sin t-\cos t$ とおくとき，$f(t)$ を x を用いて表せ。

(2) t が $0\leqq t\leqq\pi$ の範囲を動くとき，$f(t)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2018]

2 b, c を実数, q を正の実数とする。放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いて表せ。 [2017]

3 実数 x, y, z が，$x+y+z=1$，$x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2) $z\geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ。 [2017]

4 曲線 $C: y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ を考える。

(1) C と直線 $L: y=-x+t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ。

(2) C と L が異なる 4 点で交わるとし，その交点を x 座標が小さいものから順に，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_4}$ とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|+|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}|}=4$ となるような t の値を求めよ。

(3) t が(2)の値をとるとき，C と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2016]

5 関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，$x=0$ のとき極大値 M をとり，$x=\alpha$ のとき極小値 m をとるという。ただし $\alpha\neq 0$ とする。このとき, p, q, r, s を α , M, m で表せ。

[2014]

6 曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。　[2013]

7 曲線 $C: y=x^3-kx$ （k は実数）を考える。C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^3-ka)$ $(a\neq 0)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 点 A における C の接線を l_1 とする。l_1 と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2) 点 B における C の接線を l_2 とする。l_1 と l_2 が直交するとき, a と k が満たす条件を求めよ。

(3) l_1 と l_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。　[2009]

8 実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ を考える。$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とする。α，β，γ の間に $\alpha+\gamma=2\beta$ という関係があるとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a の式で表せ。

(2) α，β，γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (1)で求めた a の式を $f(a)$ とする。a が(2)の範囲を動くとき，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。　[2008]

9　a を正の定数とし,

$$f(x)=\left|\,|x-3a|-a\,\right|,\quad g(x)=-x^2+6ax-5a^2+a$$

を考える。

(1)　方程式 $f(x)=a$ の解を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[2008]

10　xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき, k の満たす条件を求めよ。

(2)　k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。　[2007]

11　a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。　[2006]

12　$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の増減表を作り，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。　[2005]

13　3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ に関して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつための条件を，$f(x)$ の係数を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小になるとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ。また，$y=f(x)$ のグラフは平行移動によって $y=x^3+\dfrac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ。　[2004]

14　放物線 $C: y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$, $m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする。線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。　[2003]

15 次の問いに答えよ。

(1) 実数の定数 p に対して，3 次方程式 $x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ。

(2) $p,\ q$ は定数で $p \geqq 2,\ q \geqq 2$ とする。2 つの 3 次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とするとき，$|\alpha-\beta| \leqq \dfrac{1}{4}|p-q|$ が成立することを示せ。 [2002]

16 平面上に 3 つの放物線 $C_1: y=-x(x-1)$，$C_2: y=x(x-1)$，$C: y=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ を考える。いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする。

(1) a, b を t を用いて表せ。

(2) 2 つの放物線 $C,\ C_2$ で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ。

(3) t を動かすとき, S の最小値を求めよ。 [2002]

17 関数 $f(x)=x-2+3|x-1|$ を考える。$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ。 [2000]

18 放物線 $y=x^2+1$ 上に点 P をとる。原点 O と P を結ぶ線分 OP を

$$t^2:(1-t^2)\quad(0<t<1)$$

に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P が放物線上を動くとき点 Q が描く曲線 C の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2+1$ と曲線 C が囲む図形の面積 S を求めよ。

(3) $0<t<1$ における S の最大値を求めよ。 [1998]

■ 図形と式

1 直線 $l: y=kx+m\ (k>0)$ が円 $C_1: x^2+(y-1)^2=1$ と放物線 $C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) k と m を求めよ。

(2) 直線 l と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。 [2015]

2　i は虚数単位とし，実数 a, b は $a^2+b^2>0$ を満たす定数とする。複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_1 とし，また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_2 とする。

(1)　L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ。

(2)　L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ。

(3)　L_1 と L_2 の交点を求めよ。　[2014]

3　xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は，$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。　[2013]

4　xy 平面上で考える。不等式 $y<-x^2+16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1|+|y|\leqq 1$ の表す領域を E とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。

(2)　$\mathrm{A}(a,\ b)$ を領域 D に属する点とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y=-x^2+16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,\ b)$ とする。$S(a,\ b)$ を a, b を用いて表せ。

(3)　点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,\ b)$ の最大値を求めよ。　[2012]

5　実数の組 $(p,\ q)$ に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく。

(1)　放物線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 $(p,\ q)$ と接点の座標を求めよ。

(2)　実数の組 $(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$ に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく。実数 α，β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。

(3)　長方形 $R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$ を考える。また，4 点 $\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$ をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組 $(p,\ q)$ を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2011]

6 曲線$C: y=-x^2-1$を考える。

(1) tが実数全体を動くとき，曲線C上の点$(t,\ -t^2-1)$を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域をxy平面上に図示せよ。

(2) Dを(1)で求めた領域の境界とする。Dがx軸の正の部分と交わる点を$(a,\ 0)$とし，$x=a$でのCの接線をlとする。Dとlで囲まれた部分の面積を求めよ。

[2010]

7 xy平面上の点$\mathrm{A}(1,\ 2)$を通る直線lがx軸，y軸とそれぞれ点P，Qで交わるとする。点Rを$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を満たすようにとる。ただし，Oは$xy$平面の原点である。このとき，直線$l$の傾きにかかわらず，点Rはある関数$y=f(x)$のグラフ上にある。関数$f(x)$を求めよ。 [2006]

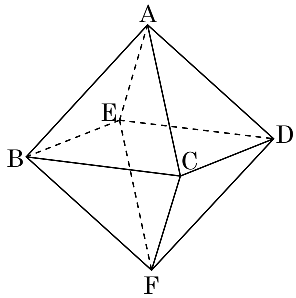
8 放物線$C: y=\frac{1}{2}x^2$上の原点以外の点PにおけるCの接線をl_1とし，Pを通りl_1と直交する直線をl_2とする。また，l_2とCが再び交わる点をQとし，QにおけるCの接線をl_3とする。さらに，l_1とl_3の交点をRとする。

(1) 点$\mathrm{R}(x,\ y)$について，yをxの式で表せ。

(2) PR≧PQとなる点Pのx座標の範囲を求めよ。 [1999]

■ 図形と計量

1　座標空間に 6 点 A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(0, 1, 0)，D(−1, 0, 0)，E(0, −1, 0)，F(0, 0, −1) を頂点とする正八面体 ABCDEF がある。s, t を $0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし，線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。



(1)　4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。

(2)　線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする。s, t が $0<s<1$, $0<t<1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3)　正八面体 ABCDEF の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする。線分 LM の長さが(2)の値 m をとるとき，X を最大とするような s, t の値と，そのときの X の値を求めよ。　[2018]

■ ベクトル

1　平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある。2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP＝AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる。また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△AQR の面積を $\theta=\angle\mathrm{PAB}$ を用いて表せ。

(2)　点 P を動かして△AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ。

[2015]

2　$a,\ b,\ c$ を実数とする。ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2\sqrt{2})$ をとり，$\overrightarrow{v_3}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$ とおく。座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*)\quad (\overrightarrow{v_1}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_3}=c\vec{p}$$

を考える。ここで $\overrightarrow{v_i}\cdot\vec{p}\ (i=1,\ 2,\ 3)$ はベクトル $\overrightarrow{v_i}$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　座標平面上の任意のベクトル $\vec{v}=(x,\ y)$ が，実数 $s,\ t$ を用いて $\vec{v}=s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}$ と表されることを，s および t の各々を x,y の式で表すことによって示せ。

(2)　$\vec{p}=\overrightarrow{v_1}$ と $\vec{p}=\overrightarrow{v_2}$ の両方が条件(∗)を満たすならば，座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p}=\vec{v}$ が条件(∗)を満たすことを示せ。

(3)　座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p}=\vec{v}$ が条件(∗)を満たす。このような実数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2011]

3　平面上の三角形 OAB を考え，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ とおく。辺 OA を $1:2$ に内分する点を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ となる点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交し，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。

(2)　t の値を求めよ。

(3)　AD と BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2009]

4　点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2)　点 A, B と C, D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。　[2008]

5 xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。　[2007]

6 平面ベクトル $\vec{p}=(p_1,\ p_2)$，$\vec{q}=(q_1,\ q_2)$ に対して，$\{\vec{p},\ \vec{q}\}=p_1q_2-p_2q_1$ と定める。

(1)　平面ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に対して，$\{\vec{a},\ \vec{b}\}=l$，$\{\vec{b},\ \vec{c}\}=m$，$\{\vec{c},\ \vec{a}\}=n$ とするとき，$l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1)で $l,\ m,\ n$ がすべて正であるとする。このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r, s, t を用いて，$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すことができることを示せ。　[2003]

7 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える。K_1 の直径を 1 つとり，その両端を A, B とする。円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し，線分 QA を $1:2$ の比に内分する点を R とする。いま k を正の定数として，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ とおく。ただし，$\mathrm{Q}=\mathrm{A}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{A}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ を $\vec{a},\ \vec{q}$ を用いて表せ。

(2)　点 Q が円 K_1 の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ となるような点 P がえがく図形を K_2 とする。K_2 は円であることを示し，中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(3)　円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ。　[2002]

8 空間のベクトル$\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$\vec{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$を考える。ただし，どちらも零ベクトルではないとする。$k=1,\ 2,\ 3$に対し，複素数$z_k=x_k+y_ki$（$i=\sqrt{-1}$は虚数単位）を考え，複素数$w_k=u_k+v_ki$（u_k，v_kは実数）を$w_k=(\sqrt{3}+i)z_k$で定める。さらにu_k，v_kから定まるベクトル$\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$，$\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$を考える。

(1) $\vec{x}$の大きさをr，$\vec{y}$の大きさをs，$\vec{x}$と$\vec{y}$のなす角をθ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$とするとき$z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2$を$r$，$s$，$\theta$で表せ。

(2) $\vec{x}$と$\vec{y}$の大きさが等しく，両者はたがいに垂直であるとする。このとき$\vec{u}$と$\vec{v}$も大きさが等しく，たがいに垂直であることを示せ。

(3) (2)の仮定のもとで，$\vec{x}$と$\vec{u}$のなす角を求めよ。 [2001]

9 点Oを中心とする円を考える。この円の円周上に3点A, B, Cがあって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしている。このとき，三角形ABCは正三角形であることを証明せよ。

[2000]

10 平面上の4点O, P, Q, Rが条件

$$\mathrm{OP}=2,\ \mathrm{OQ}=3,\ \angle\mathrm{POQ}=60°,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$$

を満たすとする。線分ORの長さと$\cos\angle\mathrm{POR}$の値を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列

1 次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=8a_n{}^2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n=\log_2 a_n$とおく。b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $P_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$とおく。数列$\{P_n\}$の一般項を求めよ。

(4) $P_n>10^{100}$となる最小の自然数nを求めよ。 [2017]

2　次の問いに答えよ。

(1)　a を正の実数とし，k を 1 以上の実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は，不等式 $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たすような実数解 s をもつことを示せ。

(2)　a を 3 以上の整数とする。n^2+a が $an+1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ。　[2016]

3　次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数 n について考える。

(i)　n は素数ではない。

(ii)　$l,\ m$ を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m|\leqq 2$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が偶数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(3)　$2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。　[2012]

4　次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $10^{2x}\leqq 10^{6-x}$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2)　$10^{2x}\leqq y\leqq 10^{5x}$ と $y\leqq 10^{6-x}$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

[2005]

5　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\frac{1}{3},\ \ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定め，数列 $\{b_n\}$ を

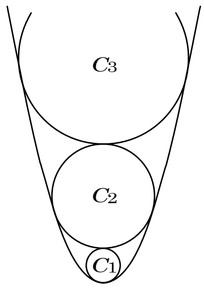
$$b_1=a_1a_2\ ,\ \ b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　一般項 a_n を n を用いて表せ。

(2)　一般項 b_n を n を用いて表せ。　[2005]

6　座標平面上で不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D とする。D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円を C_1 とする。自然数 n について，円 C_n が定まったとき，C_n の上部で C_n に外接する円で，D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円を C_{n+1} とする。C_n の半径を a_n とし，$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。



(1)　a_1 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ。

(3)　a_n を n の式で表せ。　[2004]

7　自然数 m に対して，m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする。たとえば $f(72) = 6$ である。ただし $f(1) = 1$ とする。

(1)　m, n を自然数，d を m, n の最大公約数とするとき，$f(d)f(mn) = f(m)f(n)$ となることを示せ。

(2)　2 つの箱 A，B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている。箱 A，B から 1 枚ずつ札を取り出す。箱 A から取り出した札の番号を m，箱 B から取り出した札の番号を n とするとき，$f(mn) = f(m)f(n)$ となる確率 p_1 と，$2f(mn) = f(m)f(n)$ となる確率 p_2 を求めよ。　[2003]

8　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし，$a < b$ とする。　[1999]

■ 確率

1　1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。

(1)　$\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx = 0$ である確率を求めよ。

(2)　a, b が 2 以上かつ $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ。　[2018]

2　1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。　[2016]

3　1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。

(1)　$\log_{\frac{1}{4}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c$ となる確率を求めよ。

(2)　$2^a+2^b+2^c$ が 3 の倍数となる確率を求めよ。　[2013]

4　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表し，3 次式 $f(x)=x^3+lx^2+mx+n$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ。　[2012]

5　(1)　不等式 $(|x|-2)^2+(|y|-2)^2\leqq 1$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　1 個のさいころを 4 回投げ，n 回目 $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に出た目の数を a_n とする。このとき，$(x,\ y)=(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が(1)の領域に含まれる確率を求めよ。

[2010]

6 次のような，いびつなさいころを考える。1，2，3 の目が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{6}$，4 の目が出る確率は a，5，6 の目が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2}$である。ただし$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$とする。このさいころを振ったとき，平面上の$(x,\ y)$にある点 P は，1，2，3 のいずれかの目が出ると$(x+1,\ y)$に，4 の目が出ると$(x,\ y+1)$に，5，6 のいずれかの目が出ると$(x-1,\ y-1)$に移動する。原点$(0,\ 0)$にあった点 P が，k 回さいころを振ったときに$(2,\ 1)$にある確率をp_kとする。

(1) p_1，p_2，p_3を求めよ。

(2) p_6を求めよ。

(3) p_6が最大になるときの a の値を求めよ。 [2009]

7 n を 2 以上の自然数とする。1 つのさいころを n 回投げ，第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。

(1) $G=3$となる確率を n の式で表せ。

(2) G の期待値を n の式で表せ。 [2007]

8 n を自然数とする。プレイヤーA，B がサイコロを交互に投げるゲームをする。最初は A が投げ，先に 1 の目を出した方を勝ちとして終わる。ただし，A が n 回投げても勝負がつかない場合は B の勝ちとする。

(1) A の k 投目$(1\leqq k\leqq n)$で A が勝つ確率を求めよ。

(2) このゲームにおいて A が勝つ確率P_nを求めよ。

(3) $P_n>\dfrac{1}{2}$となるような最小の n の値を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$として計算してよい。 [2004]

■ 論証

1 実数 x, y が$|x|\leqq1$と$|y|\leqq1$を満たすとき，不等式

$$0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq1$$

が成り立つことを示せ。 [2015]

2 次の問いに答えよ。

(1) $\cos x+\cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 $x,\ y$ に対して等式

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) $\cos x+\cos y+\cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して等式

$$\tan\frac{x+y+z}{3}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}$$

は成り立つか。成り立つときは証明し，成り立たないときは反例を挙げよ。

[2014]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

実数の組$(x,\ y,\ z)$で，どのような整数l, m, nに対しても，等式

$$l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。 [2011]

解答例＋映像解説

等式 $l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$ ……(＊)が，どのような整数l, m, nに対しても成立する条件を求める。

まず，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$のとき，成立することが必要で，

$$10^{x-y}+10^{y-z}=13\ \cdots\cdots\text{①},\ \ 10^{x-z}=36\ \cdots\cdots\text{②},\ \ -x=y\ \cdots\cdots\text{③}$$

逆に，①②③が成立するとき，任意の整数$l,\ m,\ n$に対して，明らかに(＊)は成立することより，求める条件は①②③である。

①③より，$10^{2x}+10^{-x-z}=13$ ………④

ここで，$10^x=X>0$，$10^z=Z>0$とおくと，②④より，

$$\frac{X}{Z}=36\ \cdots\cdots\text{⑤},\ \ X^2+\frac{1}{XZ}=13\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

⑤⑥より，$X^2+\dfrac{36}{X^2}=13$，$X^4-13X^2+36=0$となり，

$$(X+2)(X-2)(X+3)(X-3)=0$$

$X>0$より，$X=2,\ 3$

(i)　$X=2$のとき

⑤より，$Z=\dfrac{1}{18}$となり，$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}2,\ -\log_{10}2,\ -\log_{10}18)$

(ii)　$X=3$のとき

⑤より，$Z=\dfrac{1}{12}$となり，$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}3,\ -\log_{10}3,\ -\log_{10}12)$

コメント

整数問題の装いをしていますが，実質的には指数・対数がらみの連立方程式を解くものです。

問　題

連立方程式

$$2^x+3^y=43,\ \log_2 x-\log_3 y=1$$

を考える。

(1)　この連立方程式を満たす自然数 $x,\ y$ の組を求めよ。

(2)　この連立方程式を満たす正の実数 $x,\ y$ は，(1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。 [2010]

解答例＋映像解説

(1)　自然数 $x,\ y$ に対し，

$$2^x+3^y=43\cdots\cdots\cdots①,\ \log_2 x-\log_3 y=1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$3^y\leqq 43-2^1=41$ となるので，$y=1,\ 2,\ 3$ である。

$y=1$ のとき，①より $2^x=40$ となり，これを満たす x はない。

$y=2$ のとき，①より $2^x=34$ となり，これを満たす x はない。

$y=3$ のとき，①より $2^x=16$ となり，$x=4$ である。このとき，$\log_2 4-\log_3 3=1$ より，②を満たしているので，

$$x=4,\ y=3$$

(2)　$\log_2 x=X$，$\log_3 y=Y$ とおくと，$x=2^X$，$y=3^Y$ となり，①②より，

$$2^{2^X}+3^{3^Y}=43\cdots\cdots\cdots③,\ X-Y=1\cdots\cdots\cdots④$$

④より $Y=X-1$ となり，③に代入すると，$2^{2^X}+3^{3^{X-1}}=43\cdots\cdots\cdots⑤$

ここで，$f(X)=2^{2^X}+3^{3^{X-1}}$ とおくと，$f(X)$ は増加関数であり，⑤の解の個数は高々1個である。

さて，$f(2)=2^{2^2}+3^{3^1}=16+27=43$ から，$X=2$ は⑤の解であり，このとき④より $Y=1$，すなわち $X=2$，$Y=1$ は連立方程式③④のただ1つの解である。

以上より，$x=2^2=4$，$y=3^1=3$ は，連立方程式①②のただ1つの解である。

コメント

(1)は通常の着眼で解けますが，(2)は難問です。上の解では，指数関数の単調性を利用して示しましたが，ここまで至る試行錯誤には時間がかかってしまいました。

問　題

自然数 $m,\, n$ と $0<a<1$ を満たす実数 a を，等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 $m,\, n$ を求めよ。

(2) 不等式 $a > \dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。 [2006]

解答例

(1) $0<a<1$ より，$n<n+a<n+1$ となり，

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+a}<\frac{1}{n}<1$$

すると，$\log_2 6 = m + \dfrac{1}{n+a}$ から, m は $\log_2 6$ の整数部分である。

ここで，$\log_2 2^2 < \log_2 6 < \log_2 2^3$ から $2<\log_2 6<3$ となることより，

$$m = 2$$

このとき，$\log_2 6 - 2 = \dfrac{1}{n+a}$ から，

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{1}{n+a},\quad n+a = \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

すると, $0<a<1$ から, n は $\log_{\frac{3}{2}} 2$ の整数部分である。

そこで，$\log_{\frac{3}{2}} \dfrac{3}{2} < \log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{3}{2}} \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ から $1<\log_{\frac{3}{2}} 2<2$ となることより，

$$n = 1$$

(2) (1)から，$a = \log_{\frac{3}{2}} 2 - 1 = \log_{\frac{3}{2}} \dfrac{4}{3}$ ………①

ここで，$2^2 \cdot 4^3 > 3^5$ より，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 > \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$，$\dfrac{4}{3} > \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ………②

①②より，$a > \log_{\frac{3}{2}} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$ である。

コメント

対数の値を評価する問題です。結論を見据えながら式変形を行います。たとえば，不等式 $2^2 \cdot 4^3 > 3^5$ はその 1 例です。

問　題

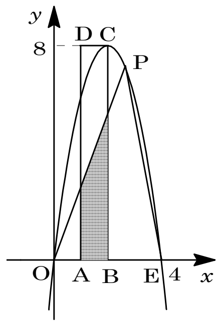
座標平面上の 4 点 A$(1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(2,\ 8)$，D$(1,\ 8)$ を頂点とする長方形を R とする。また $0<t<4$ に対し，原点 O$(0,\ 0)$，点 E$(4,\ 0)$，および点 P$(t,\ 8t-2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする。

(1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ。

(2) t が $0<t<4$ の範囲で動くとき，$f(t)$ を最大にする t の値と，そのときの最大値を求めよ。 [2001]

解答例

(1) 直線 OP : $y=\dfrac{8t-2t^2}{t}x=(8-2t)x$ ………①



また，直線 PE : $y=\dfrac{8t-2t^2}{t-4}(x-4)=-2t(x-4)$ ………②

(i) $0<t<1$ のとき

PE と AD の交点は②より $(1,\ 6t)$，また PE と BC の交点は②より $(2,\ 4t)$ なので，

$$f(t)=\frac{6t+4t}{2}\cdot(2-1)=5t$$

(ii) $1\leqq t<2$ のとき

OP と AD の交点は①より $(1,\ 8-2t)$ なので，直線 $x=t$ の左右にある 2 つの台形の面積の和を考えて，

$$f(t)=\frac{8-2t+8t-2t^2}{2}\cdot(t-1)+\frac{4t+8t-2t^2}{2}\cdot(2-t)=-4t^2+13t-4$$

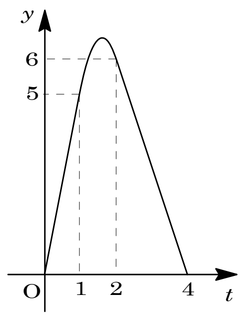
(iii) $2\leqq t<4$ のとき

OP と BC の交点は①より $(2,\ 16-4t)$ なので，

$$f(t)=\frac{8-2t+16-4t}{2}\cdot(2-1)=-3t+12$$

(2) $1\leqq t<2$ のとき，

$$f(t)=-4t^2+13t-4=-4\left(t-\frac{13}{8}\right)^2+\frac{105}{16}$$



よって，$y=f(t)$ のグラフは右図のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{13}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{105}{16}$ をとる。

コメント

ていねいに場合分けをして，ていねいに計算をすすめていけば，正解に到達するという問題です。

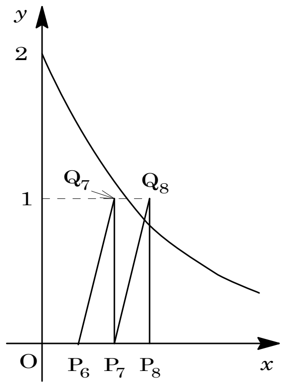
問　題

各整数 k に対し，座標平面上の点 $P_k\left(\dfrac{k}{500},\ 0\right)$，$Q_k\left(\dfrac{k}{500},\ 1\right)$をとり，3 点 P_{k-1}，P_k，Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える。また，各自然数 n に対し

$$f_n(x)=2\times 10^{-nx}$$

とおく。曲線 $y=f_n(x)$ 上の動点 R が，点 $(0,\ 2)$ から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき，三角形 T_k のうち，R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。　[2001]

解答例



条件より，点 $Q_7\left(\dfrac{7}{500},\ 1\right)$は，曲線 $y=f_n(x)$ 上またはその下側にあるので，

$$2\times 10^{-\frac{7}{500}n}\geqq 1\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，点 $Q_8\left(\dfrac{8}{500},\ 1\right)$は，曲線 $y=f_n(x)$ の上側にあるので，

$$2\times 10^{-\frac{8}{500}n}<1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$10^{-\frac{7}{500}n}\geqq 2^{-1}$，$-\dfrac{7}{500}n\geqq\log_{10}2^{-1}=-0.3010$

よって，$n\leqq\dfrac{150.5}{7}=21.5\ \cdots\cdots\cdots ③$

②より，$10^{-\frac{8}{500}n}<2^{-1}$，$-\dfrac{8}{500}n<\log_{10}2^{-1}=-0.3010$

よって，$n>\dfrac{150.5}{8}=18.8125\ \cdots\cdots\cdots ④$

③④より, n は整数なので，$n=19,\ 20,\ 21$ である。

コメント

一見, 難問風の装いをしていますが，内容は対数計算だけでした。

問　題

p, q を実数，$q \neq 0$ とする。$p+qi$（$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）が方程式

$$x^3+px+10=0$$

の解であるとき, p と q の値を求めよ。 [2000]

解答例

$x=p+qi$ が $x^3+px+10=0$ の解なので,

$$(p+qi)^3+p(p+qi)+10=0$$

$$(p^3-3pq^2+p^2+10)+(3p^2q-q^3+pq)i=0$$

p, q が実数より,

$$p^3-3pq^2+p^2+10=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$3p^2q-q^3+pq=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$q \neq 0$ なので，$3p^2-q^2+p=0$，$q^2=3p^2+p \cdots\cdots\cdots ③$

①③より，$p^3-3p(3p^2+p)+p^2+10=0$，$4p^3+p^2-5=0$

$$(p-1)(4p^2+5p+5)=0$$

$4p^2+5p+5=0$ の判別式 $D=25-80=-55<0$ より，実数解は存在しない。

よって，$p=1$

このとき，③より $q^2=4$，$q=\pm 2$

コメント

あまりにもあっさり解けすぎ，不気味な感じのする問題です。

問　題

(1)　xy 平面上で，次の不等式を満たす点$(x,\ y)$の存在する領域を図示せよ。

$$100^{\log_{10}x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10}y-\log_{10}3)}\leqq 0$$

(2)　点$(x,\ y)$が(1)の領域を動くとき，

$$u=\sin\left(360°\times(x+y)\right)-\sqrt{3}\cos\left(360°\times(x+y)\right)$$

がとる値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

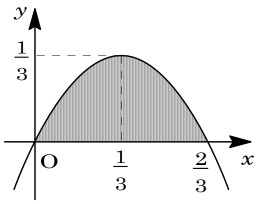
(1)　$100^{\log_{10}x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10}y-\log_{10}3)}\leqq 0$

$x>0$ かつ $y>0$ で，

$$10^{2\log_{10}x}+\frac{\log_{10}10^{-2x}}{\log_{10}10^3}+10^{\log_{10}\frac{y}{3}}\leqq 0$$

$$x^2-\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}\leqq 0$$

$$y\leqq -3x^2+2x=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$



求める点$(x,\ y)$の存在する領域は右図の網点部となる。ただし，x 軸以外の境界線は含む。

(2)　$u=\sin\left(360°\times(x+y)\right)-\sqrt{3}\cos\left(360°\times(x+y)\right)=2\sin\left(360°\times(x+y)-60°\right)$

$x+y=v$ とおくと，$y=-x+v$ ……①となり，①と(1)の領域が共有点をもつ v の範囲を求める。

①と(1)の領域の境界線 $y=-3x^2+2x$ ……②が接するとき，

①②から，$-3x^2+2x=-x+v$，$3x^2-3x+v=0$

$$D/4=9-12v=0,\ \ v=\frac{3}{4}$$

(1)の図より，$0<v\leqq\dfrac{3}{4}$

このとき，$u=2\sin(360°\times v-60°)$から，$-60°<360°\times v-60°\leqq 210°$ なので，

$$2\sin(-60°)<u\leqq 2\sin 90°$$

よって，$-\sqrt{3}<u\leqq 2$

コメント

(1)の要点は $x=a^{\log_a x}$ だけです。この式は $x=\log_a a^x$ と対等な関係式です。ところが数Ⅱにおいては，後者の関係式と比べると，前者は冷遇されているとしか思えません。

問　題

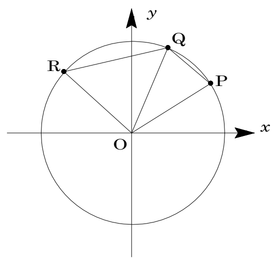
単位円周上の 3 点

$$P(\cos\theta,\ \sin\theta),\ Q(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\ R(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$$

を考える。θが$0°$から$360°$まで動くとき，PQ^2+QR^2がとる値の範囲を求めよ。

[1998]

解答例



$$PQ^2=(\cos 2\theta-\cos\theta)^2+(\sin 2\theta-\sin\theta)^2$$
$$=1+1-2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)$$
$$=2-2\cos\theta$$
$$QR^2=(\cos 4\theta-\cos 2\theta)^2+(\sin 4\theta-\sin 2\theta)^2$$
$$=1+1-2(\cos 4\theta\cos 2\theta+\sin 4\theta\sin 2\theta)$$
$$=2-2\cos 2\theta$$
$$PQ^2+QR^2=(2-2\cos\theta)+(2-2\cos 2\theta)$$
$$=4-2\cos\theta-2\cos 2\theta$$
$$=-4\cos^2\theta-2\cos\theta+6=-4\left(\cos\theta+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$$

$0°\leqq\theta\leqq 360°$から，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

PQ^2+QR^2は，連続的に値が変化し，$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$のとき最大値$\dfrac{25}{4}$をとり，

$\cos\theta=1$のとき最小値 0 をとるので，

$$0\leqq PQ^2+QR^2\leqq\frac{25}{4}$$

コメント

三角比の利用も考えられますが，この場合，一般性の失われる可能性があるかどうかを点検しなくてはいけません。座標計算で解けばその心配はありませんので，そうしました。計算も難しくはありません。

問　題

関数 $f(t)=(\sin t-\cos t)\sin 2t$ を考える。

(1)　$x=\sin t-\cos t$ とおくとき，$f(t)$ を x を用いて表せ。

(2)　t が $0\leqq t\leqq \pi$ の範囲を動くとき，$f(t)$ の最大値と最小値を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　$f(t)=(\sin t-\cos t)\sin 2t$ に対して，$x=\sin t-\cos t$ とおくと，

$$x^2=1-2\sin t\cos t=1-\sin 2t\,,\ \ \sin 2t=1-x^2$$

すると，$f(t)=x(1-x^2)=-x^3+x$ である。

(2)　$0\leqq t\leqq \pi$ のとき，$x=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ より，$-1\leqq x\leqq\sqrt{2}$ となる。

$f(t)=g(x)$ とおくと，

$$g'(x)=-3x^2+1$$

これより，$g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

ここで，$-\frac{2}{9}\sqrt{3}>-\sqrt{2}$ に注意すると，$f(t)$ の最大値は $\frac{2}{9}\sqrt{3}$，最小値は $-\sqrt{2}$ である。

コメント

三角関数と微分と増減に関する頻出の問題です。(1)の誘導がなくても，普通は上記の方法で処理します。

問　題

b, c を実数, q を正の実数とする。放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき, 放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いて表せ。 [2017]

解答例＋映像解説

放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q より,

$$P: y=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+q \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, $q>0$ から, P と x 軸の交点の x 座標は, $(*)$より $-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+q=0$ となり,

$$x=\frac{b}{2}-\sqrt{q}\,,\ \ x=\frac{b}{2}+\sqrt{q}$$

これを $x=\alpha$, $\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと, P と x 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta(-x^2+bx+c)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{q})^3=\frac{4}{3}q\sqrt{q}$$

コメント

定積分と面積についての基本事項の確認問題です。

問　題

実数 x, y, z が，$x+y+z=1$，$x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2)　$z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ。　　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　まず，$x+y+z=1$ ……①，$x+2y+3z=5$ ……②について，①－②から，

$$y+2z=4,\ y=-2z+4 \cdots\cdots\text{③}$$

③を①に代入すると，$x=1-(-2z+4)-z=z-3$ ………④

ここで，$P=x^3+y^3+z^3-3xyz$ とおくと，①③④から，

$$\begin{aligned}P&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\&=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=1-3(xy+yz+zx)\\&=1-3\{(z-3)(-2z+4)+(z-3-2z+4)z\}=1-3(-3z^2+11z-12)\\&=9z^2-33z+37=9\left(z-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{27}{4}\end{aligned}$$

よって，$z=\dfrac{11}{6}$ のとき，P は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる。

(2)　$Q=xyz$ とおくと，③④より，

$$Q=(-2z+4)(z-3)z=-2(z-2)(z-3)z=-2(z^3-5z^2+6z)$$

$Q'=-2(3z^2-10z+6)$ となり，$Q'=0$ の解は $z=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$ である。

これより，$z \geqq 0$ で Q の増減を調べると，右表のようになる。

z	0	…	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	…	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	…
Q'		$-$	0	$+$	0	$-$
Q	0	↘		↗		↘

ここで，$z=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ のとき，$z-2=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}>0$，$z-3=\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}<0$ から，このとき $Q=-2(z-2)(z-3)z>0$ である。

よって，$z=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ のとき，Q は最大となる。

コメント

条件付きの最大・最小問題です。変数をまとめて処理をするだけの問題です。

問　題

曲線$C : y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$を考える。

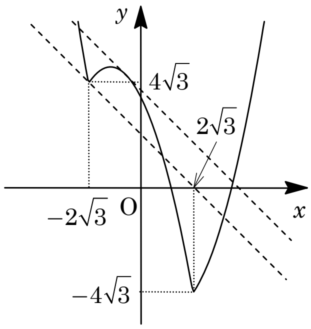
(1)　Cと直線$L : y=-x+t$が異なる 4 点で交わるようなtの値の範囲を求めよ。

(2)　CとLが異なる 4 点で交わるとし，その交点をx座標が小さいものから順に，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_4}$とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|+|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}|}=4$となるような$t$の値を求めよ。

(3)　tが(2)の値をとるとき，Cと線分$\mathrm{P_2P_3}$で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　曲線$C : y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$に対して，



(i)　$\frac{1}{2}x^2-6\geqq 0$ $(x\leqq -2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\leqq x)$のとき

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6=\frac{1}{2}(x-2)^2-8\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$\frac{1}{2}x^2-6<0$ $(-2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3})$のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+6=-\frac{1}{2}(x+2)^2+8\cdots\cdots\cdots②$$

さて，直線$L : y=-x+t\cdots\cdots③$が点$(-2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$を通るとき，$t=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$となる。

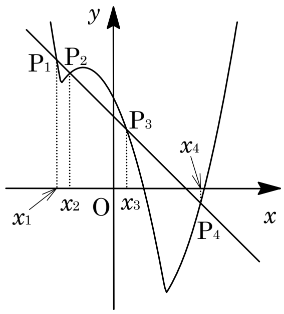
また，Lが放物線②と$x=s$で接するとき，②から$y'=-x-2$なので，

$$-s-2=-1,\ s=-1$$

すると，接点$\left(-1,\ \frac{15}{2}\right)$となり，このとき$t=-1+\frac{15}{2}=\frac{13}{2}$である。

以上より，CとLが異なる 4 点で交わるtの範囲は，$2\sqrt{3}<t<\frac{13}{2}$である。

(2)　CとLが異なる 4 点$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_4}$で交わるとき，そのx座標をそれぞれx_1，x_2，x_3，x_4とおく。



まず，①③を連立して，$\frac{1}{2}x^2-2x-6=-x+t$となり，

$$x^2-2x-2t-12=0$$

この解が$x=x_1$，x_4より，

$$x_1+x_4=2,\ x_1x_4=-2t-12\cdots\cdots\cdots④$$

次に，②③を連立して，$-\frac{1}{2}x^2-2x+6=-x+t$となり，

$$x^2+2x+2t-12=0$$

この解が$x=x_2$，x_3より，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=2t-12\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，L の傾きが -1 から，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\right| = \sqrt{2}\,(x_2 - x_1),\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}\right| = \sqrt{2}\,(x_4 - x_3),\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}\right| = \sqrt{2}\,(x_3 - x_2)$$

ここで，条件より，$\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}\right|} = 4$ なので，$\dfrac{(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3)}{x_3 - x_2} = 4$

$$x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2),\ (x_4 - x_1)^2 = 25(x_3 - x_2)^2$$

$$(x_1 + x_4)^2 - 4x_1x_4 = 25\{(x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3\}$$

④⑤を代入して，$4 - 4(-2t - 12) = 25\{4 - 4(2t - 12)\}$ となり，

$$1 + 2t + 12 = 25(1 - 2t + 12),\ 52t - 312 = 0$$

よって，求める t の値は，$t = 6$ である。

(3)　$t = 6$ のとき，$x_2 + x_3 = -2$，$x_2x_3 = 0$ より，$(x_2,\ x_3) = (-2,\ 0)$ となる。

このとき，C と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積 S は,

$$S = \int_{-2}^{0} \left\{-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 - (-x + 6)\right\}dx = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x(x + 2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(0 + 2)^3 = \frac{2}{3}$$

コメント

絶対値つき関数のグラフを題材とした総合問題です。解答例では，C と L をそのまま扱いましたが，曲線 $y = \left|\dfrac{1}{2}x^2 - 6\right| - x$ と直線 $y = t$ という組で処理しても構いません。計算量が少しだけ減少します。

問　題

関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，$x=0$ のとき極大値 M をとり，$x=\alpha$ のとき極小値 m をとるという。ただし $\alpha\neq 0$ とする。このとき, p, q, r, s を α , M, m で表せ。

[2014]

解答例＋映像解説

関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ に対し，$f'(x)=3px^2+2qx+r$

条件より，$f'(x)=0$ の解が $x=0,\ \alpha\ (\alpha\neq 0)$ なので，$p\neq 0$ である。

さて，$f'(0)=0$，$f(0)=M$ から，$r=0$ ……①，$s=M$ ……②

また，$f'(\alpha)=0$，$f(\alpha)=m$ から，

$$3p\alpha^2+2q\alpha+r=0\ \cdots\cdots③,\quad p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s=m\ \cdots\cdots④$$

すると，①③より，$3p\alpha^2+2q\alpha=0$ となり，$q=-\dfrac{3}{2}p\alpha$ ………⑤

①②④より，$p\alpha^3+q\alpha^2+M=m$ から，⑤を代入して，$p\alpha^3-\dfrac{3}{2}p\alpha^3+M=m$ より，

$$\frac{1}{2}p\alpha^3=M-m\,,\quad p=\frac{2(M-m)}{\alpha^3}\ \cdots\cdots⑥$$

⑤に代入して，$q=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2(M-m)}{\alpha^3}\cdot\alpha=-\dfrac{3(M-m)}{\alpha^2}$ ………⑦

ここで，逆に，①②⑥⑦が成り立つ場合について，

(i)　$p>0$ のとき

$x=0$ のとき極大，$x=\alpha$ のとき極小となることから，$f'(x)$ の符号は $x=0$ の前後で正から負，$x=\alpha$ の前後で負から正と変化するので，$\alpha>0$ である。

すると，$M>m$ なので，⑥から $p>0$ を満たしている。

(ii)　$p<0$ のとき

(i)と同様に考えると，$\alpha<0$ であり，⑥から $p<0$ を満たしている。

(i)(ii)より，いずれの場合についても，求める条件は①②⑥⑦であり，

$$p=\frac{2(M-m)}{\alpha^3},\quad q=-\frac{3(M-m)}{\alpha^2},\quad r=0,\quad s=M$$

コメント

必要条件を求め，十分性を確認するという方法で記しました。内容は，3 次関数の値の増減について，基本の確認です。

問　題

曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。 [2013]

解答例＋映像解説

曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ ……①と直線 $y=mx+4$ ……②に対して，

(a)　$x\geqq 0$ のとき　①より，$y=x^2+x+4-3x=x^2-2x+4$ ………③

②との共有点は，$x^2-2x+4=mx+4$ より，$x=0,\ m+2$

$m\geqq -2$ のとき $x=0,\ m+2$，$m<-2$ のとき $x=0$

(b)　$x\leqq 0$ のとき　①より，$y=x^2+x+4+3x=x^2+4x+4$ ………④

②との共有点は，$x^2+4x+4=mx+4$ より，$x=0,\ m-4$

$m\leqq 4$ のとき $x=0,\ m-4$，$m>4$ のとき $x=0$

(a)(b)より，m の値で場合分けをし，①②で囲まれる部分の面積を S とすると，

(i)　$m<-2$ のとき

$$S=\int_{m-4}^{0}\{mx+4-(x^2+4x+4)\}dx=-\int_{m-4}^{0}x(x-m+4)dx=\frac{1}{6}(4-m)^3$$

(ii)　$-2\leqq m\leqq 4$ のとき

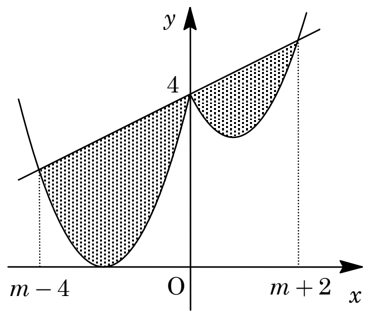
$$S=\int_{m-4}^{0}\{mx+4-(x^2+4x+4)\}dx+\int_{0}^{m+2}\{mx+4-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$=-\int_{m-4}^{0}x(x-m+4)dx-\int_{0}^{m+2}x(x-m-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(4-m)^3+\frac{1}{6}(m+2)^3$$

$$=3m^2-6m+12$$

$$=3(m-1)^2+9$$



よって，$m=1$ のとき S は最小値をとる。

(iii)　$m>4$ のとき

$$S=\int_{0}^{m+2}\{mx+4-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$=-\int_{0}^{m+2}x(x-m-2)dx=\frac{1}{6}(m+2)^3$$

(i)～(iii)より，S は m について連続なので，$m=1$ のとき S は最小値をとる。

コメント

定積分と面積に関する基本題です。微分の出番もありませんでした。

問　題

曲線$C: y = x^3 - kx$（k は実数）を考える。C 上に点$\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ $(a \neq 0)$をとる。次の問いに答えよ。

(1) 点 A における C の接線をl_1とする。l_1と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2) 点 B における C の接線をl_2とする。l_1とl_2が直交するとき, a と k が満たす条件を求めよ。

(3) l_1とl_2が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。　[2009]

解答例

(1) $C: y = x^3 - kx$ ……①に対して，$y' = 3x^2 - k$ となるので，$\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ における接線l_1の方程式は,

$$y - (a^3 - ka) = (3a^2 - k)(x - a),\quad y = (3a^2 - k)x - 2a^3 \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$x^3 - kx = (3a^2 - k)x - 2a^3$

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0,\ (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

点 B の x 座標は，$x \neq a$ より，$x = -2a$

(2) 点 B における接線l_2の傾きは，$y' = 3(-2a)^2 - k = 12a^2 - k$

l_1とl_2が直交することより，$(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1$

$$36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

(3) ③を満たす 0 でない a が存在する条件を求める。まず，$u = a^2 > 0$ とおくと，

$$36u^2 - 15ku + k^2 + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots④$$

④を満たす正の u が存在する条件は，$k^2 + 1 > 0$ に注意すると，

$$D = 15^2k^2 - 4 \times 36(k^2 + 1) = 9(9k^2 - 16) = 9(3k + 4)(3k - 4) \geqq 0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$u = \frac{5}{24}k > 0 \cdots\cdots\cdots⑥$$

よって，⑤⑥より，$k \geqq \dfrac{4}{3}$ となる。

コメント

接線どうしの直交を題材にした頻出基本問題です。

問　題

実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ を考える。$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とする。α，β，γ の間に $\alpha+\gamma=2\beta$ という関係があるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a の式で表せ。

(2)　α，β，γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(1)で求めた a の式を $f(a)$ とする。a が(2)の範囲を動くとき，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。　[2008]

解答例

(1)　$P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ に対して，$P(x)=0$ の解が α，β，γ であるので，

$$\alpha+\beta+\gamma=-3a\cdots\cdots\cdots①,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3a\cdots\cdots\cdots②,\ \alpha\beta\gamma=-b\cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$\alpha+\gamma=2\beta\cdots\cdots\cdots④$

①④より，$\beta=-a\cdots\cdots⑤$となり，また②④より，$2\beta^2+\gamma\alpha=3a\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より，$2a^2+\gamma\alpha=3a$，$\gamma\alpha=-2a^2+3a\cdots\cdots\cdots⑦$

③⑤⑦より，$-a(-2a^2+3a)=-b$，$b=-2a^3+3a^2$

(2)　⑤より β は実数であるので，α，γ がともに実数である条件を求める。

④⑤より，$\alpha+\gamma=-2a$

さらに，⑦を考え合わせると，α，γ は t の 2 次方程式 $t^2+2at-2a^2+3a=0$ の 2 つの解となるので，

$$D/4=a^2-(-2a^2+3a)=3a(a-1)\geqq 0$$

よって，$a\leqq 0$, $1\leqq a$ である。

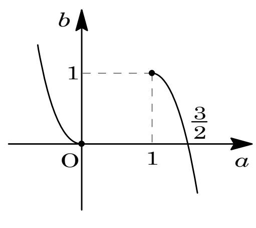
a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	↘	0	↗	1	↘

(3)　(1)より，$f(a)=-2a^3+3a^2$ となり，

$$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右上表のようになる。

よって，(2)から $a\leqq 0$, $1\leqq a$ において，$b=f(a)$ のグラフは右図のとおりである。



コメント

3 次方程式の解と係数の関係を題材にした問題です。連立方程式のまとめ方が問われています。

問　題

a を正の定数とし,

$$f(x)=\big||x-3a|-a\big|,\quad g(x)=-x^2+6ax-5a^2+a$$

を考える。

(1)　方程式 $f(x)=a$ の解を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[2008]

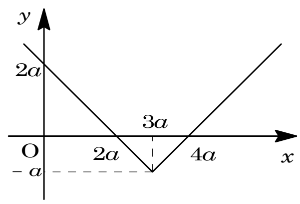
解答例

(1)　$h(x)=|x-3a|-a$ とおくと,

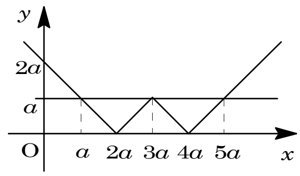
$$h(x)=-x+2a\ (x<3a)$$

$$h(x)=x-4a\ (x\geqq 3a)$$

よって, $y=h(x)$ のグラフは右図のようになる。



さて, $f(x)=|h(x)|$ より, $y=f(x)$ のグラフは, 右下図のようになり, $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点を考えると, 方程式 $f(x)=a$ の解は,

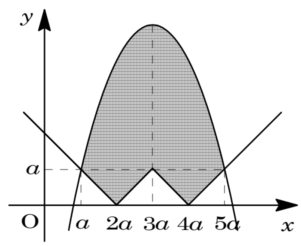


$$x=a,\ 3a,\ 5a$$

(2)　$g(x)=-x^2+6ax-5a^2+a=-(x-3a)^2+4a^2+a$

また, $g(a)=g(5a)=a$ である。

これより, $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S は,



$$S=\int_a^{5a}(-x^2+6ax-5a^2+a-a)\,dx+\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2$$

$$=-\int_a^{5a}(x-a)(x-5a)\,dx+2a^2$$

$$=\frac{1}{6}(5a-a)^3+2a^2=\frac{32}{3}a^3+2a^2$$

コメント

センターレベルの微積分の基本題です。計算も容易です。

問　題

xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき, k の満たす条件を求めよ。

(2)　k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。　[2007]

解答例

(1)　$C: y=x^2$ と $l: y=x+k$ の共有点の x 座標は,

$$x^2=x+k,\ x^2-x-k=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$の異なる 2 つの実数解が，ともに $-2<x<2$ に存在するので,

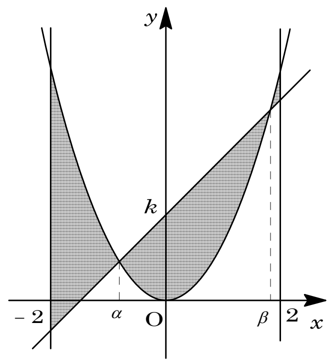
$$D=1+4k>0,\ k>-\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$f(x)=x^2-x-k$ として,

$$f(2)=4-2-k>0,\ k<2\cdots\cdots\cdots②$$

$$f(-2)=4+2-k>0,\ k<6\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$-\frac{1}{4}<k<2$



(2)　$(*)$より，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$ となり，この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。

すると，求める 3 つの部分の面積の和 S は,

$$S=\int_{-2}^{\alpha}(x^2-x-k)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx+\int_{\beta}^{2}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^2-x-k)\,dx-2\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(x^2-k)\,dx-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^2+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{16}{3}-4k+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+4k}\right)^3$$

コメント

積分計算がポイントです。計算を迅速にかつ正確に遂行するためには，上記のような工夫が必要になります。

問　題

a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。 [2006]

解答例

$f(x)=x^3-3ax+a$ より，$f'(x)=3x^2-3a$ となる。

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ は単調に増加する。これより，$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(0)=a\geqq 0$$

よって, $a\leqq 0$ から，$a=0$ となる。

(ii)　$a>0$ のとき

$$f'(x)=3(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii－i)　$0<\sqrt{a}\leqq 1\ (0<a\leqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+a\geqq 0,\ 2\sqrt{a}\leqq 1$$

すると，$a\leqq\dfrac{1}{4}$ となり，$0<a\leqq 1$ から $0<a\leqq\dfrac{1}{4}$ である。

(ii－ii)　$\sqrt{a}>1\ (a>1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(1)=1-2a\geqq 0$$

すると，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，$a>1$ から解なし。

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{4}$

コメント

参考書の例題に掲載されているような 3 次関数の増減についての基本問題です。

問　題

$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の増減表を作り，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。　[2005]

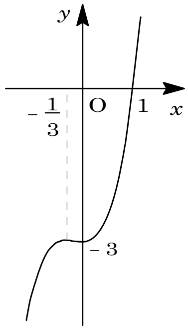
解答例

(1)　$f(x)=2x^3+x^2-3$ より，

$$f'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{80}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$



(2)　点 $(t,\ 2t^3+t^2-3)$ における接線は，

$$y-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(x-t)$$

原点を通るとき，

$$-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(-t)$$

$$4t^3+t^2+3=0,\ (t+1)(4t^2-3t+3)=0$$

ここで，$4t^2-3t+3=0$ は $D=9-48<0$ より実数解をもたないので，$t=-1$ である。

このとき，接線は $y=4x$ であるので，図より，直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲は，$m>4$ である。

コメント

教科書の例題にあるような落とすことのできない問題です。

問　題

3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ に関して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつための条件を，$f(x)$ の係数を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小になるとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ。また，$y=f(x)$ のグラフは平行移動によって $y=x^3+\dfrac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ。　[2004]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ より，$f'(x)=3x^2+6ax+b$

$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$D/4=9a^2-3b>0,\ \ 3a^2>b$$

(2)　点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m なので，

$$m=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^3-\alpha^3+3a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+3a(\beta+\alpha)+b=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+3a(\alpha+\beta)+b$$

α，β は $f'(x)=0$ の 2 つの解より，

$$\alpha+\beta=-2a,\ \ \alpha\beta=\frac{b}{3}$$

よって，$m=4a^2-\dfrac{b}{3}-6a^2+b=-2a^2+\dfrac{2}{3}b$

さて，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動すると，

$$y=(x-p)^3+3a(x-p)^2+b(x-p)+c+q$$

$$=x^3+(-3p+3a)x^2+(3p^2-6ap+b)x-p^3+3ap^2-bp+c+q$$

ここで，$-3p+3a=0$ ……①，$-p^3+3ap^2-bp+c+q=0$ ……②とおくと，①より $p=a$，②に代入して $q=-2a^3+ba-c$ となる。

この p, q の値だけ，$y=f(x)$ のグラフを平行移動すると，

$$y=x^3+(-3a^2+b)x=x^3+\frac{3}{2}\left(-2a^2+\frac{2}{3}b\right)x=x^3+\frac{3}{2}mx$$

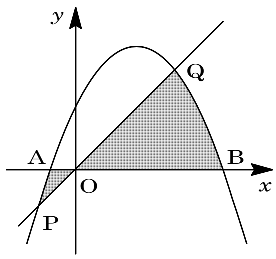
コメント

3 次関数のグラフの有名な性質を証明する問題です。工夫もせず，普通に計算を進めました。

問　題

放物線$C: y=-x^2+2x+1$と x 軸の共有点を$A(a,\ 0)$，$B(b,\ 0)$とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を$P(\alpha,\ m\alpha)$，$Q(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$とする。線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。 [2003]

解答例



$C: y=-x^2+2x+1$ ……①，直線 $y=mx$ ……②に対して，①と x 軸との交点 A, B の x 座標 a, b は，$-x^2+2x+1=0$ より，$x=1\pm\sqrt{2}$ なので，$a=1-\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$ となる。

①と x 軸で囲まれた部分の面積をS_1とすると，

$$S_1=\int_a^b(-x^2+2x+1)\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3$$

また，①と②の交点 P, Q の x 座標α，β は，$-x^2+2x+1=mx$ より，

$$x=\frac{-(m-2)\pm\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$ なので，

$$\alpha=\frac{-(m-2)-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2},\quad \beta=\frac{-(m-2)+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$

①と②で囲まれた部分の面積をS_2とすると，

$$S_2=\int_\alpha^\beta(-x^2+2x+1-mx)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+4}\right)^3$$

条件から，線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と，線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいことより，$S_1=S_2$となる。

$$\sqrt{(m-2)^2+4}=2\sqrt{2},\quad (m-2)^2+4=8,\quad m-2=\pm 2$$

$m\neq 0$ より，$m=4$ である。

コメント

$S_1=S_2$が発見できれば，後はいわゆる$\dfrac{1}{6}$公式を用いる基本的な頻出問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　実数の定数 p に対して，3 次方程式 $x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ。

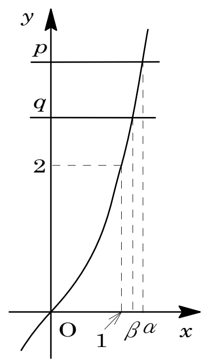
(2)　$p,\ q$ は定数で $p\geqq 2,\ q\geqq 2$ とする。2 つの 3 次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とするとき，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$ が成立することを示せ。　[2002]

解答例

(1)　$x^3+x-p=0$ より，$x^3+x=p$

$f(x)=x^3+x$ とおくと，$f'(x)=3x^2+1>0$

よって，$f(x)$ は単調増加関数である。すると，$y=f(x)$ と $y=p$ のグラフはつねに 1 つの共有点をもつことになり，$x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個である。



(2)　$f(\alpha)=p$，$f(\beta)=q$ なので，$p\geqq 2,\ q\geqq 2$ から，$\alpha\geqq 1,\ \beta\geqq 1$ となる。

(i)　$\alpha=\beta$ のとき

$p=q$ となるので，$|\alpha-\beta|=\dfrac{1}{4}|p-q|$ が成り立つ。

(ii)　$\alpha\neq\beta$ のとき

$$\frac{|p-q|}{|\alpha-\beta|}=\left|\frac{p-q}{\alpha-\beta}\right|=\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|=\left|\frac{\alpha^3+\alpha-(\beta^3+\beta)}{\alpha-\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1)}{\alpha-\beta}\right|=|\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1|$$

$$>1+1+1+1=4$$

よって，$|p-q|>4|\alpha-\beta|$ より，$|\alpha-\beta|<\dfrac{1}{4}|p-q|$

(i)(ii)より，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$ となる。

コメント

(2)については，まず $f'(1)=4$ より平均値の定理の利用という解法が浮かびましたが，これは範囲外でした。

問　題

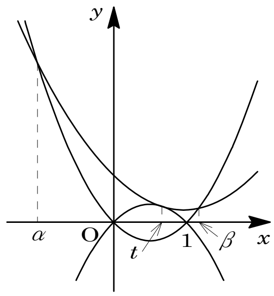
平面上に 3 つの放物線 $C_1: y=-x(x-1)$，$C_2: y=x(x-1)$，$C: y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$ を考える。いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする。

(1) a, b を t を用いて表せ。

(2) 2 つの放物線 $C,\ C_2$ で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ。

(3) t を動かすとき, S の最小値を求めよ。 [2002]

解答例



(1) $C_1: y=-x^2+x$ ……①，$C_2: y=x^2-x$ ……②

$$C: y=\frac{1}{2}x^2+ax+b \cdots\cdots ③$$

まず，③が点 $(t,\ -t^2+t)$ を通るので，

$$-t^2+t=\frac{1}{2}t^2+at+b,\quad at+b=-\frac{3}{2}t^2+t \cdots\cdots ④$$

また，③より $y'=x+a$ となり，$x=t$ のとき $y'=t+a$

一方，①より $y'=-2x+1$ となり，$x=t$ のとき $y'=-2t+1$ であるので，$t+a=-2t+1$，$a=-3t+1$ ………⑤

⑤を④に代入して，$t(-3t+1)+b=-\frac{3}{2}t^2+t$，$b=\frac{3}{2}t^2$

(2) (1)より，③は，$y=\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2$ ……… ③′

②と③′の交点は，$x^2-x=\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2$，$\frac{1}{2}x^2+(3t-2)x-\frac{3}{2}t^2=0$

$$x=-(3t-2)\pm\sqrt{(3t-2)^2+3t^2}=-(3t-2)\pm 2\sqrt{3t^2-3t+1}$$

この解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2-(x^2-x)\right\}dx=\int_\alpha^\beta -\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}\left(4\sqrt{3t^2-3t+1}\right)^3=\frac{16}{3}\left(\sqrt{3t^2-3t+1}\right)^3$$

(3) $f(t)=3t^2-3t+1$ とおくと，$S=\frac{16}{3}\left(\sqrt{f(t)}\right)^3$ となり，

$$f(t)=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geqq\frac{1}{4}$$

よって，$t=\frac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\frac{16}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3=\frac{2}{3}$ をとる。

コメント

微積分についての頻出基本問題です。計算量も妥当です。

問　題

関数 $f(x)=x-2+3|x-1|$ を考える。$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，関数

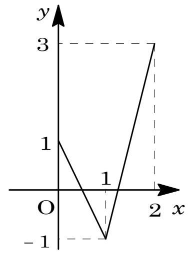
$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ。 [2000]

解答例

$x<1$ のとき，$f(x)=x-2-3(x-1)=-2x+1$

$x\geqq 1$ のとき，$f(x)=x-2+3(x-1)=4x-5$



(i)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x(-2t+1)\,dt=\Big[-t^2+t\Big]_0^x=-x^2+x$$
$$=-x(x-1)\geqq 0$$
$$\int_x^2 f(t)\,dt=\int_x^1(-2t+1)\,dt+\int_1^2(4t-5)\,dt$$
$$=\Big[-t^2+t\Big]_x^1+\Big[2t^2-5t\Big]_1^2=x^2-x+1>0$$

すると，$g(x)=\left|-x^2+x\right|+\left|x^2-x+1\right|=-x^2+x+x^2-x+1=1$

(ii)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1(-2t+1)\,dt+\int_1^x(4t-5)\,dt=\Big[-t^2+t\Big]_0^1+\Big[2t^2-5t\Big]_1^x$$
$$=2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$$
$$\int_x^2 f(t)\,dt=\int_x^2(4t-5)\,dt=\Big[2t^2-5t\Big]_x^2=-2x^2+5x-2$$
$$=-(2x-1)(x-2)\geqq 0$$

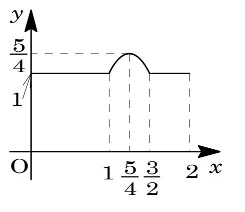
すると，$g(x)=\left|2x^2-5x+3\right|+\left|-2x^2+5x-2\right|=\left|2x^2-5x+3\right|-2x^2+5x-2$

(ii-i)　$1\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}$ のとき

$$g(x)=-(2x^2-5x+3)-2x^2+5x-2=-4x^2+10x-5=-4\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$$

(ii-ii)　$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2$ のとき　$g(x)=2x^2-5x+3-2x^2+5x-2=1$

(i)(ii)より，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，$y=g(x)$ のグラフを書くと，右図のようになり，$g(x)$ は $x=\dfrac{5}{4}$ のとき，最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。



コメント

丁寧に場合分けができれば，正しい結論が導けます。

問　題

放物線 $y = x^2 + 1$ 上に点 P をとる。原点 O と P を結ぶ線分 OP を

$$t^2 : (1-t^2) \quad (0<t<1)$$

に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 P が放物線上を動くとき点 Q が描く曲線 C の方程式を求めよ。

(2)　放物線 $y = x^2 + 1$ と曲線 C が囲む図形の面積 S を求めよ。

(3)　$0<t<1$ における S の最大値を求めよ。　[1998]

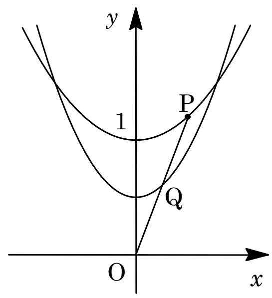
解答例

(1)　$\mathrm{P}(u,\ v)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，

$$v = u^2 + 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より，$(x,\ y) = t^2(u,\ v)$

$$u = \frac{x}{t^2},\quad v = \frac{y}{t^2} \cdots\cdots\cdots ②$$



②を①に代入して，$\dfrac{y}{t^2} = \dfrac{x^2}{t^4} + 1$

曲線 C の方程式は，$y = \dfrac{x^2}{t^2} + t^2 \cdots\cdots\cdots ③$

(2)　③と $y = x^2 + 1$ の交点の x 座標は，$x^2 + 1 = \dfrac{x^2}{t^2} + t^2$

変形して，$\dfrac{1-t^2}{t^2}(x-t)(x+t) = 0$ より，$x = \pm t$

$$S = \int_{-t}^{t} -\frac{1-t^2}{t^2}(x-t)(x+t)\,dx = -\frac{1-t^2}{t^2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(2t)^3 = \frac{4}{3}(t-t^3)$$

(3)　$S' = \dfrac{4}{3}(1-3t^2)$

$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき S は最大値をとる。

このとき，$S = \dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \dfrac{8}{27}\sqrt{3}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
S'		＋	0	－	
S		↗		↘	

コメント

本問は 3 つの小問に分かれていますが，(1)(2)の誘導がなくても方針に迷いは生じません。計算ミスが致命的という問題です。