《2019 入試対策》

東京大学

文系数学

1998—2018

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された東京大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

なお，映像解説の一覧は，下記のページに掲載しています。

PC サイト トップページ ≫ 東大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　座標平面上の点$(x,\ y)$が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき, xのとりうる最大の値を求めよ。　[2012]

2　Cを半径 1 の円周とし, A をC上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻$t=0$に出発し, C上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻$t=2\pi$まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれm, 1, 2 であるとする(したがって, Q はCをちょうど一周する)。ただし, mは$1\leqq m\leqq 10$を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さmと時刻tの組をすべて求めよ。

[2010]

3　0 以上の実数s, tが$s^2+t^2=1$を満たしながら動くとき, 方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。　[2005]

4　2 つの放物線$y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$, $y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$が相異なる 2 点で交わるような$\theta$の範囲を求めよ。ただし, $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$とする。　[2002]

■ 微分と積分

1　$a>0$とし, $f(x)=x^3-3a^2x$とおく。

(1)　$x\geqq 1$で$f(x)$が単調に増加するための, aについての条件を求めよ。

(2)　次の 2 条件を満たす点$(a,\ b)$の動きうる範囲を求め, 座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式$f(x)=b$は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに, 方程式$f(x)=b$の解を$\alpha<\beta<\gamma$とすると$\beta>1$である。

[2018]

2　座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える。ただし $s,\ t$ は実数で，$0<s$，$0<t<1$ を満たすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x\geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

[2017]

3　座標平面上の 2 つの放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-x^2+px+q$ が点 $(-1,\ 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1)　p と q の値を求めよ。

(2)　放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t)=0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3)　$t>0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2016]

4　以下の問いに答えよ。

(1)　t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2)　(1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t\geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。　[2014]

5　関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を l とし，C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O，P，Q とし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は，O，P，Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。

[2013]

6　座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める。$s,\ t$ は実数とし $t<0$ を満たすとする。点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする。

(1)　l_1，l_2 の方程式を求めよ。

(2)　a を正の実数とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ をすべて求めよ。　[2012]

7　x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$$

をすべて満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$ を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。　[2011]

8　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して，$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式になるような定数 $a,\ b,\ c$ の組をすべて求めよ。　[2010]

9　2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\int_0^2|f'(x)|\,dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

[2009]

10　$0\leqq\alpha\leqq\beta$ を満たす実数 α，β と，2 次式 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ について，$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S=\int_0^{\alpha}f(x)\,dx$ を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。　[2008]

11　θ は，$0°<\theta<45°$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を，$\cos\theta$ で表せ。　[2006]

12　$f(x)$ を $f(0)=0$ を満たす 2 次関数とする。$a,\ b$ を実数として，関数 $g(x)$ を次で与える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\leqq 0)\\ bx & (x>0)\end{cases}$$

$a,\ b$ をいろいろ変化させ，$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_0^1\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$ が最小になるようにする。このとき，$g(-1)=f(-1)$，$g(1)=f(1)$ であることを示せ。

[2005]

13 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x\,,\ \ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x)\,,\ \ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。 [2004]

14 a, b, c を実数とし, $a\neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A) $f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f'(1)\leqq 6$

(B) $-1\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対し, $f(x)\leqq 3x^2-1$

このとき, 積分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。 [2003]

15 2 つの関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $g(x)=px^3+qx^2+rx$ が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0)=g'(0),\ \ f(-1)=-1,\ \ f'(-1)=0\,,\ \ g(1)=3,\ \ g'(1)=0$$

ここで, $f(x)$, $g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$, $g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで, 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$ の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。ただし $f''(x)$, $g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$, $g'(x)$ の導関数を表す。 [2002]

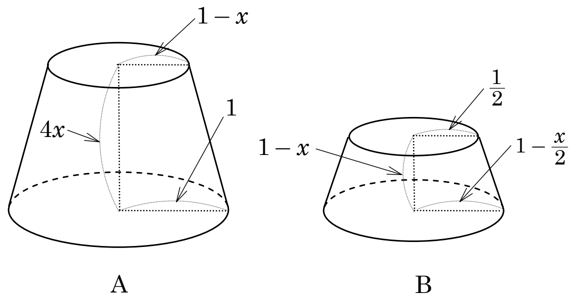
16 時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $(t^2,\ 0)$ で与えられる。点 B は, 最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが, 点 C$(0,\ 3)$ に到達した後は, その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

$t>0$ のとき, 三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

(1) 関数 $S(t)$ $(t>0)$ のグラフの概形を描け。

(2) u を正の実数とするとき, $0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数 $M(u)$ $(u>0)$ のグラフの概形を描け。 [2001]

17 図のように底面の半径 1，上面の半径$1-x$，高さ$4x$の直円すい台 A と，底面の半径$1-\dfrac{x}{2}$，上面の半径$\dfrac{1}{2}$，高さ$1-x$の直円すい台 B がある。ただし，$0\leqq x\leqq 1$ である。A と B の体積の和を$V(x)$とするとき，$V(x)$の最大値を求めよ。　[2000]



18 a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1 座標平面上に放物線 C を $y=x^2-3x+4$ で定め，領域 D を $y\geqq x^2-3x+4$ で定める。原点を通る 2 直線 l, m は C に接するものとする。

(1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点$\mathrm{P}(p,\ q)$の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。
　条件：領域 D のすべての点$(x,\ y)$に対し不等式$px+qy\leqq 0$が成り立つ。

[2018]

2 放物線$y=x^2$のうち$-1\leqq x\leqq 1$を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点$\mathrm{A}(1,\ 0)$を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2018]

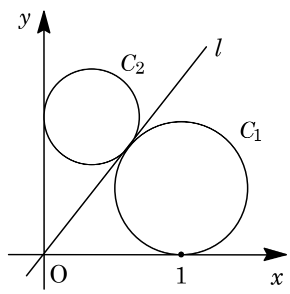
3 座標平面上の 3 点$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$が鋭角三角形をなすための$(x,\ y)$についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点$\mathrm{P}(x,\ y)$の範囲を図示せよ。　[2016]

4 座標平面上の 2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$を考える。また, P を座標平面上の点とし, その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し, その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで, 点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある。 [2015]

5 l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに, 以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1, C_2 を考える。



(i) 円 C_1, C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1, C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点$(1,\ 0)$で接し, 円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1, 円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と, その最小値を求めよ。 [2015]

6 座標平面の原点を O で表す。線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と, 線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が, 線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき, 線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $-3 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき, 点$(s,\ t)$が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。 [2014]

7 座標平面上の 3 点 P$(0,\ -\sqrt{2})$, Q$(0,\ \sqrt{2})$, A$(a,\ \sqrt{a^2+1})$ $(0 \leqq a \leqq 1)$を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 PA $-$ AQ は a によらない定数であることを示し, その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする。このとき, 線分の長さの和 PA $+$ AB $+$ BC は a によらない定数であることを示し, その値を求めよ。

[2013]

8 a, b を実数の定数とする。実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 25$, $2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき, $z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。 [2013]

9 実数 t は $0<t<1$ を満たすとし, 座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。 [2012]

10 座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を, 3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, $\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。 [2011]

11 座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし, 点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また, 点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 t の円 C_3 が, C_1 に内接し, かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし, b は正の実数とする。

(1) a, b を t を用いて表せ。また, t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき, b の最大値を求めよ。 [2009]

12 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ -1)$ に対し, $\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし, $\mathrm{P}\neq\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ とする。 [2008]

13 連立不等式 $y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$, $y+x^2-2x-3\leqq 0$ の表す領域を D とする。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。 [2007]

14 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

$\triangle\mathrm{PQR}$ は 1 辺の長さ a の正三角形であり, 点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。 [2004]

15 a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。

$$y \geqq x^2,\quad y \leqq -2x^2+3ax+6a^2$$

領域 D における $x+y$ の最大値, 最小値を求めよ。 [2004]

16 a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\ 3x+y \geqq b,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。 [2003]

17 xy 平面内の領域$-1 \leqq x \leqq 1$，$-1 \leqq y \leqq 1$において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。 [2000]

18 c を $c > \dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。 [1999]

19 $a,\ b$ は実数で，$b \neq 0$ とする。xy 平面に原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$および 2 点$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(a,\ b)$をとる。

(1) △OPQ が鋭角三角形となるための $a,\ b$ の条件を不等式で表し，点$(a,\ b)$の範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) m, n を整数とする。a, b が(1)で求めた条件をみたすとき，不等式

$$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2 \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。 [1998]

■ 図形と計量

1 O を原点とする座標平面上に点$\mathrm{A}(-3,\ 0)$をとり，$0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(i), (ii)を満たす 2 点 B, C を考える。

(i) B は $y>0$ の部分にあり，$\mathrm{OB}=2$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=180^\circ-\theta$ である。

(ii) C は $y<0$ の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$ である。ただし△ABC は O を含むものとする。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1) △OAB と△OAC の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2) θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき，△OAB と△OAC の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。 [2010]

2 四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。 [2006]

3 半径 r の球面上に 4 点 A，B，C，D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。 [2001]

■ ベクトル

1 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。 [2017]

2 xyz 空間に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sqrt{3},\ 0)$ をとる。△ABC を 1 つの面とし，$z\geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる。さらに△ABD を 1 つの面とし，点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる。

(1) 点 E の座標を求めよ。

(2) 正四面体 ABDE の $y\leqq 0$ の部分の体積を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列

1 数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots$ を，$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) a_7 と 1 の大小を調べよ。

(2) $n\geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$ を満たす n の範囲を求めよ。

(3) a_n が整数となる $n\geqq 1$ をすべて求めよ。 [2018]

2　$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。　[2017]

3　以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1)　n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2)　n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3)　数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1=1,\ x_{n+1}=3^{x_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。　[2016]

4　r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 $n,\ m$ に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。　[2014]

5　実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

[2011]

6　$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件

$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\ ;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;c]$ に対して

$w([a,\ b\ ;c]) = p-q-(a+b)$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\ ;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p=q$ の場合を考える。

(2)　s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。

[2011]

7　自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

[2009]

8 p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$a_1=p,\ b_1=p+1$$
$$a_{n+1}=a_n+pb_n,\ b_{n+1}=pa_n+(p+1)b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n-\frac{n(n-1)}{2}p^2-np,\ b_n-n(n-1)p^2-np-1$$

(2) p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。 [2008]

9 r は $0<r<1$ を満たす実数，n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を，次の条件①，②を満たす 2 つの円で置き換える操作(P)を考える。

① 新しい 2 つの円の半径の比は $r:1-r$ で，半径の和はもとの円の半径に等しい。

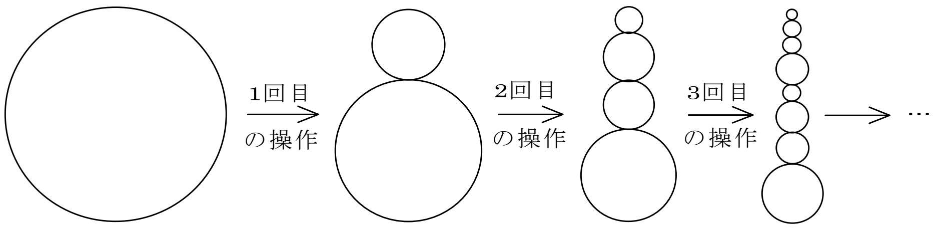
② 新しい 2 つの円は互いに外接し，もとの円に内接する。

以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る。

・最初に，平面上に半径 1 の円を描く。

・次に，この円に対して操作(P)を行い，2 つの円を得る(これを 1 回目の操作という)。

・k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて，操作(P)を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1\leqq k\leqq n-1)$。



(1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

(2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。 [2007]

10 正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば，2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。 [2007]

11　n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式　$x^n+y^n+z^n=xyz$ ……①を考える。

(1)　$n=1$ のとき，①を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，①を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

[2006]

12　3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。　[2005]

13　2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3 を求めよ。また, $n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2)　s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。

(3)　α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。　[2003]

14　n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1)　数列 a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$ は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。　[2002]

15　(1)　x は $0° \leqq x \leqq 90°$ をみたす角とする。

$$\sin y=|\sin 4x|,\ \ \cos y=|\cos 4x|,\ \ 0° \leqq y \leqq 90°$$

となる y を x で表し，そのグラフを xy 平面上に図示せよ。

(2)　α は $0° \leqq \alpha \leqq 90°$ をみたす角とする。$0° \leqq \theta_n \leqq 90°$ をみたす角 θ_n，$n=1,\ 2,\cdots$ を

$$\theta_1=\alpha,\ \ \sin\theta_{n+1}=|\sin 4\theta_n|,\ \ \cos\theta_{n+1}=|\cos 4\theta_n|$$

で定める。k を 2 以上の整数として，$\theta_k=0°$ となる α の個数を k で表せ。　[1998]

■ 確率

1 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則(a), (b)に従って動く点 P を考える。

(a) 最初に, 点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点$(m,\ n)$にあるとき, その 1 秒後の点 P の位置は, 隣接する格子点$(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$のいずれかであり, また, これらの点に移動する確率は, それぞれ$\dfrac{1}{4}$である。

(1) 最初から 1 秒後の点 P の座標を$(s,\ t)$とする。$t-s=-1$となる確率を求めよ。

(2) 点 P が, 最初から 6 秒後に直線$y=x$上にある確率を求めよ。 [2017]

2 A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い, 2 連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目で A と B が対戦する。

(b) 2 試合目で, 1 試合目の勝者と, 1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが$k+1$試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は$\dfrac{1}{2}$で, 引き分けはないものとする。

(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

[2016]

3 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。　[2015]

4 a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii) 取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が$a+2$個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1，p_2 を求めよ。

(2) $n\geqq 3$ に対して p_n を求めよ。　[2014]

5 A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

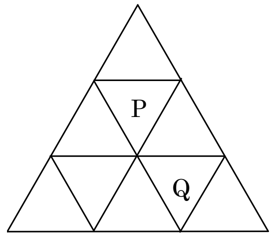
(i) A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii) B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。 [2013]

6 図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。 [2012]



7 2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2)に答えよ。

(1) $m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。 [2010]

8 スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。　[2009]

9 白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率 $\frac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1)，(2)に答えよ。

(1)　操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。　[2008]

10 表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率を求めよ。

(2) (1)で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。[2007]

11 コンピュータの画面に, 記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき, 各操作で, 直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は, それまでの経過に関係なく, p であるとする。

最初に, コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い, 記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に, 記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし, 記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) P_3 を p で表せ。

(3) $n\geqq 4$ のとき, P_n を p と n で表せ。 [2006]

12　Nを1以上の整数とする。数字1, 2, …, Nが書かれたカードを1枚ずつ，計N枚用意し，甲，乙の2人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が1枚カードを引く。そのカードに書かれた数をaとする。引いたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう1回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は，そのカードに書かれた数をbとする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は，$b=0$とする。$a+b>N$の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iii)　$a+b \leqq N$の場合は，乙が1枚カードを引く。そのカードに書かれた数をcとする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iv)　$a+b \geqq c$の場合は，乙はもう1回カードを引く。そのカードに書かれた数をdとする。$a+b<c+d \leqq N$の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，aの値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が2回目にカードを引かないことにしたとき，甲の勝つ確率をaを用いて表せ。

(2)　甲が2回目にカードを引くことにしたとき，甲の勝つ確率をaを用いて表せ。

ただし，各カードが引かれる確率は等しいものとする。　[2005]

13　片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が3枚ある。この3枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が1, 2であれば左端の板を裏返し，3, 4であればまん中の板を裏返し，5, 6であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1回目の操作で出たさいころの目が1であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに2回目の操作を行って出たさいころの目が5であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1)　「白白白」から始めて，3回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて，n回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率をp_nとする。p_{2k+1}（kは自然数）を求めよ。

注意：さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする。　[2004]

14　さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして，X_n，$n=1$，2，$\cdots$ を定める。

(1)　$X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2)　各 n に対し，$X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3)　各 n に対し，$X_n=1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2003]

15　コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

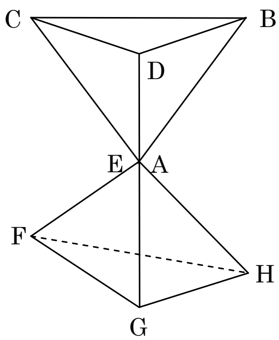
(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2)　X_n を求めよ。　[2001]

16　正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で表す。

$P_1(0)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(0)=\dfrac{1}{2}$，$P_3(0)=\dfrac{1}{8}$，$P_4(0)=\dfrac{1}{8}$ とするとき，$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。　[2000]

17　(1)　四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。



(2)　(1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。　[1999]

■ 論証

1　以下の命題 A, B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n，m，l が $5n+5m+3l=1$ を満たすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。　[2015]

2　円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m \geqq 1$, $n \geqq 1$ であるとする。

[2002]

3　白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも 1 つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が 1 つも残らない場合も同数とみなす。　[2001]

4　(1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ。

(2)　(1)で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。　[1999]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

座標平面上の点$(x,\ y)$が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき, x のとりうる最大の値を求めよ。 [2012]

解答例＋映像解説

条件式 $2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$ を y についてまとめると,

$$3y^2+(4x+5)y+(2x^2+4x-4)=0$$

y の実数条件から, x のとりうる範囲が決まり,

$$D=(4x+5)^2-12(2x^2+4x-4)=-8x^2-8x+73\geqq 0$$

これより, $8x^2+8x-73\leqq 0$ となり, $\dfrac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

よって, x のとりうる最大の値は, $\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$ である。

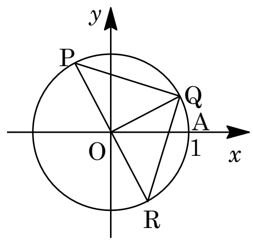
コメント

x と y が等式で関係づけられたときの x のとりうる範囲を求める基本題です。なお, 現在は範囲外ですが, 与えられた式は楕円を表します。

問　題

C を半径 1 の円周とし, A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し, C 上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって, Q は C をちょうど一周する)。ただし, m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。 [2010]

解答例＋映像解説



A(1, 0)のとき, P, Q, R の速さがそれぞれ m, 1, 2 であり, P, Q が反時計回りに, R が時計回りに動くことより, 時刻 t での位置は,

$$\mathrm{P}(\cos mt,\ \sin mt),\ \mathrm{Q}(\cos t,\ \sin t),\ \mathrm{R}(\cos 2t,\ -\sin 2t)$$

さて, △PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形であるので, PR の中点は原点であり, しかも $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は垂直である。

ここで, PR の中点は, $\left(\dfrac{\cos mt+\cos 2t}{2},\ \dfrac{\sin mt-\sin 2t}{2}\right)$から,

$$\cos mt=-\cos 2t \cdots\cdots\text{①},\quad \sin mt=\sin 2t \cdots\cdots\text{②}$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より, $\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t=0$ となり, $\cos 3t=0 \cdots\cdots$③

③から, $0\leqq t\leqq 2\pi$ より, $3t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$ となり,

$$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

そこで, k を整数とするとき, ①②より,

(i)　$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\cos\frac{m}{6}\pi=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{m}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より,}$$

$$\frac{m}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\ m=4+12k$$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4$

(ii)　$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\cos\frac{m}{2}\pi=-\cos\pi=1,\ \sin\frac{m}{2}\pi=\sin\pi=0 \text{ より, } \frac{m}{2}\pi=2k\pi,\ m=4k$$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4,\ 8$

(iii)　$t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{5m}{6}\pi=-\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{5m}{6}\pi=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より,}$$

$$\frac{5}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi,\quad m=\frac{6}{5}\left(\frac{4}{3}+2k\right)=\frac{8+12k}{5}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(iv) $t=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{7m}{6}\pi=-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{7m}{6}\pi=\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\ より,$$

$$\frac{7}{6}m\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\quad m=\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}+2k\right)=\frac{4+12k}{7}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(v) $t=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$$\cos\frac{3m}{2}\pi=-\cos 3\pi=1,\quad \sin\frac{3m}{2}\pi=\sin 3\pi=0\ より,\ \frac{3}{2}m\pi=2k\pi,\quad m=\frac{4}{3}k$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4,\ 8$

(vi) $t=\dfrac{11}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{11m}{6}\pi=-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{11m}{6}\pi=\sin\frac{11}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ より,$$

$$\frac{11}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi,\quad m=\frac{6}{11}\left(\frac{4}{3}+2k\right)=\frac{8+12k}{11}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

コメント

t の値はすぐに求まるのですが，t の各々の値に対して，m の値を 1 つずつチェックしながら求めていくと，予想以上に計算時間がかかります。

問　題

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。 [2005]

解答例

$s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$s^2+t^2=1$ のとき，$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ ……①に対して，$x^2=X$ とおくと，①は,

$$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0\text{………②}$$

②の解 $X=\alpha$，β について，

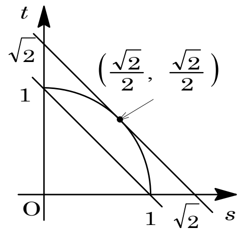
$$D/4=(s+t)^2-(s-t)^2=4st\geqq 0,\ \alpha+\beta=2(s+t)\geqq 0,\ \alpha\beta=(s-t)^2\geqq 0$$

これより，②の 2 つの解はともに 0 以上であり，①の解はすべて実数となる。

さて，$s+t=u$ とすると，

$$(s-t)^2=2(s^2+t^2)-(s+t)^2=2-u^2$$

よって，①は，$x^4-2ux^2+(2-u^2)=0$ ……③となる。



また，u のとりうる値の範囲は，st 平面上において，右図の四分円と直線 $s+t=u$ が共有点をもつ条件から，$1\leqq u\leqq\sqrt{2}$ である。

したがって，①の解 x のとる値の範囲は，③が $1\leqq u\leqq\sqrt{2}$ に少なくとも 1 つの解をもつ x の条件として求められる。

③より，$u^2+2x^2u-2-x^4=0$ として，$f(u)=u^2+2x^2u-2-x^4$ とおくと，

$$f(0)=-2-x^4<0$$

また，$v=f(u)$ のグラフの軸は，$u=-x^2\leqq 0$ より，求める条件は,

$$f(1)=1+2x^2-2-x^4\leqq 0\text{………④}$$

$$f(\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}x^2-2-x^4\geqq 0\text{………⑤}$$

④より，$x^4-2x^2+1\geqq 0$，$(x^2-1)^2\geqq 0$ となり，つねに成立する。

⑤より，$x^4-2\sqrt{2}x^2\leqq 0$，$x^2(x^2-2\sqrt{2})\leqq 0$ より，$x^2-2\sqrt{2}\leqq 0$ となり，

$$x^2-2^{\frac{3}{2}}\leqq 0,\ -2^{\frac{3}{4}}\leqq x\leqq 2^{\frac{3}{4}}$$

以上より，①の解 x のとる値の範囲は，$-2^{\frac{3}{4}}\leqq x\leqq 2^{\frac{3}{4}}$ である。

コメント

後半，場合分けが必要かとも思いましたが，不要であるように式が設定されていました。

問　題

2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような θ の範囲を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする。 [2002]

解答例

$y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$ ……①，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ ……②に対して，

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$4\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②が相異なる 2 点で交わる条件は，③が異なる 2 実数解をもつことなので，

$$D/4=-4\sqrt{3}(4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta)>0,\ 2\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)+\sin\theta<0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}>0,\ (\sqrt{3}\sin\theta-2)(2\sin\theta+\sqrt{3})>0$$

$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$ より，$2\sin\theta+\sqrt{3}<0$，$\sin\theta<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ より，$240^\circ<\theta<300^\circ$

コメント

あまりにも簡単すぎて不気味です。

問　題

$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1)　$x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2)　次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

[2018]

解答例＋映像解説

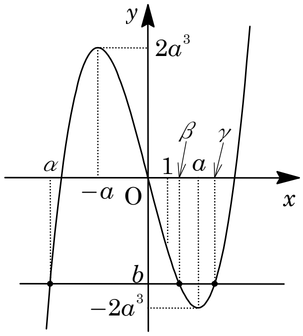
(1)　$f(x)=x^3-3a^2x\quad(a>0)$ に対して，$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

すると，$x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加する条件は，$0<a\leqq 1$ である。

(2)　方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもち，その解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると，$\alpha<-a<\beta<a<\gamma$ であり，しかも $\beta>1$ である条件は，右図から，



$$a>1\ \cdots\cdots\cdots①$$
$$-2a^3<b<f(1)=1-3a^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，②の 2 つの境界線 $b=-2a^3$ と $b=1-3a^2$ の関係は，両式を連立すると，

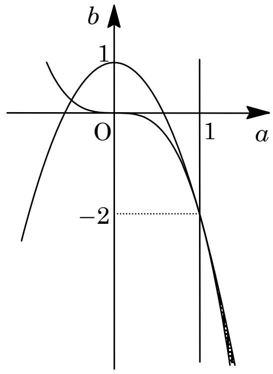
$$-2a^3=1-3a^2,\ \ 2a^3-3a^2+1=0$$
$$(2a+1)(a-1)^2=0$$

よって，$a=-\dfrac{1}{2}$ で交わり，$a=1$ で接する。

以上より，点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲は，①②から，

$$a>1,\ \ -2a^3<b<1-3a^2$$

この不等式を ab 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

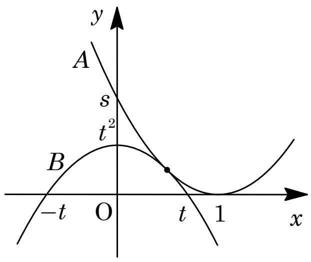
微分の方程式への応用問題です。内容は基本的です。

問　題

座標平面において 2 つの放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ を考える。ただし s, t は実数で，$0 < s$，$0 < t < 1$ を満たすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

[2017]

解答例＋映像解説



放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ を連立して，

$$s(x-1)^2 = -x^2 + t^2,\quad (s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0$$

$0 < s$，$0 < t < 1$ で，A と B が 1 点を共有することより，

$$D/4 = s^2 - (s+1)(s-t^2) = 0,\quad (t^2-1)s + t^2 = 0$$

よって，$s = \dfrac{t^2}{1-t^2}$ ………(＊)

さて，A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 P は，

$$P = \int_0^1 s(x-1)^2 dx = \Big[\frac{s}{3}(x-1)^3\Big]_0^1 = \frac{s}{3}$$

また，B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 Q は，

$$Q = \int_0^t (-x^2 + t^2)dx = \Big[-\frac{x^3}{3} + t^2 x\Big]_0^t = -\frac{t^3}{3} + t^3 = \frac{2}{3}t^3$$

すると，$\dfrac{Q}{P} = \dfrac{2}{3}t^3 \cdot \dfrac{3}{s} = \dfrac{2t^3}{s}$ となり，(＊)を代入すると，

$$\frac{Q}{P} = 2t^3 \cdot \frac{1-t^2}{t^2} = 2t(1-t^2) = 2t - 2t^3$$

ここで，$f(t) = 2t - 2t^3\ (0 < t < 1)$ とおくと，

$$f'(t) = 2 - 6t^2 = -2(3t^2 - 1)$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最大となる。

t	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

よって，$\dfrac{Q}{P} = f(t)$ の最大値は，$2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(1 - \dfrac{1}{3}\Big) = \dfrac{4}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4}{9}\sqrt{3}$ である。

コメント

微積分の融合した基本問題です。計算も易しめです。

問　題

座標平面上の 2 つの放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-x^2+px+q$ が点 $(-1,\ 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1)　p と q の値を求めよ。

(2)　放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t)=0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3)　$t>0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　放物線 $A: y=x^2$ ……①，$B: y=-x^2+px+q$ ……②

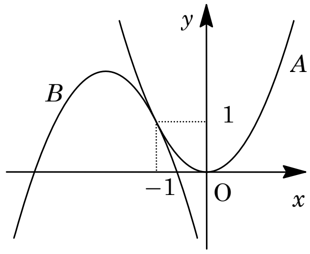
に対して，①②を連立すると，

$$x^2=-x^2+px+q\ ,\ \ 2x^2-px-q=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

A と B が点 $(-1,\ 1)$ で接していることより，③から，

$$D=p^2+8q=0,\ \ x=\frac{p}{4}=-1$$

よって，$p=-4$，$q=-2$



(2)　(1)より，$B: y=-x^2-4x-2$ となり，$t>0$ のとき，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線 C は，

$$y-t=-(x-2t)^2-4(x-2t)-2$$

$$y=-x^2+(4t-4)x-4t^2+9t-2\ \cdots\cdots\cdots④$$

そこで，①④を連立すると，$x^2=-x^2+(4t-4)x-4t^2+9t-2$ から

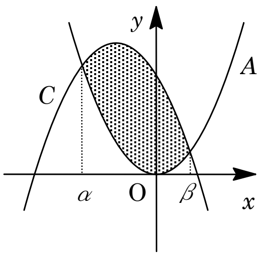
$$2x^2-(4t-4)x+4t^2-9t+2=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，⑤から $D/4=(2t^2-2)-2(4t^2-9t+2)=-4t^2+10t$ なので，

(i)　$-4t^2+10t>0\ \left(0<t<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　⑤から交点は，

$$x=\frac{2t-2\pm\sqrt{-4t^2+10t}}{2}$$

この値を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，A と C が囲む領域の面積 $S(t)$ は，



$$S(t)=\int_\alpha^\beta\{-x^2+(4t-4)x-4t^2+9t-2-x^2\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}}$$

(ii)　$-4t^2+10t\leqq 0\ \left(t\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　A と C は領域を囲まないので，$S(t)=0$

(3)　(2)より，$-4t^2+10t=-4\left(t-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{4}$ であり，$S(t)$ は $t>0$ で連続なので，

$t=\dfrac{5}{4}$ のとき最大となる。その最大値は,

$$S\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{125}{8}=\frac{125}{24}$$

コメント

定積分と面積について，センター試験でよく問われるタイプの基本題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2)　(1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$ に対して，

$$f(x)=-2(x-2t+3)^2+t^3-9t^2+15t$$

よって，$f(x)$ は，$t=2t-3$ のとき最大値 t^3-9t^2+15t をとる。

(2)　(1)より，$g(t)=t^3-9t^2+15t$ となり，

$$g'(t)=3t^2-18t+15$$
$$=3(t-1)(t-5)$$

すると，$t\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$g(t)$ の増減は右表のようになる。ここで，$g(5)=-25$ であり，

t	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		↗		↘		↗

$$g\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{2}+\frac{9}{\sqrt{2}}+15\Big)=-\frac{31\sqrt{2}+18}{4}$$

そこで，$-\dfrac{31\sqrt{2}+18}{4}-(-25)=\dfrac{82-31\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6724}-\sqrt{1922}}{4}>0$ なので，$g(t)$ の最小値は $g(5)=-25$ となる。

コメント

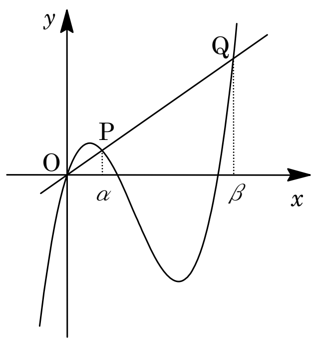
関数値の増減についての計算問題です。

問　題

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C, 原点 O を通る傾き t の直線を l とし, C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O, P, Q とし, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし, それら共有点の 1 つが接点である場合は, O, P, Q のうちの 2 つが一致して, その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ, その極値を求めよ。

[2013]

解答例＋映像解説



$C: y=x(x-1)(x-3)$ ……①, $l: y=tx$ ……②に対して, 共有点の x 座標は,

$$x(x-1)(x-3)=tx\,,\ \ x(x^2-4x+3-t)=0$$

$x\neq 0$ とすると, $x^2-4x+3-t=0$ ………③

さて, C と l が O 以外の共有点をもつ条件は, ③が $x\neq 0$ の解をもつことである。さらに, ③が重解として $x=0$ をもつ場合はないことに注意すると, 条件は,

$$D/4=4-(3-t)=1+t\geqq 0\,,\ \ t\geqq -1\ \text{………④}$$

ここで, ④のとき, ③の解を $x=\alpha$, β とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\alpha,\ t\alpha)\,,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\beta,\ t\beta)$$

これより, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積 $g(t)$ は,

$$g(t)=\sqrt{1+t^2}\,|\alpha|\cdot\sqrt{1+t^2}\,|\beta|=(1+t^2)|\alpha\beta|=(1+t^2)|3-t|$$

(i)　$t\geqq 3$ のとき

$$g(t)=-(1+t^2)(3-t)=t^3-3t^2+t-3\,,\ \ g'(t)=3t^2-6t+1$$

$g'(t)=0$ の解は, $t=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$ となり, ともに $t<3$ である。

(ii)　$-1\leqq t<3$ のとき

$$g(t)=(1+t^2)(3-t)=-(t^3-3t^2+t-3)\,,\ \ g'(t)=-(3t^2-6t+1)$$

(i)(ii) より, $g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	…	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	…	$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$	…	3	…
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$		↘		↗		↘	0	↗

さて, $-1\leqq t<3$ のとき, $g(t)$ を $g'(t)$ で割ると,

$$g(t)=g'(t)\Big(\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}\Big)$$

すると, $g\Big(\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}\Big)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{36\pm4\sqrt{6}}{9}$ （複号同順）

よって，$g(t)$ の極大値は $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}\left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$，極小値は $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}\left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$，および $0\,(t=3)$ である。

コメント

微分と増減についての標準的な問題です。

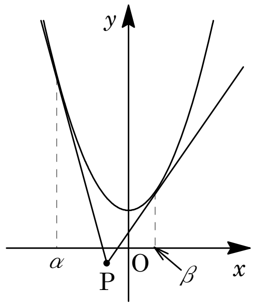
問　題

座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める。$s,\ t$ は実数とし $t<0$ を満たすとする。点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする。

(1)　l_1，l_2 の方程式を求めよ。

(2)　a を正の実数とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ をすべて求めよ。　　[2012]

解答例＋映像解説



(1)　放物線 C の方程式は，$y=x^2+1$ ………①

また，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ を通る直線の傾きを m としたとき，その方程式は，

$$y-t=m(x-s),\ \ y=mx-ms+t\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$x^2+1=mx-ms+t$

$$x^2-mx+ms-t+1=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②が接するとき，③から，$D=m^2-4(ms-t+1)=0$

$$m^2-4sm+4t-4=0,\ \ m=2s\pm2\sqrt{s^2-t+1}$$

よって，接線 l_1，l_2 の方程式は，$y=2\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)(x-s)+t$

(2)　C と l_1，l_2 の接点は，③より，$x=\dfrac{m}{2}=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$

ここで，$\alpha=s-\sqrt{s^2-t+1}$，$\beta=s+\sqrt{s^2-t+1}$ とおくと，C と l_1，l_2 で囲まれる領域の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^s(x-\alpha)^2dx+\int_s^\beta(x-\beta)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_\alpha^s+\frac{1}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_s^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(s-\alpha)^3-\frac{1}{3}(s-\beta)^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{s^2-t+1}\right)^3$$

条件より，$\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{s^2-t+1}\right)^3=a$ から，$\sqrt{s^2-t+1}=\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{1}{3}}$ となり，

$$s^2-t+1=\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}},\ \ t=s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より，$t<0$ に注意すると

(i)　$1-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}\geqq0\ \left(0<a\leqq\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

つねに $t\geqq0$ となるので，$(s,\ t)$ は存在しない。

(ii)　$1-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}<0\ \left(a>\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$(s,\ t)$ は④を満たす任意の値をとる。ただし，$t<0$ から，

$$-\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}<s<\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}$$

コメント

文字は多いですが，問われている内容は，センター試験にも出題されたことがある有名なものです。

問　題

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$$

をすべて満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$ を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。 [2011]

解答例＋映像解説

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ より，

$$a+b+c+d=1\cdots\cdots\cdots①,\ -a+b-c+d=-1\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$ より，$2\int_{0}^{1}(bx^2+d)dx=1$ となり，

$$2\left(\frac{b}{3}+d\right)=1,\ 2b+6d=3\cdots\cdots\cdots③$$

①＋②より，$b+d=0$ となり，③と合わせて，$b=-\frac{3}{4}$，$d=\frac{3}{4}$

①－②より，$a+c=1$，$c=1-a$

このとき，$f(x)=ax^3-\frac{3}{4}x^2+(1-a)x+\frac{3}{4}$，$f'(x)=3ax^2-\frac{3}{2}x+(1-a)$ から，

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(6ax-\frac{3}{2}\right)^2dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx$$

$$=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=12a^2\left(\frac{1}{8}+1\right)-9a\left(\frac{1}{4}-1\right)+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}$$

これより，$a=-\frac{1}{4}$ のとき，すなわち $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$ のとき，I の値は最小となり，最小値は $\frac{81}{32}$ である。

コメント

定積分の計算問題からスタートです。計算量は少なめです。

問　題

2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して，$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式になるような定数 $a,\ b,\ c$ の組をすべて求めよ。　[2010]

解答例＋映像解説

$f(x)=x^2+ax+b$ に対して，

$$f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b=x^2+(a+2)x+a+b+1$$

また，$\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt=x\int_0^1(3x+4t)(2t+a)\,dt$

$$=x\int_0^1\{8t^2+(6x+4a)t+3ax\}\,dt=x\Big[\frac{8}{3}t^3+(3x+2a)t^2+3axt\Big]_0^1$$

$$=\frac{8}{3}x+(3x+2a)x+3ax^2=3(a+1)x^2+\Big(2a+\frac{8}{3}\Big)x$$

ここで，$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式であることより，

$$3(a+1)c=1\cdots\cdots\cdots①,\ \Big(2a+\frac{8}{3}\Big)c=a+2\cdots\cdots\cdots②,\ a+b+1=0\cdots\cdots\cdots③$$

①より，$c=\dfrac{1}{3(a+1)}$ となり，②に代入すると，$\dfrac{6a+8}{3}\cdot\dfrac{1}{3(a+1)}=a+2$

$$6a+8=9(a^2+3a+2),\ 9a^2+21a+10=0,\ (3a+2)(3a+5)=0$$

(i)　$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき　①より $c=1$，③より $b=-\dfrac{1}{3}$

(ii)　$a=-\dfrac{5}{3}$ のとき　①より $c=-\dfrac{1}{2}$，③より $b=\dfrac{2}{3}$

コメント

定積分の計算についての基本題です。計算量も少なめです。

問　題

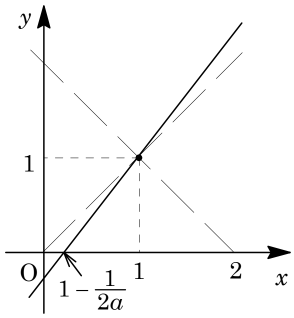
2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\int_0^2|f'(x)|dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

[2009]

解答例



(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f(0)=0$，$f(2)=2$ より，

$$c=0,\ 4a+2b+c=2$$

よって，$b=1-2a$ から，$f(x)=ax^2-(2a-1)x$

$$f'(x)=2ax-(2a-1)=2a(x-1)+1$$

また，$a\neq 0$ のとき，$f'(x)=0$ とおくと，$x=1-\frac{1}{2a}$

これより，$y=f'(x)$ のグラフは右図のようになる。

(i)　$2a\geqq 1\ \left(a\geqq\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=-\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx+\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx$$

$$=-\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^{1-\frac{1}{2a}}+\Big[a(x-1)^2+x\Big]_{1-\frac{1}{2a}}^2$$

$$=-a\left(\frac{1}{4a^2}-1\right)-\left(1-\frac{1}{2a}\right)+a\left(1-\frac{1}{4a^2}\right)+\left(1+\frac{1}{2a}\right)=2a+\frac{1}{2a}$$

(ii)　$-1<2a<1\ \left(-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^2 f'(x)dx=\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^2=2$$

(iii)　$2a\leqq -1\ \left(a\leqq-\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx-\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx=-2a-\frac{1}{2a}$$

(2)　(i)　$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき　相加平均と相乗平均の関係より，

$$S=2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

等号は $2a=\frac{1}{2a}\ \left(a=\frac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

(ii)　$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ のとき　$S=2$

(iii)　$a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$a' = -a \geqq \dfrac{1}{2}$ とおくと，

$$S = -2a - \frac{1}{2a} = 2a' + \frac{1}{2a'} \geqq 2\sqrt{2a' \cdot \frac{1}{2a'}} = 2$$

等号は $2a' = \dfrac{1}{2a'}$ $\left(a = -\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

(i)～(iii)より，S は $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 2 をとる。

コメント

定積分の計算問題ですが，三角形や台形の面積計算と読み直しても可です。

問　題

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ を満たす実数 α，β と，2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ について，$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ を α の式で表し, S がとりうる値の最大値を求めよ。 [2008]

解答例

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}dx = 1$ より，$2\int_{0}^{1} (x^2 + \alpha\beta)\,dx = 1$ となり，

$$2\left(\frac{1}{3} + \alpha\beta\right) = 1,\quad \alpha\beta = \frac{1}{6} \cdots\cdots\cdots (*)$$

また，$S = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{0}^{\alpha} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}dx$

$$= \frac{\alpha^3}{3} - (\alpha+\beta)\cdot\frac{\alpha^2}{2} + \alpha^2\beta = -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2\beta$$

さて, $(*)$より，$\beta = \frac{1}{6\alpha}$ となり，$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ から,

$$0 < \alpha \leqq \frac{1}{6\alpha},\quad 0 < \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

このとき，$S = -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2\cdot\frac{1}{6\alpha} = -\frac{1}{12}(2\alpha^3 - \alpha)$

$$\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{1}{12}(6\alpha^2 - 1)$$

α	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\frac{dS}{d\alpha}$		$+$	0
S		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{108}$

これより，S の増減は右表のようになり，$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき, S は最大値 $\frac{\sqrt{6}}{108}$ をとる。

コメント

微積分で味付けされた条件付きの最大・最小問題です。

問　題

θ は，$0°<\theta<45°$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を，$\cos\theta$ で表せ。 [2006]

解答例

$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=-(x-1)$ より，

$$f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3=(x+1)^3+|x-\cos 2\theta|^3-(x-1)^3$$
$$=6x^2+2+|x-\cos 2\theta|^3$$

また，$0°<\theta<45°$ から，$0<\cos 2\theta<1$ である。

(i)　$-1\leqq x<\cos 2\theta$ のとき

$|x-\cos 2\theta|=-(x-\cos 2\theta)$ より，$f(x)=6x^2+2-(x-\cos 2\theta)^3$

$$f'(x)=12x-3(x-\cos 2\theta)^2=-3\{x^2-2(\cos 2\theta+2)x+\cos^2 2\theta\}$$

ここで，$f'(x)=0$ とすると，

$$x=\cos 2\theta+2\pm\sqrt{(\cos 2\theta+2)^2-\cos^2 2\theta}=2\cos^2\theta+1\pm 2\sqrt{\cos 2\theta+1}$$
$$=2\cos^2\theta+1\pm 2\sqrt{2}\cos\theta$$

まず，$2\cos^2\theta+1+2\sqrt{2}\cos\theta>1$ であり，また $\alpha=2\cos^2\theta+1-2\sqrt{2}\cos\theta$ とおくと，$f'(-1)=-12-3(-1-\cos 2\theta)^2<0$，しかも $f'(\cos 2\theta)=12\cos 2\theta>0$ なので，$-1<\alpha<\cos 2\theta$ である。

これより，$f(x)$ の値の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	$\cos 2\theta$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(ii)　$\cos 2\theta\leqq x\leqq 1$ のとき

$|x-\cos 2\theta|=x-\cos 2\theta$ より，$f(x)=6x^2+2+(x-\cos 2\theta)^3$

$$f'(x)=12x+3(x-\cos 2\theta)^2>0$$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。

(i)(ii)より，$f(x)$ は $x=\cos 2\theta$ で連続なので，最小値をとるときの x は，

$$x=2\cos^2\theta+1-2\sqrt{2}\cos\theta$$

コメント

絶対値付きの関数の最大・最小問題です。三角関数も絡んでいるので，きめ細かい論理が必要です。

問　題

$f(x)$を$f(0)=0$を満たす 2 次関数とする。$a,\ b$を実数として，関数$g(x)$を次で与える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$$

$a,\ b$ をいろいろ変化させ，$\displaystyle\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$が最小になるようにする。このとき，$g(-1)=f(-1)$，$g(1)=f(1)$であることを示せ。

[2005]

解答例

$f(x)$は$f(0)=0$を満たす 2 次関数なので，$f(x)=px^2+qx\quad(p\neq 0)$とおくと，

$$f'(x)=2px+q$$

また，$x<0$のとき$g'(x)=a$，$x>0$のとき$g'(x)=b$である。

さて，$I(a)=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$，$J(b)=\displaystyle\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$とすると，

$$I(a)=\int_{-1}^{0}(2px+q-a)^2dx=\frac{1}{6p}\Big[(2px+q-a)^3\Big]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{6p}\{(q-a)^3-(-2p+q-a)^3\}$$

また，$J(b)=\displaystyle\int_{0}^{1}(2px+q-b)^2dx=\frac{1}{6p}\Big[(2px+q-b)^3\Big]_{0}^{1}$

$$=\frac{1}{6p}\{(2p+q-b)^3-(q-b)^3\}$$

すると，$I'(a)=\dfrac{1}{6p}\{-3(q-a)^2+3(-2p+q-a)^2\}$

$$=\frac{1}{2p}(-2p+q-a+q-a)(-2p)$$
$$=2(a+p-q)$$

a	$\cdots$	$-p+q$	$\cdots$
$I'(a)$	$-$	0	$+$
$I(a)$	$\searrow$		$\nearrow$

右の増減表より，$a=-p+q$ ……①のとき，$I(a)$は最小となる。

さらに，$J'(b)=\dfrac{1}{6p}\{-3(2p+q-b)^2+3(q-b)^2\}$

$$=\frac{1}{2p}(q-b+2p+q-b)(-2p)$$
$$=2(b-p-q)$$

b	$\cdots$	$p+q$	$\cdots$
$J'(b)$	$-$	0	$+$
$J(b)$	$\searrow$		$\nearrow$

右の増減表より，$b=p+q$ ……②のとき，$J(b)$は最小となる。

したがって，$I(a)+J(b)$ が最小となるのは, a, b が任意の実数より，①と②がともに成立するときである。

このとき，①②より，

$$f(-1)=p-q=-a=g(-1),\ f(1)=p+q=b=g(1)$$

コメント

普通に $f(x)$ を設定して，式変形を進めました。ただ，$I(a)$，$J(b)$ を展開するのは面倒そうだったので，微分法を利用しました。

問　題

関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x\,,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x)\,,\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。 [2004]

解答例

(1) $f(x)=x^3-3x$ より，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数に等しいので，右表より，$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個，$a=\pm 2$ のとき 2 個，$-2<a<2$ のとき 3 個である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(2) $f(x)=a$ とおくと，$g(x)=0$ は，

$$a^3-3a=0\,,\ a=0,\ \pm\sqrt{3}$$

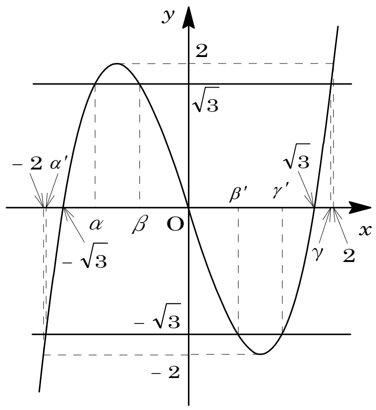
(i) $a=0$ のとき　$f(x)=0$ より $x=0,\ \pm\sqrt{3}$

(ii) $a=\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおく。

(iii) $a=-\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=-\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ とおく。



すると，$-2<\alpha'<-\sqrt{3}<\alpha<\beta<0<\beta'<\gamma'<\sqrt{3}<\gamma<2$ ……(＊)が成立するので，$g(x)=0$ を満たす実数 x は合計 9 個存在する。

(3) $h(x)=0$ より，$\{g(x)\}^3-3g(x)=0$ となり，$g(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$ である。

$g(x)=0$ のとき，$a=0,\ \pm\sqrt{3}$ であり, (2)より実数 x は 9 個存在する。

$g(x)=\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=\sqrt{3}$ より $a=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ となり，それぞれの a の値に対し, (1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

同様に，$g(x)=-\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=-\sqrt{3}$ より $a=\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ となり，それぞれの a の値に対し, (1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

さらに, (＊)から a の値に重複は存在しないので, x の値も重複はない。

よって，$h(x)=0$ を満たす実数 x は合計 27 個存在する。

コメント

実数解の個数を調べる頻出問題ですが，ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。図をたくさん書いて，思考過程を述べた方が明快です。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$，$f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。　[2003]

解答例

$f(x) = ax^2 + bx + c$ に対して，$f'(x) = 2ax + b$

$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$，$f'(1) \leqq 6$ より，

$$a - b + c = -1 \cdots\cdots ①,\ \ a + b + c = 1 \cdots\cdots ②,\ \ 2a + b \leqq 6 \cdots\cdots ③$$

①②より，$b = 1$，$c = -a$

③に代入して，$2a \leqq 5$，$a \leqq \dfrac{5}{2}$ ………④

さて，$g(x) = 3x^2 - 1 - f(x)$ とおくと，

$$g(x) = 3x^2 - 1 - (ax^2 + x - a) = (3 - a)x^2 - x + (a - 1)$$

ここで，$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$g(x) \geqq 0$ である条件は，$g(-1) = 3$，$g(1) = 1$ であり，しかも④より $0 < \dfrac{1}{2(3-a)} \leqq 1$ となることを考え合わせると，$g(x) = 0$ の判別式が 0 以下であることと等しい。

$$D = 1 - 4(3 - a)(a - 1) \leqq 0,\ \ 4a^2 - 16a + 13 \leqq 0$$

よって，$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$ となり，④と合わせて $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$ ………⑤

このとき，$I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} (2ax + 1)^2 dx = 2\int_{0}^{1} (4a^2x^2 + 1)dx$

$$= 2\Big[\frac{4}{3}a^2x^3 + x\Big]_0^1 = \frac{8}{3}a^2 + 2$$

すると，⑥より，$\dfrac{8}{3}\Big(\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\Big)^2 + 2 \leqq I \leqq \dfrac{8}{3}\Big(\dfrac{5}{2}\Big)^2 + 2$ なので，$\dfrac{44 - 16\sqrt{3}}{3} \leqq I \leqq \dfrac{56}{3}$ となる。

コメント

③の条件があるために，場合分けが不要となります。正確な計算力だけで片付きます。

問　題

2 つの関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$，$g(x)=px^3+qx^2+rx$ が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0)=g'(0),\ f(-1)=-1,\ f'(-1)=0,\ g(1)=3,\ g'(1)=0$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$ の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。ただし $f''(x)$，$g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ の導関数を表す。 [2002]

解答例

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ より，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

また，$g(x)=px^3+qx^2+rx$ より，$g'(x)=3px^2+2qx+r$，$g''(x)=6px+2q$

ここで，$f'(0)=g'(0)$，$f(-1)=-1$，$f'(-1)=0$ より，

$$c=r\cdots\cdots①,\ -a+b-c=-1\cdots\cdots②,\ 3a-2b+c=0\cdots\cdots③$$

$g(1)=3$，$g'(1)=0$ より，

$$p+q+r=0\cdots\cdots④,\ 3p+2q+r=0\cdots\cdots⑤$$

②③より，$a=c-2$，$b=a+c-1=2c-3\cdots\cdots\cdots⑥$

①④⑤より，$p=r-6=c-6$，$q=-p-r+3=-2c+9\cdots\cdots\cdots⑦$

さて，$I=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$

$$=\int_{-1}^{0}(36a^2x^2+24abx+4b^2)dx+\int_{0}^{1}(36p^2x^2+24pqx+4q^2)dx$$

$$=\Big[12a^2x^3+12abx^2+4b^2x\Big]_{-1}^{0}+\Big[12p^2x^3+12pqx^2+4q^2x\Big]_{0}^{1}$$

$$=12a^2-12ab+4b^2+12p^2+12pq+4q^2$$

⑥⑦より，$I=12(c-2)^2-12(c-2)(2c-3)+4(2c-3)^2$

$$+12(c-6)^2+12(c-6)(-2c+9)+4(-2c+9)^2$$

$$=8c^2-48c+120=8(c-3)^2+48$$

よって，$c=3$ のとき I は最小値 48 をとる。

このとき①⑥⑦より，$a=1$，$b=3$，$p=-3$，$q=3$，$r=3$ なので，

$$f(x)=x^3+3x^2+3x,\ g(x)=-3x^3+3x^2+3x$$

コメント

まず，工夫とかは考えずに普通に解きました。それでもややこしい計算はありませんでした。

問　題

時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $(t^2,\ 0)$ で与えられる。点 B は，最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが，点 C$(0,\ 3)$ に到達した後は，その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

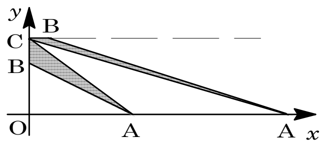
$t>0$ のとき，三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

(1)　関数 $S(t)$ $(t>0)$ のグラフの概形を描け。

(2)　u を正の実数とするとき，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数 $M(u)$ $(u>0)$ のグラフの概形を描け。　[2001]

解答例

(1)　$0<t\leqq 3$ のとき点 B$(0,\ t)$ であり，$3\leqq t$ のとき B$(t-3,\ 3)$ となる。



(i)　$0<t\leqq 3$ のとき

$$S(t)=\frac{1}{2}(3-t)t^2=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

(ii)　$3\leqq t$ のとき

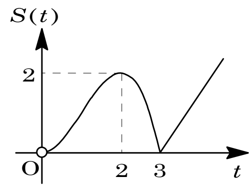
$$S(t)=\frac{1}{2}(t-3)\cdot 3=\frac{3}{2}t-\frac{9}{2} \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$S'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+3t=-\dfrac{3}{2}t(t-2)$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(t)$	0	+	0	−	
$S(t)$	0	↗	2	↘	0

$0<t\leqq 3$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。

②と合わせて $S(t)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　②において $S(t)=2$ とすると，

$$\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}=2,\ t=\frac{13}{3}$$

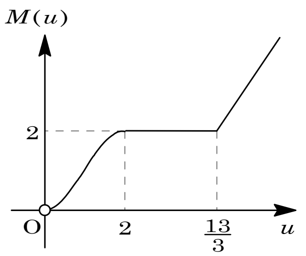
したがって，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とすると，

(i)　$0<u\leqq 2$ のとき　$M(u)=S(u)=-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u^2$

(ii)　$2\leqq u\leqq\dfrac{13}{3}$ のとき　$M(u)=S(2)=2$

(iii)　$\dfrac{13}{3}\leqq u$ のとき　$M(u)=S(u)=\dfrac{3}{2}u-\dfrac{9}{2}$

よって，$M(u)$ のグラフは右図のようになる。

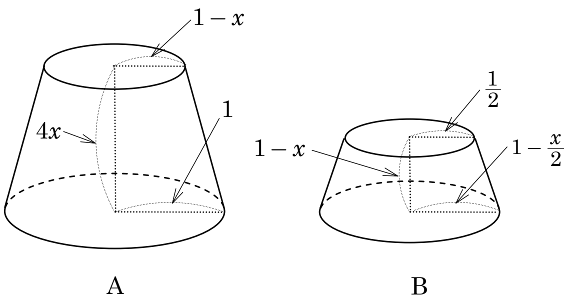


コメント

気をつけるのはミスだけという基本題です。

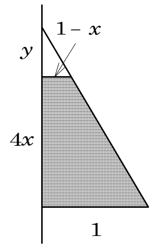
問　題

図のように底面の半径 1，上面の半径$1-x$，高さ$4x$の直円すい台 A と，底面の半径$1-\dfrac{x}{2}$，上面の半径$\dfrac{1}{2}$，高さ$1-x$の直円すい台 B がある。ただし，$0 \leqq x \leqq 1$ である。A と B の体積の和を$V(x)$とするとき，$V(x)$の最大値を求めよ。　[2000]



解答例

まず，$0<x<1$ のとき，直円すい台 A は，右図のような台形を軸のまわりに回転したとき得られ，その体積をV_aとすると，



$$(1-x):1=y:(y+4x)$$

$y=(1-x)(y+4x)$より，$xy=4x-4x^2$，$y=4-4x$

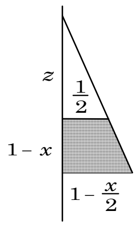
このとき，$V_a=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot(y+4x)-\dfrac{1}{3}\pi(1-x)^2y$

$$=\frac{1}{3}\pi\left\{y+4x-(1-x)^2y\right\}=\frac{1}{3}\pi\left\{4-4(1-x)^3\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\pi(x^3-3x^2+3x)$$

$x=0$をあてはめると$V_a=0$，$x=1$をあてはめると$V_a=\dfrac{4}{3}\pi$となり，ともに題意に適する。

また，$0\leqq x<1$ のとき，直円すい台 B は，右図のような台形を軸のまわりに回転したとき得られ，その体積をV_bとすると，



$$\frac{1}{2}:\left(1-\frac{x}{2}\right)=z:(z+1-x)$$

$z+1-x=(2-x)z$より，$(1-x)z=1-x$，$z=1$

このとき，$V_b=\dfrac{1}{3}\pi\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^2(2-x)-\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot 1$

$$=\frac{1}{12}\pi\left\{(2-x)^3-1\right\}=\frac{1}{12}\pi(-x^3+6x^2-12x+7)$$

$x=1$をあてはめると$V_b=0$となり適する。

よって，$0\leqq x\leqq 1$で，$V(x)=V_a+V_b=\dfrac{1}{12}\pi(15x^3-42x^2+36x+7)$

$$V'(x)=\frac{1}{12}\pi(45x^2-84x+36)$$
$$=\frac{1}{4}\pi(3x-2)(5x-6)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右表より $x=\dfrac{2}{3}$ のとき $V(x)$ は最大となる。

このとき，$V\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{12}\pi\left(15\cdot\dfrac{8}{27}-42\cdot\dfrac{4}{9}+36\cdot\dfrac{2}{3}+7\right)=\dfrac{151}{108}\pi$

コメント

計算は面倒ですが，内容は基本的です。必要なのは忍耐力という問題です。

問　題

a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。 [1998]

解答例

$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ より,

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

$f'(0)=-4<0$ から, $f'(x)=0$ は 2 つの実数解をもち, これを $x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha=\frac{a-\frac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3},\quad \beta=\frac{a-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3}$$

極大値と極小値の差を $g(a)$ とすると,

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned}g(a)&=f(\alpha)-f(\beta)\\&=\int_\beta^\alpha f'(x)dx\\&=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=9\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{3}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}\right\}^3\\&=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$g(a)$ は $a-\dfrac{1}{a}=0$, すなわち $a=\pm1$ のとき最小になる。

コメント

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題です。上のような特殊な解法があります。ただし本問では, $f'(x)=0$ の解が $x=\dfrac{2}{3}a$, $-\dfrac{2}{3a}$ となりますので, a の正負で場合分けをして, 直接 $g(a)$ を求めても, 計算量がやや増える程度ですみます。

問　題

座標平面上に放物線 C を $y=x^2-3x+4$ で定め，領域 D を $y \geqq x^2-3x+4$ で定める。原点を通る 2 直線 l, m は C に接するものとする。

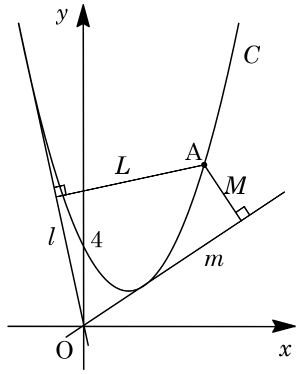
(1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy \leqq 0$ が成り立つ。

[2018]

解答例＋映像解説



(1) $C: y=x^2-3x+4$ ……①に対し，原点を通る接線を $y=ax$ ……②とおく。

①と②を連立して，$x^2-(a+3)x+4=0$ となり，

$$D=(a+3)^2-4^2=0\,,\ \ a+3=\pm 4$$

よって，$a=-7,\ 1$ から，$l: y=-7x$，$m: y=x$ とおく。

ここで，C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2-3t+4)$ に対し，A と l, m の距離をそれぞれ L, M とすると，

$$L=\frac{|7t+t^2-3t+4|}{\sqrt{49+1}}=\frac{|t^2+4t+4|}{5\sqrt{2}}=\frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

$$M=\frac{|t-t^2+3t-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-t^2+4t-4|}{\sqrt{2}}=\frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}$$

すると，$\sqrt{L}=\dfrac{|t+2|}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}$，$\sqrt{M}=\dfrac{|t-2|}{\sqrt[4]{2}}$ となり，

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}\left(|t+2|+\sqrt{5}|t-2|\right)$$

ここで，$f(t)=|t+2|+\sqrt{5}|t-2|$ とおくと，

(i) $t \geqq 2$ のとき　$f(t)=t+2+\sqrt{5}(t-2)=(1+\sqrt{5})t+2-2\sqrt{5}$

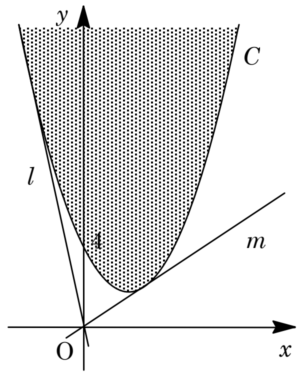
(ii) $-2 \leqq t < 2$ のとき　$f(t)=t+2-\sqrt{5}(t-2)=(1-\sqrt{5})t+2+2\sqrt{5}$

(iii) $t<-2$ のとき　$f(t)=-(t+2)-\sqrt{5}(t-2)=(-1-\sqrt{5})t-2+2\sqrt{5}$

$f(t)$ は $t=-2,\ 2$ で連続なので，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となる。すなわち，$t=2$ のとき $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は最小となり，このとき $\mathrm{A}(2,\ 2)$ である。

(2)　領域$D: y \geqq x^2-3x+4$は右図の網点部のようになる。

そこで，領域 D のすべての点$(x,\ y)$に対し不等式 $px+qy \leqq 0$……③が成り立つ条件は，



(a)　$q=0$のとき　③は$px \leqq 0$となる。

すると，領域 D のすべての点$(x,\ y)$に対し成立する条件は，$p=0$である。

(b)　$q>0$のとき　③は$y \leqq -\dfrac{p}{q}x$となる。

すると，領域 D のすべての点$(x,\ y)$に対し成立する場合はない。

(c)　$q<0$のとき　③は$y \geqq -\dfrac{p}{q}x$となる。

すると，領域Dのすべての点$(x,\ y)$に対し成立する条件は，l，mの傾きから，

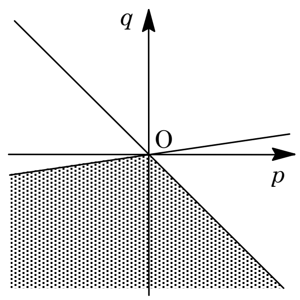
$$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1,\ 7q \leqq p \leqq -q$$

すなわち，$q \leqq \dfrac{1}{7}p$かつ$q \leqq -p$である。

以上より，点$\mathrm{P}(p,\ q)$の動きうる範囲は，

$$q \leqq \frac{1}{7}p \text{かつ} q \leqq -p$$

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

図形と式に関する標準的な問題です。(1)の結論が(2)への誘導かとも思ったのですが，実際は(1)の途中結果が(2)への誘導でした。なお，(2)は，詳しく記述していませんが，集合の包含関係を用いて考えています。

問　題

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える。

(1)　点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2)　点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　$C: y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)\ (-1\leqq p\leqq 1)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2p,\ 2p^2)$$

ここで，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$x=2p$，$y=2p^2$ から，

$$y=2\left(\frac{x}{2}\right)^2,\quad y=\frac{1}{2}x^2\ (-2\leqq x\leqq 2)$$

したがって，点 Q の軌跡は，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ の $-2\leqq x\leqq 2$ の部分である。

(2)　線分 OA 上の点 $\mathrm{R}(r,\ 0)\ (0\leqq r\leqq 1)$ に対して，

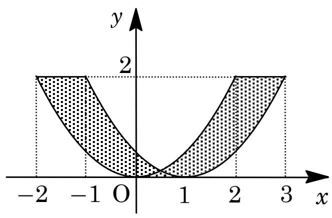
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

ここで，点 R を固定すると，(1)から，点 S は点 R を頂点とする放物線の一部を動き，その方程式は，

$$y=\frac{1}{2}(x-r)^2\quad (r-2\leqq x\leqq r+2)\cdots\cdots\cdots(*)$$

そして，点 R を $0\leqq r\leqq 1$ で動かすと，$(*)$で表される放物線の一部は，x 軸方向に平行移動する。

これより点 S が動く領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



この領域の面積を S とおくと，直線 $x=\frac{1}{2}$ についての対称性から，

$$S=2\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}x^2dx+1\cdot 2-\int_{1}^{3}\frac{1}{2}(x-1)^2dx\right\}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^2dx+4-\int_{1}^{3}(x-1)^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}+4-\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{63}{8}+4-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{95}{24}$$

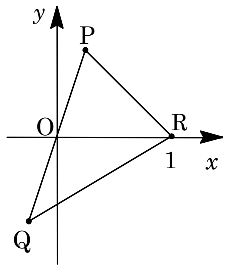
コメント

軌跡を求める問題です。(2)は，東大で頻出の 1 文字固定をして考えるタイプです。

問　題

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。 [2016]

解答例＋映像解説



3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=2(x,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RP}}=(x-1,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-(x+1,\ y)$$

条件より，△PQR は鋭角三角形なので，まず $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\neq\vec{0}$ となり，

$$(x,\ y)\neq(0,\ 0),\ (x,\ y)\neq(1,\ 0),\ (x,\ y)\neq(-1,\ 0)$$

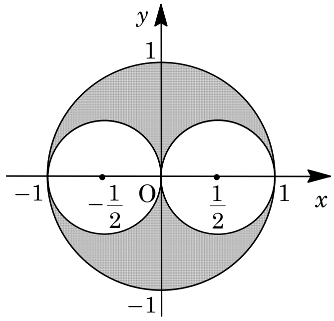
この条件のもとで，$\angle\mathrm{RPQ}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}>0$ となり，

$$x(x-1)+y^2>0,\ x^2+y^2-x>0,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\angle\mathrm{PQR}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}<0$ となり，

$$-x(x+1)-y^2<0,\ x^2+y^2+x>0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots ②$$



さらに，$\angle\mathrm{PRQ}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}>0$ となり，

$$-(x-1)(x+1)-y^2>0,\ x^2+y^2-1<0$$

$$x^2+y^2<1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

①②③より，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。なお，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を除く条件は満たされている。

コメント

点と座標に関する基本問題です。解答例ではベクトルを利用していますが，余弦定理の適用でも構いません。

問　題

座標平面上の 2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i)　頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

(ii)　点 A, P, B は同一直線上にある。　[2015]

解答例＋映像解説

2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$ および点 $P(x,\ y)$ $(|x|\leqq 1)$ に対して，まず条件(ii)から，点 A, P, B は同一直線上にあることより，点 P の範囲は，$y=-x$ $(|x|\leqq 1)$ である。

次に，条件(i)から，2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ ……①とおくと，2 点 A, B を通ることより，

$$a-b+c=1\ \cdots\cdots ②,\quad a+b+c=-1\ \cdots\cdots ③$$

②③より，$b=-1$，$c=-a$ となり，①に代入すると，

$$y=ax^2-x-a=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-a-\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots ④$$

すると，頂点の x 座標の絶対値が 1 以上より，$\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$ から $0<|a|\leqq\dfrac{1}{2}$ ……⑤

そこで，点 P の範囲は，⑤の条件のもとで曲線④の $|x|\leqq 1$ における通過領域である。

まず，④を $(x^2-1)a-(x+y)=0$ ……⑥と変形すると，点 $P(x,\ y)$ の範囲を表す不等式は，この a についての方程式⑥が，⑤の範囲に実数解をもつ条件として得られる。

(a)　$x=\pm 1$ のとき　$x+y=0$ のとき，任意の a に対して⑥は成立するので，

$(x,\ y)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$

(b)　$x\neq\pm 1$ のとき　⑥より $a=\dfrac{x+y}{x^2-1}$ となり，⑤に代入すると，$0<\left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

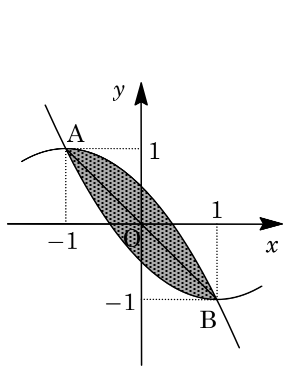
$$0<|x+y|\leqq\frac{1}{2}|x^2-1|,\quad 0<|x+y|\leqq-\frac{1}{2}(x^2-1)\ (|x|\leqq 1)$$

(b-i)　$x+y>0$ のとき　$x+y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\leqq-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$$

(b-ii)　$x+y<0$ のとき　$-x-y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$$



以上より，条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

この領域の面積を S とすると,

$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{6}(1+1)^3=\frac{4}{3}$$

コメント

放物線の通過領域の問題です。すばやく結論の導ける条件(ii)から記しています。

問　題

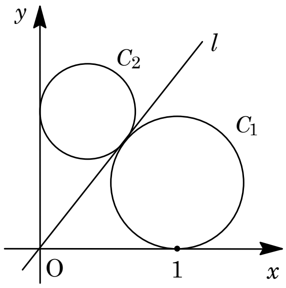
l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i)　円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

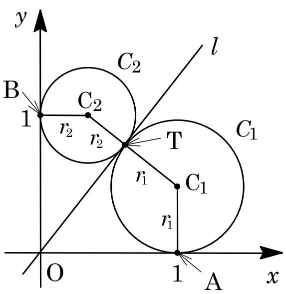
(ii)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。　[2015]



解答例＋映像解説



円 C_1 と x 軸，円 C_2 と y 軸，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ A, B, T とおくと，$\mathrm{OB}=\mathrm{OT}=\mathrm{OA}=1$ より，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ となる。

すると，円 C_1 の半径 r_1，円 C_2 の半径 r_2 より，円 C_1 の中心 $\mathrm{C}_1(1,\ r_1)$，円 C_2 の中心 $\mathrm{C}_2(r_2,\ 1)$ と表せる。

ここで，円 C_1 と C_2 が接する条件は，$\mathrm{C_1C_2}=r_1+r_2$ より，

$$\sqrt{(r_2-1)^2+(1-r_1)^2}=r_1+r_2$$

これより，$(r_2-1)^2+(1-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ となり，

$$r_1r_2+r_1+r_2=1,\ (1+r_1)r_2=1-r_1,\ r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$0<r_1<1$ のもとで，(*)から，

$$8r_1+9r_2=8r_1+\frac{9-9r_1}{1+r_1}=8r_1+\frac{-9(1+r_1)+18}{1+r_1}=8r_1-9+\frac{18}{1+r_1}$$

$$=8+8r_1+\frac{18}{1+r_1}-17=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17$$

そこで，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=2\sqrt{2^3\cdot 2\cdot 3^2}-17=7$$

等号は，$8(1+r_1)=\dfrac{18}{1+r_1}$ すなわち $1+r_1=\dfrac{3}{2}\left(r_1=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき成り立ち，この値は $0<r_1<1$ を満たしている。

以上より，$8r_1+9r_2$ の最小値は 7 である。

このとき，$r_1=\dfrac{1}{2}$，(*)から $r_2=\dfrac{1}{3}$ となり，$\mathrm{C}_1\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ である。そして，接点 T は線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $r_1:r_2=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=3:2$ に内分する点より，$\mathrm{T}(p,\ q)$ とおくと，

$$p=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5},\ q=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

よって，線分 OT の傾きは $\dfrac{q}{p}=\dfrac{4}{3}$ となり，直線 l の方程式は $y=\dfrac{4}{3}x$ である。

コメント

解法のポイントは，冒頭に記した点 B の y 座標が 1 という点です。当然といえば当然ですが……。ただ，ここを外すとシビアな結果になります。なお，分数関数の微分法は範囲外ですので，最小値を求める際には，相加平均と相乗平均の関係を利用するように式変形をしています。

問　題

座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-3\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $-3\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

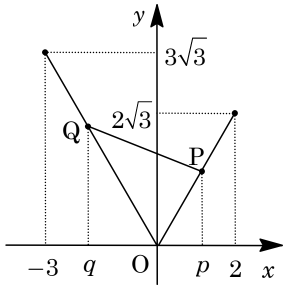
(2) D を図示せよ。 [2014]

解答例＋映像解説

(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3\ \cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$-3\leqq q\leqq 0$ より $-3\leqq p-3\leqq 0$ となり，$0\leqq p\leqq 2$ と合わせて $0\leqq p\leqq 2$ である。



ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

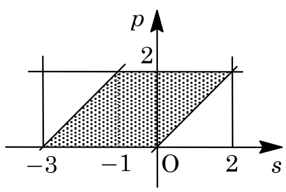
$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$ $(p-3\leqq x\leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\ \cdots\cdots\cdots③$

ただし，$-3\leqq s\leqq 2$，$p-3\leqq s\leqq p$，$0\leqq p\leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。



そこで，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i) $-3\leqq s\leqq -1$ のとき

右上図より $0\leqq p\leqq s+3$ となり，$\dfrac{s+3}{2}=\dfrac{0+(s+3)}{2}$ なので，

$$f(0)=f(s+3)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ -\sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii) $-1\leqq s\leqq 0$ のとき　右上図より，$0\leqq p\leqq 2$ となり，$1\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{3}{2}$ から，

$$f(0) \leqq f(p) \leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ -\sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(iii)　$0 \leqq s \leqq 2$ のとき　右上図より，$s \leqq p \leqq 2$ となり，$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{5}{2}$ である。

(iii-i)　$\dfrac{s+3}{2} \leqq 2$　$(0 \leqq s \leqq 1)$ のとき

$$f(s) \leqq f(p) \leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(iii-ii)　$\dfrac{s+3}{2} \geqq 2$　$(1 \leqq s \leqq 2)$ のとき

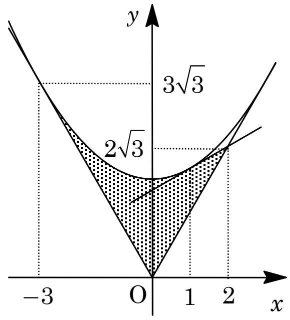
$$f(s) \leqq f(p) \leqq f(2),\ \sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$$

以上より，D に入るような t の範囲は，③から $t = f(p)$ なので，

$$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad (-3 \leqq s \leqq 0)$$

$$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

$$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\quad (1 \leqq s \leqq 2)$$



(2)　領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

コメント

線分の通過領域の問題ですが，まとめていくのに，かなりの時間を費やします。上の解答例では，条件の不等式を sp 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる $p = \dfrac{s+3}{2}$ も書き込んでおくのも，1 つの方法です。

問　題

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$ $(0\leqq a\leqq 1)$ を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和 $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

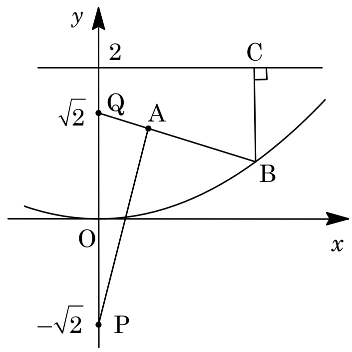
[2013]

解答例＋映像解説

(1) $0\leqq a\leqq 1$ のとき，3 点 $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}&=\sqrt{a^2+(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{a^2+(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2})^2}\\
&=\sqrt{2a^2+3+2\sqrt{2a^2+2}}-\sqrt{2a^2+3-2\sqrt{2a^2+2}}\\
&=\sqrt{2a^2+2}+1-\left(\sqrt{2a^2+2}-1\right)=2
\end{aligned}
$$

(2) (1)より，$\mathrm{PA}=\mathrm{AQ}+2$ となり，



$$
\begin{aligned}
\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}&=\mathrm{AQ}+2+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}\\
&=\mathrm{BQ}+\mathrm{BC}+2\ \cdots\cdots\cdots①
\end{aligned}
$$

ここで，$\mathrm{B}\left(t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$ とおくと，

$$\mathrm{BC}=2-\frac{\sqrt{2}}{8}t^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BQ}^2&=t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2-\sqrt{2}\right)^2\\
&=t^2+2\left(\frac{t^4}{64}-\frac{t^2}{4}+1\right)=2\left(\frac{t^4}{64}+\frac{t^2}{4}+1\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

よって，$\mathrm{BQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots③$

①②③より，$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)+2=4+\sqrt{2}$

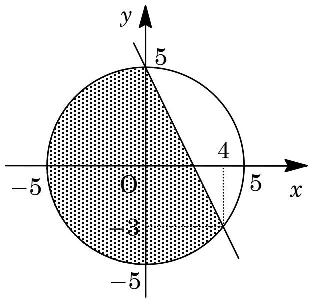
コメント

数 C の範囲になりますが，双曲線と放物線の定義を題材にしたものです。この点を利用すると，計算はほとんど不要になります。

問　題

a, b を実数の定数とする。実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説



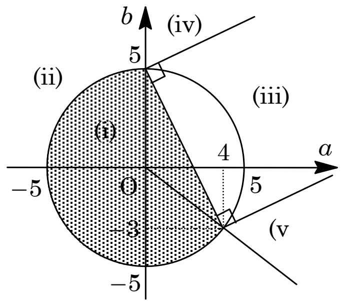
まず，連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ の満たす領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。

また，実数 a，b に対して，

$$z=x^2+y^2-2ax-2by$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2)$$

これより，z が最小値をとるのは，点 $(x,\ y)$ と点 $(a,\ b)$ の距離が最小になるときである。

ここで，境界線 $2x+y=5$，すなわち $y=-2x+5$ に垂直で，点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，



$$y=\frac{1}{2}x+5,\quad y=\frac{1}{2}x-5$$

さらに，原点 O と点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$x=0,\quad y=-\frac{3}{4}x$$

(i)　$a^2+b^2 \leqq 25$ かつ $b \leqq -2a+5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(a,\ b)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=-(a^2+b^2)=-a^2-b^2$$

(ii)　$a^2+b^2 \geqq 25$ かつ $\left(a \leqq 0\ \text{または}\ b \leqq -\frac{3}{4}a\right)$ のとき

z は，O と点 $(a,\ b)$ を結ぶ線分と円 $x^2+y^2=25$ の交点において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\sqrt{a^2+b^2}-5\right)^2-(a^2+b^2)=25-10\sqrt{a^2+b^2}$$

(iii)　$b \geqq -2a+5$ かつ $b \leqq \frac{1}{2}a+5$ かつ $b \geqq \frac{1}{2}a-5$ のとき

z は，点 $(a,\ b)$ から直線 $2x+y=5$ に下ろした垂線の足において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\frac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2-(a^2+b^2)=\frac{1}{5}(2a+b-5)^2-(a^2+b^2)$$
$$=\frac{1}{5}(-a^2-4b^2+4ab-20a-10b+25)$$

(iv)　$a \geqq 0$ かつ $b \geqq \dfrac{1}{2}a+5$ のとき

　z は，$(x,\ y)=(0,\ 5)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=25-10b$$

(v)　$b \geqq -\dfrac{3}{4}a$ かつ $b \leqq \dfrac{1}{2}a-5$ のとき

　z は，$(x,\ y)=(4,\ -3)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=16+9-8a+6b=25-8a+6b$$

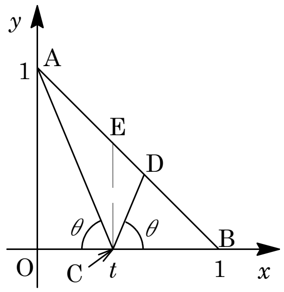
コメント

　点 $(a,\ b)$ が領域の外部にあるときは，境界線に沿って，円を滑らないように転がせながら，考えをまとめています。

問　題

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 0)，C(t, 0) を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。 [2012]

解答例＋映像解説



まず，直線 AB の方程式は，$y=1-x$ ………①

そこで，点 C を通り，x 軸に垂直な直線と直線 AB との交点を E とすると，

$$\mathrm{CE}=1-t$$

また，$\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$ とおくと，$\tan\theta=\dfrac{1}{t}$ より，直線 CD の方程式は，

$$y=\frac{1}{t}(x-t)\ \text{………②}$$

①②を連立して，$1-x=\dfrac{1}{t}(x-t)$ から，$t-tx=x-t$，$(t+1)x=2t$

よって，点 D の x 座標は，$x=\dfrac{2t}{t+1}$ となる。

すると，△ACD の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{2t}{t+1}=\dfrac{-t^2+t}{t+1}$

ここで，$u=t+1$ とおくと，$0<t<1$ から $1<u<2$ となり，

$$S=\frac{-(u-1)^2+u-1}{u}=\frac{-u^2+3u-2}{u}=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)$$

さて，相加平均と相乗平均の関係より，$u+\dfrac{2}{u}\geqq 2\sqrt{2}$

等号は，$u=\dfrac{2}{u}$ すなわち $u=\sqrt{2}$ のとき成立し，これは $1<u<2$ を満たすことより，

$$S=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)\leqq 3-2\sqrt{2}$$

以上より，△ACD の面積の最大値は，$3-2\sqrt{2}$ である。

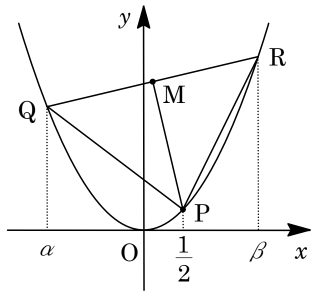
コメント

分数関数の最大・最小は，微分法を利用するのが一般的ですが，範囲外です。このようなときは，次に相加平均と相乗平均の関係が使えないかと考えます。

問　題

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。 [2011]

解答例＋映像解説



点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ線分の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ となり，$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，△PQR が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，$\mathrm{QR}\perp\mathrm{PM}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$ から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PQR の重心を $\mathrm{G}(X,\ Y)$ とおくと，

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\ \ Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より $\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}\cdots\cdots④$，③より $\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入すると，

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2\ ,\ \ \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥$

ところで，α，β は，④⑤を満たす異なる実数であり，

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，β を解とする t に関する 2 次方程式は，

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\frac{1}{4}>\frac{1}{2}\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2$，$Y>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧$

⑥⑧より，△PQR の重心 G の軌跡は，

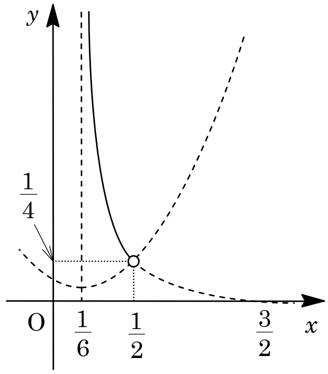
$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥',\quad y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧'$$

さらに，曲線⑥′と領域⑧′の境界線の交点は，

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$



この方程式の実数解は $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ は除く。

コメント

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。なお，問題文が「軌跡を図示せよ」となっていないのは，分数関数のグラフが数Ⅲであることに配慮したためでしょうか。

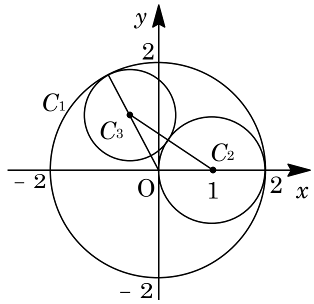
問　題

座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 t の円 C_3 が，C_1 に内接し，かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし, b は正の実数とする。

(1)　a, b を t を用いて表せ。また, t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき, b の最大値を求めよ。　[2009]

解答例



(1)　中心 $(a,\ b)$，半径 t の円 C_3 は，円 C_1 の内部にあり，しかも C_2 の外部にあることより，$0<t\leqq 1$……①である。

さて，C_1 に C_3 が内接することより，

$$\sqrt{a^2+b^2}=2-t$$

①のもとで，$a^2+b^2=(2-t)^2$ ………②

また，C_2 に C_3 が外接することより，

$$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+t$$

①のもとで，$(a-1)^2+b^2=(1+t)^2$ ………③

②－③より，$2a-1=3-6t$ となり，

$$a=-3t+2$$

②に代入して，$(-3t+2)^2+b^2=(2-t)^2$，$b^2=-8t^2+8t$

$b>0$ から，①のもとで，$b=\sqrt{-8t^2+8t}$

すると, t がとり得る値の範囲は，$b=\sqrt{-8t(t-1)}>0$ より，

$$0<t<1$$

(2)　(1)より，$b=\sqrt{-8\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+2}$

すると, $0<t<1$ から，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき, b は最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

コメント

2 円の内接・外接についての基本問題です。