《2019 入試対策》

東京大学

理系数学

1998－2018

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された東京大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

なお，映像解説の一覧は，下記のページに掲載しています。

PC サイト トップページ ≫ 東大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

１　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

２　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　放物線$y=x^2$のうち$-1 \leqq x \leqq 1$を満たす部分を C とする。座標平面上の原点O と点A$(1,\ 0)$を考える。$k>0$を実数とする。点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を満たす点 R が動く領域の面積を$S(k)$とする。$S(k)$および$\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$を求めよ。　[2018]

2　kを実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線C, Dの共通接線について考える。

$$C: y=x^2+k,\quad D: x=y^2+k$$

(1)　直線$y=ax+b$が共通接線であるとき，aを用いてkとbを表せ。ただし$a\neq-1$とする。

(2)　傾きが 2 の共通接線が存在するようにkの値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きとy切片を求めよ。　[2017]

3　正の実数aに対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C: y=ax^2+\dfrac{1-4a^2}{4a}$

aが正の実数全体を動くとき，Cの通過する領域を図示せよ。　[2015]

4　座標平面の原点を O で表す。線分$y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$上の点 P と，線分$y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域をDとする。

(1)　sを$0\leqq s\leqq 2$を満たす実数とするとき，点$(s,\ t)$がDに入るようなtの範囲を求めよ。

(2)　Dを図示せよ。　[2014]

5　座標平面において，点P$(0,\ 1)$を中心とする半径 1 の円を C とする。a を$0<a<1$を満たす実数とし，直線$y=a(x+1)$とCとの交点をQ, R とする。

(1)　△PQR の面積$S(a)$を求めよ。

(2)　aが$0<a<1$の範囲を動くとき，$S(a)$が最大となるaを求めよ。　[2011]

6　座標平面上の 1 点P$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$をとる。放物線$y=x^2$上の 2 点Q$(\alpha,\ \alpha^2)$，R$(\beta,\ \beta^2)$を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心G$(X,\ Y)$の軌跡を求めよ。　[2011]

7 座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y=x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，$\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{P}$ とする。

(1) a を $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。 [2007]

8 O を原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m : y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで, $p>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと，原点 O は直線 $y=1$ 上の，第 1 象限の点 Q に移り, y 軸上の点 P は直線 m 上の，第 1 象限の点 R に移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 l に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。 [2006]

9 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。 [2004]

10 2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。 [2002]

11 座標平面上を運動する 3 点 P, Q, R があり，時刻 t における座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P}: x=\cos t,\ y=\sin t \qquad \mathrm{Q}: x=1-vt,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{R}: x=1-vt,\ y=1$$

ただし，v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) 点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π までの間ではぶつからない。

(2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。 [2000]

■ 図形と計量

1　C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは，それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって，Q は C をちょうど一周する)。ただし，m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

[2010]

2　半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[2001]

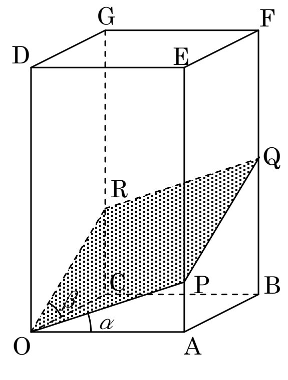
■ ベクトル

1　a を $1<a<3$ を満たす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。　[2016]

2　1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，∠AOP を α，∠COR を β とおく。

(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。　[2014]



3　$\triangle$ABC において $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ を満たすとする。

(1)　$\angle$APB，$\angle$APC を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。　[2013]

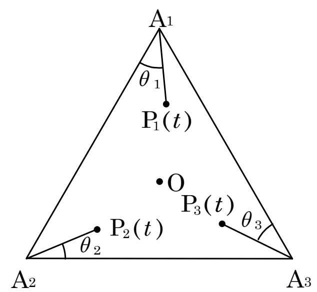
4　四面体 OABC において，4 つの面はすべて合同であり，OA $=3$，OB $=\sqrt{7}$，AB $=2$ であるとする。また, 3 点 O, A, B を含む平面を L とする。

(1)　点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2)　$0<t<1$ を満たす実数 t に対して，線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく。2 点 P_t，Q_t を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2010]

5　平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする 1 辺の長さが 1000 の正三角形$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$がある。$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$の内部に 3 点 $\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{B_3}$を，$d(\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n)=1$　$(n=1,\ 2,\ 3)$ となるようにとる。また，



$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\ \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\ \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$
$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$

とおく。$n=1,\ 2,\ 3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発をし，$\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1)　ある時刻 t で $d(\mathrm{P_1}(t),\ \mathrm{P_2}(t))\leqq 1$ が成立した。ベクトル $\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と，ベクトル $\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2)　角度 θ_1，θ_2，θ_3 を $\theta_1=\angle \mathrm{B_1A_1A_2}$，$\theta_2=\angle \mathrm{B_2A_2A_3}$，$\theta_3=\angle \mathrm{B_3A_3A_1}$ によって定義する。α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ を満たす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1+\theta_2$ の値のとる範囲を α を用いて表せ。

(3)　時刻 t_1，t_2，t_3 のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P_2}(t_1),\ \mathrm{P_3}(t_1))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_3}(t_2),\ \mathrm{P_1}(t_2))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_1}(t_3),\ \mathrm{P_2}(t_3))\leqq 1$$

このとき，時刻 $T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_2}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_3}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$$

が成立することを示せ。　[2009]

6　O を原点とする座標平面上の 4 点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_4}$ で，条件

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\quad(n=2,\ 3)$$

を満たすものを考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ が曲線 $xy=1$ 上にあるとき，$\mathrm{P_3}$ はこの曲線上にはないことを示せ。

(2)　$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき，$\mathrm{P_4}$ もこの円周上にあることを示せ。

[2006]

7　xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする。S の外側にある点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき PQ≦AR であるような点 P の動く範囲 V を求め，V の体積は 10 より小さいことを示せ。　[2002]

8　xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の2条件を満たしているものとする。

(a)　A, B は原点からの距離が1以下の領域に含まれる。

(b)　A, B は一点Pのみを共有し, Pはそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし, 円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。　[1999]

■ 整数と数列

1　数列 a_1, a_2, $\cdots$ を, $a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　$n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2)　a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。　[2018]

2　$p = 2+\sqrt{5}$ とおき, 自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して, $a_n = p^n + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1, a_2 の値を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。積 a_1a_n を, a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。　[2017]

3 k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1，a_2，…，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする。

(1) 次の不等式を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式を満たす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ を満たす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-[\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ を満たす正の整数 s は存在しないことを示せ。 [2016]

4 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ。 [2015]

5 m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

[2015]

6　r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r,\ a_2 = r+1,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4)　a_2，a_3，a_4，$\cdots$に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。　[2014]

7　次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件(a), (b)をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題 P を証明せよ。　[2013]

8　n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。　[2012]

$\boxed{9}$ 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。　[2011]

$\boxed{10}$ $p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\,;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\,;c]$ に対して，$w([a,\ b\,;c]) = p - q - (a+b)$ とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\,;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p = q$ の場合を考える。

(2)　s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\,;c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。　[2011]

$\boxed{11}$ 自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

(3)　m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。　[2009]

12　自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば，$\boxed{1}=1$，$\boxed{2}=11$，$\boxed{3}=111$ である。

(1)　m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2)　n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。 [2008]

13　次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1)　条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ で，$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2)　組 $(a,\ b,\ c)$ が条件(A)を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3)　条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ。 [2006]

14　$x>0$ に対し，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて $f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを示し，a_n，b_n に関する漸化式を求めよ。

(2)　$h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n，b_n の一般項を求めよ。 [2005]

15　3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。 [2005]

16　自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1)　10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し，10 の位の数を a，1 の位の数を b とおいたとき，$a+b$ が偶数となるならば，b は 0 または 4 であることを示せ。

(2)　10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し，1000 の位の数，100 の位の数，10 の位の数，および 1 の位の数の 4 つがすべて同じ数となるならば，その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。 [2004]

17　2 次方程式$x^2-4x-1=0$の 2 つの実数解のうち大きいものをα，小さいものをβとする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3を求めよ。また, $n\geqq 3$に対し，s_nをs_{n-1}とs_{n-2}で表せ。

(2)　β^3以下の最大の整数を求めよ。

(3)　α^{2003}以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。　[2003]

18　nは正の整数とする。x^{n+1}をx^2-x-1で割った余りをa_nx+b_nとおく。

(1)　数列a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$に対して，a_n，b_nはともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。　[2002]

19　Nを正の整数とする。$2N$個の項からなる数列$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\}$を$\{b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \cdots,\ b_N,\ a_N\}$という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列はb_1を初項とし，b_iの次にa_i，a_iの次にb_{i+1}がくるようなものになる。また，数列$\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2N\}$をシャッフルしたときに得られる数列において，数 k が現れる位置を$f(k)$で表す。たとえば，$N=3$のとき，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$をシャッフルすると，$\{4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3\}$となるので，$f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=6$，$f(4)=1$，$f(5)=3$，$f(6)=5$である。

(1)　数列$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2)　$1\leqq k\leqq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し，$f(k)-2k$は$2N+1$で割り切れることを示せ。

(3)　nを正の整数とし，$N=2^{n-1}$のときを考える。数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$を $2n$ 回シャッフルすると，$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$にもどることを証明せよ。　[2002]

20　次の条件を満たす正の整数全体の集合をSとおく。

「各けたの数字は互いに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない」

ただし，Sの要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数はSに含まれるとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　Sの要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。

(2)　小さい方から数えて 2000 番目のSの要素を求めよ。　[2000]

21 (1)　k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき，$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2)　以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件 ： $0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

[1999]

22 実数 a に対して $k\leqq a<k+1$ をみたす整数 k を $[\,a\,]$ で表す。n を正の整数として，$f(x)=\dfrac{x^2(2\cdot3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}$ とおく。$36n+1$ 個の整数 $[f(0)]$，$[f(1)]$，$[f(2)]$，…，$[f(36n)]$ のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。 [1998]

■ 確率

1 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。 [2017]

2 A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。 [2016]

3 どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く。さいころを投げ，出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると，得られる文字列は，AACDAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。[2015]

4　a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。　[2014]

5　A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

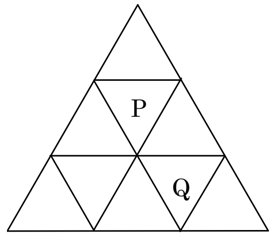
(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1)　A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p(n)$ を求めよ。　[2013]

6 図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



[2012]

7 2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2), (3)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3)　n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。　[2010]

8 スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\dfrac{P_3}{P_1}$ を求めよ。　[2009]

9 白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。 [2008]

10 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール(R)の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
①　ブロックの高さは，最初は 0 とする。
②　硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。

(1)　n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2)　(1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3)　ルール(R)の下で，n 回硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。[2007]

11 コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく, p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，P_n を p と n で表せ。 [2006]

12　N を 1 以上の整数とする。数字 1, 2, …, N が書かれたカードを 1 枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙の 2 人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を a とする。引いたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は，$b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iii)　$a+b\leqq N$ の場合は，乙が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を c とする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iv)　$a+b\geqq c$ の場合は，乙はもう 1 回カードを引く。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d\leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が 2 回目にカードを引かないことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2)　甲が 2 回目にカードを引くことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし，各カードが引かれる確率は等しいものとする。　[2005]

13　片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し，3, 4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意 : さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2004]

14　さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1)　X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2003]

15　コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

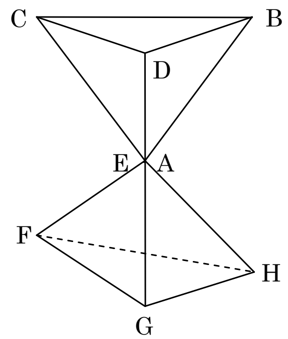
(2)　X_n を求めよ。

(3)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。　[2001]

16　p を $0<p<1$ を満たす実数とする。

(1)　四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 p で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2)　(1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。　[1999]



■ 論証

1 n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。 [2007]

2 円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。 [2003]

3 容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m \geqq 4$ で空のビーカーはない。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ 1 つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a)　入っている水の量が最も少ないビーカーを 1 つ選ぶ。

(b)　さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを 1 つ選ぶ。

(c)　次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1)　$x<\dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2)　$x>\dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。 [2001]

4 (1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ。

(2)　(1)で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。 [1999]

■ 複素数

1 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ。 [2018]

2 複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。 [2017]

3 z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。 [2016]

4 $|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち，$T=\left\{w \mid w=z^2-2z \text{ ならば } |z|\leqq\dfrac{5}{4}\right\}$ とする。このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

[2005]

5 O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) $\angle\mathrm{APB}$ を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。 [2003]

6　複素数平面上の点a_1，a_2，…，a_n，…を

$$a_1=1,\ a_2=i,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。ただし，$i$は虚数単位である。

(1)　3点b_1，b_2，b_3を通る円Cの中心と半径を求めよ。

(2)　すべての点$b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$は円Cの周上にあることを示せ。　[2001]

7　複素数平面上の原点以外の相異なる2点$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$を考える。$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$を通る直線をl，原点からlに引いた垂線とlの交点を$\mathrm{R}(w)$とする。ただし，複素数γが表す点 C を$\mathrm{C}(\gamma)$とかく。このとき，「$w=\alpha\beta$であるための必要十分条件は，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$が中心$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$の円周上にあることである」を示せ。　[2000]

8　複素数z_n（$n=1,\ 2,\ \cdots$）を，$z_1=1$，$z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$によって定める。ただし，iは虚数単位である。

(1)　すべての自然数nについて，$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$が成り立つことを示せ。

(2)　実数 $r>0$ に対して，$|z_n|\leqq r$を満たすz_nの個数を$f(r)$とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}$を求めよ。　[1999]

■ 曲線

1　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，$\mathrm{BC}=2$の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。　[2000]

■ 極限

1 p, q は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$ を満たすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x \leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1) $0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2) x_0 は $0<x_0<1$ を満たす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$x_n=f(x_{n-1})$ によって順次定める。$p>q$ であるとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=0$ となることを示せ。

(3) $p<q$ であるとき，$c=f(c)$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在することを示せ。

[2014]

2 n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，…，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

① $\angle P_{k-1}OP_k=\dfrac{\pi}{n}$ $(1\leqq k\leqq n)$，$\angle OP_{k-1}P_k=\angle OP_0P_1$ $(2\leqq k\leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし，$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。　[2007]

3 $a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。　[2006]

4 関数 $f(x)$ を $f(x)=\frac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $x>\frac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。$x_0>\frac{1}{2}$ であれば，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ。　[2005]

5 $a>0$ とする。正の整数 n に対して，区間 $0\leqq x\leqq a$ を n 等分する点の集合 $\left\{0,\ \frac{a}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}a,\ a\right\}$ の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり，次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0)=c \\ \dfrac{f_n((k+1)h)-f_n(kh)}{h}=\left\{1-f_n(kh)\right\}f_n((k+1)h)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1) \end{cases}$$

ただし，$h=\frac{a}{n}$, $c>0$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ とおいて p_k を求めよ。

(2) $g(a)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(a)$ とおく。$g(a)$ を求めよ。

(3) $c=2,\ 1,\ \frac{1}{4}$ それぞれの場合について，$y=g(x)$ の $x>0$ でのグラフを書け。

[2000]

6 n を正の整数とする。連立不等式

$$x+y+z\leqq n,\ -x+y-z\leqq n,\ x-y-z\leqq n,\ -x-y+z\leqq n$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n^3}$ を求めよ。　[1998]

7 xy 平面に 2 つの円 $C_0 : x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，$C_1 : (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ をとり，C_2 を x 軸と C_0，C_1 に接する円とする。さらに，$n=2,\ 3,\cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}，C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。C_n の半径を r_n，C_n と x 軸の接点を $(x_n,\ 0)$ として，$q_n=\dfrac{1}{\sqrt{2r_n}}$，$p_n=q_nx_n$ とおく。

(1) q_n は整数であることを示せ。

(2) p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

(3) α を $\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす正の数として，不等式 $|x_{n+1}-\alpha|<\frac{2}{3}|x_n-\alpha|$ を示し，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。　[1998]

8　θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。xy 平面にベクトル $\vec{a} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\vec{b} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ をとり，点 P_n，Q_n，$n = 1,\ 2, \cdots$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1,\ 0)$，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4\left\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\right\}$$

で定める。ただし，O は原点で，$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ はベクトルの内積を表す。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = (x_n,\ y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに，このような θ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ。　[1998]

■ 微分法

1　関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$ の増減表をつくり，$x \to +0$，$x \to \pi - 0$ のときの極限を調べよ。　[2018]

2　$a > 0$ とし，$f(x) = x^3 - 3a^2x$ とおく。次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。　[2018]

3　実数 $a,\ b$ に対して，$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$ とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数 $g(\theta) = \dfrac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$ を考える。

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ。

(2)　$g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための $a,\ b$ についての条件を求めよ。また，条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。　[2017]

4　e を自然対数の底，すなわち $e = \displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}}$$

[2016]

5　a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。 [2013]

6　次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2+(y-1)^2\leqq 1,\quad x\geqq\frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。 [2012]

7　3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として $90°$ 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2010]

8　(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ [2009]

9　放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1)　線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ。

(2)　L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。 [2008]

10 関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=x^3-3x,\quad f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x),\quad f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$$

以下同様に, $n\geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば, 関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) a を実数とする。$f_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) n を 3 以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。 [2004]

11 a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ をとる。関数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：Q における C の接線が直線 PQ と直交する。 [2002]

12 実数 $t>1$ に対し, xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(1,\ 1)$, $\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし, 線分 OP, OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき, $c(t)=\dfrac{b(t)}{a(t)}$ とおくと, 関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。 [2001]

13 a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。 [1998]

■ 積分法

1 n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ \ g(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。$p\leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ \ h(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$ [2015]

2 u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線 $C_1: y=-x^2+1$，$C_2: y=(x-u)^2+u$ を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a, b により，$a\leqq u\leqq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a\leqq u\leqq b$ を満たすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。ただし，共有点が 1 点のときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。$2|x_1y_2-x_2y_1|$ を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(u)du$ を求めよ。 [2014]

3 L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す。

(1) $u(t)$，$v(t)$ を求めよ。

(2) $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分 $f(a)=\displaystyle\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。 [2011]

4 (1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$ [2010]

5 以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<a$ を満たす実数 $x,\ a$ に対し，次を示せ。$\dfrac{2x}{a}<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$

(2)　(1)を利用して，次を示せ。$0.68<\log 2<0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。 [2007]

6 $x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)\ (x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)\ (-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_8^{27}g(x)\,dx$ を求めよ。 [2006]

7 $a,\ b,\ c$ を実数とし，$a\neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1)=-1$，$f(1)=1$

(B)　$-1\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x)\leqq 3x^2-1$

このとき，積分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。 [2003]

8 O を原点とする xyz 空間に点 $P_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$，をとる。また，$z$ 軸上 $z\geqq 0$ の部分に，点 Q_k を線分 P_kQ_k の長さが 1 になるようにとる。三角錐 $OP_kP_{k+1}Q_k$ の体積を V_k とおいて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$ を求めよ。 [2002]

9　次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ 1 つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy+\sin x+\cos x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。　[2001]

10　$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx > 8$ であることを示せ。ただし，$\pi = 3.14\cdots$ は円周率，$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。　[1999]

■ 積分の応用

1　座標空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 1)$ を考える。$\dfrac{1}{2} < r < 1$ とする。点 P が線分 OA, AB, BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれ V_1，V_2，V_3 とする。

(1)　平面 $y=t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに，この範囲の t に対し，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分および平面 $y=t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2)　V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。

(3)　r は(2)の条件を満たすとする。V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。

(4)　ひきつづき r は(2)の条件を満たすとする。S と T を求め，V の体積を決定せよ。

[2018]

2　点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A$(1,\ 0,\ 0)$ に対して，$\angle$AOP を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1)　点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。　[2017]

3 座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件(a), (b)を満たしながら動く。

(a)　点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b)　点 $C(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる領域を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。 [2016]

4 a を正の実数とし，p を正の有理数とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$ $(x>0)$ と $y=\log x$ $(x>0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてもよい。

(1)　a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2)　この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3)　(2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。 [2015]

5 座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $A(-1,\ 1,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C(1,\ -1,\ 0)$，$D(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。 [2013]

6 座標平面上で 2 つの不等式 $y \geqq \dfrac{1}{2}x^2$，$\dfrac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \dfrac{1}{8}$ によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1)　V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。 [2012]

7　(1)　$x,\ y$ を実数とし，$x>0$ とする。t を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2)　次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

$x>0$ かつ，実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3)　次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする。

$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ が成り立つ。

V の体積を求めよ。　[2011]

8　O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1)　$\mathrm{P}_i\ (i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ $\mathrm{H}_i\ (i=1,\ 2)$ とする。このとき $\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1$ と $\triangle\mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$ の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{O}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。　[2010]

9　a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\}$$
$$D_2=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸のまわりに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1)　$W(a)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。　[2009]

10　(1)　正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2)　正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を G_1，G_2 とする。G_1，G_2 を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。　[2008]

11　座標平面において，媒介変数 t を用いて，$x=\cos 2t$，$y=t\sin t$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$ と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。　[2008]

12　r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2\leqq r^2,\ \ y^2+z^2\geqq r^2,\ \ z^2+x^2\leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。　[2005]

13　半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の 1 点を P とする。点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。　[2004]

14　r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球を A，点 $\mathrm{P}(r,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし，球 A と球 B の和集合とは，球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1)　V を r の関数として表し，そのグラフの概形をかけ。

(2)　$V=8$ となるとき，r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

　注意 ： 円周率 π は $3.14<\pi<3.15$ を満たす。　[2004]

15　xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。次に，平面 $z=0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

　$0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ。

(2)　C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。　[2003]

16　xyz 空間に 5 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ 0,\ 3)$ をとる。四角錐 PABCD の $x^2+y^2\geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

[1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

放物線$y=x^2$のうち$-1\leqq x\leqq 1$を満たす部分をCとする。座標平面上の原点Oと点A$(1,\ 0)$を考える。$k>0$を実数とする。点PがC上を動き，点Qが線分OA上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を満たす点Rが動く領域の面積を$S(k)$とする。$S(k)$および$\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$を求めよ。 [2018]

解答例＋映像解説

$C: y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$上の点P$(p,\ p^2)\ (-1\leqq p\leqq 1)$，線分 OA 上の点Q$(q,\ 0)$ $(0\leqq q\leqq 1)$に対して，$k>0$のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{k}(p,\ p^2)+k(q,\ 0)$$

ここで，R$(x,\ y)$とおくと，$x=\dfrac{p}{k}+kq$ ……①，$y=\dfrac{p^2}{k}$ ……②となる。

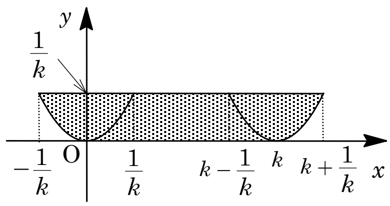
さて，まずqの値を固定し，①から$p=k(x-kq)$を②に代入して，

$$y=\frac{1}{k}\cdot k^2(x-kq)^2=k(x-kq)^2\quad\left(kq-\frac{1}{k}\leqq x\leqq kq+\frac{1}{k}\right)\text{………③}$$

そして，qの値を$0\leqq q\leqq 1$で動かすと，③で表される放物線の一部はx軸方向に平行移動する。そして，その頂点は原点から点$(k,\ 0)$まで動く。

これより，点Rが動く領域の面積$S(k)$は，

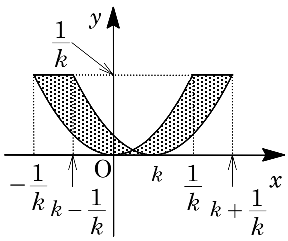
(i) $\dfrac{1}{k}\leqq k-\dfrac{1}{k}$ $(k\geqq\sqrt{2})$のとき



$$S(k)=\left(k+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}-2\int_{-\frac{1}{k}}^{0}kx^2dx$$
$$=1+\frac{2}{k^2}-\frac{2}{3}k\Big[x^3\Big]_{-\frac{1}{k}}^{0}=1+\frac{4}{3k^2}$$

(ii) $\dfrac{1}{k}>k-\dfrac{1}{k}$ $(0<k<\sqrt{2})$のとき

点Rの動く領域が直線$x=\dfrac{k}{2}$について対称なので，



$$S(k)=2\left\{\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}}kx^2dx+k\cdot\frac{1}{k}-\int_{k}^{k+\frac{1}{k}}k(x-k)^2dx\right\}$$
$$=\frac{2k}{3}\Big[x^3\Big]_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}}+2-\frac{2k}{3}\Big[(x-k)^3\Big]_{k}^{k+\frac{1}{k}}$$
$$=\frac{2}{3k^2}-\frac{k^4}{12}+2-\frac{2}{3k^2}=2-\frac{k^4}{12}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)=\lim_{k\to+0}\left(2-\frac{k^4}{12}\right)=2$　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4}{3k^2}\right)=1$

コメント

軌跡を求める問題で，東大で頻出の1文字固定をして考えるタイプです。

問　題

k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える。

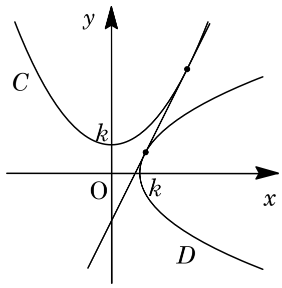
$$C : y = x^2 + k,\quad D : x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定めよ。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。 [2017]

解答例＋映像解説

(1) 放物線 $C : y = x^2 + k$ ……①，$D : x = y^2 + k$ ……②に対して，共通接線を $y = ax + b\ (a \neq -1)$ ……③とする。



①③を連立すると，$x^2 + k = ax + b$ となり，

$$x^2 - ax + k - b = 0$$

重解をもつので，$D = a^2 - 4(k - b) = 0$ となり，

$$4b = 4k - a^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

②③を連立すると，$y = a(y^2 + k) + b$ となり，

$$ay^2 - y + ak + b = 0$$

ここで，$a = 0$ とすると，③は x 軸に平行になり D には接しない。

よって，$a \neq 0$ で重解をもつので，$D = 1 - 4a(ak + b) = 0$ となり，

$$1 - 4a^2k - 4ab = 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④⑤より，$1 - 4a^2k - a(4k - a^2) = 0$，$4a(a+1)k - (a^3 + 1) = 0 \cdots\cdots\cdots ⑥$

$a \neq -1$ から，$k = \dfrac{a^3 + 1}{4a(a+1)} = \dfrac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{4a(a+1)} = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a}$

④から，$b = k - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a}$

(2) $a = 2$ のとき，(1)より，$k = \dfrac{4 - 2 + 1}{8} = \dfrac{3}{8}$ となる。

このとき，C と D の共通接線を $y = mx + n$ とおくと，④⑥より，

$$4n = \frac{3}{2} - m^2 \cdots\cdots\cdots ⑦,\quad \frac{3}{2}m(m+1) - (m^3 + 1) = 0 \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑧より，$3m(m+1) - 2(m+1)(m^2 - m + 1) = 0$ となり，

$$(m+1)(2m^2 - 5m + 2) = 0,\quad (m+1)(m-2)(2m-1) = 0$$

よって，$m = -1,\ 2,\ \dfrac{1}{2}$ となり，共通接線は 3 本存在する。

$m=-1$ のとき⑦より $n=\dfrac{1}{8}$，$m=2$ のとき⑦より $n=-\dfrac{5}{8}$，$m=\dfrac{1}{2}$ のとき⑦より $n=\dfrac{5}{16}$ となるので，共通接線の傾きと y 切片の組 $(m,\ n)$ は，

$$(m,\ n)=\left(-1,\ \frac{1}{8}\right),\ \left(2,\ -\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right)$$

コメント

放物線 C と D は直線 $y=x$ について対称です。このことから，(2)で共通接線が 3 本あれば，その傾きは 2 と $\dfrac{1}{2}$ と -1 であることがわかります。なお，混乱を防ぐために，共通接線を $y=mx+n$ と設定しています。

問　題

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。　[2015]

解答例＋映像解説

a が正の実数全体を動くとき，$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ ……①の通過領域は，①を a の方程式とみたとき，少なくとも 1 つの正の解が存在する $(x,\ y)$ の条件として表せ，

$$4ay = 4a^2x^2 + 1 - 4a^2,\ \ 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

(i)　$x^2 - 1 = 0$ $(x = \pm 1)$ のとき

②は $-4ya + 1 = 0$ となり，$a > 0$ を解にもつ条件は，$-4y < 0$ すなわち $y > 0$。

(ii)　$x^2 - 1 \neq 0$ $(x \neq \pm 1)$ のとき

②の左辺を，$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$ とおき，$f(0) = 1 > 0$ に着目する。

(ii-i)　$x^2 - 1 > 0$ $(x < -1,\ 1 < x)$ のとき

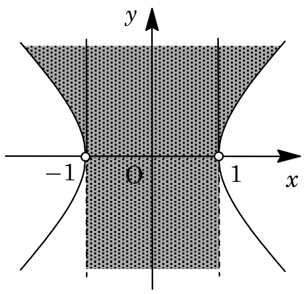
$a > 0$ を解にもつ条件は，$D/4 = 4y^2 - 4(x^2-1) \geqq 0$ かつ $a = \dfrac{y}{2(x^2-1)} > 0$ より，

$$x^2 - y^2 \leqq 1,\ \ y > 0$$

(ii-ii)　$x^2 - 1 < 0$ $(-1 < x < 1)$ のとき

$f(0) > 0$ より，②はつねに $a > 0$ の解をもつ。

以上まとめると，放物線 C の通過する領域は右図の網点部である。ただし，実線の境界は領域に含み，破線の境界は領域に含まない。



コメント

x を固定して y のとり得る範囲を求めるか，または方程式が実数解をもつ条件としてとらえるかという 2 つの方法があります。上の解では $f(a) = 0$ の定数項 1 に注目して，後者の解法を採用しました。

問　題

座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

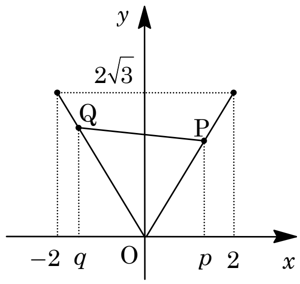
(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。 [2014]

解答例＋映像解説

(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3 \cdots\cdots ①$$



ただし，$-2 \leqq q \leqq 0$ より $-2 \leqq p-3 \leqq 0$ となり，$0 \leqq p \leqq 2$ と合わせて $1 \leqq p \leqq 2$ である。

ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

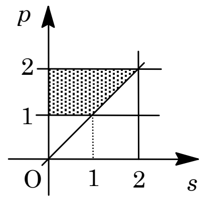
$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$　$(p-3 \leqq x \leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3) \cdots\cdots ②$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3) \cdots\cdots ③$

ただし，$0 \leqq s \leqq 2$，$p-3 \leqq s \leqq p$，$1 \leqq p \leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。



そこで，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i) $0 \leqq s \leqq 1$ のとき

右上図より，$1 \leqq p \leqq 2$ となり，$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq 2$ から，

$$f(1) \leqq f(p) \leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \leqq f(p) \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii) $1 \leqq s \leqq 2$ のとき

右上図より，$s \leqq p \leqq 2$ となり，$2 \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{5}{2}$ から，

$$f(s) \leqq f(p) \leqq f(2),\ \sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$$

(i)(ii)より，D に入るような t の範囲は，③から $t=f(p)$ なので，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

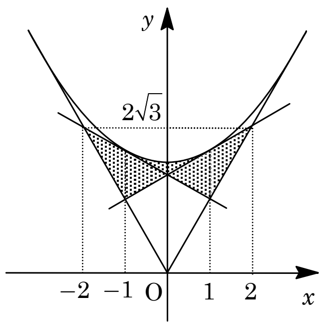
$$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\quad (1 \leqq s \leqq 2)$$

(2)　$-2 \leqq s \leqq 0$ のときは，y 軸に関する対称性を考え，(1)と同様にすると，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4) \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad (-1 \leqq s \leqq 0)$$

$$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\quad (-2 \leqq s \leqq -1)$$

そこで，放物線 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}(s^2+9)$ と直線 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)$ は，それぞれ $s=1$，$s=-1$ で接することに注意して点 $(s,\ t)$ を含む領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

線分の通過領域の頻出問題です。上の解答例では，条件の不等式を sp 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる $p=\frac{s+3}{2}$ も書き込んでおくのも，1 つの方法です。

問　題

座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

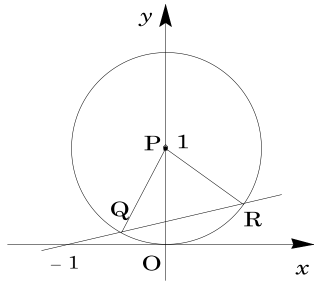
(1)　△PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2)　a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。　[2011]

解答例＋映像解説

(1)　$0<a<1$ のとき，点 P(0, 1) から直線 $y=a(x+1)$，すなわち $ax-y+a=0$ に下ろした垂線の長さ h は,

$$h=\frac{|-1+a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\cdots\cdots\cdots(*)$$



また，$\mathrm{QR}=2\sqrt{1-h^2}$ となるので，△PQR の面積 $S(a)$ は, $(*)$から,

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-h^2}\cdot h=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$

(2)　(1)より，$S(a)=h\sqrt{1-h^2}=\sqrt{h^2-h^4}$

ここで，$0<h<1$ として，$f(h)=h^2-h^4$ とおくと,

$$f'(h)=2h-4h^3=2h(1-2h^2)$$

すると，$f(h)$ の増減は右表のようになり，

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$	0	$+$	0	$-$	
$f(h)$		↗		↘	

$f(h)$ は $h=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値をとり，このとき $S(a)$ も最大となる。

すなわち，$S(a)$ が最大となる a は, $(*)$から，$\dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり,

$$2(1-a)^2=a^2+1,\ a^2-4a+1=0$$

$0<a<1$ から，$a=2-\sqrt{3}$

コメント

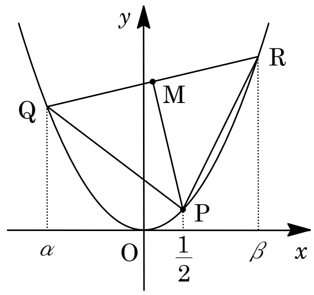
円と直線に関する基本問題です。なお, (2)の $f(h)$ は複 2 次式ですので，微分するまでもありませんでした。

問　題

座標平面上の 1 点$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$をとる。放物線$y=x^2$上の 2 点$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心$\mathrm{G}(X,\ Y)$の軌跡を求めよ。 [2011]

解答例＋映像解説

点$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を結ぶ線分の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$となり，$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$に対して，



$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，△PQR が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，$\mathrm{QR}\perp\mathrm{PM}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PQR の重心を$\mathrm{G}(X,\ Y)$とおくと，

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\quad Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}$ ……④，③より$\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}$ ……⑤

④⑤を①に代入すると，

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2,\quad \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}$ ………⑥

ところで，α，βは，④⑤を満たす異なる実数であり，

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，βを解とするtに関する 2 次方程式は，

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\frac{1}{4}>\frac{1}{2}\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2$，$Y>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$ ………⑧

⑥⑧より，$\triangle$PQR の重心 G の軌跡は，

$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥',\quad y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧'$$

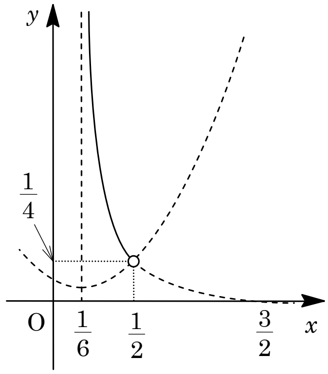
さらに，曲線⑥$'$と領域⑧$'$の境界線の交点は，

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$

この方程式の実数解は $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ は除く。



コメント

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。

問　題

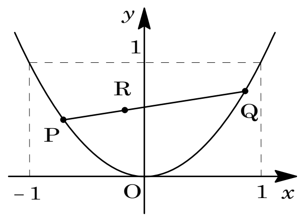
座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，$\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ のときは$\mathrm{R}=\mathrm{P}$とする。

(1) a を$-1 \leqq a \leqq 1$を満たす実数とするとき，点$(a,\ b)$が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) Dを図示せよ。 [2007]

解答例

(1) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$とおき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R の動く範囲 D に点$(a,\ b)$が属することより，



$$a = \frac{2p+q}{3}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b = \frac{2p^2+q^2}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q = 3a-2p$ ……③となり，②に代入すると，

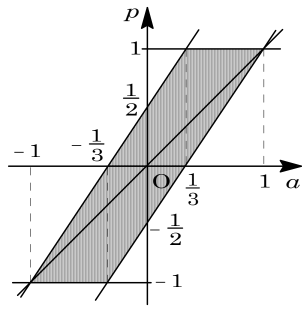
よって，$2p^2+(3a-2p)^2 = 3b$

$$b = 2p^2-4ap+3a^2 = 2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p) = 2(p-a)^2+a^2$ とおき，$-1 \leqq p \leqq 1$ ……④，$-1 \leqq q \leqq 1$ ……⑤のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1 \leqq 3a-2p \leqq 1$ となり，

$$\frac{3a-1}{2} \leqq p \leqq \frac{3a+1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1 \leqq a \leqq 1$から，$f(p)$は最小値$f(a) = a^2$をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1) = 3a^2+4a+2,\quad f(1) = 3a^2-4a+2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right) = \frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{3a+1}{2}\right) = \frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより, a の値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると，

(i) $-1 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき

$f(a) \leqq f(p) \leqq f(-1)$ より，$a^2 \leqq b \leqq 3a^2+4a+2$

(ii) $-\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 0$ のとき

$f(a) \leqq f(p) \leqq f\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)$より，$a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2-a+\dfrac{1}{2}$

(iii) $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

$f(a) \leqq f(p) \leqq f\left(\dfrac{3a+1}{2}\right)$ より，$a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 + a + \dfrac{1}{2}$

(iv) $\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき

$f(a) \leqq f(p) \leqq f(1)$ より，$a^2 \leqq b \leqq 3a^2 - 4a + 2$

(2)　$a < -1$，$1 < a$ のときは，右上図より，④⑥を満たす p は存在しない。

よって，(1)から，D を表す不等式は，

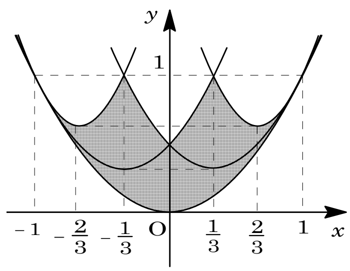
$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 + 4x + 2 \left(-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2 \left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$

以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。

問　題

O を原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m : y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで, $p>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと，原点 O は直線 $y=1$ 上の，第 1 象限の点 Q に移り, y 軸上の点 P は直線 m 上の，第 1 象限の点 R に移った。

(1)　このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

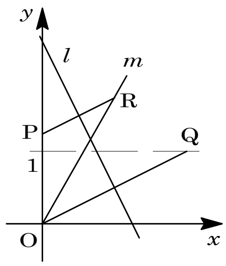
(2)　次の条件を満たす点 P が存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 l に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。　[2006]

解答例

(1)　$\mathrm{R}(r,\ r\tan\theta)$ とおくと, PR と l が垂直より，$\dfrac{r\tan\theta-p}{r}\cdot\alpha=-1$ となり,

$$r(\alpha\tan\theta+1)=p\alpha\ ,\ \ r=\frac{p\alpha}{\alpha\tan\theta+1}\ \cdots\cdots\cdots ①$$



また，$\mathrm{Q}(q,\ 1)$ とおくと, OQ と l が垂直より，

$$\frac{1}{q}\cdot\alpha=-1\ ,\ \ q=-\alpha\ \cdots\cdots\cdots ②$$

また，PR の中点 $\left(\dfrac{r}{2},\ \dfrac{r\tan\theta+p}{2}\right)$ と OQ の中点 $\left(\dfrac{q}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を結ぶ直線が l となり，その傾きが α から,

$$\frac{r\tan+p}{2}-\frac{1}{2}=\alpha\left(\frac{r}{2}-\frac{q}{2}\right),\ \ r(\tan\theta-\alpha)=-\alpha q-p+1$$

①②を代入して，$\dfrac{p\alpha}{\alpha\tan\theta+1}(\tan\theta-\alpha)=\alpha^2-p+1$

$$p\alpha\tan\theta-p\alpha^2=\alpha(\alpha^2-p+1)\tan\theta+(\alpha^2-p+1)$$

よって，$-\alpha(\alpha^2-2p+1)\tan\theta=p\alpha^2+\alpha^2-p+1$ から,

$$\tan\theta=\frac{p\alpha^2+\alpha^2-p+1}{-\alpha(\alpha^2-2p+1)}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

(2)　直線 OQ の方程式が，$y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ より，$1=q\tan\dfrac{\theta}{3}$

②より，$1=-\alpha\tan\dfrac{\theta}{3}$，$\tan\dfrac{\theta}{3}=-\dfrac{1}{\alpha}$

すると，$\tan\dfrac{2}{3}\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{3}}=\dfrac{-\dfrac{2}{\alpha}}{1-\dfrac{1}{\alpha^2}}=\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2-1}$ から,

$$\tan\theta=\frac{\tan\frac{\theta}{3}+\tan\frac{2\theta}{3}}{1-\tan\frac{\theta}{3}\tan\frac{2\theta}{3}}=\frac{-\frac{1}{\alpha}+\frac{-2\alpha}{\alpha^2-1}}{1-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{-2\alpha}{\alpha^2-1}}=\frac{-3\alpha^2+1}{\alpha^3-3\alpha}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{p\alpha^2+\alpha^2-p+1}{-\alpha(\alpha^2-2p+1)}=\dfrac{-3\alpha^2+1}{\alpha^3-3\alpha}$

$$(\alpha^2-3)(p\alpha^2+\alpha^2-p+1)=(3\alpha^2-1)(\alpha^2-2p+1)$$

まとめて，$(p-2)\alpha^4+2(p-2)\alpha^2+(p-2)=0$，$(p-2)(\alpha^4+2\alpha^2+1)=0$

よって，$p=2$のとき，どのようなαに対しても成立するので，条件を満たす点 P は存在する。

コメント

(1)はいろいろな解法が考えられますが，いずれを採用しても，計算量はかなり多めです。

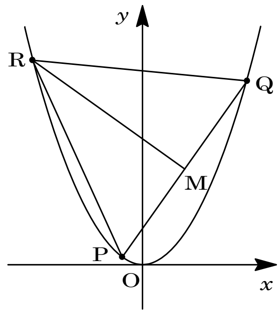
問　題

xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。 [2004]

解答例



$p<q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2}\,,\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，$p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$なので,

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\left(2-\frac{a^2}{3}\right)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$である。

ここで，△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形より，$\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ}$，$\mathrm{RM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので,

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp2a+a^2)$$

まとめると，$5a^2\mp18a=0$ となり, $a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

コメント

複素数平面上での回転では，計算が複雑になってしまい，方向転換をしました。

問　題

2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。 [2002]

解答例

$y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$ ……①，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ ……②に対して,

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$4\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

①と②が相異なる 2 点で交わる条件は, ③が異なる 2 実数解をもつことなので,

$$D/4=-4\sqrt{3}(4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta)>0,\ 2\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)+\sin\theta<0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}>0,\ (\sqrt{3}\sin\theta-2)(2\sin\theta+\sqrt{3})>0$$

$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$ より，$2\sin\theta+\sqrt{3}<0$，$\sin\theta<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって, n を整数として，$2n\pi+\dfrac{4}{3}\pi<\theta<2n\pi+\dfrac{5}{3}\pi$

コメント

あまりにも簡単すぎて不気味です。

問　題

座標平面上を運動する3点P，Q，Rがあり，時刻tにおける座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P}: x=\cos t,\ y=\sin t \qquad \mathrm{Q}: x=1-vt,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{R}: x=1-vt,\ y=1$$

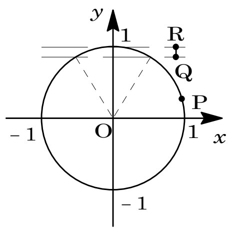
ただし，v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)　点Pと線分QRが時刻0から2πまでの間ではぶつからない。

(2)　点Pと線分QRがただ一度だけぶつかる。　[2000]

解答例

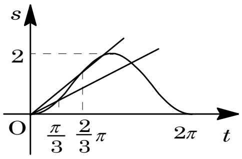
(1)　点 P は原点が中心の単位円周上の動点であり，また線分QRは$x=1-vt\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq y\leqq 1\right)$と表せる。



ここで，$0\leqq t\leqq 2\pi$のとき，点Pと線分QRがぶつかるのは，$\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$において，$\cos t=1-vt$ ……①となる t が存在するときである。

①より，$1-\cos t=vt$と変形して，

$s=1-\cos t$ ……②，$s=vt$ ……③



そして，$\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$において①が解をもつ条件は，②と③のグラフがこの区間で共有点をもつ条件に等しい。

そこで，③が点$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき$v=\dfrac{3}{2\pi}$となり，③が点$\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\right)$を通るとき$v=\dfrac{9}{4\pi}$となるので，右図から $0\leqq t\leqq 2\pi$で点 P と線分 QR がぶつかる条件は，$\dfrac{3}{2\pi}\leqq v\leqq\dfrac{9}{4\pi}$となる。

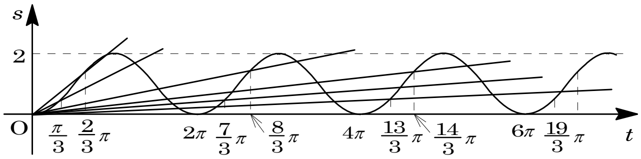
したがって，ぶつからない条件は，$0<v<\dfrac{3}{2\pi}$，$\dfrac{9}{4\pi}<v$である。

(2)　点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる条件は，n を 0 以上の整数として，$2n\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq 2n\pi+\dfrac{2}{3}\pi$において，①の成立する t がただ 1 つ存在することである。

このとき，点Pと線分QRがぶつかる条件は，(1)と同様にして，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi}\leqq v\leqq\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(2n+\frac{2}{3}\right)\pi},\quad \frac{3}{(12n+2)\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{(12n+4)\pi}$$

さて，$a_n=\dfrac{3}{(12n+2)\pi}$，$b_n=\dfrac{9}{(12n+4)\pi}$とおき，区間$a_n\leqq v\leqq b_n$を$I_n$と表すと，求める条件は，ただ 1 つの区間$I_n$だけに含まれる$v$の条件となる。



まず，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は減少数列であり，$n\geqq 1$のとき，

$$b_{n+2}-a_n=\frac{9}{(12n+28)\pi}-\frac{3}{(12n+2)\pi}=\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{12n-11}{(3n+7)(6n+1)}>0$$

よって，$n\geqq 1$ のとき，$a_{n+2}<a_{n+1}<a_n<b_{n+2}<b_{n+1}<b_n$となる。これより，区間$I_{n+1}$にある任意の$v$は区間$I_n$または$I_{n+2}$に必ず含まれる。すなわち，$n\geqq 2$の$I_n$に含まれる$v$はただ 1 つの区間に含まれるという条件に適さない。

すると，ただ 1 つの区間だけに含まれる v は，$n\leqq 1$ のI_nに含まれるので，$n=0$，1，2 のときの区間I_nを調べると，

$$I_0:\frac{3}{2\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{4\pi},\ \ I_1:\frac{3}{14\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{16\pi},\ \ I_2:\frac{3}{36\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{28\pi}$$

これより，ただ 1 つの区間だけに含まれるv，すなわち点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかるvの範囲は，$\dfrac{3}{2\pi}\leqq v\leqq\dfrac{9}{4\pi}$，$\dfrac{9}{28\pi}<v\leqq\dfrac{9}{16\pi}$となる。

コメント

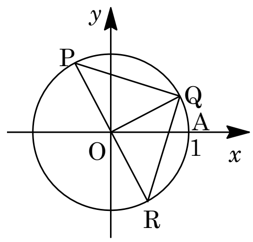
人工衛星が宇宙空間に漂う障害物にぶつかるという趣きの問題でした。ところが，特に(2)の解は書きにくく，時間とエネルギーを費やしてしまいます。グラフから明らかとしては乱暴すぎるので，もう少し丁寧に書こうと心掛けると，深みにはまっていくという感じです。

問　題

C を半径 1 の円周とし, A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し, C 上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって, Q は C をちょうど一周する)。ただし, m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。 [2010]

解答例＋映像解説

$\mathrm{A}(1,\ 0)$ のとき, P, Q, R の速さがそれぞれ m, 1, 2 であり, P, Q が反時計回りに, R が時計回りに動くことより, 時刻 t での位置は,



$$\mathrm{P}(\cos mt,\ \sin mt),\ \mathrm{Q}(\cos t,\ \sin t),\ \mathrm{R}(\cos 2t,\ -\sin 2t)$$

さて, △PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形であるので, PR の中点は原点であり, しかも $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は垂直である。

ここで, PR の中点は, $\left(\dfrac{\cos mt+\cos 2t}{2},\ \dfrac{\sin mt-\sin 2t}{2}\right)$ から,

$$\cos mt=-\cos 2t\ \cdots\cdots\text{①},\quad \sin mt=\sin 2t\ \cdots\cdots\text{②}$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より, $\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t=0$ となり, $\cos 3t=0\ \cdots\cdots$③

③から, $0\leqq t\leqq 2\pi$ より, $3t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$ となり,

$$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

そこで, k を整数とするとき, ①②より,

(i)　$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\cos\frac{m}{6}\pi=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{m}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より},$$

$$\frac{m}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\ m=4+12k$$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4$

(ii)　$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\cos\frac{m}{2}\pi=-\cos\pi=1,\ \sin\frac{m}{2}\pi=\sin\pi=0\ \text{より},\ \frac{m}{2}\pi=2k\pi,\ m=4k$$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4,\ 8$

(iii)　$t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{5m}{6}\pi=-\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{5m}{6}\pi=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より},$$

$$\frac{5}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{5}\Big(\frac{4}{3}+2k\Big)=\frac{8+12k}{5}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(iv)　$t=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{7m}{6}\pi=-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \ \sin\frac{7m}{6}\pi=\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より，}$$

$$\frac{7}{6}m\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{7}\Big(\frac{2}{3}+2k\Big)=\frac{4+12k}{7}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(v)　$t=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$$\cos\frac{3m}{2}\pi=-\cos 3\pi=1,\ \ \sin\frac{3m}{2}\pi=\sin 3\pi=0\ \text{より，}\ \frac{3}{2}m\pi=2k\pi\,,\ \ m=\frac{4}{3}k$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4,\ 8$

(vi)　$t=\dfrac{11}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{11m}{6}\pi=-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \ \sin\frac{11m}{6}\pi=\sin\frac{11}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より，}$$

$$\frac{11}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{11}\Big(\frac{4}{3}+2k\Big)=\frac{8+12k}{11}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

コメント

t の値はすぐに求まるのですが，t の各々の値に対して，m の値を 1 つずつチェックしながら求めていくと，予想以上に計算時間がかかります。

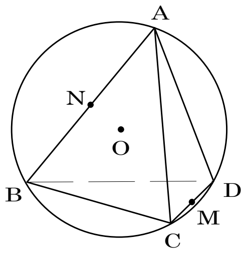
問　題

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは, $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[2001]

解答例

球面の中心を O, CD の中点を M, AB の中点を N とすると, 対称性から, 中心 O は△ABM 上にある。

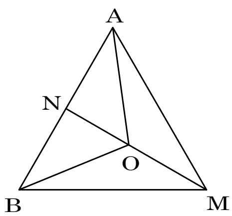


まず, $\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$ より, △ABM は正三角形となる。

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=r,\ \mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{CM}^2}=\sqrt{r^2-1}$$

また, $\mathrm{MN}=\sqrt{3}\sin 60^\circ=\dfrac{3}{2}$ より,

$$\mathrm{ON}=\frac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}$$



△ONA に対して, $r^2=\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$r^2=\frac{9}{4}-3\sqrt{r^2-1}+r^2-1+\frac{3}{4}$$

よって, $3\sqrt{r^2-1}=2$ より, $r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

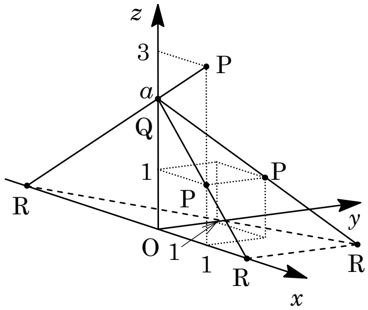
コメント

三角比の空間図形への応用問題です。正四面体ではないものの, 対称性から, どの切断面を考えればよいのかは, 自然に決まります。

問　題

a を$1<a<3$を満たす実数とし，座標空間内の 4 点$P_1(1,\ 0,\ 1)$，$P_2(1,\ 1,\ 1)$，$P_3(1,\ 0,\ 3)$，$Q(0,\ 0,\ a)$を考える。直線P_1Q，P_2Q，P_3Qとxy平面の交点をそれぞれR_1，R_2，R_3として，三角形$R_1R_2R_3$の面積を$S(a)$とする。$S(a)$を最小にする a と，そのときの$S(a)$の値を求めよ。 [2016]

解答例＋映像解説



$1<a<3$ のとき，点$P_1(1,\ 0,\ 1)$，$P_2(1,\ 1,\ 1)$，$P_3(1,\ 0,\ 3)$，$Q(0,\ 0,\ a)$に対し，まず直線P_1Qとxy平面の交点R_1は，線分P_1Qを$1:a$に外分する点より，$R_1\left(\dfrac{a}{a-1},\ 0,\ 0\right)$となる。

また，直線P_2Qとxy平面の交点R_2は，線分P_2Qを$1:a$に外分する点より，$R_2\left(\dfrac{a}{a-1},\ \dfrac{a}{a-1},\ 0\right)$となる。

さらに，直線P_3Qと xy 平面の交点R_3は，線分P_3Qを$3:a$に外分する点より，$R_3\left(-\dfrac{a}{3-a},\ 0,\ 0\right)$となる。

すると，$R_1R_2\perp R_1R_3$で，$R_1R_2=\dfrac{a}{a-1}$，$R_1R_3=\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{a}{3-a}$から，$\triangle R_1R_2R_3$の面積を$S(a)$は，

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a-1}\left(\frac{a}{a-1}+\frac{a}{3-a}\right)=\frac{a}{2(a-1)}\cdot\frac{2a}{(a-1)(3-a)}=\frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$$

$$\begin{aligned}S'(a)&=\frac{2a(a-1)^2(3-a)-a^2\{2(a-1)(3-a)-(a-1)^2\}}{(a-1)^4(3-a)^2}\\&=\frac{2a(a-1)(3-a)-a^2\{2(3-a)-(a-1)\}}{(a-1)^3(3-a)^2}\\&=\frac{a(a^2+a-6)}{(a-1)^3(3-a)^2}\\&=\frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(3-a)^2}\end{aligned}$$

これより，$S(a)$の増減は右表のようになり，$a=2$のとき最小値$S(2)=4$をとる。

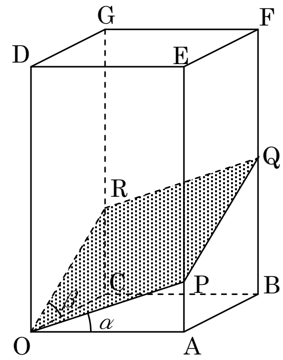
a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	4	↗	

コメント

空間座標に関する問題です。$\triangle R_1R_2R_3$が直角三角形なので，その面積は立式しやすく，また後半の最小値を求める計算も複雑ではありません。

問　題

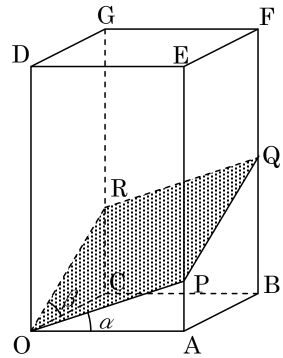
1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle\mathrm{AOP}$ を α，$\angle\mathrm{COR}$ を β とおく。



(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説



(1)　O を原点とし, OA, OC, OD をそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸の正の部分とすると，A$(1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$ となる。

条件より，$\mathrm{AP}=\tan\alpha$，$\mathrm{CR}=\tan\beta$ なので,

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ \tan\alpha),\ \mathrm{R}(0,\ 1,\ \tan\beta)$$

さて，OP // RQ，OR // PQ から, 四角形 OPQR は平行四辺形となり, その面積 S は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$$
$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

(2)　条件より，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\tan(\alpha+\beta)=1$ となり,

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1,\ \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta\cdots\cdots\cdots①$$

また，$S=\dfrac{7}{6}$ なので, (1)から，$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\{1-(\tan\alpha+\tan\beta)\}=\dfrac{13}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2+2(\tan\alpha+\tan\beta)-\frac{85}{36}=0$$

$$\left(\tan\alpha+\tan\beta+\frac{17}{6}\right)\left(\tan\alpha+\tan\beta-\frac{5}{6}\right)=0$$

$\tan\alpha+\tan\beta>0$ より，$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\tan\alpha\tan\beta=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}\cdots\cdots\cdots④$

すると，③④から，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$ の 2 つの解となり，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$ から，$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ である。

さらに，$\alpha\leqq\beta$ から，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ である。

コメント

空間ベクトルの図形への応用問題です。誘導が丁寧な構成となっています。なお，図から「四角柱は直方体」として解いています。

問　題

$\triangle$ABC において$\angle$BAC$=90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ を満たすとする。

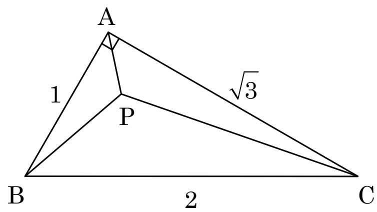
(1) $\angle$APB，$\angle$APC を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ とおくと，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots①$$



①より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}$

両辺の大きさをとって，$\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=\left|-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}\right|$

$$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=1,\ \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\right|^2+2\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|^2=1,\ 1+\frac{2ab\cos\angle\mathrm{APB}}{ab}+1=1$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APB}=-\dfrac{1}{2}$ より，$\angle\mathrm{APB}=120^\circ$

また，①より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}$ とすると，同様にして，$\angle\mathrm{APC}=120^\circ$

(2) (1)より，$\angle\mathrm{BPC}=120^\circ$ となり，$\triangle$APB, $\triangle$BPC, $\triangle$CPA に余弦定理を適用して，

$$a^2+b^2+ab=1\cdots\cdots②,\ b^2+c^2+bc=4\cdots\cdots③,\ c^2+a^2+ca=3\cdots\cdots④$$

②より，$(a-b)(a^2+b^2+ab)=a-b$，$a^3-b^3=a-b\cdots\cdots\cdots⑤$

③④より，同様にすると，

$$b^3-c^3=4(b-c)\cdots\cdots\cdots⑥,\ c^3-a^3=3(c-a)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤＋⑥＋⑦より，$-2a+3b-c=0$，$c=-2a+3b\cdots\cdots\cdots⑧$

③－④より，$b^2-a^2+c(b-a)=1\cdots\cdots\cdots⑨$

⑧⑨より，$b^2-a^2+(-2a+3b)(b-a)=1$，$a^2+4b^2-5ab=1\cdots\cdots\cdots⑩$

②⑩より，$3b^2-6ab=0$，$b=2a\cdots\cdots\cdots⑪$

②に代入すると，$7a^2=1$ から，$a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ となり，⑪⑧より，

$$b=\frac{2}{\sqrt{7}},\ c=-\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

以上より，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ である。

コメント

(2)は，余弦定理から得られた連立方程式を解くという方針を立てました。

問　題

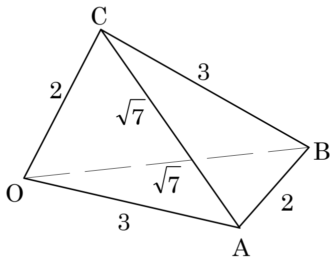
四面体 OABC において, 4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AB}=2$ であるとする。また, 3 点 O, A, B を含む平面を L とする。

(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $0<t<1$ を満たす実数 t に対して, 線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく。2 点 P_t，Q_t を通り, 平面 L に垂直な平面を M とするとき, 平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2010]

解答例＋映像解説



(1) 四面体 OABC の 4 つの面がすべて合同より,

$$\mathrm{OA}=\mathrm{CB}=3,\ \mathrm{OB}=\mathrm{CA}=\sqrt{7},\ \mathrm{AB}=\mathrm{OC}=2$$

まず, 3 点 O, A, B を含む平面 L を xy 平面として座標系を設定する。

ここで, △OAB に余弦定理を適用して,

$$\cos\angle\mathrm{OAB}=\frac{9+4-7}{2\cdot3\cdot2}=\frac{1}{2}$$

これより，$\angle\mathrm{OAB}=60°$ となる。そこで，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$ とおくと, $\mathrm{B}(2,\ \sqrt{3},\ 0)$ である。

さらに, $z>0$ として，$\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ とおくと,

$$x^2+y^2+z^2=4\cdots\cdots\text{①},\ (x-3)^2+y^2+z^2=7\cdots\cdots\text{②}$$

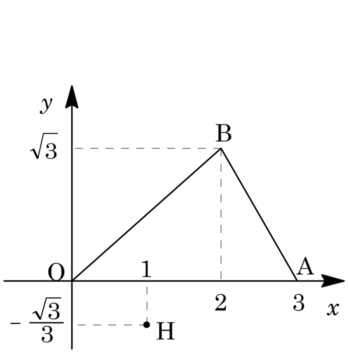
$$(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2=9\cdots\cdots\text{③}$$

①②より，$-6x+9+4=7$，$x=1$

①③より，$-4x+4-2\sqrt{3}y+3+4=9$ となり，$x=1$ を代入すると，$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

これらの値を①に代入して，$1+\dfrac{1}{3}+z^2=4$，$z=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

よって，$\mathrm{C}\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right)$ となり, C より L におろした垂線の足 H は，$\mathrm{H}\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$ となる。



そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと,

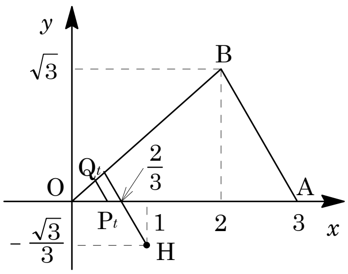
$$3k+2l=1,\ \sqrt{3}l=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，$l=-\dfrac{1}{3}$，$k=\dfrac{5}{9}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　直線P_tQ_tが点Hを通るとき，P_tのx座標は，$x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan 30^\circ=\dfrac{2}{3}$

これより，$P_t\left(\dfrac{2}{3},\ 0,\ 0\right)$となり，$OP_t : P_tA=t:1-t$

から，$t=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$となる。



このとき，$P_{\frac{2}{9}}Q_{\frac{2}{9}}=\dfrac{2}{9}AB=\dfrac{4}{9}$から，

$$\triangle P_{\frac{2}{9}}Q_{\frac{2}{9}}C=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{4}{27}\sqrt{6}$$

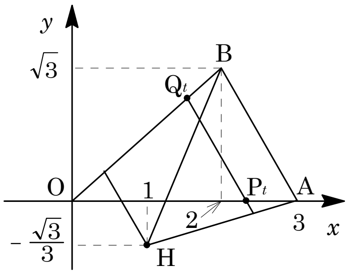
さて，2 点P_t，Q_tを通り，平面Lに垂直な平面Mによる四面体の切り口を，P_t，Q_tの位置で場合分けをして考える。

(i)　$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$のとき

平面Mと直線OCとの交点をR_tとおくと，切り口は三角形$P_tQ_tR_t$となる。

この三角形は，$\triangle P_{\frac{2}{9}}Q_{\frac{2}{9}}C$に相似であり，その相似比は，$t:\dfrac{2}{9}=9t:2$であることより，その面積$S(t)$は，$S(t)=\left(\dfrac{9t}{2}\right)^2\cdot\dfrac{4}{27}\sqrt{6}=3\sqrt{6}t^2$

(ii)　$\dfrac{2}{9}<t<1$のとき



平面Mと直線CA，CBとの交点を，それぞれS_t，T_tとおくと，切り口は台形$S_tP_tQ_tT_t$となり，これは，$\triangle P_tQ_tR_t$から$\triangle S_tT_tR_t$を除いた図形である。

また，$\triangle S_tT_tR_t$は，$t=1$のときの$\triangle P_tQ_tR_t$，すなわち$\triangle P_1Q_1R_1=3\sqrt{6}$に相似であり，その相似比は，$t-\dfrac{2}{9}:1-\dfrac{2}{9}=9t-2:7$である。これから，その面積

$S(t)$は，$S(t)=3\sqrt{6}t^2-\left(\dfrac{9t-2}{7}\right)^2\cdot 3\sqrt{6}=-\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t^2-9t+1)$

(3)　(2)より，$S(t)$は$0<t<1$で連続であり，$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$のとき単調に増加する。

また，$\dfrac{2}{9}<t<1$のとき，

$$S(t)=-\frac{12\sqrt{6}}{49}\left\{8\left(t-\frac{9}{16}\right)^2-\frac{49}{32}\right\}=-\frac{96\sqrt{6}}{49}\left(t-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{3}{8}\sqrt{6}$$

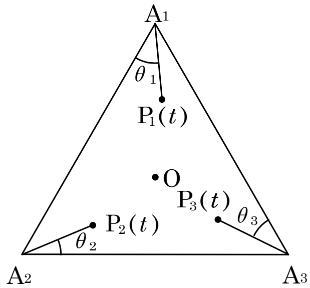
よって，$S(t)$は$t=\dfrac{9}{16}$のとき最大値$\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$をとる。

コメント

$\angle OAB=60^\circ$に注目して，座標系を設定しました。なお，(ii)においても，OCの延長と平面Mとの交点をR_tとしています。

問　題

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする 1 辺の長さが 1000 の正三角形$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$がある。$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$の内部に 3 点$\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{B_3}$を, $d(\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n)=1$　$(n=1,\ 2,\ 3)$ となるようにとる。また,



$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\ \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\ \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$
$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$

とおく。$n=1,\ 2,\ 3$ のそれぞれに対して, 時刻 0 に A_n を出発をし, $\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え, 時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1)　ある時刻 t で $d(\mathrm{P_1}(t),\ \mathrm{P_2}(t))\leqq 1$ が成立した。ベクトル$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$と, ベクトル$\overrightarrow{a_1}$とのなす角度を$\theta$とおく。このとき$|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$となることを示せ。

(2)　角度θ_1, θ_2, θ_3を$\theta_1=\angle\mathrm{B_1A_1A_2}$, $\theta_2=\angle\mathrm{B_2A_2A_3}$, $\theta_3=\angle\mathrm{B_3A_3A_1}$によって定義する。$\alpha$を$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$かつ$\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$を満たす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで, $\theta_1+\theta_2$の値のとる範囲をαを用いて表せ。

(3)　時刻t_1, t_2, t_3のそれぞれにおいて, 次が成立した。

$$d(\mathrm{P_2}(t_1),\ \mathrm{P_3}(t_1))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_3}(t_2),\ \mathrm{P_1}(t_2))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_1}(t_3),\ \mathrm{P_2}(t_3))\leqq 1$$

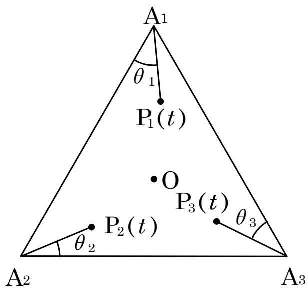
このとき, 時刻$T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$において同時に

$$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_2}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_3}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$$

が成立することを示せ。　[2009]

解答例

(1)　$\mathrm{A_1P_1}(t)=\mathrm{A_2P_2}(t)=t$ より,



$$\overrightarrow{\mathrm{A_1P_1}(t)}=t\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=t\overrightarrow{e_1}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_2P_2}(t)}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\overrightarrow{a_1}+t\overrightarrow{e_2}$$

これより, $\overrightarrow{\mathrm{P_1}(t)\mathrm{P_2}(t)}=\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})$

条件より, $|\overrightarrow{\mathrm{P_1}(t)\mathrm{P_2}(t)}|\leqq 1$ なので,

$$|\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})|^2\leqq 1$$
$$|\overrightarrow{a_1}|^2-2t\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})+t^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2\leqq 1$$

$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と $\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度が θ より,

$$t^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2-2t|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\cos\theta+|\overrightarrow{a_1}|^2-1\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす $t>0$ が存在する条件は, $\cos\theta>0$ のもとで,

$$D/4=|\overrightarrow{a_1}|^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2\cos^2\theta-|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2(|\overrightarrow{a_1}|^2-1)\geqq 0$$

$$|\overrightarrow{a_1}|^2(\cos^2\theta-1)+1\geqq 0,\ \sin^2\theta\leqq\frac{1}{|\overrightarrow{a_1}|^2}=\frac{1}{1000^2}$$

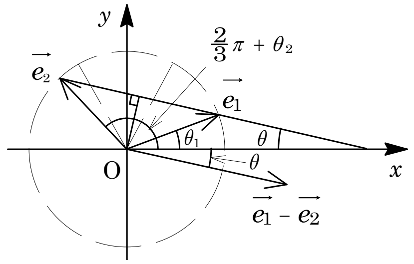
よって，$|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ ……②となる。

(2) まず，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ を満たす α を用いると，②の不等式の解は，

$$0\leqq\theta\leqq\alpha\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，$\theta_1=\angle B_1A_1A_2$，また $\theta_2=\angle B_2A_2A_3$ より $\angle B_2A_2A_1=\dfrac{\pi}{3}-\theta_2$ となる。そこで，$\overrightarrow{a_1}$ を x 軸の正の向きとしてとると，

(i) $\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\geqq\theta_1\left(\theta_1+\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき

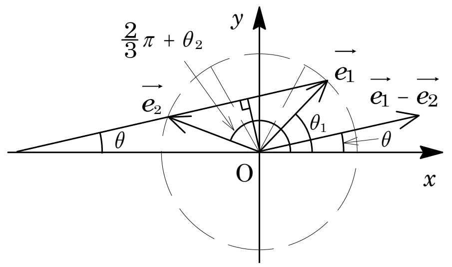


右図より，$\dfrac{1}{2}\left(\theta_1+\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$$\theta_1+\frac{2}{3}\pi+\theta_2=\pi-2\theta$$

よって，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}-2\theta$

(ii) $\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\leqq\theta_1\left(\theta_1+\theta_2\geqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき



右図より，$\dfrac{1}{2}\left(\theta_1+\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2\right)=\dfrac{\pi}{2}+\theta$

$$\theta_1+\frac{2}{3}\pi+\theta_2=\pi+2\theta$$

よって，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}+2\theta$

(i)(ii)より，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}\pm2\theta$ ………④

以上より，③④から，$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_1+\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$ ………⑤

(3) 条件より，(2)の結果を用いると，⑤と同様に，

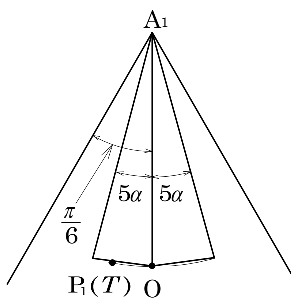
$$\frac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_2+\theta_3\leqq\frac{\pi}{3}+2\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑥,\ \frac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_3+\theta_1\leqq\frac{\pi}{3}+2\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥⑦より，$\dfrac{\pi-6\alpha}{2}\leqq\theta_1+\theta_2+\theta_3\leqq\dfrac{\pi+6\alpha}{2}$ となり，⑥と合わせると，

$$\frac{\pi}{6}-5\alpha\leqq\theta_1\leqq\frac{\pi}{6}+5\alpha$$

ここで，$\triangle A_1A_2A_3$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{1000}{\sin\frac{\pi}{3}}=2A_1O,\ A_1O=\frac{1000}{\sqrt{3}}$$

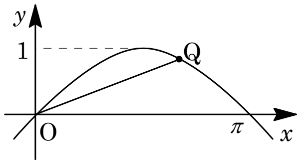


また，$A_1P_1(T)=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ より，$P_1(T)$ は，中心 A_1，半径 A_1O，中心角 $2\times5\alpha$ の扇形の弧上にあることより，

$$d(\mathrm{P}_1(T),\ \mathrm{O})\leqq\frac{1000}{\sqrt{3}}\cdot 2\sin\frac{5\alpha}{2}=\frac{2000}{\sqrt{3}}\sin\frac{5\alpha}{2}$$

さて，$0<x<\pi$ において，関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ を定義する。

すると，$f(x)$ は，右図の $y=\sin x$ のグラフにおいて線分 OQ の傾きを表すことより，単調に減少する。



$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\frac{5\alpha}{2}}{\frac{5\alpha}{2}},\ \frac{5}{2}\sin\alpha>\sin\frac{5\alpha}{2}$$

よって，$d(\mathrm{P}_1(T),\ \mathrm{O})<\dfrac{2000}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{5}{2}\sin\alpha=\dfrac{5000}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{1000}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}<3$

以上より，$d(\mathrm{P}_1(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$ が成立し，同様にすると，$d(\mathrm{P}_2(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$，$d(\mathrm{P}_3(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$ も成り立つ。

コメント

図形の総合問題ですが，前期日程とは思えないほどの質と量です。特に(3)の設問は，アバウトに評価すると結論が示せず，ずいぶん時間がかかりました。この箇所は，やや雑な書き方になっています。なお，(1)の結論式についている絶対値は，必要不可欠ではありません。

問　題

O を原点とする座標平面上の 4 点P_1，P_2，P_3，P_4で，条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_n}\quad(n=2,\ 3)$$

を満たすものを考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P_1，P_2が曲線$xy=1$上にあるとき，P_3はこの曲線上にはないことを示せ。

(2)　P_1，P_2，P_3が円周$x^2+y^2=1$上にあるとき，P_4もこの円周上にあることを示せ。

[2006]

解答例

(1)　まず，P_1，P_2が曲線$xy=1$上にあることより，t, sを実数として，$\overrightarrow{OP_1}=\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$，$\overrightarrow{OP_2}=\left(s,\ \frac{1}{s}\right)$とおくことができるので，条件より，

$$\overrightarrow{OP_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\frac{3}{2}\left(s,\ \frac{1}{s}\right)-\left(t,\ \frac{1}{t}\right)=\left(\frac{3}{2}s-t,\ \frac{3}{2s}-\frac{1}{t}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{OP_3}=(x,\ y)$とおくと，

$$xy=\left(\frac{3}{2}s-t\right)\left(\frac{3}{2s}-\frac{1}{t}\right)=\frac{9}{4}-\frac{3s}{2t}-\frac{3t}{2s}+1=\frac{13}{4}-\left(\frac{3s}{2t}+\frac{3t}{2s}\right)$$

さて，$xy=1$とおくと，$\frac{13}{4}-\left(\frac{3s}{2t}+\frac{3t}{2s}\right)=1$，$\frac{s}{t}+\frac{t}{s}=\frac{3}{2}$

$$2s^2+2t^2-3st=0,\ \frac{3}{2}(s-t)^2+\frac{1}{2}(s^2+t^2)=0\cdots\cdots\cdots②$$

$s\neq0$，$t\neq0$より，②を満たす s, t は存在しないのでP_3は曲線$xy=1$上にはない。

(2)　P_1，P_2が円周$x^2+y^2=1$上にあるので，α，βを実数として，

$$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \overrightarrow{OP_2}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

すると，$\overrightarrow{OP_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\left(\frac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha,\ \frac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)$

P_3も円周$x^2+y^2=1$上にあるので，$\left(\frac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)^2=1$

$$\frac{9}{4}-3\cos\beta\cos\alpha-3\sin\beta\sin\alpha+1=1,\ \cos(\beta-\alpha)=\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$\overrightarrow{OP_4}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_2}$なので，

$$\overrightarrow{OP_4}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha,\ \frac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)-(\cos\beta,\ \sin\beta)$$
$$=\left(\frac{5}{4}\cos\beta-\frac{3}{2}\cos\alpha,\ \frac{5}{4}\sin\beta-\frac{3}{2}\sin\alpha\right)$$

ここで，$\overrightarrow{OP_4}=(x,\ y)$とおくと，

$$x^2+y^2=\left(\frac{5}{4}\cos\beta-\frac{3}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{5}{4}\sin\beta-\frac{3}{2}\sin\alpha\right)^2$$
$$=\frac{25}{16}+\frac{9}{4}-\frac{15}{4}(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)=\frac{61}{16}-\frac{15}{4}\cos(\beta-\alpha)$$

③より，$x^2+y^2=\dfrac{61}{16}-\dfrac{15}{4}\times\dfrac{3}{4}=1$

よって，P_4 も円周 $x^2+y^2=1$ 上にある。

コメント

(1)，(2)とも，曲線を媒介変数表示し，題意に沿って立式しました。実戦的には，この方法が一番です。

問　題

xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする。S の外側にある点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し, OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき PQ≦AR であるような点 P の動く範囲 V を求め, V の体積は 10 より小さいことを示せ。　[2002]

解答例

原点を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面 S の方程式は,

$$x^2+y^2+z^2=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ としたとき, OP を直径とする球面の方程式は,

$$x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-x_0x-y_0y-z_0z=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②の交線である円を含む平面 L は，①－②より，$x_0x+y_0y+z_0z-1=0$

すると，$\mathrm{PQ}=\dfrac{|x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-1|}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}$，$\mathrm{AR}=\dfrac{|-z_0-1|}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}$

条件より, PQ≦AR なので，$|x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-1|\leqq|-z_0-1|$

$$(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-1)^2-(-z_0-1)^2\leqq 0$$

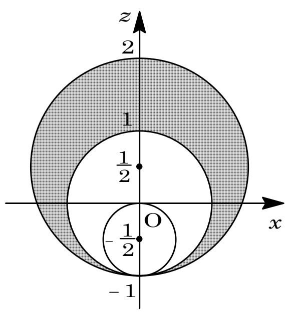
$$(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-z_0-2)(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2+z_0)\leqq 0$$

すると，点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ の動く範囲を表す不等式は

$$(x^2+y^2+z^2-z-2)(x^2+y^2+z^2+z)\leqq 0$$

$$\left\{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}\left\{x^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}\leqq 0$$

したがって，点 P の動く範囲 V は，球面 S の外側で，点 $\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の球から，点 $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の球を取り除いたものである。xz 平面による断面は右図の網点部となり，これを利用すると，V の体積は,



$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{19}{6}\pi<\frac{19}{6}\times 3.15=9.975<10$$

コメント

空間図形の方程式を利用して解きました。これが普通の解法だと思うのですが。

問　題

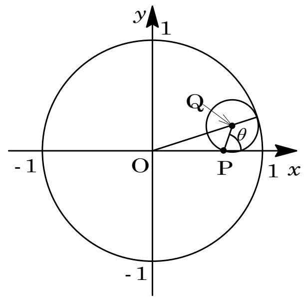
xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の 2 条件を満たしているものとする。

(a)　A, B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる。

(b)　A, B は一点 P のみを共有し, P はそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし, 円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。　[1999]

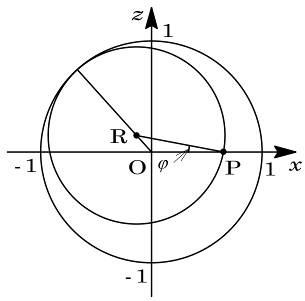
解答例



条件(b)より点 P は xy 平面と xz 平面の交線である x 軸上にある。そこで, $\mathrm{P}(k,\ 0,\ 0)$ とおくと, 対称性から $0\leqq k<1$ とすることができる。

A の中心を $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1,\ 0)$, B の中心を $\mathrm{R}(x_2,\ 0,\ z_2)$ とおくと, 対称性より $y_1\geqq 0$, $z_2\geqq 0$ とすることができ, さらに A と B は 1 点のみを共有することから, 一般性を失うことなく, $x_2\leqq k\leqq x_1$ としてもよい。

さて, A の半径を r_1, B の半径を r_2 とすると, r_1, r_2 が最大となるのは, 円板 A, B が半径 1 の円に内接する場合である。



まず, 角 θ を図のように設定すると $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり, △OPQ に余弦定理を適用し,

$$(1-r_1)^2 = {r_1}^2 + k^2 - 2r_1 k\cos(\pi-\theta)$$

$$2r_1(1+k\cos\theta) = 1-k^2,\quad r_1 = \frac{1-k^2}{2(1+k\cos\theta)}$$

すると, $\cos\theta = 0$ のとき r_1 は最大値 $r_{1\max} = \dfrac{1-k^2}{2}$ をとる。

また, 角 φ を図のように設定すると $0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり, △OPR に余弦定理を適用し,

$$(1-r_2)^2 = {r_2}^2 + k^2 - 2r_2 k\cos\varphi$$

$$2r_2(1-k\cos\varphi) = 1-k^2,\quad r_2 = \frac{1-k^2}{2(1-k\cos\varphi)}$$

すると, $\cos\varphi = 1$ のとき r_2 は最大値 $r_{2\max} = \dfrac{1-k^2}{2(1-k)} = \dfrac{1+k}{2}$ をとる。

よって, $r_1 + r_2$ の最大値は,

$$r_{1\max} + r_{2\max} = \frac{1-k^2}{2} + \frac{1+k}{2} = -\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 1 = -\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

これより，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，r_1+r_2 は最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

コメント

空間における円の配置の問題ですが，立式する前にいろいろ状況を設定しなくてはいけません。ここが，ややこしいところです。

問　題

数列 a_1, a_2, $\cdots$ を, $a_n=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　$n\geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n\geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2)　a_n が整数となる $n\geqq 1$ をすべて求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　$a_n=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{P}_n}{(n!)^2}=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$ に対して, $n\geqq 2$ のとき,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2\,n!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)\cdot 2n}{n\cdot(n+1)n}=\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$$

ここで, n と $2n+1$ の最大公約数を g_1, i と j を自然数とすると,

$n=g_1i$, $2n+1=g_1j$

すると, $1=g_1(j-2i)$ となり $g_1=1$, すなわち n と $2n+1$ は互いに素である。

また, $n+1$ と $2n+1$ の最大公約数を g_2, k と l を自然数とすると,

$n+1=g_2k$, $2n+1=g_2l$

すると, $1=g_2(2k-l)$ となり $g_2=1$, すなわち $n+1$ と $2n+1$ は互いに素である。

さらに, $n(n+1)$ が偶数であることより $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は自然数となり, また $\dfrac{n(n+1)}{2}$ と $2n+1$ は互いに素なので, 既約分数を用いて $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{q_n}{p_n}$ と表したとき,

$$p_n=\frac{n(n+1)}{2},\quad q_n=2n+1$$

(2)　まず, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$ とすると, $2(2n+1)<n(n+1)$ から, $n^2-3n-2>0$

$n\geqq 2$ より $n>\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ となり, n は 4 以上の整数となる。

これより, $n\geqq 4$ のとき $a_n<a_{n-1}$ となり, $a_3>a_4>a_5>\cdots>0$ であり,

$$a_1=\frac{{}_3\mathrm{P}_1}{(1!)^2}=3,\quad a_2=\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{(2!)^2}=5,\quad a_3=\frac{{}_7\mathrm{P}_3}{(3!)^2}=\frac{35}{6},\quad a_4=\frac{{}_9\mathrm{P}_4}{(4!)^2}=\frac{21}{4}$$

$$a_5=\frac{{}_{11}\mathrm{P}_5}{(5!)^2}=\frac{77}{20},\quad a_6=\frac{{}_{13}\mathrm{P}_6}{(6!)^2}=\frac{143}{60},\quad a_7=\frac{{}_{15}\mathrm{P}_7}{(7!)^2}=\frac{143}{112}$$

$$a_8=\frac{{}_{17}\mathrm{P}_8}{(8!)^2}=\frac{2413}{4032}<1$$

よって, $1>a_8>a_9>\cdots>0$ となるので, a_n が整数となるのは $n=1,\ 2$ である。

コメント

二項係数を題材にした数列の問題です。漸化式を利用してもよかったのですが。

問　題

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　$p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3)　(2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(1)より a_n は自然数である。

(ii)　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき　a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4)　まず, (1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき，①から，帰納的に，すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると，2 以上の自然数 g を用いて，

$$b_{n+1}=gb_{n+1}',\ b_n=gb_n'\quad(b_{n+1}',\ b_n' \text{は自然数})$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}'-4b_n')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

コメント

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば，昨年は神戸大・理で類題が出ています。

問　題

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1，a_2，…，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k\neq 0$ とする。

(1)　次の不等式を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2)　p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式を満たす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3)　実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ を満たす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=0.a_1a_2\cdots a_k$ を満たす正の整数 s は存在しないことを示せ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　$\alpha=0.a_1a_2\cdots a_k=\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{a_k}{10^k}$ $(a_k\neq 0)$ とおくと，$0<\alpha<1$ である。

さて，条件より，$\alpha\leqq\sqrt{n}-10^k<\alpha+10^{-k}$，$10^k+\alpha\leqq\sqrt{n}<10^k+\alpha+10^{-k}$ となり，

$$(10^k+\alpha)^2\leqq n<(10^k+\alpha+10^{-k})^2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$(10^k+\alpha)^2=10^{2k}+2\alpha\cdot 10^k+\alpha^2$ となり，$0<\alpha^2<1$ で，

$$2\alpha\cdot 10^k=2\Big(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}\Big)\cdot 10^k=2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)$$

すると，①から，$n\geqq 10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+1\cdots\cdots\cdots②$

また，$(10^k+\alpha+10^{-k})^2=10^{2k}+2(\alpha+10^{-k})\cdot 10^k+(\alpha+10^{-k})^2$

ここで，$0<\alpha+10^{-k}\leqq 1$ より，$0<(\alpha+10^{-k})^2\leqq 1$ であり，

$$2(\alpha+10^{-k})\cdot 10^k=2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+2$$

すると，①から，$n<10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+3\cdots\cdots\cdots③$

よって，②③から，求める正の整数 n は，

$$n=10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+1$$
$$n=10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+2$$

(2)　条件より，$\alpha\leqq\sqrt{m}-p<\alpha+10^{-k}$ から $(p+\alpha)^2\leqq m<(p+\alpha+10^{-k})^2\cdots\cdots\cdots④$

ここで，$d=(p+\alpha+10^{-k})^2-(p+\alpha)^2$ とおくと，$p\geqq 5\cdot 10^{k-1}$ なので，

$$d=2(p+\alpha)\cdot 10^{-k}+10^{-2k}\geqq 2\cdot 5\cdot 10^{k-1}\cdot 10^{-k}+2\alpha\cdot 10^{-k}+10^{-2k}>1$$

よって，④を満たす正の整数 m が存在する。

(3)　$\sqrt{s}=[\sqrt{s}]+\alpha$　(ただし α は $0<\alpha<1$ を満たす有限小数)……⑤と仮定する。

(i)　s が平方数のとき　$\sqrt{s}=[\sqrt{s}]$ となり，$\alpha=0$ から⑤は成立しない。

(ii)　s が平方数でないとき　α は $0<\alpha<1$ を満たす有限小数なので $\sqrt{s}$ は有理数となり，p, q を互いに素な自然数として，$\sqrt{s}=\dfrac{q}{p}$ $(p \geqq 2)$ と表すことができる。

すると，$q^2=sp^2$ となり，p，q が互いに素より $p^2=1$ すなわち $p=1$ であるが，これは $p \geqq 2$ に反するので，⑤は成立しない。

(i)(ii)より，$\sqrt{s}=[\sqrt{s}]+\alpha$ を満たす正の整数 s は存在しない。

コメント

有限小数が題材となっている整数問題です。(3)では，$\sqrt{s}$ は整数か無理数ということから 2 つに場合分けをしましたが，記述を少し変えると，必須というわけではありません。ただ，(1), (2)との直接的な関係はなさそうですが。

問　題

数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$が$n$によらないことを示せ。

(2) すべての$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$をp_nのみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ。 [2015]

解答例＋映像解説

(1) $p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$に対して，$a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$とおくと，

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}}+\frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}+\frac{1}{p_{n+2}p_{n+1}}\\&=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+1}p_n}+\frac{p_{n+1}p_n}{{p_{n+1}}^2+1}+\frac{p_n}{p_{n+1}({p_{n+1}}^2+1)}\\&=\frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+{p_{n+1}}^2{p_n}^2+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n({p_{n+1}}^2+1)}=\frac{({p_{n+1}}^2+1)+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=a_n\end{aligned}$$

これより，$a_n=a_1=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot1}=3$となり，$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$………①

(2) すべての自然数 n に対し，$0<p_n<p_{n+1}$であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$のとき　$p_1=1,\ p_2=2$より成立する。

(ii) $n=k$のとき　$0<p_k<p_{k+1}$すなわち$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$と仮定すると，

条件式より，$p_{k+2}=\dfrac{{p_{k+1}}^2+1}{p_k}>\dfrac{{p_{k+1}}^2}{p_k}$から，$\dfrac{p_{k+2}}{p_{k+1}}>\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$となる。

(i)(ii)より，$0<p_n<p_{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$である。

さて，①より，${p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1=3p_{n+1}p_n$………②

${p_n}^2+{p_{n-1}}^2+1=3p_np_{n-1}\ (n\geqq2)$………③

②－③より，${p_{n+1}}^2-{p_{n-1}}^2=3p_n(p_{n+1}-p_{n-1})$

すると，$p_{n-1}<p_n<p_{n+1}$より，$p_{n+1}-p_{n-1}>0$なので，

$$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(3) (2)より，$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

　ここで，$q_1=1$，$q_2=1$，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる q_n に対して，$p_n=q_{2n-1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　$p_1=q_1$，$q_3=q_2+q_1=2$ から $p_2=q_3$ となり成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$p_k=q_{2k-1}$，$p_{k+1}=q_{2k+1}$ と仮定する。

　このとき，$p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$ となり，

$$\begin{aligned} q_{2k+3} &= q_{2k+2}+q_{2k+1}=q_{2k+1}+q_{2k}+q_{2k+1}=2q_{2k+1}+q_{2k} \\ &= 2q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})=3q_{2k+1}-q_{2k-1} \end{aligned}$$

(i)(ii)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ。

コメント

複雑な漸化式ですが，誘導に従うと道筋が見えてくるタイプです。

問　題

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

[2015]

解答例＋映像解説

m を 2015 以下の正の整数とするとき,

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{{}_{2015}\mathrm{P}_m}{m!} = \frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\frac{2013}{3}\cdot\frac{2012}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m}\cdots\cdots\cdots(*) $$

$(*)$が偶数になる最小の m の値は,「m が偶数かつ $\frac{2016-m}{m} = \frac{2016}{m} - 1$ が初めて偶数」となる値である。すなわち「m が偶数かつ $\frac{2016}{m}$ が初めて奇数」となる値である。

すると, $2016 = 2^5 \times 63$ より, 求める m の値は, $m = 2^5 = 32$ である。

コメント

まず, 実験をして, $(*)$の分子と分母の素因数 2 の個数に注目しました。たとえば, $(2014,\ 2) \to (1,\ 1)$, $(2012,\ 4) \to (2,\ 2)$, $(2010,\ 6) \to (1,\ 1)$, $(2008,\ 8) \to (3,\ 3)$ という具合です。すると, これらの分数は約分すると, すべて奇数となります。その状態が破綻する最小の m を探すという手順で考えたわけです。16 列の表を作って直接的に示した方が明快だったかもしれませんが……。

問　題

rを0以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数pを1つとり，a_nをpで割った余りをb_nとする。ただし，0をpで割った余りは0とする。

(1) 自然数nに対し，b_{n+2}は$b_{n+1}(b_n+1)$をpで割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$の場合に，10以下のすべての自然数nに対して，b_nを求めよ。

(3) ある2つの相異なる自然数$n,\ m$に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，…にpで割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1もpで割り切れないことを示せ。 [2014]

解答例＋映像解説

(1) b_nはa_nを素数pで割った余りなので，商をq_nとすると$a_n=p\cdot q_n+b_n$となり，

$$a_{n+1}(a_n+1)=(p\cdot q_{n+1}+b_{n+1})(p\cdot q_n+b_n+1)$$
$$=p(p\cdot q_nq_{n+1}+q_{n+1}b_n+q_{n+1}+q_nb_{n+1})+b_{n+1}(b_n+1)$$

すると，条件から，$a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)$なので，a_{n+2}をpで割った余りb_{n+2}は，$b_{n+1}(b_n+1)$をpで割った余りと一致する。

(2) $r=2$，$p=17$のとき，$a_1=r=2$より$b_1=2$，$a_2=r+1=3$より$b_2=3$

以下，(1)の結論から，b_3は$b_2(b_1+1)=9$を17で割った余りより$b_3=9$である。

b_4は$b_3(b_2+1)=36$を17で割った余りより$b_4=2$である。

b_5は$b_4(b_3+1)=20$を17で割った余りより$b_5=3$である。

すると，$b_4=b_1$，$b_5=b_2$から，帰納的に，$b_6=b_3=9$，$b_7=b_4=2$，$b_8=b_5=3$，$b_9=b_6=9$，$b_{10}=b_7=2$となる。

(3) まず，$b_{n+2}=b_{m+2}$より，$b_{n+1}(b_n+1)$をpで割った余りは，$b_{m+1}(b_m+1)$をpで割った余りに等しい。すなわち，kを整数として，

$$b_{n+1}(b_n+1)-b_{m+1}(b_m+1)=pk$$

ここで，$b_{n+1}=b_{m+1}>0$より，$b_{n+1}(b_n+1)-b_{n+1}(b_m+1)=pk$

$$b_{n+1}(b_n-b_m)=pk$$

$0<b_{n+1}<p$より，b_{n+1}はpの倍数でないので，b_n-b_mがpの倍数となる。

すると，$0\leqq b_n<p$，$0\leqq b_m<p$から，$-p<b_n-b_m<p$となり，$b_n-b_m=0$である。すなわち，$b_n=b_m$が成り立つ。

(4)　a_2，a_3，a_4，…は，すべて p で割り切れないことより，

$$1 \leqq b_2 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_3 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_4 \leqq p-1,\ \cdots\cdots$$

すると，2 つの相異なる 2 以上の自然数 k, l に対して，$(b_k,\ b_l)$ の組の数は高々 $(p-1)^2$ 通りにすぎないので，これより，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$，$b_{n+2} = b_{m+2} > 0$ を満たす自然数 n, $m\,(n < m)$ が存在することになる。

(3)の結論を用いると $b_n = b_m > 0$ となり，帰納的に $b_1 = b_{m-n+1} > 0$，すなわち a_1 も p で割り切れない。

コメント

漸化式と整数の融合問題で，周期数列が現れます。(1)が後続の設問への誘導として利いています。なお，(3)までの文理共通題に，(4)として，鳩の巣原理を利用する設問が追加されています。

問　題

次の命題Pを証明したい。

命題P　次の条件(a), (b)をともに満たす自然数（1以上の整数）Aが存在する。

(a)　Aは連続する3つの自然数の積である。

(b)　Aを10進法で表したとき，1が連続して99回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　yを自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数xの範囲を求めよ。

(2)　命題Pを証明せよ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1)　xが正の実数，yが自然数のとき，$P=(x+y-1)(x+y)(x+y+1)-(x^3+3yx^2)$とおくと，

$$P=(x+y)^3-(x+y)-(x^3+3yx^2)=3xy^2+y^3-x-y$$
$$=(3y^2-1)x+y^3-y$$

$x>0$，$3y^2-1>0$，$y^3-y\geqq 0$より，$P>0$はつねに成立する。

次に，$Q=(x+y-1)(x+y)(x+y+1)-\{x^3+(3y+1)x^2\}$とおくと，

$$Q=(x+y)^3-(x+y)-x^3-(3y+1)x^2=3xy^2+y^3-x-y-x^2$$
$$=-x^2+(3y^2-1)x+y^3-y$$

$Q<0$であることより，$x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)>0$

$x>0$，$-(y^3-y)\leqq 0$より，$x>\dfrac{3y^2-1+\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}$ ………①

よって，$P>0$かつ$Q<0$を満たす正の実数xの範囲は①である。

(2)　(1)より，①のもとで，

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2 \text{ ………②}$$

さて，1が連続して99回現れる99桁の整数$m=1+10+10^2+\cdots+10^{98}$は，9の倍数であるので，$y$を自然数として$m=3y$とおくことができる。

そこで，nを十分に大きな整数として，$x=10^n$とおくと，①を満たし，

$$x^3+3yx^2=10^{3n}+m\cdot 10^{2n}=(10^n+m)\cdot 10^{2n}$$
$$x^3+(3y+1)x^2=10^{3n}+(m+1)\cdot 10^{2n}=(10^n+m+1)\cdot 10^{2n}$$

このとき，$(10^n+m)\cdot 10^{2n}$は1が連続して99回現れ，また$(10^n+m+1)\cdot 10^{2n}$は1が連続して98回現れた次に2が1回現れる。

すると，②より，与えられた条件(a)，(b)をともに満たす連続する 3 つの自然数の積$(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$で表される自然数が存在する。

コメント

2008 年に雰囲気の似た問題がありますが，考えにくさについては，各段の相違があります。とらえどころのない難問です。なお，(2)では，与えられた不等式をみて，x の値として，10, 100, 1000, …と考えていきました。

問　題

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。 [2012]

解答例＋映像解説

(1) k, l, n を, $k\geqq 1, l\geqq 1, n\geqq 2$ を満たす整数として，$k(k+1)=l^n$ ……①と仮定すると, k, $k+1$ のいずれも l^n の約数となる。

さて，$(k+1)-k=1$ より, k, $k+1$ は互いに素なので, a, b を正の整数として,

$$k=a^n,\ \ k+1=b^n$$

k を消去すると,

$$b^n-a^n=1,\ (b-a)(b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1})=1$$

すると，$b-a>0$ から，$b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1}=1$ ………②

ところが，$b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1}\geqq n\geqq 2$ となり, ②は成立しない。すなわち, ①を満たす k, l, n は存在しない。

よって, 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(2) k, l, n を, $k\geqq 1, l\geqq 1, n\geqq 3$ を満たす整数として, 次式を仮定すると,

$$k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)=l^n \text{ ………③}$$

ここで, $k<k+1<k+2<\cdots<k+n-1$ から,

$$k^n<l^n<(k+n-1)^n,\ \ k<l<k+n-1$$

これより, l は $k+1$，$k+2$，…，$k+n-2$ のいずれかと等しくなる。

そこで, p を $1\leqq p\leqq n-2$ を満たす整数として，$l=k+p$ とおくと, ③は,

$$k(k+1)\cdots(k+p)\cdots(k+n-1)=(k+p)^n$$

$$k(k+1)\cdots(k+p-1)(k+p+1)\cdots(k+n-1)=(k+p)^{n-1} \text{ ………④}$$

ところが，$k+p+1$ は $k+p$ と互いに素であり，$(k+p)^{n-1}$ の約数とはならないので, ④は成立しない。すなわち, ③を満たす k, l, n は存在しない。

よって, $n\geqq 3$ のとき, 連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(1)より，$n=2$ のときも合わせて, 連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

コメント

(2)は, (1)との関連から数学的帰納法による証明と思い込みましたが，うまくいきません。そのため, 軌道修正にたいへんな時間を費やしてしまいました。

問　題

実数xの小数部分を，$0 \leqq y < 1$かつ$x-y$が整数となる実数yのこととし，これを記号$\langle x \rangle$で表す。実数 a に対して，無限数列$\{a_n\}$の各項a_n ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$のとき，数列$\{a_n\}$を求めよ。

(2)　任意の自然数nに対して$a_n = a$となるような$\dfrac{1}{3}$以上の実数aをすべて求めよ。

(3)　aが有理数であるとする。aを整数pと自然数qを用いて$a=\dfrac{p}{q}$と表すとき，q以上のすべての自然数nに対して，$a_n = 0$であることを示せ。　[2011]

解答例＋映像解説

(1)　$a=\sqrt{2}$のとき，$1<\sqrt{2}<2$より，$a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2}-1$

$$a_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle = \sqrt{2}-1$$

すると，帰納的に，$a_n = \sqrt{2}-1$である。

(2)　任意の自然数 n に対して$a_n = a$である条件を求めると，まず$n=1,\ 2$に対して成立する必要があるので，

$$a_1 = \langle a \rangle = a \cdots\cdots\cdots①,\quad a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = a \cdots\cdots\cdots②$$

逆に，①②が成立すると，任意の自然数 n に対して，帰納的に$a_n = a$が成り立つ。

さて，$a \geqq \dfrac{1}{3}$のとき，①より$\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$であり，$1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$となる。

(i)　$1 < \dfrac{1}{a} < 2 \left(\dfrac{1}{2} < a < 1 \right)$のとき

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = \dfrac{1}{a} - 1$となるので，②より，$\dfrac{1}{a} - 1 = a$，$a^2 + a - 1 = 0$

$\dfrac{1}{2} < a < 1$から，$a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\dfrac{1}{a} = 2 \left(a = \dfrac{1}{2} \right)$のとき　$a_2 = \langle 2 \rangle = 0$となり，$a_n = a$に反する。

(iii)　$2 < \dfrac{1}{a} < 3 \left(\dfrac{1}{3} < a < \dfrac{1}{2} \right)$のとき

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = \dfrac{1}{a} - 2$となるので，②より，$\dfrac{1}{a} - 2 = a$，$a^2 + 2a - 1 = 0$

$\dfrac{1}{3} < a < \dfrac{1}{2}$から，$a = -1+\sqrt{2}$

(iv) $\dfrac{1}{a}=3\left(a=\dfrac{1}{3}\right)$のとき　$a_2=\left\langle 3\right\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(i)～(iv)より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

(3)　p を整数, q を自然数として，有理数 $a=\dfrac{p}{q}$ とおく。

まず, p を q で割り，その余りを r_1 とすると，

$$a_1=\left\langle \frac{p}{q} \right\rangle=\frac{r_1}{q}\quad (0\leqq r_1<q)$$

ここで，$r_1=0$ のときは $a_1=0$ となり，以下, $n\geqq 2$ で $a_n=0$ である。

次に，$r_1\neq 0$ のときは, q を r_1 で割り，その余りを r_2 とすると，

$$a_2=\left\langle \frac{q}{r_1} \right\rangle=\frac{r_2}{r_1}\quad (0\leqq r_2<r_1)$$

ここで，$r_2=0$ のときは $a_2=0$ となり，以下, $n\geqq 3$ で $a_n=0$ である。

さらに，$r_2\neq 0$ のときは，r_1 を r_2 で割り，その余りを r_3 とすると，

$$a_3=\left\langle \frac{r_1}{r_2} \right\rangle=\frac{r_3}{r_2}\quad (0\leqq r_3<r_2)$$

余りが 0 でないとき，同様に，この操作を繰り返すと，得られる数列 $\{r_n\}$ は,

$$q>r_1>r_2>r_3>\cdots\geqq 0$$

すなわち，単調に減少する整数の数列が得られる。

すると，ある整数 $n=n_0\leqq q$ において，$r_{n_0}=0$ となる。これより，$a_{n_0}=0$ となり，以下，$n\geqq n_0+1$ で $a_n=0$ である。

したがって, q 以上の自然数 n に対して，$a_n=0$ となる。

コメント

実数の小数部分が題材です。記号の意味を把握し，具体的な問題に適用する力が問われています。なお，(1)は(2)のヒントです。(3)では，正の整数が減少していくと，いつかは 0 になるという事実を利用しています。

問　題

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような a, b, c を $[a,\ b\,;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\,;c]$ に対して，$w([a,\ b\,;c]) = p-q-(a+b)$ とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\,;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

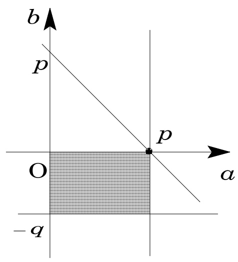
以下，$p=q$ の場合を考える。

(2)　s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\,;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。　[2011]

解答例＋映像解説

(1)　正の整数 p, q, 整数 a, b, c に対して，$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ とする。

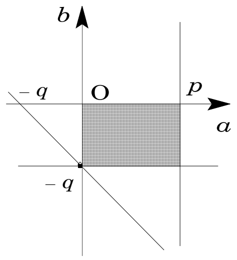


まず，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ ……①であるとき，

$$p-q-(a+b) = -q\,,\ \ a+b = p$$

よって，①を満たす a, b は，$(a,\ b) = (p,\ 0)$ のみである。

すると，$0 \leqq c \leqq p$ を満たす c は $p+1$ 個存在するので，①となるものの個数は $p+1$ である。



次に，$w([a,\ b\,;c]) = p$ ……②であるとき，

$$p-q-(a+b) = p\,,\ \ a+b = -q$$

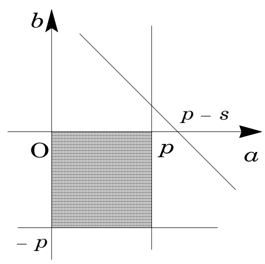
よって，②を満たす a, b は，$(a,\ b) = (0,\ -q)$ のみである。

すると，$-q \leqq c \leqq 0$ を満たす c は $q+1$ 個存在するので，②となるものの個数は $q+1$ である。

(2)　s を整数とし，$q=p$ のときを考える。

$w([a,\ b\,;c]) = -p+s$ ……③に対して，

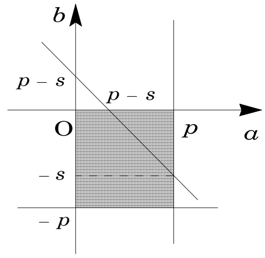
$$p-p-(a+b) = -p+s\,,\ \ a+b = p-s$$



(i)　$p-s > p$ $(s<0)$ のとき

③を満たす a, b は存在しないので，③となるものの個数は 0 である。

(ii)　$0 \leqq p-s \leqq p$ $(0 \leqq s \leqq p)$ のとき



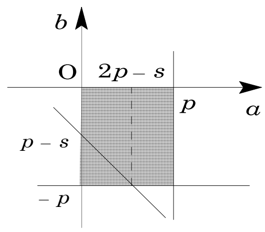
③を満たす $a,\ b$ は $(a,\ b)=(p-s,\ 0),\ (p-s+1,\ -1),\ (p-s+2,\ -2),\ \cdots,\ (p,\ -s)$ である。

すると，$b \leqq c \leqq a$ を満たす c は，それぞれ $p-s+1$ 個，$p-s+3$ 個，$p-s+5$ 個，$\cdots$，$p+s+1$ 個存在し，その和は，

$$\frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2}\times(s+1)=(p+1)(s+1)$$

よって，③となるものの個数は，$(p+1)(s+1)$ である。

(iii)　$-p \leqq p-s < 0$ $(p < s \leqq 2p)$ のとき



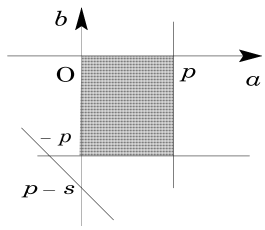
③を満たす $a,\ b$ は $(a,\ b)=(0,\ p-s),\ (1,\ p-s-1),\ (2,\ p-s-2),\ \cdots,\ (2p-s,\ -p)$ である。

すると，$b \leqq c \leqq a$ を満たす c は，それぞれ $-p+s+1$ 個，$-p+s+3$ 個，$-p+s+5$ 個，$\cdots$，$3p-s+1$ 個存在し，その和は，

$$\frac{(-p+s+1)+(3p-s+1)}{2}\times(2p-s+1)=(p+1)(2p-s+1)$$

よって，③となるものの個数は，$(p+1)(2p-s+1)$ である。

(iv)　$p-s < -p$ $(s > 2p)$ のとき



③を満たす $a,\ b$ は存在しないので，③となるものの個数は 0 である。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数は，(2)より，

$$\sum_{s=0}^{p}(p+1)(s+1)+\sum_{s=p+1}^{2p}(p+1)(2p-s+1)$$

$$=(p+1)\cdot\frac{1+(p+1)}{2}\cdot(p+1)+(p+1)\cdot\frac{p+1}{2}\cdot p$$

$$=\frac{1}{2}(p+1)^2(p+2)+\frac{1}{2}p(p+1)^2=(p+1)^3$$

コメント

読解力が要求される問題です。上の解答例では，与えられた条件を満たす場合の数を，格子点の個数に対応させて考えています。なお，(3)は(2)の結果を利用しましたが，直接的には，$\displaystyle\sum_{b=-p}^{0}\Big(\sum_{a=0}^{p}(a-b+1)\Big)$ を計算すると求められます。

問　題

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

(3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。　[2009]

解答例

(1) $m \geqq 2$ のとき，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて自然数であり，$m \geqq 3$ では，$2 \leqq k \leqq m-1$ において，

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} $$

ここで，m が素数のとき，m は $k!\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$ では割り切れないので，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて m の倍数となる。

すると，${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であることから，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は，$d_m = m$ である。なお，$m=2$ のときは，${}_2\mathrm{C}_1 = 2$ となり，$d_m = m$ を満たしている。

(2) 自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，数学的帰納法よって示す。

(i) $k=1$ のとき　$k^1 - k = 0$ は，明らかに d_m で割り切れる。

(ii) $k=l$ のとき　$l^m - l$ が d_m で割り切れると仮定すると，

$$ \begin{aligned} (l+1)^m - (l+1) &= l^m + {}_m\mathrm{C}_1\, l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\, l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\, l^2 + ({}_m\mathrm{C}_{m-1} - 1)l \\ &= (l^m - l) + {}_m\mathrm{C}_1\, l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\, l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\, l^2 + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\, l \end{aligned} $$

(1)より，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は d_m で割り切れるので，$(l+1)^m - (l+1)$ は d_m で割り切れる。

(i)(ii)より，すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れる。

(3) (2)より，(ii)の証明の式において，$l+1=0\ (l=-1)$ とおくと，m が偶数から，

$$ 0 = 1 - (-1) - {}_m\mathrm{C}_1 + {}_m\mathrm{C}_2 - \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2} - {}_m\mathrm{C}_{m-1} $$

$$ {}_m\mathrm{C}_1 - {}_m\mathrm{C}_2 + \cdots - {}_m\mathrm{C}_{m-2} + {}_m\mathrm{C}_{m-1} = 2 $$

すると，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は，2 の約数となる。

さらに，$d_2 = 2$，$d_6 = 1$ から，d_m は 1 または 2 である。

コメント

(2)までは標準的な問題です。ただ，(3)は，上記のように 5 行程度で書けてしまいますが，思いつくまでに，制限時間をかなり超えてしまいました。

問　題

自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば，$\boxed{1}=1$，$\boxed{2}=11$，$\boxed{3}=111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。 [2008]

解答例

(1) $\boxed{3^m}=\dfrac{10^{3^m}-1}{9}$ は，3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示す。

(i) $m=0$ のとき

$\boxed{3^0}=\dfrac{10^{3^0}-1}{9}=\dfrac{10-1}{9}=1$ は，$3^0=1$ で割り切れるが，$3^1=3$ では割り切れない。

(ii) $m=k$ のとき

$\boxed{3^k}=\dfrac{10^{3^k}-1}{9}$ は，3^k で割り切れるが，3^{k+1} では割り切れないと仮定すると，

$$\boxed{3^{k+1}}=\frac{10^{3^{k+1}}-1}{9}=\frac{10^{3^k\cdot 3}-1}{9}=\frac{(10^{3^k})^3-1}{9}=\frac{(10^{3^k}-1)\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\}}{9}$$
$$=\boxed{3^k}\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\}$$

ここで，$a=(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1=100^{3^k}+10^{3^k}+1=(100^{3^k}-1)+(10^{3^k}-1)+3$ とおくと，$100^{3^k}-1$，$10^{3^k}-1$ はともに 9 の倍数であり，これより a は 3 の倍数ではあるが，3^2 の倍数ではない。

したがって，$\boxed{3^{k+1}}$ は 3^{k+1} で割り切れるが，3^{k+2} では割り切れない。

(i)(ii)より，$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れない。

(2) n が 27 で割り切れるとき，$n=27l$ $(l=1,\ 2,\ \cdots)$ と表せ，

$$\boxed{n}=\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^{27l}-1}{9}=\frac{10^{27}-1}{9}\{(10^{27})^{l-1}+(10^{27})^{l-2}+\cdots+10^{27}+1\}$$
$$=\boxed{27}\{(10^{27})^{l-1}+(10^{27})^{l-2}+\cdots+10^{27}+1\}$$

$27=3^3$ なので，(1)より，$\boxed{27}$ は 27 で割り切れ，$\boxed{n}$ も 27 で割り切れる。

逆に，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるとき，$\boxed{n}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ が 9 で割り切れるすなわち各位の数の和 n が 9 の倍数となることが必要より，$n=9k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと，

$$\boxed{n}=\frac{10^{9k}-1}{9}=\frac{10^9-1}{9}\{(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1\}$$
$$=\boxed{9}\{(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1\}$$

$9=3^2$ なので, (1)より, $\boxed{9}$ は 9 で割り切れるが, 27 では割り切れない。

すると, $b=(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1$ とおくと, b が 3 で割り切れなくてはいけない。一方, b を十進法で表したとき, 各位の数は 1 と 0 のみであり, また 1 の個数は k より, 各位の数の和は k となる。

よって, k は 3 の倍数となり, $n=9k$ から n は 27 で割り切れる。

コメント

3 の倍数や 9 の倍数は, 各位の数の和が 3 の倍数や 9 の倍数かどうかで判断できますが, この点を利用する問題です。

問　題

次の条件を満たす組$(x,\ y,\ z)$を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$で，$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組$(a,\ b,\ c)$が条件(A)を満たすとする。このとき，組$(b,\ c,\ z)$が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$は，無数に存在することを示せ。 [2006]

解答例

(1) $x^2+y^2+z^2=xyz$ （$1 \leqq x \leqq y \leqq z$）……①において，$y \leqq 3$ より，$y=1,\ 2,\ 3$

(i) $y=1$ のとき　$x=1$ より，$1+1+z^2=z$，$z^2-z+2=0$

$D=1-8=-7<0$ より解なし。

(ii) $y=2$ のとき　$x^2+4+z^2=2xz$，$z^2-2xz+x^2+4=0$

$x=1,\ 2$ のいずれの場合も，$D/4=x^2-(x^2+4)=-4<0$ より解なし。

(iii) $y=3$ のとき　$x^2+9+z^2=3xz$，$z^2-3xz+x^2+9=0$

このとき，$1 \leqq x \leqq 3$ かつ $D=9x^2-4(x^2+9)=5x^2-36 \geqq 0$ から，$x=3$ となり，

$$z^2-9z+18=0,\ (z-3)(z-6)=0,\ z=3,\ 6$$

(i)～(iii)より，$(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6)$

(2) $(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$が①を満たすので，

$$a^2+b^2+c^2=abc \quad (1 \leqq a \leqq b \leqq c) \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$z=-a+bc$ とすると，z は整数で，

$$b^2+c^2+z^2-bcz=b^2+c^2+(-a+bc)^2-bc(-a+bc)$$
$$=a^2+b^2+c^2-abc=0$$

(1)より，$b \geqq 3$ であり，

$$z-c=-a+bc-c=c(b-1)-a \geqq 2c-a=c+(c-a)>0$$

よって，$b^2+c^2+z^2=bcz$ （$1 \leqq b \leqq c \leqq z$）となる整数 z が存在する。

(3) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を，次の漸化式で定義する。

$$a_1=3,\ b_1=3,\ c_1=3$$
$$a_{n+1}=b_n,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=-a_n+b_nc_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

すると，(2)より，すべての自然数 n に対して，

$$a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2=a_nb_nc_n \quad (1 \leqq a_n \leqq b_n \leqq c_n)$$

さらに，$c_{n+1}-c_n=-a_n+b_nc_n-c_n \geqq 2c_n-a_n>0$ から，すべての$(a_n,\ b_n,\ c_n)$は異なるので，①を満たす組$(x,\ y,\ z)$は，無数に存在する。

コメント

(1)と(2)の誘導によって，(3)の証明がスムーズに行えます。なお，(1)については，最初，すべての場合をチェックしましたが，解なしのケースがほとんどなので，作り直した解です。また，(2)では，z を $z=-a+bc$ として設定していますが，これは②と $b^2+c^2+z^2=bcz$ の両辺の差をとって見つけています。

問　題

$x>0$ に対し，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて $f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを示し，a_n，b_n に関する漸化式を求めよ。

(2) $h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n，b_n の一般項を求めよ。　[2005]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ に対し，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が存在し，$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，$a_1=1$，$b_1=-1$ である。

(ii) $n=k$ のとき

ある a_k，b_k に対して，$f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ と仮定する。

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{b_kx^{-1}x^{k+1}-(a_k+b_k\log x)(k+1)x^k}{x^{2(k+1)}}$$

$$=\frac{b_k-(k+1)(a_k+b_k\log x)}{x^{k+2}}=\frac{\{-(k+1)a_k+b_k\}-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}$$

ここで，$a_{k+1}=-(k+1)a_k+b_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とおくと，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表される。

したがって，a_n，b_n に関する漸化式は，$a_1=1$，$b_1=-1$ で，

$a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n$ ………①，$b_{n+1}=-(n+1)b_n$ ………②

(2) ②より，$\dfrac{b_{n+1}}{(n+1)!}=-\dfrac{b_n}{n!}$ と変形すると，

$\dfrac{b_n}{n!}=\dfrac{b_1}{1!}(-1)^{n-1}=(-1)^n$，$b_n=(-1)^n n!$

①に代入すると，$a_{n+1}=-(n+1)a_n+(-1)^n n!$

両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割って，

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=\frac{a_n}{(-1)^n n!}-\frac{1}{n+1}$$

$n \geqq 2$ において,

$$\frac{a_n}{(-1)^n n!} = \frac{a_1}{(-1)^1 \cdot 1!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -h_n$$

よって，$a_n = -(-1)^n n! h_n$

$n=1$ をあてはめると，$a_1 = -(-1) \cdot 1! \cdot 1 = 1$ となり，$n=1$ のときも成立する。

コメント

b_n の一般項はパタン通りに求められますが，a_n の一般項を求めることも考えて，2 つの漸化式に同様の変形を加えました。

問　題

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

[2005]

解答例

$a^2-a=a(a-1)$ であり，条件より，a は奇数，$a-1$ は偶数となる。

ここで，a と $a-1$ の公約数を g とし，b, c を正の整数とすると，

$$a=gb \cdots\cdots\cdots①,\quad a-1=gc \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$g(b-c)=1$

よって，g は 1 の正の約数から $g=1$ となり，a と $a-1$ は互いに素である。

さて，$10000=2^4\times5^4$ なので，a^2-a が 10000 で割り切れるとき，偶数 $a-1$ は 2^4 という約数をもち，k を整数として，

$$a-1=2^4\times k \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$3\leqq a\leqq 9999$ より，$2\leqq 2^4\times k\leqq 9998$ となり，$1\leqq k\leqq 624$ である。

よって，k が 5^4 を約数としてもつことはない。

また，k が約数として，5^i $(i=1,\ 2,\ 3)$ をもつと仮定すると，a はそれぞれ 5^{4-i} という約数をもつことになり，a と $a-1$ が互いに素であることに反する。

以上より，l を奇数として，

$$a=5^4\times l \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$5^4\times l-1=2^4\times k$，$625l-16k=1 \cdots\cdots\cdots⑤$

⑤を満たす 1 つの $(l,\ k)$ は，$(l,\ k)=(1,\ 39)$ なので，

$$625\times1-16\times39=1 \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$625(l-1)-16(k-39)=0$，$625(l-1)=16(k-39)$

625 と 16 は互いに素なので，n を整数として，

$$l-1=16n,\quad l=16n+1$$

④から，$a=5^4(16n+1)=625(16n+1)$

そこで，$3\leqq a\leqq 9999$ より，$0<16n+1<16$ となり，$n=0$ のみ満たされる。

よって，求める a は，$a=625$ である。

コメント

当然ですが，a と $a-1$ は互いに素です。この事実と a の範囲に制限があることが，本問を解くうえでのポイントとなっています。

問　題

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し，10 の位の数を a，1 の位の数を b とおいたとき，$a+b$ が偶数となるならば, b は 0 または 4 であることを示せ。

(2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し，1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数，および 1 の位の数の 4 つがすべて同じ数となるならば，その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。 [2004]

解答例

(1) p，q を $p\geqq 1$，$0\leqq q\leqq 9$ である整数として，3 桁以上の平方数を $(10p+q)^2$ とおく。

$$(10p+q)^2 = p^2\times 100+2pq\times 10+q^2$$

すると，q^2 の 1 の位が $(10p+q)^2$ の 1 の位の数 b となる。また，$2pq$ とくり上がりの数の和の 1 の位が $(10p+q)^2$ の 10 の位の数 a である。

さて，$2pq$ は偶数なので，$a+b$ が偶数となるのは，右表より，$q=0$，$q=2$，$q=8$ の場合のみであり，このとき, b は 0 または 4 である。

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2 の 1 の位	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
くり上がり	0	0	0	0	1	2	3	4	6	8

(2) p，q，r を $p\geqq 1$，$0\leqq q\leqq 9$，$0\leqq r\leqq 9$ である整数として，5 桁以上の平方数を $(100p+10q+r)^2$ とおくと，条件より，10 の位の数と 1 の位の数が同じ数となるので，その和は偶数である。

よって，$(100p+10q+r)^2$ の 1 の位の数は, (1)より 0 または 4 である。

(i) 1 の位の数が 0 のとき　1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数もすべて 0 なので，この平方数は 10000 で割り切れる。

(ii) 1 の位の数が 4 のとき　1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数もすべて 4 である。このとき, (1)より $r=2$ または $r=8$ である。

(ii-i) $r=2$ のとき　$(100p+10q+2)^2=4(50p+5q+1)^2$

n を自然数として，$(100p+10q+2)^2=10000n+4444$ と仮定すると，

$$(50p+5q+1)^2=2500n+1111$$

これより，$(50p+5q+1)^2$ の 10 の位の数と 1 の位の数は，ともに 1 である。

すると，平方数の 10 の位の数と 1 の位の数の和は偶数となるが，(1)で示したように，この場合はありえない。

(ii-ii) $r=8$ のとき　$(100p+10q+8)^2=4(50p+5q+4)^2$

n を自然数として，$(100p+10q+8)^2=10000n+4444$ と仮定すると，

$$(50p+5q+4)^2=2500n+1111$$

(i)と同様に，この場合もありえない。

(i)(ii)より，$(100p+10q+r)^2$は10000で割り切れる。

コメント

わかってしまえばそれまでですが，道に迷いながら，論理を詰めていくには，かなりのエネルギーが必要となります。

問　題

2 次方程式$x^2-4x-1=0$の 2 つの実数解のうち大きいものをα，小さいものをβとする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3を求めよ。また, $n\geqq 3$に対し，s_nをs_{n-1}とs_{n-2}で表せ。

(2)　β^3以下の最大の整数を求めよ。

(3)　α^{2003}以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$x^2-4x-1=0$の解は$x=2\pm\sqrt{5}$で，$\alpha>\beta$から$\alpha=2+\sqrt{5}$，$\beta=2-\sqrt{5}$となる。

$$s_1=\alpha+\beta=4$$
$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16+2=18$$
$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64+12=76$$

また，α，βは$x^2-4x-1=0$の解なので，$\alpha^2-4\alpha-1=0$となり，

$$\alpha^2=4\alpha+1,\quad \alpha^n=4\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}$$

同様にして，$\beta^n=4\beta^{n-1}+\beta^{n-2}$なので，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})+(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=4s_{n-1}+s_{n-2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$-1<\beta<0$なので$-1<\beta^3<0$となる。

よって，β^3以下の最大の整数は-1である。

(3)　(1)よりs_1，s_2がともに正の整数なので, $(*)$から帰納的にs_nは正の整数である。

さて，数列$\{s_n\}$の 1 の位の数をa_nとすると, (1)より$a_1=4$，$a_2=8$である。

$(*)$からs_nの 1 の位のみ計算すると，$4\times8+4=36$から$a_3=6$，$4\times6+8=32$から$a_4=2$，$4\times2+6=14$から$a_5=4$，$4\times4+2=18$から$a_6=8$となる。

これから, $(*)$を用いると，数列$\{a_n\}$は, 4, 8, 6, 2, 4, 8, …と周期 4 の周期数列であることが帰納的にわかる。

したがって，$2003=4\times500+3$から，s_{2003}の 1 の位の数はs_3の 1 の位の数と等しく, 6 である。

また，$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$であり, (2)と同様にして$-1<\beta^{2003}<0$より，$\alpha^{2003}$以下の最大の整数の 1 の位の数は 6 となる。

コメント

$(*)$を用いてオーソドックスに周期性の説明を行おうとすると，たいへん時間がかかりそうでした。a_1とa_2の特性について調べるのが，一筋縄ではいかないからです。そのため，1 の位だけを計算して，周期性が現れたところで，それ以降は「帰納的に」と書いているわけです。

問　題

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1)　数列 a_n，b_n ($n=1,\ 2,\ 3\cdots$) は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。　[2002]

解答例

(1)　x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $q(x)$ とすると，条件より，

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)q(x)+a_nx+b_n$$

すると，
$$\begin{aligned}x^{n+2}&=(x^2-x-1)xq(x)+a_nx^2+b_nx\\&=(x^2-x-1)xq(x)+a_n(x^2-x-1)+a_nx+a_n+b_nx\\&=(x^2-x-1)\{xq(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n\end{aligned}$$

x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ なので，

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n$$

(2)　a_n，b_n がともに正の整数で，互いに素であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$x^2=(x^2-x-1)\cdot1+x+1$ より，$a_1=b_1=1$ となり，a_1，b_1 はともに正の整数で，互いに素である。

(ii)　$n=k$ のとき

a_k，b_k がともに正の整数で，互いに素であると仮定する。

(1)より，$a_{k+1}=a_k+b_k$，$b_{k+1}=a_k$ なので，a_{k+1}，b_{k+1} はともに正の整数である。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1} に 2 以上の公約数が存在するとしたとき，

$$a_k=b_{k+1},\ b_k=a_{k+1}-a_k=a_{k+1}-b_{k+1}$$

これより，a_k，b_k にも 2 以上の公約数が存在することになり，a_k，b_k が互いに素であることに反する。

よって，a_{k+1}，b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素である。

コメント

互いに素であることの証明も，最大公約数を設定してゴチャゴチャ計算するまでもありませんでした。

問　題

Nを正の整数とする。$2N$個の項からなる数列
$\{a_1, a_2, \cdots, a_N, b_1, b_2, \cdots, b_N\}$を$\{b_1, a_1, b_2, a_2, \cdots, b_N, a_N\}$という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列はb_1を初項とし，b_iの次にa_i，a_iの次にb_{i+1}がくるようなものになる。また，数列$\{1, 2, \cdots, 2N\}$をシャッフルしたときに得られる数列において，数kが現れる位置を$f(k)$で表す。たとえば，$N=3$のとき，$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$をシャッフルすると，$\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$となるので，$f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=6$，$f(4)=1$，$f(5)=3$，$f(6)=5$である。

(1) 数列$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$を3回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2) $1 \leqq k \leqq 2N$を満たす任意の整数kに対し，$f(k)-2k$は$2N+1$で割り切れることを示せ。

(3) nを正の整数とし，$N=2^{n-1}$のときを考える。数列$\{1, 2, 3, \cdots, 2N\}$を$2n$回シャッフルすると，$\{1, 2, 3, \cdots, 2N\}$にもどることを証明せよ。　[2002]

解答例

(1) 数列$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$は, 1回シャッフルすると,

$$\{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4\}$$

2回シャッフルすると，$\{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2\}$

3回シャッフルすると，$\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$

(2) 数列$\{1, 2, 3, \cdots, N, N+1, N+2, N+3, \cdots, 2N\}$をシャッフルすると，$\{N+1, 1, N+2, 2, N+3, 3, \cdots, 2N, N\}$となる。

$1 \leqq k \leqq N$に対して，数列前半$\{1, 2, 3, \cdots, N\}$のk番目の数は，シャッフルすると$2k$番目になるので，$f(k)=2k$である。

よって，$f(k)-2k=0$となり，$2N+1$で割り切れる。

$N+1 \leqq k \leqq 2N$に対して，数列後半$\{N+1, N+2, N+3, \cdots, 2N\}$の$k-N$番目の数は，シャッフルすると$2(k-N)-1$番目になるので，$f(k)=2(k-N)-1$である。

よって，$f(k)-2k=-2N-1$となり，$2N+1$で割り切れる。

(3) (2)より，$f(k)$と$2k$は$2N+1$で割ったとき余りが等しくなるので，これを次のように表す。

$$f(k) \equiv 2k \pmod{2N+1}$$

さて，$N=2^{n-1}$ のとき，数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n\}$ を 1 回シャッフルすると，$1\leqq k\leqq 2^n$ を満たす任意の k に対して，

$$f(k)\equiv 2k \pmod{2^n+1}$$

2 回シャッフルすると，

$$f(f(k))\equiv 2f(k)\equiv 2(2k)=2^2k \pmod{2^n+1}$$

3 回シャッフルすると，

$$f(f(f(k)))\equiv 2^2f(k)\equiv 2^2(2k)=2^3k \pmod{2^n+1}$$

同様にして, $2n$ 回シャッフルしたとき，$f^{2n}(k)$ と表すと，

$$f^{2n}(k)\equiv 2^{2n}k \pmod{2^n+1}$$

ここで，$2^{2n}k-k=(2^n+1)(2^n-1)k$ となるので，$2^{2n}k-k\equiv 0 \pmod{2^n+1}$

したがって，$f^{2n}(k)\equiv k \pmod{2^n+1}$ となり，$1\leqq k\leqq 2^n$ から $f^{2n}(k)=k$ である。すなわち，数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n\}$ は $2n$ 回シャッフルするともとにもどる。

コメント

1 から 2^n までの数に対して，2^n+1 で割った余りに注目するところが，(3)のポイントです。(2)がその誘導となっています。

問　題

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字は互いに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない」

ただし，S の要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数は S に含まれるとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。

(2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。 [2000]

解答例

(1) 和が 9 になる 2 つの数の組は，$0+9$，$1+8$，$2+7$，$3+6$，$4+5$ である。

4 けたの数で条件を満たすのは，千の位の決め方が 9 通り，その各々の場合に対して，百の位は千の位の数および千の位の数との和が 9 になる数を除いて 8 通りずつとなる。

同様に考えて，十の位の数は 6 通りずつ，一の位の数は 4 通りずつとなるので，求める 4 けたの S の要素の個数は，$9\times8\times6\times4=1728$ 個となる。

(2) 1 けたの数は 9 個で, (1)と同様に考えて, 2 けたの数は $9\times8=72$ 個, 3 けたの数は $9\times8\times6=432$ 個となる。以上，合わせて，$9+72+432=513$ 個である。

すると, (1)より 4 けたの数が 1728 個あるので, 2000 番目の数は 4 けたとなる。

そこで，小さい数から数えて，千の位が 1～7 の数は，$7\times8\times6\times4=1344$ 個で，合わせて，$513+1344=1857$ 個となる。

さらに，千の位が 8 で，百の位が 0, 2, 3, 4, 5, 6 の数は $6\times6\times4=144$ 個で，合わせて，$1857+144=2001$ 個となる。

したがって，2000 番目は，千の位が 8，百の位が 6 の数で大きい方から 2 番目の数となり, 8695 である。

コメント

あっさりした問題です。(2)は見込みを立てて数えあげていく問題ですが，1 けたの正の整数のことをうっかり忘れると，大きな被害を被ります。

問　題

(1)　k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき，$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2)　以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件 ： $0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

[1999]

解答例

(1)　$1\leqq n\leqq 2^k-1$ として，

$${}_{2^k}\mathrm{C}_n=\frac{(2^k)!}{n!(2^k-n)!}=\frac{2^k\cdot(2^k-1)!}{n\cdot(n-1)!(2^k-n)!}=\frac{2^k}{n}\,{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

よって，$n\,{}_{2^k}\mathrm{C}_n=2^k\,{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ………①

$0\leqq n-1\leqq 2^k-2$ より，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ は自然数となるので，①の右辺は 2^k の倍数である。すると，左辺も 2^k の倍数となるが，$1\leqq n\leqq 2^k-1$ なので ${}_{2^k}\mathrm{C}_n$ は偶数である。

(2)　一般的に ${}_m\mathrm{C}_n={}_{m-1}\mathrm{C}_n+{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$ （$1\leqq n\leqq m-1$）………②

②より，${}_{m-1}\mathrm{C}_n={}_m\mathrm{C}_n-{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ………③

③において $m=2^k$ とすると，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_n={}_{2^k}\mathrm{C}_n-{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ………④

まず，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_0=1$ は奇数で，また(1)より ${}_{2^k}\mathrm{C}_n$ $(1\leqq n\leqq 2^k-1)$ は偶数なので，④の漸化式を用いると，帰納的に ${}_{2^k-1}\mathrm{C}_1$，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_2,\cdots,{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて奇数となる。

すなわち $m=2^k-1$ （k は自然数）のとき ${}_m\mathrm{C}_n$ $(0\leqq n\leqq m)$ はすべて奇数となる。

次に，②において $m=2^k+1$ とすると，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_n={}_{2^k}\mathrm{C}_n+{}_{2^k}\mathrm{C}_{n-1}$ ………⑤

(1)より ${}_{2^k}\mathrm{C}_n$ $(1\leqq n\leqq 2^k-1)$ は偶数なので，⑤の漸化式を用いると，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_2$，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_3,\cdots,{}_{2^k+1}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて偶数となる。

同様にすると，帰納的に ${}_{2^k+2}\mathrm{C}_n$ $(3\leqq n\leqq 2^k-1)$，${}_{2^k+3}\mathrm{C}_n$ $(4\leqq n\leqq 2^k-1)$，……，${}_{2^{k+1}-3}\mathrm{C}_n$ $(2^k-2\leqq n\leqq 2^k-1)$，${}_{2^{k+1}-2}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて偶数となる。

すなわち，$m\neq 2^k-1$ （k は自然数）のとき，${}_m\mathrm{C}_n$ $(0\leqq n\leqq m)$ のうち少なくとも一つは偶数である。

以上より，${}_m\mathrm{C}_n$ $(0\leqq n\leqq m)$ がすべて奇数であるのは，$m=2^k-1$ （k は自然数）のときだけである。

コメント

エンツェンスベルガー『数の悪魔』の中に，偶数だけ明るく，奇数は暗くなっている悪魔の作ったパスカルの三角形が出ています。上の解は，この図のイメージをもとに書いています。

問　題

実数 a に対して $k \leqq a < k+1$ をみたす整数 k を $[\,a\,]$ で表す。n を正の整数として，

$f(x)=\dfrac{x^2(2\cdot3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}$ とおく。$36n+1$ 個の整数 $[f(0)]$，$[f(1)]$，$[f(2)]$，$\cdots$，$[f(36n)]$ のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。　[1998]

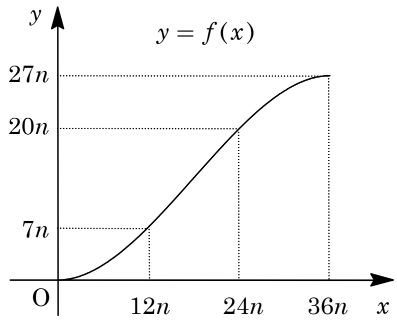
解答例

$f(x)=\dfrac{2\cdot3^3\cdot n\cdot x^2-x^3}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}$ より，$f'(x)=\dfrac{2^2\cdot3^3\cdot n\cdot x-3x^2}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}=\dfrac{-x(x-36n)}{2^5\cdot3^2\cdot n^2}$

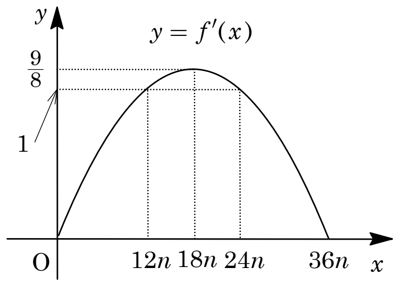
$0\leqq x\leqq 36n$ において，$f'(x)\geqq 0$ より，$f(x)$ はこの区間で単調増加

$f''(x)=\dfrac{2^2\cdot3^3\cdot n-6x}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}=\dfrac{18n-x}{2^4\cdot3^2\cdot n^2}$ から，

$y=f(x)$ のグラフは，$0<x<18n$ で $f''(x)>0$ より下に凸，$18n<x<36n$ で $f''(x)<0$ より上に凸。



ここで，$f'(x)=\dfrac{-(x-18n)^2}{2^5\cdot3^2\cdot n^2}+\dfrac{9}{8}$ より，



$f'(x)=1$ とすると，$-x^2+36nx=2^5\cdot3^2\cdot n^2$

$(x-12n)(x-24n)=0$，$x=12n$，$x=24n$

また，$f(12n)=7n$，$f(24n)=20n$

以上より，連続する 2 つの整数値に対する $f(x)$ の値の差は，$0\leqq x\leqq 12n$ と $24n\leqq x\leqq 36n$ では 1 より小で，$12n\leqq x\leqq 24n$ では 1 より大となる。

すると，$[\,f(0)\,]$，$[\,f(1)\,]$，……，$[\,f(12n)\,]$ のうちで相異なるものの個数は，$7n+1$ 個。$[\,f(12n+1)\,]$，$[\,f(12n+2)\,]$，……，$[\,f(24n-1)\,]$ のうちで相異なるものの個数は，$24n-12n-1=12n-1$ 個。$[\,f(24n)\,]$，$[\,f(24n+1)\,]$，……，$[\,f(36n)\,]$ のうちで相異なるものの個数は，$27n-20n+1=7n+1$ 個

合わせて，$(7n+1)+(12n-1)+(7n+1)=26n+1$ 個

コメント

$y=f(x)$ のグラフは $0\leqq x\leqq 36n$ で単調増加だったのですが，$f'(18n)=\dfrac{9}{8}>1$ となったため，軌道の修正を図ったのが上の解です。イメージ的には，1 辺の長さ 1 の正方形を設定して，と の 2 つの場合，整数 k に対して，何に着目すれば $[\,f(k)\,]$ の異なる値の個数が求まるかを考えたわけです。

問　題

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，1 秒後に $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ に移る事象を，それぞれ $A,\ B,\ C,\ D$ とする。そして，6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り，A, B, C, D がそれぞれ a 回，b 回，c 回，d 回起こったとすると，

$$a+b+c+d=6\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b-d=a-c\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，A または D が 3 回，B または C が 3 回起こったことより，その確率は，

$$ {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2)　(1)と同様に設定して，6 秒後に O から O に移る条件は，

$$a+b+c+d=6\ \cdots\cdots\cdots③,\quad a-c=0\ \cdots\cdots\cdots④,\quad b-d=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$a+b=3$，$c=a$，$d=b$

これより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，

$$(0,\ 3,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2,\ 1),\ (3,\ 0,\ 3,\ 0)$$

すると，求める確率は，

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{25}{256}$$

コメント

ランダムウォークのついての標準的な問題です。なお，(1)でも(2)と同じように，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組を求めて，確率を計算しても構いません。

問　題

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　n 試合目 $(n\geqq 2)$ で A が優勝する場合，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。そこで，各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと，

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBACBACB…ACBAA となる場合で，n を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCABCABCA…BCAA となる場合で，n を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより，n 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると，

$$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{（n が 3 の倍数でないとき）},\quad p(n)=0 \text{（n が 3 の倍数のとき）}$$

(2)　l を正の整数とするとき，(1)より，

(i)　n を 3 で割った余りが 2 $(n=3l-1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 $(n=3l+1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii)　n を 3 で割った余りが 0 $(n=3l)$ のとき　$p(n)=0$

さて，m を正の整数とするとき，総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m，そのとき A の最後の対戦相手が B である確率 $P_m{}'$ とすると，$m\geqq 2$ のとき，

$$P_m=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}+0=2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}$$

$$=2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}$$

まとめると，

$$P_m=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$$

$$P_m{}'=\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{1}{14}-\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$$

ここで，$m=1$ をあてはめると，$P_1=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$，$P_1{}'=\frac{1}{14}-\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3=0$ となり，ともに成立している。

したがって，A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率は，

$$\frac{P_m{}'}{P_m}=\frac{\frac{1}{14}-\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}=\frac{1-8\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{5-12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}=\frac{2^{3m}-8}{5\cdot 2^{3m}-12}$$

コメント

巴戦を題材にした有名問題です。現行課程で復活した条件付き確率が絡んでいます。

問　題

どの目も出る確率が$\dfrac{1}{6}$のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く。さいころを投げ，出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると，得られる文字列は，AACDAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。[2015]

解答例＋映像解説

(1) まず，文字列 AA について，左右を区別し A_1A_2 とする。

さて，さいころを投げ，出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 A_1A_2，4 のときは文字 B，5 のときは文字 C，6 のときは文字 D を，すでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして，n 回さいころを投げ，文字列の左から n 番目の文字が A_1，A_2 の確率をそれぞれ p_n，q_n，そして B または C または D である確率を r_n とおく。

すると，$p_1=r_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=0$ で，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=p_n\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}(q_n+r_n)=\dfrac{1}{2}(1-p_n)=-\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}$ となり，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right),\quad p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，②より，$n\geqq 2$ において，

$$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

なお，この式は，$n=1$ のときも満たしている。

以上より，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率 p_n+q_n は，

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，文字列が A_2B となる場合より，その確率は，

$$q_{n-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

コメント

直接的に求めるのは難しそうだったので，漸化式を立てました。そして，いったん AA の文字列について左側と右側を区別し，B または C または D をまとめ，3 つの状態に分けて考えたわけです。

問　題

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(∗)を考える。

(∗)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(∗)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　はじめ袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているので，1 回目に取り出した球が赤球である確率 p_1 は，$p_1=\dfrac{1}{a+3}$ である。

次に，2 回目に取り出した球が赤球であるのは，1 回目に取り出した球が白球のときだけなので，その確率 p_2 は，$p_2=\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$ である。

(2)　n を自然数として，$n+1$ 回目に取り出した球が赤球であるのは，n 回目に取り出した球が白球のときだけなので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{a+1}(1-p_n),\quad p_{n+1}=-\frac{1}{a+1}p_n+\frac{1}{a+1}$$

変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\left(p_n-\dfrac{1}{a+2}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{a+2}=\left(p_1-\frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}=-\frac{1}{(a+3)(a+2)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=-\dfrac{1}{(a+3)(a+2)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{a+2}$ である。

(3)　(2)より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} p_n = -\frac{1}{(a+3)(a+2)}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1+\frac{1}{a+1}}+\frac{m}{a+2}$

$$= -\frac{a+1}{(a+3)(a+2)^2}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}+\frac{m}{a+2}$$

ここで，$a \geqq 1$ より，$-\dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{1}{a+1} < 0$ となるので，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{-1}{m}\cdot\frac{a+1}{(a+3)(a+2)^2}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}+\frac{1}{a+2}\right] = \frac{1}{a+2}$$

コメント

確率と漸化式についての頻出題です。与えられた条件が扱いやすいので，すんなりと立式できます。なお，(2)までは文理共通です。

問　題

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1)　A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1)　A が n 回目にコインを投げ，それが 2 回目の表である場合を考える。

(i)　B が得点を獲得せず，A が勝利するとき

まず，A が 1 点目を獲得するのは 1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-1$回目のいずれかであり，2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は偶数となり 1 点目の獲得回の選び方が$\dfrac{n}{2}$通りより，この確率は，

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(ii)　A, B の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

A, B の順に 1 点ずつを獲得するのは，1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-2$ 回目から 2 回を選び，前を A が 1 点目を獲得する回，後を B が 1 点目を獲得する回に対応させる。また，A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は奇数となり 1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより，この確率は，

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

これは，$n=1$，3 のときも成立している。

(iii) B, A の順に 1 点ずつを獲得した後, A が勝利するとき

B, A の順に 1 点ずつを獲得するのは, 2 回目, 4 回目, 6 回目, …, $n-1$ 回目から 2 回を選び, 前を B が 1 点目を獲得する回, 後を A が 1 点目を獲得する回に対応させる。また, A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は奇数となり 1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより, この確率は,

$$ {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} $$

これは, $n=1$, 3 のときも成立している。

以上より, A の勝利となる確率 $p(n)$ は, n を偶奇に分けて,

$$ p(n)=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad(n\text{ が偶数}) $$

$$ p(n)=2\times(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\quad(n\text{ が奇数}) $$

(2) k を自然数とすると, (1)より, $p(2k)=2k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=k\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$$ p(2k-1)=(2k-2)(2k-4)\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=2(k-1)(k-2)\left(\frac{1}{4}\right)^k $$

さて, $S_n=\sum_{k=1}^{n}p(k)$ とおくと,

$$ S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\{p(2k)+p(2k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-5k+4)\left(\frac{1}{4}\right)^k $$

ここで, a, b, c を定数として, 次式が成り立つようにこれらの値を求める。

$$ (2k^2-5k+4)\left(\frac{1}{4}\right)^k=\{a(k+1)^2+b(k+1)+c\}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}-(ak^2+bk+c)\left(\frac{1}{4}\right)^k $$

係数を比較すると,

$$ a-4a=8,\ 2a+b-4b=-20,\ a+b+c-4c=16 $$

これより, $a=-\frac{8}{3}$, $b=\frac{44}{9}$, $c=-\frac{124}{27}$ となり,

$$ S_{2n}=\{a(n+1)^2+b(n+1)+c\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-(a+b+c)\left(\frac{1}{4}\right)^1 $$

$$ \to-\frac{1}{4}(a+b+c)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}+\frac{44}{9}-\frac{124}{27}\right)=\frac{16}{27}\quad(n\to\infty) $$

$$ S_{2n+1}=S_{2n}+p(2n+1)=S_{2n}+2n(2n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\to\frac{16}{27}\quad(n\to\infty) $$

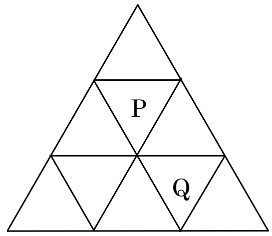
以上より, $\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{16}{27}$ である。

コメント

問題の設定状況を把握するのにたいへん時間がかかってしまい, 難度がかなり高く感じられました。また, (2)はいろいろな解法があるものの, どれをとっても計算量が半端ではありません。

問　題

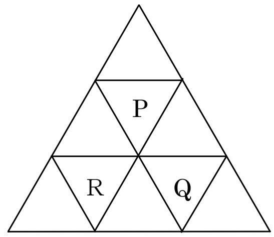
図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



[2012]

解答例＋映像解説

まず，部屋 R を右図のように決め，球が n 秒後に P, Q, R にある確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。



さて，球は P より出発し，1 秒ごとに辺を共有する隣の部屋に移動することより，奇数秒後には P, Q, R 以外の部屋，偶数秒後には P, Q, R のいずれかの部屋にある。

これより，k を 1 以上の整数として，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0\cdots\cdots\cdots①,\quad p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，球が $2k$ 秒後に部屋 P, Q, R のいずれかにあり，$2k+2$ 秒後に部屋 Q に移動する確率は，

(i)　部屋 P にあるとき　P→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)　部屋 Q にあるとき　Q→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}$

(iii)　部屋 R にあるとき　R→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)(ii)(iii)より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{2}{3}q_{2k}+\frac{1}{6}r_{2k}\cdots\cdots\cdots③$

また，Q, R の対称性より，$q_{2k}=r_{2k}$ なので，②③に代入すると，

$$p_{2k}+2q_{2k}=1\cdots\cdots\cdots④,\quad q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{5}{6}q_{2k}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}(1-2q_{2k})+\frac{5}{6}q_{2k}=\frac{1}{2}q_{2k}+\frac{1}{6}$ となり，$q_0=0$ に注意して，

$$q_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\Big(q_{2k}-\frac{1}{3}\Big),\quad q_{2k}-\frac{1}{3}=\Big(q_0-\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^k=-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k$$

よって，$q_{2k}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥から，n が奇数のとき $q_n=0$，n が偶数のとき $q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}}$ となる。

コメント

確率と漸化式の融合問題です。最初は，すべての部屋に名称をつけましたが，そうするまでもありませんでした。

問　題

2 つの箱 L と R, ボール 30 個, コイン投げで表と裏が等確率$\frac{1}{2}$で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個, R に $30-x$ 個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱 R から箱 L に, 裏が出れば箱 L から箱 R に, $K(z)$ 個のボールを移す。ただし, $0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2), (3)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき, $P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3)　n を自然数とするとき, $P_{4n}(6)$ を求めよ。 [2010]

解答例＋映像解説

(1)　箱 L, R に入っているボールの個数が, それぞれ z, $30-z$ であるとき, 操作(#)を行うと, コインの表, 裏の出方によって, 箱 L に入っているボールの個数は次のように変化する。

(i)　$0 \leqq z \leqq 15$ のとき

表が出ると $z \to z+z=2z$, 裏が出ると $z \to z-z=0$

(ii)　$16 \leqq z \leqq 30$ のとき

表が出ると $z \to z+(30-z)=30$, 裏が出ると $z \to z-(30-z)=2z-30$

これより, $z=0$ のとき操作(#)を行っても, 箱 L のボールの個数には変化がない。同様に, $z=30$ のとき操作(#)を行っても, 箱 L のボールの個数には変化がない。

さて, m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とすると, コインの表, 裏の出る確率が, ともに$\frac{1}{2}$であることより,

(i)　$0 \leqq x \leqq 15$ のとき　$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$

(ii)　$16 \leqq x \leqq 30$ のとき　$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\frac{1}{2}$

(2)　(1)より, $P_{2n}(10)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(20)$, $P_{2n-1}(20)=\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{2}$ となり,

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{4}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{4}$$

これより, $P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{P_{2n-2}(10)-\frac{1}{3}\right\}$となり,

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

(3)　(2)と同様にして，

$$P_{4n}(6)=\frac{1}{2}P_{4n-1}(12)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{4n-2}(24)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-3}(18)+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-4}(6)+\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}P_{4n-4}(6)+\frac{3}{16}$$

これより，$P_{4n}(6)-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{16}\left\{P_{4n-4}(6)-\dfrac{1}{5}\right\}$となり，$P_4(6)=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{16}$から，

$$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\left\{P_4(6)-\frac{1}{5}\right\}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

よって，$P_{4n}(6)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$

コメント

まとめると，上のような解になりますが，ここまで至る道は平坦なものではありません。最も要求されるのは，具体例を考えながら，題意を把握する読解力です。