2020 入試対策
過去問ライブラリー

千葉大学
文系数学22か年

1998−2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
　　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

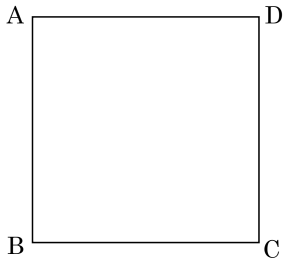
関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　右図のような 1 辺の長さ10cm の正方形 ABCD がある。点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒1cm 進む。また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒2cm 進む。点 R が A に達するまでに△PQR の面積が35cm^2となる時刻をすべて求めよ。　[2014]



2　aを実数とする。関数$f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$の最小値を$a$を用いて表せ。　[2010]

3　aを実数とする。xについての方程式$|x^2+ax+2a|=a+1$が異なる実数解をちょうど 2 個もつようなaの値の範囲を求めよ。　[2007]

4　実数aに対し, 2 次関数$f(x)=x^2-ax-a^2+5a$を考える。

(1)　方程式$f(x)=0$が異なる 2 つの実数解をもつようなaの範囲を求めよ。

(2)　2 次関数$y=f(x)$のグラフが 2 点$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$を通り，$1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$となるような$a$の範囲を求めよ。　[2006]

5　2 次関数$f(x)=ax^2+bx+c$について以下の問いに答えよ。ただし，$a<0$とする。

(1)　$f(x)$をxで割った余りと$x+1$で割った余りとが一致しているとする。このとき，$a=b$になることを示せ。

(2)　(1)の関数が，さらに次の(i), (ii)を満たすとき，$f(x)$を求めよ。

(i)　曲線$y=f(x)$が直線$y=x$と接する。

(ii)　曲線$y=f(x)$と 3 直線$y=0$，$x=-1$，$x=0$で囲まれた部分の面積は$\dfrac{5}{6}$である。　[2000]

■ 微分と積分

1　a は 0 でない実数とし，$f(x)=ax^3+3ax^2+3x+3$ とおく。
(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフ C と導関数 $y=f'(x)$ のグラフ C' が相異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。
(2)　a が(1)の範囲にあるとき C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。
[2019]

2　a を正の数とし，t は $0\leqq t<a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。
(1)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。
(2)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。
(3)　s は $0\leqq s\leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。
[2018]

3　座標平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に引ける接線の本数を n とする。
(1)　$n=3$ を満たすような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。
(2)　$-3a<b$ かつ $n\leqq 2$ を満たすように点 $(a,\ b)$ が動くとき，$b-3a$ の最小値を求めよ。
[2017]

4　a は $0<a<2$ を満たす定数とする。$0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$ を考える。このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。
[2016]

5　m を実数とする。x に関する方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ の実数解の個数を求めよ。
[2015]

6　実数 a に対し，関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t+1|\,dt+a$ を考える。曲線 $C:y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。
[2014]

7　a と k を正の実数とする。$y=\dfrac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\dfrac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を a と k を用いて表せ。

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

[2009]

8　2 次関数 $f(x)$ は，$xf(x)=\dfrac{2}{3}x^3+(x^2+x)\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $xf(x)$ の $x≧0$ における最小値を求めよ。　[2008]

9　関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$$

　また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

10　a は実数とする。2 つの曲線 $y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ と $y=ax^2-2a^2x-3a$ は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。　[2005]

11　3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$b,\ c$ を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)-g(x)$ の $0≦x≦1$ における最小値を a を用いて表せ。　[2004]

12　実数 t に対して，$f(t)$ を $f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|dx$ と定める。$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。　[2002]

13　実数 a に対して，$f(x)=ax^2-2ax+a^2+1$ とおく。

(1)　定積分 $I(a)=\int_1^2 f(x)dx$ を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が条件 $f(1)\leqq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲を動くとき，$I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。　[2001]

14　a, b を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，a, b の値を求めよ。　[2001]

15　三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D があり，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=30°$ である。$\mathrm{AB}=p$，$\mathrm{AC}=q$ とおく。

(1)　AD の長さを p, q で表せ。

(2)　$p+q=1$ を満たすとき，△ABD の面積と△ACD の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。　[2000]

16　与えられた実数 a, b のうち，大きくない方を $\min\{a,\ b\}$ で表すことにする。関数 $f(x)=x^3-7x$ に対して $g(x)=\min\{f(x+1),\ f(x-1)\}$ とおく。

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$y=g(x)$ が最大となる x の値，および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1 座標平面上に 5 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 1)$, $\mathrm{D}(1,\ 0)$, $\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$がある。点 E と点$\mathrm{P}_1(s,\ 1)\ (0<s<1)$を通る直線を$l_1$とする。直線$y=1$に関して$l_1$と対称な直線を$l_2$とし，$l_2$と直線$x=1$の交点を$\mathrm{P}_2$とする。さらに，直線$x=1$に関して$l_2$と対称な直線$l_3$は，$x$軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を$\mathrm{P}_3$とする。

(1) 直線l_2が点 D を通るときのsの値を求めよ。

(2) 線分DP_3の長さをsを用いて表せ。

(3) $\mathrm{EP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$の最大値と最小値を求めよ。 [2016]

2 座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸またはy軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にするθを求めよ。 [2014]

3 a, bを実数とし，$a>0$とする。放物線$y=\dfrac{x^2}{4}$上に 2 点$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれl_{A}とn_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれl_{B}とn_{B}とおいたとき，l_{A}とl_{B}が直交しているものとする。2 つの接線l_{A}，l_{B}の交点を P とし，2 つの法線n_{A}，n_{B}の交点を Q とする。

(1) bをaを用いて表せ。

(2) P, Q の座標をaを用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるようなaの値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

4 放物線$y=x^2$上の点$(a,\ a^2)$における接線をl_aとする。

(1) 直線l_aが不等式$y>-x^2+2x-5$の表す領域に含まれるようなaの範囲を求めよ。

(2) aが(1)で求めた範囲を動くとき，直線l_aが通らない点$(x,\ y)$全体の領域Dを図示せよ。

(3) 連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$の表す領域を$E$とする。$D$と$E$の共通部分の面積を求めよ。 [2012]

5　a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える。C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

[2011]

6　放物線 $C: y=x^2$ 上の 2 点 A，B は，直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{6}$ になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき，直線 AB が通りうる点の範囲を求め，図示せよ。　[2003]

7　座標平面上に，中心がそれぞれ点 $(0,\ 1)$，点 $(2,\ 1)$ で，同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

(1)　2 円 C_1，C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。

(2)　さらに，2 円 C_1，C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。　[2002]

8　直線 $y=-x$ と放物線 $y=x^2+2x$ とで囲まれた図形を D とする。

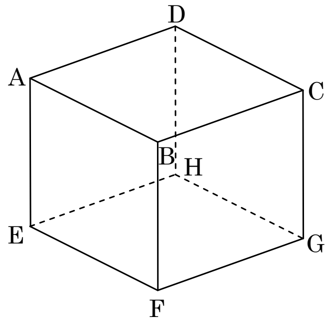
(1)　D の面積 S_1 を求めよ。

(2)　D を x 軸の正の方向に m だけ平行移動して，不等式 $y \geqq -2x+3$ の表す領域に含まれるように移す。m の最小値 m_1 を求めよ。

(3)　m_1 を(2)で求めた最小値とする。D を x 軸の正の方向に m_1 だけ平行移動するとき，D が通過する範囲を図示し，その面積 S_2 を求めよ。　[1999]

■ 図形と計量

1　右図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して，対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $OQ=2AP-1$ を満たしながら動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。ただし，点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。
[2018]



2　座標平面上に 3 点 $O(0,\ 0)$，$A(3,\ \sqrt{3})$，$B(9,\ 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle PAQ=90^\circ$ となるようにとる。ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。$\angle APQ=\theta$ とし，△APQ の面積を S とする。

(1)　S を θ を用いて表せ。

(2)　S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3)　S が△AOB の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ。　[2017]

3　1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において，BC を $1:2$ に内分する点を D, CA を $1:2$ に内分する点を E, AB を $1:2$ に内分する点を F とし，さらに BE と CF の交点を P, CF と AD の交点を Q, AD と BE の交点を R とする。このとき，△PQR の面積を求めよ。
[2015]

4　1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$CE=t$ とする。

(1)　AD の長さを求めよ。

(2)　$\cos\angle DAE$ を t を用いて表せ。

(3)　△ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。　[2013]

5　三角形 ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle BAC=60^\circ$，$AB>AC$ である。このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。
[2011]

6　△ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき，△ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。 [2010]

7　△ABC は AB = AC の二等辺三角形とする。∠A，∠B の大きさをそれぞれ A, B とおく。$A = 30°$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし，H は辺 BC 上の点である。このとき $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。 [2009]

8　△ABC において，$\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{BC} = 5\sin A$，$\mathrm{CA} = 3$ であるとする。

(1)　辺 BC の長さを求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径を求めよ。 [2006]

9　1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき，AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし, AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1)　AD の長さが $\dfrac{3}{4}$ であるとき, r の値を求めよ。

(2)　AD の長さを x とおくとき，r^2 を x の式で表せ。

(3)　$\angle\mathrm{DME} = \theta$ とおくとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。 [2004]

■ ベクトル

1　三角形 ABC において $\angle\mathrm{A} = 45°$，$\angle\mathrm{B} = 60°$ である。頂点 A から辺 BC に引いた垂線と BC が交わる点を D とし，頂点 C から辺 AB に引いた垂線と AB が交わる点を E とする。また，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　直線 CE と直線 AD の交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 [2019]

2　n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1)　$\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2)　t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3)　不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

3　座標平面上にすべての内角が $180°$ 未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおく。k は $0\leqq k\leqq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1)　$E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

4　三角形 ABC の外心を O，重心を G とする。

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

5　平面上の $\triangle ABC$ において，辺 AB を $4:3$ に内分する点を D，辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{q}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表せ。

(2)　点 O が $\triangle ABC$ の外接円の中心になるとき，3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。　[2008]

6 平面上で $AB=3$ となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし，点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き，2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし，線分 CD は点 A を通り，線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

7 xyz 空間内に点 $A(1,\ 1,\ 2)$ と点 $B(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。 [2004]

8 R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ とおく。R が $\overrightarrow{ED}=\vec{a}$，$\overrightarrow{FE}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{AF}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3) R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき, R の面積を求めよ。 [2003]

9 三辺の長さが $OA=2$, $OB=3$, $AB=\sqrt{7}$ の三角形 OAB がある。OA の中点を M とし，B を始点とする半直線 BM 上に $BP=tBM$ となる点 P をとり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(3) $AP\perp BM$ となるとき t の値を求めよ。 [1999]

10 空間に，同一直線上にない 3 点 O, A, B と 1 点 P がある。O, A, B を通る平面を α とし，点 P は α 上にないとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$, $\vec{p}\cdot\vec{a}=2$, $\vec{p}\cdot\vec{b}=-2$ とする。

(1) $\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b}$ が平面 α に垂直になるように実数 s, t を定めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 OPQ の面積が $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列

1　正の約数の個数がちょうど m 個であるような，1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする。

(1)　d_5 を求めよ。

(2)　d_{15} を求めよ。　[2019]

2　初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1=7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1)　数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2)　d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。　[2018]

3　k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2)　$4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。　[2015]

4　整数 $p,\ q\ (p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1)　$n,\ k$ が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。　[2013]

5　$p,\ q$ を互いに素な 2 以上の整数，$m,\ n$ は $m<n$ なる正の整数とする。このとき，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数のうち，m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。　[2012]

6 　1 より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n\geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2012]

7 　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　$a,\ b$ がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，$a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

8 　以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2)　$a,\ b$ を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数，s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば，s は整数であることを示せ。　[2008]

9 　n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。　[2007]

10　数列$\{a_n\}$において，$a_1=2$，$a_2=4$である。$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおくとき，$\{b_n\}$は正の公比をもつ等比数列とする。

(1)　$\dfrac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}$を，$b_n$，$b_{n+1}$を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\frac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}=-1456$が成り立つとき

(i)　一般項b_nを求めよ。

(ii)　一般項a_nを求めよ。　[2005]

11　数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_n=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$で定める。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k$を求めよ。　[2003]

12　以下の問いに答えよ。

(1)　nを自然数とする。このとき，n^2を4で割った余りは0または1であることを証明せよ。

(2)　3つの自然数a, b, cが，$a^2+b^2=c^2$を満たしている。このとき, a, bの少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。　[2001]

13　数列$\{a_n\}$は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$a_1=\dfrac{1}{2}$　　　(ii)　$n\geqq2$について，$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$である。

(1)　a_2を求めよ。

(2)　$n\geqq2$に対して，S_nをS_{n-1}で表せ。

(3)　S_nを求めよ。

(4)　$n\geqq2$に対して，a_nを求めよ。　[2000]

14　$a_1=1$，$a_n\neq0$，$a_n={S_n}^2-{S_{n-1}}^2$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$で与えられる数列$\{a_n\}$がある。ただし，S_nは$\{a_n\}$の初項から第n項までの和である。

(1)　a_2を求めよ。

(2)　S_nを求めよ。

(3)　a_nを求めよ。　[1999]

15　座標平面において，2 点 P，Q をそれぞれ直線 $x=-1$，$x=2$ 上の点とし，直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき，2 点 P，Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。　[1998]

■ 確率

1　コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A，B，C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1)　箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2)　A, B いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。　[2019]

2　箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す。この操作を繰り返し，記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1)　確率 $P(4)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(6)$ を求めよ。

(3)　確率 $P(11)$ を求めよ。　[2018]

3　1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・ 1 回目は，出た目が得点になる。

・ 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。

・ 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1)　総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。　[2017]

4　1 個のさいころを 2 回投げ，最初に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　実数解は存在すれば正であることを示せ。

(2)　実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。

(3)　実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。　[2016]

5　さいころを 5 回振るとき，初めの 4 回においては 6 の目が偶数回出て，しかも最後の 2 回においては 6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めよ。ただし，6 の目が一度も出ない場合も 6 の目が出る回数を偶数回とみなす。　[2015]

6　A, B ふたりは，それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負からなる次のゲームをする。

・初めに A, B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる。

・A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して 1 回の勝負を行う。すなわち，大きい番号のついたカードを取り出した方がこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする。

・袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。

・A, B どちらかが 2 回勝てば，カードの取り出しはやめて，2 回勝った方をゲームの勝者とする。4 枚すべてのカードを取り出してもいずれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(2)　A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(3)　A がゲームの勝者になる確率を求めよ。　[2014]

7　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

8　さいころを 7 回投げ, k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。　[2012]

9　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1, 2 回目に出る目を a_2, 3 回目に出る目を a_3 とし, 整数 n を, $n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$ と定める。

(1)　$n=0$ である確率を求めよ。

(2)　$|n|=30$ である確率を求めよ。　[2011]

10　1 辺の長さが 2 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を考える。さいころを 3 回投げ, 出た目を順に i, j, k とするとき, $\triangle A_iA_jA_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし, i, j, k の中に互いに等しい数があるときは, 得点は 0 であるとする。

(1)　得点が 0 となる確率を求めよ。

(2)　得点が 27 となる確率を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。　[2010]

11　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し, カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が 6 の倍数になる確率を求めよ。　[2009]

12　n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ, 1 回目に出た目の数を x, 2 回目に出た目の数を y とする。$|x-n|+|y-n| \leqq n$ となる確率を P_n で表すとき, 次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

(2)　P_n が最大となる n を求め, そのときの P_n を求めよ。

(3)　$P_n=\dfrac{1}{36}$ となる n を求めよ。　[2008]

13　1 から 5 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 2 枚ずつ，合わせて 10 枚ある。この中からカードを 2 枚同時に取り出し，その数字を X，Y とする。ただし，$X \leqq Y$ とする。

(1)　$X=Y$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=3$ となる確率を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。　[2005]

14　n 枚のカードの表に 1，2，…，n の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして，よくまぜ，重ねて，上から順に 1，2，…，n の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

(1)　p_3 を求めよ。

(2)　$n=4$ のとき，表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。

(3)　p_5 を求めよ。　[2003]

15　次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする。

(1)　赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(2)　赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(3)　赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。　[2002]

■ 論証

1　n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

分野別問題と解答例

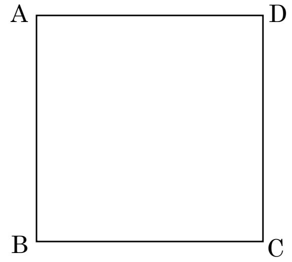
関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

右図のような 1 辺の長さ10cmの正方形 ABCD がある。点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒1cm 進む。また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒2cm 進む。点 R が A に達するまでに△PQR の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。　[2014]



解答例

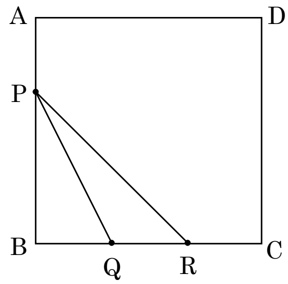
点 R が C, D, A に達するのは，それぞれ 5 秒後，10 秒後，15 秒後である。そして，出発してから t 秒後の△PQR の面積を S とし，$S=35$ となる t を求める。

(i)　$0\leqq t\leqq 5$ のとき

$PB=10-t$，$QR=2t-t=t$ より，

$$S=\frac{1}{2}t(10-t)=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$$

$S\leqq\dfrac{25}{2}$ より，$S=35$ となる場合はない。

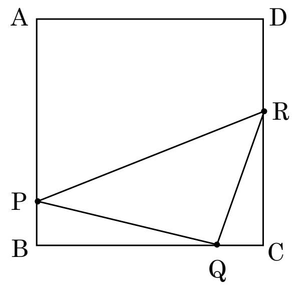


(ii)　$5\leqq t\leqq 10$ のとき

$PB=QC=10-t$，$BQ=t$，$CR=2t-10$ より，

$$S=\frac{1}{2}(2t-10+10-t)\cdot 10-\frac{1}{2}(10-t)(t+2t-10)$$
$$=\frac{3}{2}t^2-15t+50$$

ここで，$S=35$ とすると，$t^2-10t+10=0$ となり，$5\leqq t\leqq 10$ から，$t=5+\sqrt{15}$

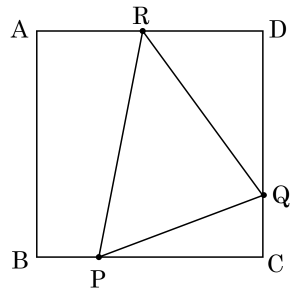


(iii) $10\leqq t\leqq 15$ のとき

$PC=QD=20-t$，$CQ=t-10$，$DR=2t-20$ より，

$$S=\frac{1}{2}(2t-20+20-t)\cdot 10$$
$$-\frac{1}{2}(20-t)(t-10+2t-20)$$
$$=\frac{3}{2}t^2-40t+300$$

ここで，$S=35$ とすると，$3t^2-80t+530=0$ となり，$10\leqq t\leqq 15$ から，$t=\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$



(i)～(iii)より，$t=5+\sqrt{15}$，$\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$ である。

コメント

高校入試に出題されるようなタイプです。場合分けも難しくありません。

問　題

a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

解答例

関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ に対して,

$$f(x)=x^2-a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2a\quad(x\geqq 2)$$

$$f(x)=x^2+a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-2a\quad(x\leqq 2)$$

(i)　$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(a\geqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=2a$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり，$2a>-2a$ から，$f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(ii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ $(a\leqq -4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ となり，$f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ である。

(iii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(-4\leqq a\leqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり，

$$4+\frac{a^2}{4}-(-2a)=\frac{1}{4}(a+4)^2\geqq 0,\quad 4+\frac{a^2}{4}\geqq -2a$$

よって，$f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(i)～(iii)より，$f(x)$ の最小値は，$a\leqq -4$ のとき $4+\dfrac{a^2}{4}$，$a\geqq -4$ のとき $-2a$ である。

コメント

放物線の軸 $x=\dfrac{a}{2}$ が $x\geqq 2$ の範囲に入っているかどうか，また $x=-\dfrac{a}{2}$ が $x\leqq 2$ の範囲に入っているかどうかで場合分けをしています。なお，$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ のときは, a の値が存在しないので，記述を省きました。

問　題

a を実数とする。x についての方程式$|x^2+ax+2a|=a+1$が異なる実数解をちょうど2個もつようなaの値の範囲を求めよ。 [2007]

解答例

$|x^2+ax+2a|=a+1$に対して，$\left|\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+2a\right|=a+1$………(＊)

(i)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a\geqq 0$ $(0\leqq a\leqq 8)$のとき

(＊)が異なる実数解を2個もつ条件は，$a+1>-\dfrac{a^2}{4}+2a$

$a^2-4a+4>0$，$(a-2)^2>0$，$a\neq 2$

よって，$0\leqq a<2$，$2<a\leqq 8$

(ii)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a<0$ $(a<0,\ 8<a)$のとき

(＊)が異なる実数解を2個もつ条件は，$a+1=0$または$a+1>-\left(-\dfrac{a^2}{4}+2a\right)$

(ii-i)　$a+1=0$のとき　$a=-1$

(ii-ii)　$a+1>-\left(-\dfrac{a^2}{4}+2a\right)$のとき

$a^2-12a-4<0$，$6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$

よって，$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<0$，$8<a<6+2\sqrt{10}$

(i)(ii)より, (＊)が異なる実数解を2個もつ条件は,

$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<2$，$2<a<6+2\sqrt{10}$

コメント

グラフをイメージしながら解いています。x 軸に関して折り返しのない場合が(i), ある場合が(ii)です。

問　題

実数aに対し, 2 次関数$f(x)=x^2-ax-a^2+5a$を考える。

(1)　方程式$f(x)=0$が異なる 2 つの実数解をもつようなaの範囲を求めよ。

(2)　2 次関数$y=f(x)$のグラフが 2 点$(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$を通り, $1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$となるような$a$の範囲を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=0$すなわち$x^2-ax-a^2+5a=0$が異なる 2 つの実数解をもつ条件は,

$$D=a^2-4(-a^2+5a)>0$$

まとめると, $5a(a-4)>0$より, $a<0$, $4<a$

(2)　$y=f(x)$のグラフとx軸の交点$x=\alpha$, βが$1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$を満たす条件は, まず(1)から, $a<0$, $4<a$ ………①

また, $y=f(x)$のグラフの軸が$x=\dfrac{a}{2}$なので, $1<\dfrac{a}{2}<3$より,

$$2<a<6\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに, $f(1)=1-a-a^2+5a\geqq 0$より, $a^2-4a-1\leqq 0$

$$2-\sqrt{5}\leqq a\leqq 2+\sqrt{5}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$f(3)=9-3a-a^2+5a\geqq 0$より, $a^2-2a-9\leqq 0$

$$1-\sqrt{10}\leqq a\leqq 1+\sqrt{10}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

①～④の共通範囲をとって, $4<a\leqq 1+\sqrt{10}$

コメント

解の配置の基本問題です。共通範囲をとるところでミスをしないようにしましょう。

問　題

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について以下の問いに答えよ。ただし, $a<0$ とする。

(1) $f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき, $a=b$ になることを示せ。

(2) (1)の関数が, さらに次の(i), (ii)を満たすとき, $f(x)$ を求めよ。

(i) 曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=x$ と接する。

(ii) 曲線 $y=f(x)$ と 3 直線 $y=0$, $x=-1$, $x=0$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{5}{6}$ である。 [2000]

解答例

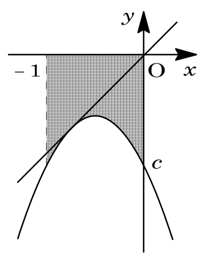
(1) 剰余の定理を利用して, $f(0)=f(-1)$, $c=a-b+c$ から, $a=b$

(2) (1)より, $f(x)=ax^2+ax+c$

ここで, 条件(i)より, $y=f(x)$ と $y=x$ と接するので,

$$ax^2+ax+c=x\,,\ \ ax^2+(a-1)x+c=0$$

$$D=(a-1)^2-4ac=0\ \cdots\cdots\cdots①$$



条件(ii)より, $-\displaystyle\int_{-1}^{0}(ax^2+ax+c)\,dx=\frac{5}{6}$

$$-\Big[\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+cx\Big]_{-1}^{0}=\frac{5}{6}$$

$$-\frac{a}{3}+\frac{a}{2}-c=\frac{5}{6},\ \ c=\frac{a}{6}-\frac{5}{6}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $(a-1)^2-4a\Big(\dfrac{a}{6}-\dfrac{5}{6}\Big)=0$, $a^2+4a+3=0$ から, $a=-1,\ -3$

$a=-1$ のとき, ②より $c=-1$ となり, $f(x)=-x^2-x-1$

$a=-3$ のとき, ②より $c=-\dfrac{4}{3}$ となり, $f(x)=-3x^2-3x-\dfrac{4}{3}$

コメント

(1)の条件から, $y=f(x)$ の軸が $x=-\dfrac{1}{2}$ であることを見抜けば, 場合分けなしに $f(x)$ が決定できます。

問　題

a は 0 でない実数とし，$f(x)=ax^3+3ax^2+3x+3$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフ C と導関数 $y=f'(x)$ のグラフ C' が相異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲にあるとき C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

[2019]

解答例

(1)　$f(x)=ax^3+3ax^2+3x+3\ (a\neq 0)$ に対して，$f'(x)=3ax^2+6ax+3$

ここで，$C: y=f(x)$ と $C': y=f'(x)$ を連立して，

$$ax^3+3ax^2+3x+3=3ax^2+6ax+3\,,\ \ ax^3-3(2a-1)x=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$x\{ax^2-3(2a-1)\}=0$ より，$x=0$ または $ax^2-3(2a-1)=0\ \cdots\cdots\cdots②$

C と C' が相異なる 3 点で交わる条件は，②が $x\neq 0$ の 2 実数解をもつことより，

$$\frac{3(2a-1)}{a}>0\,,\ \ a(2a-1)>0$$

よって，求める a の範囲は，$a<0$，$\dfrac{1}{2}<a$ である。

(2)　$a<0$，$\dfrac{1}{2}<a$ のとき，$\alpha=\sqrt{\dfrac{3(2a-1)}{a}}$ とおくと，①の解は $x=0,\ \pm\alpha$ となる。

ここで，$F(x)=\displaystyle\int\{f(x)-f'(x)\}dx$ とおくと，

$$F(x)=\int\{ax^3-3(2a-1)x\}dx=\frac{a}{4}x^4-\frac{3}{2}(2a-1)x+C\ \ (C\text{ は定数})$$

$C=0$ のとき，$F(0)=0$ となり，

$$F(\alpha)=F(-\alpha)=\frac{a}{4}\cdot\frac{9(2a-1)^2}{a^2}-\frac{3}{2}(2a-1)\cdot\frac{3(2a-1)}{a}=-\frac{9(2a-1)^2}{4a}$$

さて，C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S は，

(i)　$a<0$ のとき

$-\alpha\leqq x\leqq 0$ において $f'(x)\geqq f(x)$，$0\leqq x\leqq\alpha$ において $f'(x)\leqq f(x)$ より，

$$S=\int_{-\alpha}^{0}\{f'(x)-f(x)\}dx+\int_{0}^{\alpha}\{f(x)-f'(x)\}dx$$

$$=-F(0)+F(-\alpha)+F(\alpha)-F(0)=2F(\alpha)=-\frac{9(2a-1)^2}{2a}$$

(ii)　$a>\dfrac{1}{2}$ のとき

$-\alpha\leqq x\leqq 0$ において $f'(x)\leqq f(x)$，$0\leqq x\leqq\alpha$ において $f'(x)\geqq f(x)$ より，

$$S=\int_{-\alpha}^{0}\{f(x)-f'(x)\}dx+\int_{0}^{\alpha}\{f'(x)-f(x)\}dx$$

$$=F(0)-F(-\alpha)-F(\alpha)+F(0)=-2F(\alpha)=\frac{9(2a-1)^2}{2a}$$

コメント

定積分と面積についての問題です。(2)では，計算がやや繁雑なので，原始関数を予め求めておきました。

問　題

a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

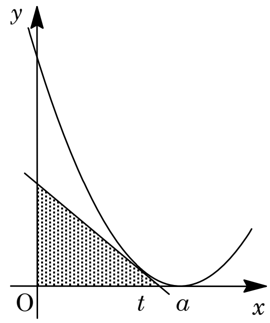
(3)　s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。　[2018]

解答例

(1)　曲線 $y=(x-a)^2$ に対し $y'=2(x-a)$ となり，$0 \leqq t < a$ において，点 $(t,\ (t-a)^2)$ における接線の方程式は，

$$y-(t-a)^2 = 2(t-a)(x-t)$$

$$y = 2(t-a)x - t^2 + a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$



すると，①と y 軸との交点は $(0,\ -t^2+a^2)$ となり，また x 軸との交点は $\left(\dfrac{t+a}{2},\ 0\right)$ である。

そこで，接線①と x 軸および y 軸で囲まれた領域 $D(t)$ の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}(-t^2+a^2) = \frac{1}{4}(-t^3 - at^2 + a^2 t + a^3) \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　②より，$S'(t) = \dfrac{1}{4}(-3t^2 - 2at + a^2) = -\dfrac{1}{4}(3t-a)(t+a)$

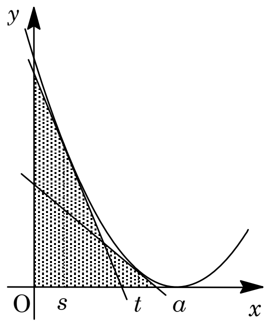
すると，$0 \leqq t < a$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$S(t)$ は $t=\dfrac{a}{3}$ のとき最大となり，最大値は，

t	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$S\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{3} + a^3\right) = \frac{8}{27}a^3$$

(3)　$0 \leqq s \leqq t < a$ のとき，点 $(s,\ (s-a)^2)$ における接線の方程式は，①より，

$$y = 2(s-a)x - s^2 + a^2 \cdots\cdots\cdots ③$$



さて，2 つの領域 $D(t)$ と $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の面積を $T(t,\ s)$ とすると，

(i)　$0 \leqq s = t < a$ のとき

$T(t,\ s) = S(t)$ より，(2)から最大値は $\dfrac{8}{27}a^3$ である。

(ii)　$0 \leqq s < t < a$ のとき

①③を連立すると，$2(t-a)x-t^2+a^2=2(s-a)x-s^2+a^2$ から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2,\ \ x=\frac{t+s}{2}$$

よって，$T(t,\ s)=S(t)+\frac{1}{2}\{(-s^2+a^2)-(-t^2+a^2)\}\cdot\frac{t+s}{2}$ となり，

$$T(t,\ s)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)+\frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3)\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，t を $t=t_0$ $(0<t_0<a)$ で固定し，s を $0 \leqq s < t_0$ で動かすと考え，

$$T(t_0,\ s)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}({t_0}^3+{t_0}^2s-t_0s^2-s^3)$$

$$T'(t_0,\ s)=-\frac{1}{4}(3s^2+2t_0s-{t_0}^2)$$

$$=-\frac{1}{4}(3s-t_0)(s+t_0)$$

s	0	$\cdots$	$\frac{t_0}{3}$	$\cdots$	t_0
$T'(t_0,\ s)$		$+$	0	$-$	
$T(t_0,\ s)$		↗		↘	

すると，$0 \leqq s < t_0$ における $T(t_0,\ s)$ の増減は右表のようになる。これより，$T(t_0,\ s)$ は $s=\frac{t_0}{3}$ のとき最大となり，最大値は，

$$T\left(t_0,\ \frac{t_0}{3}\right)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}\left({t_0}^3+\frac{{t_0}^3}{3}-\frac{{t_0}^3}{9}-\frac{{t_0}^3}{27}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3\right)$$

さらに，この状態を保ったまま t_0 を $0<t_0<a$ で動かすと考え，変数を t_0 から t に戻し $U(t)=T\left(t,\ \frac{t}{3}\right)$ とおき直すと，$U(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}t^3-at^2+a^2t+a^3\right)$ から，

$$U'(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{9}t^2-2at+a^2\right)$$

$$=\frac{1}{36}(5t-3a)(t-3a)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$U'(t)$		$+$	0	$-$	
$U(t)$		↗		↘	

すると，$0<t<a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

これより，$U(t)$ は $t=\frac{3}{5}a$ のとき最大となり，最大値は，

$$U\left(\frac{3}{5}a\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}\cdot\frac{27}{125}a^3-\frac{9}{25}a^3+\frac{3}{5}a^3+a^3\right)=\frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より，$T(t,\ s)$ は，$t=\frac{3}{5}a$，$s=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}a=\frac{a}{5}$ のとき，最大値 $\frac{8}{25}a^3$ をとる。

コメント

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は 2 変数関数が対象の設問で，1 文字を固定して処理しています。ただ，重複をいとわず丁寧に記述したところ，かなりの分量になってしまいました。

問　題

座標平面上の点$(a,\ b)$から曲線$y=x^3-3x$に引ける接線の本数をnとする。

(1)　$n=3$を満たすような点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。

(2)　$-3a<b$かつ$n\leqq 2$を満たすように点$(a,\ b)$が動くとき，$b-3a$の最小値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　曲線$y=x^3-3x$に対して，$y'=3x^2-3$となり，点$(t,\ t^3-3t)$における接線は，

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)\text{，}\ y=(3t^2-3)x-2t^3$$

この接線が点$(a,\ b)$を通ることより，$b=(3t^2-3)a-2t^3$となり，

$$-2t^3+3at^2-3a=b\ \cdots\cdots\cdots①$$

接線が 3 本引ける条件は，複接線が存在しないことより，接点が 3 個すなわち①の異なる実数解が 3 個ある条件に等しい。

そこで，$f(t)=-2t^3+3at^2-3a$とおくと，①は$f(t)=b$となり，

$$f'(t)=-6t^2+6at=-6t(t-a)$$

(i)　$a>0$のとき

$f(t)$の増減は右表のようになり，①が 3 個の実数解をもつ条件は，

$$-3a<b<a^3-3a$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	$-3a$	↗	a^3-3a	↘

(ii)　$a=0$のとき

$f'(t)=-6t^2\leqq 0$となり，$f(t)$は単調減少するので，①が 3 個の異なる実数解をもつことはない。

(iii)　$a<0$のとき

$f(t)$の増減は右表のようになり，①が 3 個の実数解をもつ条件は，

$$a^3-3a<b<-3a$$

t	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	a^3-3a	↗	$-3a$	↘

(i)～(iii)より，点$(a,\ b)$の範囲を図示する。

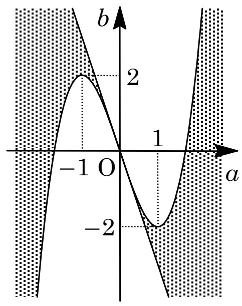
そこで，境界線$b=a^3-3a$に対して，

$$b'=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$$

すると，bの値の変化は右表のようになる。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
b'	$+$	0	$-$	0	$+$
b	↗	2	↘	-2	↗

以上より，点$(a,\ b)$の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



(2)　まず，$-3a<b$のもとで，接線の本数が 2 本以下，すなわち①の異なる実数解が 2 個以下となる$(a,\ b)$の条件を求める。

(i)　$a>0$のとき

$-3a<b$なので，①の実数解が 2 個以下となる条件は，

$$b \geqq a^3-3a$$

(ii)　$a=0$のとき

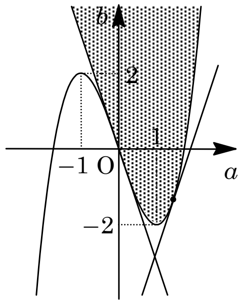
つねに①の実数解は 1 個となるので，$-3a<b$から，

$$b>0$$

(iii)　$a<0$のとき

$-3a<b$のとき，①の実数解は 1 個なので，

$$b>-3a$$



(i)〜(iii)より，点$(a,\ b)$の範囲は右図の網点部となる。

ただし，境界線は$a>0$の部分のみを含む。

さて，このとき$b-3a=k$ $(b=3a+k)$が最小となるのは，右図から，曲線$b=a^3-3a$が傾き 3 の接線をもつときなので，$b'=3a^2-3=3$から，$a=\sqrt{2}$となる。

すると，$b=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}$から，接点の座標は$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$となる。

以上より，$b-3a=k$の最小値は，$-\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$である。

コメント

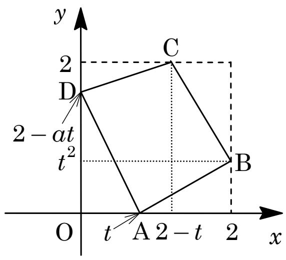
超頻出の 3 次曲線の接線の本数の問題に，領域と最大・最小の問題が付け加えられています。なお，(1)の結果を補集合として利用すると，(2)の記述量はやや減少します。

問　題

a は $0<a<2$ を満たす定数とする。$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$ を考える。このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。 [2016]

解答例

定数 $a(0<a<2)$，および実数 $t(0 \leqq t \leqq 1)$ に対して，4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$ を頂点とする四角形 ABCD の面積を $S(t)$ とおく。



$$S(t)=2^2-\frac{1}{2}(2-t)t^2-\frac{1}{2}(2-2+t)(2-t^2)$$
$$-\frac{1}{2}(2-t)(2-2+at)-\frac{1}{2}t(2-at)$$
$$=4-\frac{1}{2}\{-2t^3-2(a-1)t^2+2(a+2)t\}$$
$$=t^3+(a-1)t^2-(a+2)t+4$$

すると，$S'(t)=3t^2+2(a-1)t-(a+2)$ となり，$S'(t)=0$ を満たす正の解は，

$S'(0)=-(a+2)<0$ から $t=\dfrac{-a+1+\sqrt{a^2+a+7}}{3}$ であり，これを $t=\alpha$ とおく。

(i)　$0<\alpha<1$ のとき

このとき $S'(1)=a-1>0$ より，$1<a<2$ となる。そして，$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\alpha$ で最小となる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(ii)　$\alpha \geqq 1$ のとき

このとき $S'(1)=a-1 \leqq 0$ より，$0<a \leqq 1$ となる。そして，$0 \leqq t \leqq 1$ において $S'(t) \leqq 0$ から $S(t)$ は単調に減少し，$t=1$ で最小となる。

(i)(ii)より，$S(t)$ が最小となるような t の値は，

$$t=\frac{-a+1+\sqrt{a^2+a+7}}{3}\ (1<a<2),\ t=1\ (0<a \leqq 1)$$

コメント

微分と最大・最小に関する標準的な問題です。なお，$S(t)$ の立式については，位置関係に場合分けが生じないので，普通に正方形から 4 つの直角三角形を除きました。

問　題

m を実数とする。x に関する方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ の実数解の個数を求めよ。

[2015]

解答例

方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ ……①に対して，$x^3-3x=|x-m|$ から，

$$y=x^3-3x\ \cdots\cdots②,\quad y=|x-m|\ \cdots\cdots③$$

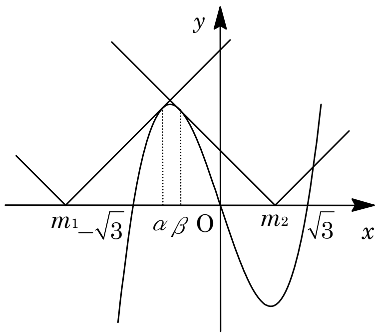
すると，①の異なる実数解の個数は，②と③のグラフの共有点の個数に一致する。

さて，②より，$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

これより，②の増減は右表のようになる。

また，③は $y\geqq 0$ で，点 $(m,\ 0)$ を頂点とする折れ線で，その傾きは 1 と -1 である。



ここで，点 $(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha)$ において，②のグラフの接線の傾きが 1 になるとすると，$\alpha<0$ として，

$$3\alpha^2-3=1,\quad \alpha^2=\frac{4}{3},\quad \alpha=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

すると，$\alpha^3-3\alpha=\dfrac{10}{3\sqrt{3}}=\dfrac{10}{9}\sqrt{3}$ となり，

$$\alpha^3-3\alpha=\alpha-m_1$$

よって，$m_1=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-\dfrac{10}{9}\sqrt{3}=-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$

また，点 $(\beta,\ \beta^3-3\beta)$ において，②のグラフの接線の傾きが -1 になるとすると，$\beta<0$ として，

$$3\beta^2-3=-1,\quad \beta^2=\frac{2}{3},\quad \beta=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すると，$\beta^3-3\beta=\dfrac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{7}{9}\sqrt{6}$ となり，$\beta^3-3\beta=-\beta+m_2$

よって，$m_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{7}{9}\sqrt{6}=\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$

以上より，②と③のグラフの共有点の個数，すなわち方程式①の異なる実数解の個数は，右上図から，

$m<-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$，$\dfrac{4}{9}\sqrt{6}<m$ のとき 1 個，$m=-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$，$\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$ のとき 2 個

$-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}<m<\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$ のとき 3 個

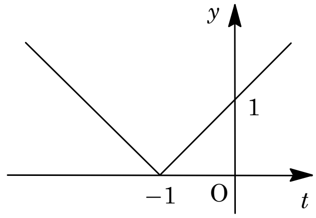
コメント

初めからグラフを用いて処理をしましたが，詰めの作業がやや煩雑です。まず，方程式①を同値変形した方がよかったかもしれません。

問　題

実数 a に対し，関数 $f(x)=\int_x^{x+1}|t+1|dt+a$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2014]

解答例



$f(x)=\int_x^{x+1}|t+1|dt+a$ に対し，右図は $y=|t+1|$ のグラフであり，さらに $g(x)=\int_x^{x+1}|t+1|dt$ とおくと，

(i)　$x<-2$ のとき

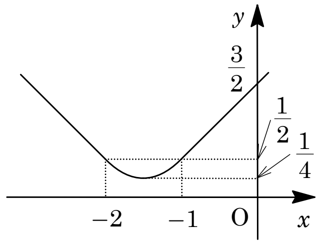
$$g(x)=\frac{1}{2}(-x-1-x-2)\cdot 1=-x-\frac{3}{2}$$

(ii)　$-2\leqq x<-1$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}(-x-1)^2+\frac{1}{2}(x+2)^2=x^2+3x+\frac{5}{2}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

(iii)　$x\geqq -1$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+1+x+2)\cdot 1=x+\frac{3}{2}$$



(i)〜(iii)より，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。

すると，曲線 $C: y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつ条件は，$f(x)=0$ すなわち $g(x)=-a$ が異なる 2 実数解をもつことに対応し，$-a>\frac{1}{4}$ すなわち $a<-\frac{1}{4}$ である。曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積 S は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=-a$ で囲まれる部分の面積に等しいので，

(a)　$\frac{1}{4}<-a\leqq\frac{1}{2}\ \left(-\frac{1}{2}\leqq a<-\frac{1}{4}\right)$ のとき

$y=g(x)\ (-2\leqq x\leqq -1)$ と $y=-a$ を連立すると，$x^2+3x+\frac{5}{2}+a=0$ となり，

この解 $x=\frac{-3\pm\sqrt{-4a-1}}{2}$ を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$S=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{-4a-1}\right)^3$$

(b)　$-a>\frac{1}{2}\ \left(a<-\frac{1}{2}\right)$ のとき

$y=g(x)\ (x<-2)$ と $y=-a$ を連立すると $x=a-\frac{3}{2}$，$y=g(x)\ (x>-1)$ と $y=-a$ を連立すると $x=-a-\frac{3}{2}$ となり，

$$S=\frac{1}{6}\{-1-(-2)\}^3+\frac{1}{2}\Big[\{-1-(-2)\}+\Big(-a-\frac{3}{2}\Big)-\Big(a-\frac{3}{2}\Big)\Big]\Big(-a-\frac{1}{2}\Big)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}(-2a+1)(-2a-1)=a^2-\frac{1}{12}$$

コメント

絶対値つきの関数の定積分は，グラフを利用して，台形や三角形の面積を対応させて計算しています。

問　題

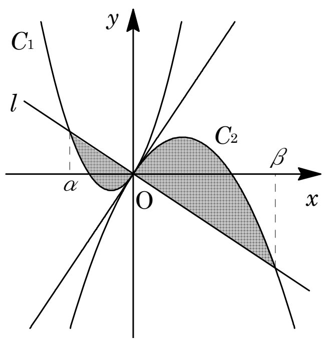
a と k を正の実数とする。$y=\frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a と k を用いて表せ。

(2) $k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

[2009]

解答例



(1) 原点を通る放物線 C_1 の方程式を，$y=\frac{a}{2}x^2+px$ とおくと，$y'=ax+p$ となる。

条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$p=k$ となり，

$$y=\frac{a}{2}x^2+kx \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

また，同様にして，原点を通る放物線 C_2 の方程式を，$y=-\frac{2}{a}x^2+qx$ とおくと，$y'=-\frac{4}{a}x+q$ となる。

条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$q=k$ となり，

$$y=-\frac{2}{a}x^2+kx \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，直線 $y=kx$ に垂直な直線 l は，$y=-\frac{1}{k}x$ ……③である。

①③の交点 $x=\alpha\neq 0$ は，$\frac{a}{2}x^2+kx=-\frac{1}{k}x$ から，$\alpha=-\frac{2}{a}\left(k+\frac{1}{k}\right)$ となり，

$$S_1=\int_\alpha^0\left(-\frac{1}{k}x-\frac{a}{2}x^2-kx\right)dx=-\frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-\alpha)^3=\frac{2}{3a^2}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

②③の交点 $x=\beta\neq 0$ は，$-\frac{2}{a}x^2+kx=-\frac{1}{k}x$ から，$\beta=\frac{a}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)$ となり，

$$S_2=\int_0^\beta\left(-\frac{2}{a}x^2+kx+\frac{1}{k}x\right)dx=-\frac{2}{a}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\beta^3=\frac{a^2}{24}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

よって，$S=S_1+S_2=\frac{2}{3a^2}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3+\frac{a^2}{24}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3=\frac{1}{24}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$

(2) $k=\sqrt{2}-1$ のとき，$k+\frac{1}{k}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$ より，

$$S=\frac{1}{24}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)(2\sqrt{2})^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)$$

ここで，$a^2>0$ より，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$a^2+\frac{16}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{a^2}}=8$$

なお，等号は，$a^2=\dfrac{16}{a^2}$ すなわち $a=2$ のときに成立し，このとき S は最小値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ をとる。

コメント

放物線とその法線で囲まれる部分の面積について，その最小値を求めるという頻出問題です。

問　題

2 次関数 $f(x)$ は，$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+(x^2+x)\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $xf(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+(x^2+x)\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$ に対し，$\int_0^1 f(t)\,dt=a$ とおくと，

$$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+a(x^2+x)+\int_0^x f(t)\,dt\cdots\cdots\cdots①$$

①は $x=0$ のとき成立し，そこで両辺を微分すると，

$$f(x)+xf'(x)=2x^2+a(2x+1)+f(x),\quad xf'(x)=2x^2+a(2x+1)\cdots\cdots\cdots②$$

$f(x)$ は 2 次関数なので，②の両辺の定数項を比較すると，$a=0$ である。

②より，$xf'(x)=2x^2$，$f'(x)=2x$ となり, C を定数として,

$$f(x)=x^2+C$$

すると，$\int_0^1 f(t)\,dt=0$ より，$\frac{1}{3}+C=0$ となり，$C=-\frac{1}{3}$

以上より，$f(x)=x^2-\frac{1}{3}$ である。

(2)　$g(x)=xf(x)=x^3-\frac{1}{3}x$ とおくと，

$$g'(x)=3x^2-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x+1)(3x-1)$$

$x\geqq 0$ における $g(x)$ の増減は右表のようになり，最小値は，$g\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{27}$ である。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$		－	0	＋
$g(x)$		↘		↗

コメント

計算量を減少させるために，数Ⅱの範囲外ですが，積の微分法を利用して解いています。

問　題

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　a, b の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。　　[2006]

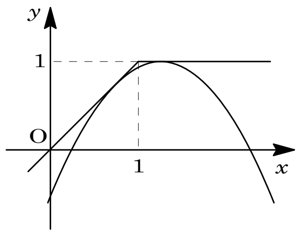
解答例

(1)　$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接することより，$p>1$ として，

$$g(x)=-(x-p)^2+1$$

すると，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=x$ との共有点は，

$$x=-(x-p)^2+1,\ x^2-(2p-1)x+p^2-1=0$$



$x<1$ において接することより，

$$D=(2p-1)^2-4(p^2-1)=0\cdots\cdots\cdots①,\ x=\frac{2p-1}{2}<1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$1-4p+4=0$，$p=\dfrac{5}{4}$

この値は $p>1$ を満たし，しかも②は $x=\dfrac{3}{4}<1$ となり，成立しているので，

$$g(x)=-\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+1=-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}$$

よって，$a=\dfrac{5}{2}$，$b=-\dfrac{9}{16}$

(2)　$x<1$ における接点は②より $x=\dfrac{3}{4}$，$x>1$ における接点は $x=p=\dfrac{5}{4}$ から，

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left\{x-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left\{1-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2dx=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^3\right]_{\frac{3}{4}}^{1}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^3\right]_{1}^{\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{96}$$

コメント

微積分の基本問題です。$y=f(x)$ のグラフが複雑ではないので，直感に依存した解となっています。

問　題

a は実数とする。2 つの曲線 $y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4$ と $y = ax^2 - 2a^2x - 3a$ は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。　[2005]

解答例

$y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4$ ……①，$y = ax^2 - 2a^2x - 3a$ ……②に対して，

①より $y' = 3x^2 + 4ax - 3a^2$，②より $y' = 2ax - 2a^2$

ここで，$x = t$ において，①と②が共通の接線をもつとき，

$$t^3 + 2at^2 - 3a^2t - 4 = at^2 - 2a^2t - 3a \quad \cdots\cdots\cdots③$$

$$3t^2 + 4at - 3a^2 = 2at - 2a^2 \quad \cdots\cdots\cdots④$$

③より，$t^3 + at^2 - a^2t + 3a - 4 = 0$ ………③′

④より，$3t^2 + 2at - a^2 = 0$，$(3t - a)(t + a) = 0$ となり，$t = \dfrac{a}{3}$，$-a$

(i)　$t = \dfrac{a}{3}$ のとき

③′ より，$\dfrac{a^3}{27} + \dfrac{a^3}{9} - \dfrac{a^3}{3} + 3a - 4 = 0$，$5a^3 - 81a + 108 = 0$

$$(a - 3)(5a^2 + 15a - 36) = 0$$

よって，$a = 3,\ \dfrac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$

(ii)　$t = -a$ のとき

③′ より，$-a^3 + a^3 + a^3 + 3a - 4 = 0$，$a^3 + 3a - 4 = 0$

$$(a - 1)(a^2 + a + 4) = 0$$

a は実数より，$a = 1$

(i)(ii)より，$a = 1,\ 3,\ \dfrac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$

コメント

微分法の基本問題です。(i)は係数の大きい 3 次方程式が出現し，計算ミスを疑ってしまいました。

問　題

3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) b, c を a を用いて表せ。

(2) $f(x)-g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。 [2004]

解答例

(1) $f(x)=x^3$ より $f'(x)=3x^2$ となり，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ である。

また，$g(x)=ax^2+bx+c$ より，$g'(x)=2ax+b$ となる。

条件より，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ かつ $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ となるので，

$$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{8},\quad a+b=\frac{3}{4}$$

よって，$b=\frac{3}{4}-a$，$c=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-a\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと, (1)より，$h(x)=x^3-ax^2-\left(\frac{3}{4}-a\right)x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$

$$h'(x)=3x^2-2ax-\left(\frac{3}{4}-a\right)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-4a+3)$$

$h'(x)=0$ の解は，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$ となり，

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad h\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{27}a^3+\frac{2}{3}a^2-a+\frac{1}{2}$$

また，$h(0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$，$h(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}a$ から，$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最小値を m とおくと，

(i) $\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}<0$ $\left(a<\frac{3}{4}\right)$ のとき

右表より，$m=h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(ii) $0\leqq\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\leqq a<\frac{3}{2}\right)$ のとき

(ii-i) $\frac{1}{4}-\frac{a}{4}>0$ $(a<1)$ のとき

右表より，$m=h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

(ii-ii) $\frac{1}{4}-\frac{a}{4}\leqq 0$ $(a\geqq 1)$ のとき

右表より，$m=h(0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(iii) $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2} < 1 \left(\dfrac{3}{2} \leqq a < \dfrac{9}{4}\right)$のとき

$h\left(\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2}\right)$と$h(0)$の大小関係を調べるために，差をとり，

$$d(a) = h\left(\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2}\right) - h(0)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

すると，$d(a) = -\dfrac{4}{27}a^3 + \dfrac{2}{3}a^2 - \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{4}$となり，

$$d'(a) = -\dfrac{4}{9}a^2 + \dfrac{4}{3}a - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{36}(4a-9)(4a-3)$$

このとき，$\dfrac{3}{2} \leqq a < \dfrac{9}{4}$において，$d'(a) > 0$より，$d(a) \geqq d\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{8} > 0$

よって，$h\left(\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2}\right) > h(0)$となり，$m = h(0) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$である。

(iv) $\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2} \geqq 1 \left(a \geqq \dfrac{9}{4}\right)$のとき

$h(1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}a > \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a = h(0)$より，

$$m = h(0) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

(i)～(iv)より，$a < 1$のとき$m = 0$，$a \geqq 1$のとき$m = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$である。

コメント

とにかく朴訥に場合分けをし，それぞれの場合について$h(x)$の増減を調べました。難問ではないものの，かなりの時間を要します。

問　題

実数 t に対して，$f(t)$ を $f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|\,dx$ と定める。$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2002]

解答例

$0\leqq t\leqq 1$ において，$x^2-tx=x(x-t)$ より，

$$f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|\,dx=\int_0^t |x^2-tx|\,dx+\int_t^1 |x^2-tx|\,dx$$

$$=\int_0^t -(x^2-tx)\,dx+\int_t^1 (x^2-tx)\,dx=-\Big[\frac{x^3}{3}-t\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_0^t+\Big[\frac{x^3}{3}-t\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_t^1$$

$$=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^3}{2}+\frac{1}{3}(1-t^3)-\frac{t}{2}(1-t^2)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}$$

$$f'(t)=t^2-\frac{1}{2}=\Big(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

$f(t)$ の値の増減は右表のようになるので，最大値は $f(0)=\frac{1}{3}$，最小値は $f\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$ となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

コメント

$0\leqq t\leqq 1$ という条件があるために，場合分けは必要ありません。微積分の基本問題です。

問　題

実数 a に対して，$f(x)=ax^2-2ax+a^2+1$ とおく。

(1)　定積分 $I(a)=\int_1^2 f(x)dx$ を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が条件 $f(1)\leqq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲を動くとき，$I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$I(a)=\int_1^2 (ax^2-2ax+a^2+1)\,dx=\Big[\dfrac{a}{3}x^3-ax^2+(a^2+1)x\Big]_1^2$

$$=\frac{7a}{3}-3a+a^2+1=a^2-\frac{2}{3}a+1$$

(2)　$f(1)=a-2a+a^2+1=a^2-a+1$ なので，$f(1)\leqq 1$ より，$a^2-a+1\leqq 1$

$$a^2-a\leqq 0,\ \ 0\leqq a\leqq 1$$

(3)　(1)より，$I(a)=\Big(a-\dfrac{1}{3}\Big)^2+\dfrac{8}{9}$

すると，(2)より $0\leqq a\leqq 1$ なので，$I(a)$ の最大値は $I(1)=\dfrac{4}{3}$ であり，最小値は $I\Big(\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{8}{9}$ である。

コメント

計算がすべてという超基本レベルの問題です。

問　題

a, b を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，a, b の値を求めよ。　[2001]

解答例

$f(x)=x^3+ax^2+2bx$ より，$f'(x)=3x^2+2ax+2b$

3 次関数 $f(x)$ が $0<x<2$ の範囲に極大値と極小値をもつ条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が $0<x<2$ の範囲に異なる 2 実数解をもつ条件に一致する。

まず，$f'(x)=0$ の判別式 $D>0$ より，$a^2-6b>0$，$b<\dfrac{1}{6}a^2$ ………①

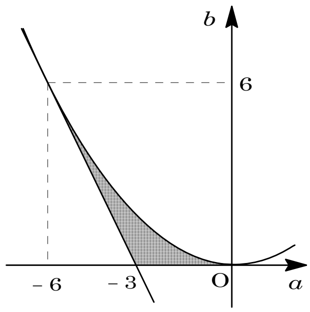
$y=f'(x)$ のグラフの軸が $x=-\dfrac{a}{3}$ より，

$$0<-\frac{a}{3}<2,\ -6<a<0 \text{ ………②}$$

また，$f'(0)=2b>0$ より，$b>0$………③

$f'(2)=12+4a+2b>0$ より，$b>-2a-6$ ………④

①～④を満たす領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



条件より，a, b は整数なので，この領域内の格子点が求める a, b の値となる。

よって，$(a,\ b)=(-3,\ 1)$ である。

コメント

①から④までの不等式は，簡単に求められます。しかし，この不等式を a, b 平面上に図示して，領域内の格子点をさがす過程には時間がかかります。上の解ではその記述を省略しましたが。

問　題

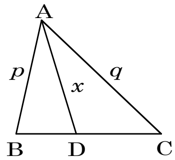
三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D があり，$\angle BAD = \angle CAD = 30°$ である。$AB = p$，$AC = q$ とおく。

(1) AD の長さを p, q で表せ。

(2) $p + q = 1$ を満たすとき，$\triangle ABD$ の面積と $\triangle ACD$ の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $AD = x$ とすると，$\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ となるので，



$$\frac{1}{2}px\sin 30° + \frac{1}{2}qx\sin 30° = \frac{1}{2}pq\sin 60°$$

$$px + qx = \sqrt{3}pq\,,\quad x = \frac{\sqrt{3}pq}{p+q}$$

(2) $S = \left|\triangle ABD - \triangle ACD\right|$ とおくと，(1)より，

$$S = \left|\frac{1}{2}px\sin 30° - \frac{1}{2}qx\sin 30°\right| = \frac{1}{4}\left|p - q\right|x = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\left|pq(p-q)\right|}{p+q}$$

条件より，$q = 1 - p$ なので，$S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|p(1-p)(2p-1)\right|$

ここで，$0 < p < 1$ で $f(p) = p(1-p)(2p-1) = -2p^3 + 3p^2 - p$ とすると，

$$f'(p) = -6p^2 + 6p - 1$$

$f'(p) = 0$ の解は，$p = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

この解を $p = \alpha$，β $(\alpha < \beta)$ とおくと，

p	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$f'(p)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(p)$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

$0 < \alpha < \beta < 1$ となり，$f(p)$ の増減は上表のようになる。

さて，$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ であり，$f(1-p) = (1-p)p(1-2p) = -f(p)$ より，$y = f(p)$ のグラフは点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に関して対称となり，$-f(\alpha) = f(\beta)$ である。

すると，$S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(p)\right|$ のグラフは，直線 $p = \dfrac{1}{2}$ に関して対称となるので，S の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(\alpha)\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(\beta)\right|$ である。

したがって，S が最大となる p は $p = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$ となる。

コメント

S の最大値は求める必要がないので，対称性を利用した解を書きました。もし最大値を求めるのであれば，$f(p)$ を $f'(p)$ で割った余りを利用します。

問　題

与えられた実数 a, b のうち，大きくない方を $\min\{a,\ b\}$ で表すことにする。関数 $f(x)=x^3-7x$ に対して $g(x)=\min\{f(x+1),\ f(x-1)\}$ とおく。

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$y=g(x)$ が最大となる x の値，および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[1998]

解答例

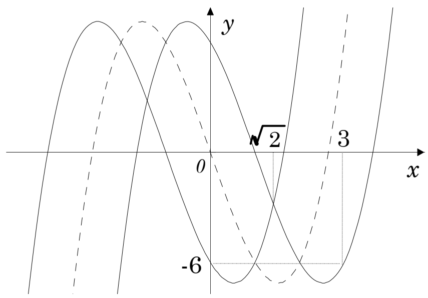
(1)　$f(x)=x^3-7x$，$f'(x)=3x^2-7=3\left(x-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)$

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$y=f(x+1)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，$y=f(x-1)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

ここで，$f(x+1)=f(x-1)$ とすると，$(x+1)^3-7(x+1)=(x-1)^3-7(x-1)$

$$x^2-2=0,\ x=\sqrt{2}\ \ (x\geqq 0)$$



したがって，

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ のとき，$g(x)=f(x+1)$

$\sqrt{2}\leqq x\leqq 3$ のとき，$g(x)=f(x-1)$

また，$0<\dfrac{\sqrt{21}}{3}-1<\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{21}}{3}+1<3$ より，$0\leqq x\leqq 3$ における $y=g(x)$ が最小となる x は，$x=\dfrac{\sqrt{21}}{3}\pm 1$ となる。

最大となる x は，$x=0$，$\sqrt{2}$，3 のいずれかである。

ここで，$g(0)=f(1)=-6$，$g(\sqrt{2})=f(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}-7)=-2\sqrt{2}$，$g(3)=f(2)=-6$ となることより，最大となる x は，$x=\sqrt{2}$ である。

(2)　$f(x)=f(x+1)$ とすると，$x^3-7x=(x+1)^3-7(x+1)$ より，

$$3x^2+3x-6=0,\ x=1\ \ (x\geqq 0)$$

また，$f(x)=f(x-1)$ とすると，$x^3-7x=(x-1)^3-7(x-1)$ より，

$$-3x^2+3x+6=0,\ x=2\ \ (x\geqq 0)$$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分は，$1\leqq x\leqq 2$ の範囲だけなので，

$$S_1=\int_1^{\sqrt{2}}\{f(x+1)-f(x)\}dx=\int_1^{\sqrt{2}}(3x^2+3x-6)dx=-4\sqrt{2}+\frac{13}{2}$$

$$S_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\{f(x-1)-f(x)\}dx=\int_{\sqrt{2}}^{2}(-3x^2+3x+6)dx=-4\sqrt{2}+7$$

求める面積は，$S_1+S_2=-8\sqrt{2}+\dfrac{27}{2}$

コメント

$y=f(x)$のグラフを丁寧に書いて，x軸方向に$+1$，および-1だけ平行移動すれば，結論は見えてきます。後はそれを計算で補うだけです。

問　題

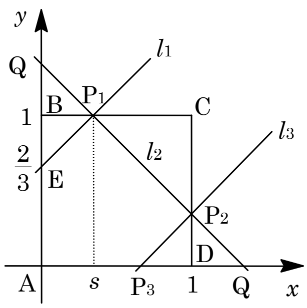
座標平面上に 5 点 $A(0,\ 0)$，$B(0,\ 1)$，$C(1,\ 1)$，$D(1,\ 0)$，$E\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$がある。点 E と点 $P_1(s,\ 1)$ $(0<s<1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし，l_2 と直線 $x=1$ の交点を P_2 とする。さらに，直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を P_3 とする。

(1)　直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2)　線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3)　$EP_1+P_1P_2+P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ。　[2016]

解答例



(1)　点 $E\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ と点 $P_1(s,\ 1)$ $(0<s<1)$ を通る直線 l_1 を，$y=1$ に関して対称移動した直線を l_2 とする。

すると，l_2 は P_1 と E を $y=1$ に関して対称移動した点 $Q_1\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ を通ることより，その傾きが $-\dfrac{1}{3s}$ となり，

$$l_2 : y=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$$

l_2 が $D(1,\ 0)$ を通るとき，$0=-\dfrac{1}{3s}+\dfrac{4}{3}$ から，$s=\dfrac{1}{4}$

(2)　l_2 と x 軸との交点 Q_2 は，$0=-\dfrac{1}{3s}x+\dfrac{4}{3}$ から $x=4s$ となり，$Q_2(4s,\ 0)$ から，

$$DP_3=DQ_2=4s-1\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(3)　P_3 は線分 AD 上にあることから，①より $0\leqq 4s-1\leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{4}\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}$ ………②

このとき，P_2 は線分 CD 上にある。そこで，$EP_1=Q_1P_1$，$P_2P_3=P_2Q_2$ から，$F=EP_1+P_1P_2+P_2P_3$ とおくと，

$$F=Q_1P_1+P_1P_2+P_2Q_2=Q_1Q_2=\sqrt{(4s)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{9s^2+1}$$

すると，②より $\dfrac{25}{16}\leqq 9s^2+1\leqq\dfrac{13}{4}$ となるので，F の最大値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{13}$，最小値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{3}$ である。

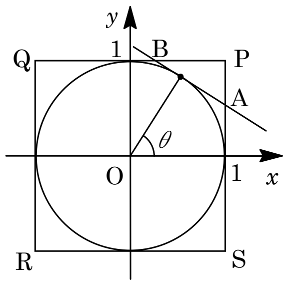
コメント

折れ線の長さの和に関する問題です。線対称移動がポイントですが，その誘導は問題文中に示されています。

問　題

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にするθを求めよ。 [2014]

解答例



原点を中心とする半径 1 の円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線$x=1$と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$ とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より$1<t\leqq\sqrt{2}$となり，(*)から，

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，Sが最大となるのは，$t=\sqrt{2}$ すなわち$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のときである。

コメント

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

問　題

a, b を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1) b を a を用いて表せ。

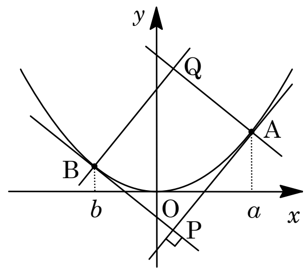
(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

解答例

(1) $y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。



ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\right)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\right)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお，等号は，$a=\dfrac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より，S は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

コメント

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが，長方形の性質を利用して，計算量を減らしています。

問　題

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$y=x^2$ に対して，$y'=2x$ となり，点 $(a,\ a^2)$ における接線 l_a の方程式は，

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots ①$$

直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5\ \cdots\cdots ②$ の表す領域に含まれることより，①を②に代入して，

$$2ax-a^2>-x^2+2x-5,\ \ x^2+2(a-1)x-a^2+5>0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

③が任意の x に対して成立することより，

$$D/4=(a-1)^2-(-a^2+5)=2(a^2-a-2)<0$$

すると，$(a-2)(a+1)<0$ より，$-1<a<2$ である。

(2)　直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ は，①より，$a^2-2xa+y=0$ が $-1<a<2$ に実数解をもたない条件として求めることができる。

ここで，$f(a)=a^2-2xa+y=(a-x)^2-x^2+y$ とおくと，

(i)　$x\leqq -1$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\geqq 0$ より，$y\geqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より，$y\leqq 4x-4$

(ii)　$-1<x<2$ のとき

(a)　$f(x)=-x^2+y>0$ より，$y>x^2$

(b)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$，$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より，

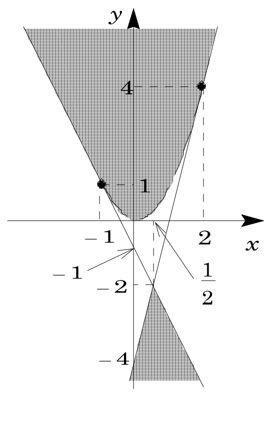
$y\leqq -2x-1$，$y\leqq 4x-4$

(iii)　$x\geqq 2$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$ より，$y\leqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\geqq 0$ より，$y\geqq 4x-4$

(i)～(iii)より，点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D は右図の網点部となる。ただし，破線の境界線のみ領域に含まない。



(3)　不等式$(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$を変形すると，

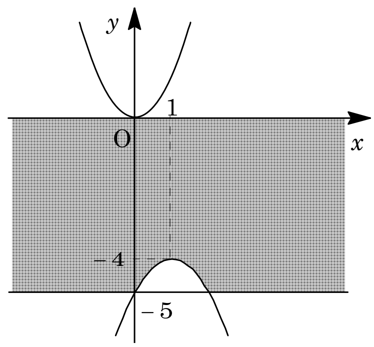
$x^2>-x^2+2x-5$より，

$$-x^2+2x-5\leqq y\leqq x^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$y(y+5)\leqq 0$より，

$$-5\leqq y\leqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

よって，連立不等式④⑤の表す領域Eは右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



さて，直線$y=-2x-1$と放物線$y=-x^2+2x-5$を連立すると，

$$-2x-1=-x^2+2x-5,\ \ x^2-4x+4=0$$

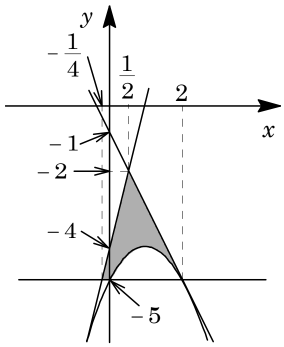
重解$x=2$をもつことより，$x=2$で接する。

また，直線$y=4x-4$と放物線$y=-x^2+2x-5$を連立すると，

$$4x-4=-x^2+2x-5,\ \ x^2+2x+1=0$$

重解$x=-1$をもつことより，$x=-1$で接する。

これより，領域DとEの共通部分を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



そこで，この共通部分の面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{4}\right)(-2+5)-\int_0^2(-x^2+2x-5+5)\,dx$$

$$=\frac{27}{8}-\int_0^2 -x(x-2)\,dx=\frac{27}{8}-\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{49}{24}$$

コメント

計算量の多い問題で，時間はかなり必要です。(2)はオーソドックスに解きましたが，図形的に解くのが出題者の意図かもしれません。

問　題

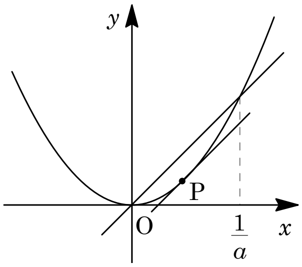
a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える。C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　d, s, t をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

[2011]

解答例



(1)　直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ ……①の交点は，

$$ax^2=x\,,\ \ x=0,\ \frac{1}{a}$$

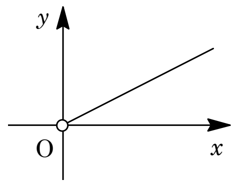
さて，$0<x<\dfrac{1}{a}$ において，C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ と l との距離が最大になるのは，P における C の接線が l と平行になるときである。

すなわち, C の接線の傾きが 1 であるときより，①から，$2ax=1$，$x=\dfrac{1}{2a}$ となり，

$$s=\frac{1}{2a}\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ t=a\left(\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\cdots③$$

このとき, P と l との距離 d は，$d=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{8a}$

(2)　②③より，$t=\dfrac{1}{2}s$ となり, $a>0$ から $s>0$ である。



よって，点 P の軌跡は，半直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ $(x>0)$ である。また，これを図示すると，右図のようになる。

コメント

(1)は図形的に解きましたが，問題文から推測すると，出題者の意向に沿った解法とは言えないでしょう。

問　題

放物線$C: y=x^2$上の 2 点 A, B は, 直線 AB と C で囲まれる図形の面積が$\frac{1}{6}$になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき, 直線 AB が通りうる点の範囲を求め, 図示せよ。 [2003]

解答例

$A(\alpha,\ \alpha^2)$, $B(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$とおくと, 直線 AB の方程式は,

$$y-\alpha^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha),\ \ y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\cdots\cdots\cdots①$$

条件より, $\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx=\frac{1}{6}$, $-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}$

$$-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6},\ \ \beta-\alpha=1,\ \ \beta=\alpha+1\cdots\cdots\cdots②$$

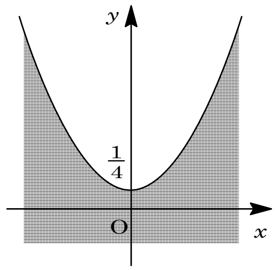
②を①に代入して, $y=(2\alpha+1)x-\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots\cdots③$

αが任意の実数値をとるとき, 直線③が通過する点$(x,\ y)$は, ③をαについての 2 次方程式としてみたとき, 実数解をもつ$(x,\ y)$の条件として求められる。

③から, $y=2\alpha x+x-\alpha^2-\alpha$, $\alpha^2+(1-2x)\alpha-x+y=0$

$$D=(1-2x)^2-4(-x+y)=1+4x^2-4y\geqq 0$$

よって, $y\leqq x^2+\frac{1}{4}$より, 直線 AB が通りうる点の領域は右図の網点部である。ただし, 境界は領域に含む。



コメント

直線の通過領域を求める頻出問題です。なお, ③で x の値を固定して y の値の範囲を考えるときは, ③を $y=-\alpha^2+(2x-1)\alpha+x=-\left(\alpha-\frac{2x-1}{2}\right)^2+x^2+\frac{1}{4}$ と変形をして, $y\leqq x^2+\frac{1}{4}$を導きます。

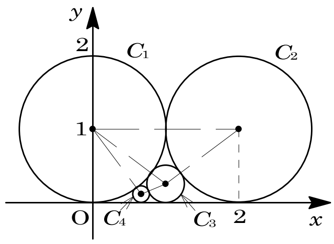
問　題

座標平面上に，中心がそれぞれ点$(0,\ 1)$，点$(2,\ 1)$で，同じ半径 1 をもつ 2 つの円C_1とC_2がある。次の問いに答えよ。

(1)　2 円C_1，C_2と x 軸に接するように円C_3を描く。このとき円C_3の中心の座標を求めよ。

(2)　さらに，2 円C_1，C_3とx軸に接するように円C_2とは異なる円C_4を描く。このとき円C_4の中心の座標を求めよ。　[2002]

解答例



(1)　円C_3の半径を r とすると，2 円C_1，C_2は同じ半径なので，C_3の中心の座標は$(1,\ r)$となる。

円C_1とC_3が接することより，

$$(1+r)^2=(1-r)^2+1^2,\ 2r=-2r+1$$

よって，$r=\dfrac{1}{4}$より，円C_3の中心の座標は$\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$である。

(2)　円C_4の中心の座標を$(s,\ t)$とおくと，半径はtとなる。

円C_1とC_4が接することより，

$$(1+t)^2=(1-t)^2+s^2,\ 4t=s^2\cdots\cdots\cdots①$$

円C_3とC_4が接することより，

$$\left(\frac{1}{4}+t\right)^2=\left(\frac{1}{4}-t\right)^2+(1-s)^2,\ t=1-2s+s^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$4-8s+4s^2=s^2$，$3s^2-8s+4=0$，$(3s-2)(s-2)=0$

$0<s<1$ より $s=\dfrac{2}{3}$となり，①より$t=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$

よって，円C_4の中心の座標は$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$である。

コメント

頻出問題です。本年度は，名大・文系で同様な問題が出ています。

問　題

直線 $y=-x$ と放物線 $y=x^2+2x$ とで囲まれた図形を D とする。

(1)　D の面積 S_1 を求めよ。

(2)　D を x 軸の正の方向に m だけ平行移動して，不等式 $y \geqq -2x+3$ の表す領域に含まれるように移す。m の最小値 m_1 を求めよ。

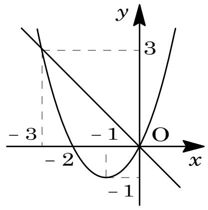
(3)　m_1 を(2)で求めた最小値とする。D を x 軸の正の方向に m_1 だけ平行移動するとき，D が通過する範囲を図示し，その面積 S_2 を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　直線 $y=-x$ ……①，放物線 $y=x^2+2x$ ……②

①②の交点は，$-x=x^2+2x$ より，$x=0,\ -3$

$$S_1=\int_{-3}^{0}(-x-x^2-2x)dx=-\int_{-3}^{0}x(x+3)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 3^3=\frac{9}{2}$$



(2)　②を x 軸方向に m だけ平行移動すると，

$$y=(x-m)^2+2(x-m)=x^2-(2m-2)x+m^2-2m \text{ ………③}$$

③と $y=-2x+3$ ……④が接するとき，

$$x^2-(2m-2)x+m^2-2m=-2x+3$$
$$x^2-(2m-4)x+m^2-2m-3=0 \text{ ………⑤}$$

重解条件より $D/4=(m-2)^2-(m^2-2m-3)=0$ なので，$m=\dfrac{7}{2}$ となる。

⑤の重解は $x=m-2=\dfrac{3}{2}$ となり，またこのとき④より $y=0$ なので，③と④の接点は図形 D の境界線上にある。

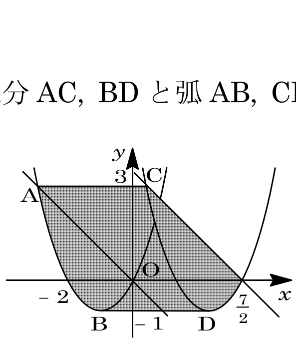
よって，m の最小値 m_1 は，$m_1=\dfrac{7}{2}$ である。

(3)　図形 D が通過する範囲の面積 S_2 は，D の面積 S_1 に線分 AC，BD と弧 AB，CD によって囲まれた図形の面積を加えたものである。

この図形 ABDC の面積は，平行四辺形 ABDC の面積に等しいので，

$$m_1\times\{3-(-1)\}=\frac{7}{2}\cdot 4=14$$

よって，$S_2=S_1+14=\dfrac{37}{2}$



コメント

(3)の通過範囲の面積は，移動距離に注目すると，積分するまでもありません。