２０２０ 入試対策
過去問ライブラリー

千葉大学
医系数学10か年

２０１０－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。 [2014]

2　$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

3　a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

(i)　$p>0,\ q>0$　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

[2010]

■ 図形と計量

1　三角形 ABC は $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{AD}=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle\mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。 [2019]

2 横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。 [2012]

■ ベクトル

1 正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$ を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ とするとき，x, y を α を用いて表せ。

(2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた x, y の和 $x+y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。 [2018]

2 n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$ と線分 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$ との交点 P は線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$ を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle\mathrm{PA}_2\mathrm{A}_3}{\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。 [2017]

3　座標平面上にすべての内角が180°未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は$0\leqq k\leqq 1$を満たす定数とする。0 以上の実数 $s,\ t,\ u$ が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1)　$E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

4　三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

■ 整数と数列

1　$a_1=3$，$a_2=2$ とし，$n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$n\geqq 2$ のとき $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。　[2019]

2　a は実数とする。座標平面上で連立不等式

$$y \geqq x^2,\ y \leqq (2a+3)x - a(a+3)$$

の表す領域を $D(a)$ とおく。いま, x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする。

(1)　n を整数とする。このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　任意の実数 a について，$D(a)$ に含まれる格子点と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ。　[2019]

3　初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1)　数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{d_l\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{d_l\}$ の初項から第 l 項までの和 $S_l = \sum_{i=1}^{l} d_i$ を求めよ。　[2018]

4　p を 2 でない素数とし，自然数 m，n は，$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$ を満たすとする。

(1)　互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ で，$m+n\sqrt{p} = \dfrac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$ を満たすものが存在することを示せ。

(2)　x は(1)の条件を満たす自然数とする。x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることが，同値であることを示せ。　[2016]

5　b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n = \alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。これを証明せよ。　[2015]

6　自然数 n に対して，和 $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ を考える。

(1)　各自然数 n に対して $2^k \leqq n$ を満たす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2 つの奇数 a_n，b_n が存在して，$S_n = \dfrac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$ と表されることを示せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3)　さらに，自然数 m, $n\,(m<n)$ に対して，和 $S_{m,\,n} = \frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n}$ を考える。$S_{m,\,n}$ はどんな m, $n\,(m<n)$ に対しても整数にならないことを示せ。　[2014]

7　整数 p, $q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1)　n, k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。　[2013]

8　m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。　[2013]

9　すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p+qn+rn^2,\quad b_n = p+qn+rn^2+sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2)　数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。　[2012]

10　l, n, d を自然数とする。このとき自然数の積 $(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2l+1)nd = \sum_{i=1}^{m} \{a+(i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ。　[2012]

11 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2 \leqq y \leqq ax+b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　a, b がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，a, b の値によらず一定であることを示せ。 [2010]

12 以下の問いに答えよ。

(1)　$3^n=k^3+1$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

(2)　$3^n=k^2-40$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。 [2010]

■ 確率

1 数直線上に動点 P があり，はじめに原点にあるとする。$k=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，k 回目にさいころを振ったとき，1，2 の目が出たら P は正の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，3，4 の目が出たら負の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，5，6 の目が出たら移動しないとする。n 回さいころを振った後の点 P の座標を X_n とする。

(1)　$0<X_n$ となる確率を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{2}<X_n$ となる確率を求めよ。

(3)　l は n 未満の正の整数とする。このとき，$\dfrac{1}{2^l}<X_n$ となる確率を求めよ。 [2019]

2 n を 3 以上の自然数として，n 枚のカード C_1，C_2，$\cdots$，C_{n-1}，C_n がある。初めにこれらのカードを下から C_n，C_{n-1}，$\cdots$，C_2，C_1 の順番に積み上げておく。いちばん上にあるカードが C_1 で，いちばん下が C_n である。積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す。いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか，またはいちばん上に戻す。どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする。$k=1,\ 2,\ \cdots$ について，k 回の試行の後にカード C_1 が上から数えて l 番目にある確率を $P(k,\ l)$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で表し，また k 回の試行の後にカード C_2 が上から数えて l 番目にある確率を $Q(k,\ l)$ で表す。例えば $P(1,\ l)$ は l によらず $\dfrac{1}{n}$ に等しい。以下の問いに答えよ。

(1) $P(2,\ l)$ を求めよ。

(2) $P(k,\ l)$ を求めよ。

(3) $Q(k,\ l)$ を求めよ。 [2018]

3 1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・ 1 回目は，出た目が得点になる。
・ 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。
・ 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。

(3) p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。 [2017]

4 数直線上の点 Q は，はじめは原点 $x=0$ にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が $x=a$ にあるとき，

・ 出た目が 1 ならば $x=a$ にとどまる。
・ 出た目が 2, 3 ならば $x=a+1$ へ動く。
・ 出た目が 4, 5, 6 ならば $x=0$ に戻る（$a=0$ ならば動かない）。

(1) 整数 $a\geqq 0$ に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が $x=a$ にある確率を求めよ。

(2) さいころを n 回投げたとき，Q が $x=0$ にある確率を求めよ。

(3) さいころを n 回投げたとき，Q が $x=1$ にある確率を求めよ。 [2016]

5　コインを n 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

・コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする。

たとえば，コインを 3 回投げて(裏，表，裏)の順に出たときの得点は，$1+1+1=3$ より 3 点となる。また(裏，裏，表)の順に出たときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる。コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とし，このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2)　$n\leqq m\leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。　[2015]

6　袋の中に，赤玉が 3 個，白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回（ただし $0\leqq A\leqq N$）取り出す確率を $p(N,\ A)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　確率 $p(N,\ A)$ を N と A を用いて表せ。

(2)　N が 10 の倍数，すなわち $N=10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n,\ 0)$，$p(10n,\ 1)$，…，$p(10n,\ 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n,\ 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i)　0 以上の整数 a，自然数 b に対して，$\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0!=1$ とする。

(ii)　0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\dfrac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}\leqq 1$ を示す。　[2014]

7　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

8　さいころを n 回$(n\geqq 2)$投げ，k 回目$(1\leqq k\leqq n)$に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。　[2012]

9　$k+1$ 個　$(k\geqq 1)$ の部屋 A_0，A_1，A_2，…，A_k がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回　$(n\geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。[2011]

10　数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，…，$X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，…，$X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

[2010]

■ 論証

1　$f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。実数 a に関する条件(P)を考える。

(P)　正の実数 r を十分小さく選べば，$|x-a|<r$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq f(a)$ が成り立つ。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　実数 a が条件(P)を満たし，かつ，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)=0$ であることを証明せよ。

(2)　関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} |x|-x & (x<1\text{のとき}) \\ |x^2-6x+8| & (x \geqq 1\text{のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき，条件(P)を満たすような実数 a 全体の集合を決定せよ。

(3)　一般に，実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し，次の命題は正しいか。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ。

(命題)　すべての実数 a が条件(P)を満たすならば，$f(x)$ は定数関数である。

[2010]

■ 複素数

1　複素数 $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha=z+z^8$ とおく。$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha)=0$ となるものとする。ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1)　$f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。

(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解を，α の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。

[2018]

2　複素数平面上の点 $z\left(z \neq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1)　点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

[2017]

3　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。　[2016]

4　a，b，c は実数とし，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ とおく。さらに 4 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもち，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たすと仮定する。

(1)　b, c を a を用いて表せ。

(2)　a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　b のとり得る値の範囲を求めよ。　[2011]

■ 曲線

1　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$)を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。　[2015]

2　座標平面上の点$(x,\ y)$が

$$(x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0,\quad x\geqq 0,\quad y\geqq 0$$

で定まる集合上を動くとき，x^2+y^2 の最大値，およびその最大値を与える x, y の値を求めよ。　[2011]

■ 極限

1 数列$\{a_n\}$を次の条件によって定める。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_5を求めよ。

(2) a_{n+1}をa_nの式で表せ。

(3) 無限級数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$が収束することを示し，その和を求めよ。 [2017]

■ 微分法

1 曲線Cは曲線$y=-e^x$を平行移動したものとする。Cと曲線$y=e^{-x}$はx座標がt $(t\geqq 0)$である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。Cとx軸とy軸とで囲まれた部分の面積を$S(t)$とする。

(1) Cの方程式を求めよ。

(2) $S(t)$を求めよ。

(3) $S(t)$が最大となるようなtの値がただ1つ存在することを示せ。

(4) $S(t)$が最大となるようなtの値をαとすると，$\alpha>\log\frac{12}{5}$であり，$S(\alpha)<\frac{95}{144}$となることを示せ。必要ならば$\log\frac{24}{5}<1.57$を用いてもよい。 [2017]

2 曲線$C: y=\sin x$上を点$\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$が動く。正の実数$r$に対して，Pにおける$C$の接線上に$\mathrm{PQ}=r$となるように点Qをとる。ただし，Qの$x$座標は$t$よりも大きいとする。

(1) Qの座標を求めよ。

(2) $t=\frac{\pi}{4}$のときにQのy座標が最大となるようなrの値を求めよ。 [2016]

3 関数$f(x)=\left|x+2\sin(x+a)+b\right|$の$0\leqq x\leqq 2\pi$での最大値と最小値の差は，定数$a, b$によらずつねに$\pi$以上で，かつ$\left(\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)$以下であることを示せ。 [2015]

4 関数 $f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ。

(2) $0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x\geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x\geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。 [2014]

5 関数 $f(x)=x^x\ (x>0)$ と正の実数 a について，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ における $\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。 [2014]

6 次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\sqrt{x^2+y^2}\geqq x+y+a\sqrt{xy}$ が任意の正の実数 x, y に対して成立するような，最大の実数 a の値を求めよ。

(2) 0 以上 1 以下の実数 a, b, c, d に対して

$$abcd\leqq\frac{4}{27}\quad\text{または}\quad(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2)\leqq\frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ。 [2011]

■ 積分法

1 n を正の整数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^{n+2}\theta\,d\theta$ を n の式で表せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^7\theta\,d\theta$ を求めよ。 [2019]

2 (1) 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle f(x)=\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)dt$

(2) (1)で求めた x の関数 $f(x)$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。 [2018]

■ 積分の応用

1 平面上に 2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$，$C_2 : \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計まわりに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計まわりに一定の速さで動く。2 点 P_1，P_2 はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする。P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2015]

2 r を 1 より大きい実数とする。半径 1 の円 C の周上に点 Q をとる。最初に円 C の中心 P は座標平面の $(0,\ 1)$，点 Q は $(0,\ 2)$ にあるものとし，円 C が x 軸に接しながら x 軸の正の方向にすべることなく転がっていく。角 θ ラジアンだけ回転したとき，半直線 PQ 上に $\mathrm{PR} = r$ なる点 R をとる。θ を 0 から 2π まで動かしたときの R の軌跡を考える。

(1) α，β は $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$ を満たし，$\theta = \alpha$ のときの R の座標と $\theta = \beta$ のときの R の座標とが一致するものとする。$t = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ とおくとき，r を t を用いて表せ。

(2) (1)において，θ を α から β まで動かしたときの R の軌跡によって囲まれた図形の面積を S とする。S を t を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \frac{S}{r^2}$ を求めよ。 [2013]

3 xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点 $(1,\ 0)$ に重なるように置く。点 A を y 軸に沿って点 $(0,\ 1)$ まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる。このとき線分 AB が通る領域を D とする。$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して，点 $(x,\ y)$ が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする。

(1) $f(x)$ を x の式で表せ。

(2) 領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ。 [2012]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

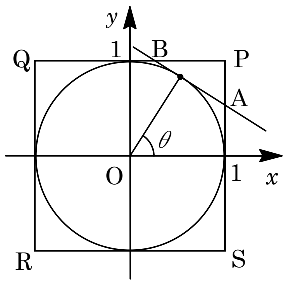
複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。 [2014]

解答例



原点を中心とする半径 1 の円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線 $x=1$ と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$ とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $1<t\leqq\sqrt{2}$ となり，$(*)$から，

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，S が最大となるのは，$t=\sqrt{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

コメント

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

問　題

a, b を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

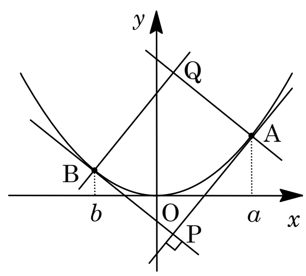
(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

解答例



(1) $y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ \ b=-\frac{4}{a}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\ \cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ \ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\right)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ \ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\right)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと,

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係より, $a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお, 等号は, $a=\frac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より, S は $a=2$ のとき最小値 $\frac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

コメント

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが, 長方形の性質を利用して, 計算量を減らしています。

問　題

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0, 0)，A(1, 0) をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

(i)　$p>0,\ q>0$　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

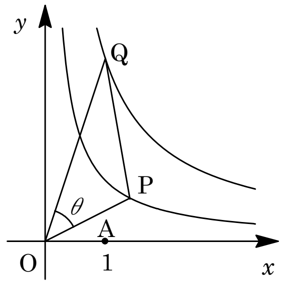
(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

[2010]

解答例

$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，$\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$ となる。



条件より，$\alpha<\beta$ なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\quad ap^2-q^2>0\ \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\ \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とおくと，$\theta=\beta-\alpha$ から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$ すなわち $pq=\sqrt{a}$ のときに成立する。

よって，$\tan\theta$ の最大値は $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$ から，$a=16$ である。

コメント

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立する p，q の値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

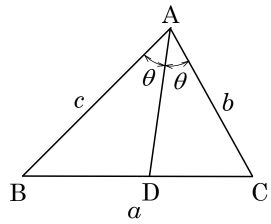
問　題

三角形 ABC は $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{AD}=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle\mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。　[2019]

解答例



(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおく。また，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC の交点を D として，

$$b+c=2a\cdots\cdots\cdots①,\ \ \mathrm{AD}=15\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\triangle\mathrm{ABC}$ は内接円の半径が 4 より，その面積を S とおくと，①より，

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot4=2\cdot3a=6a\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\theta=\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$ から，①②を用いて，

$$S=\frac{1}{2}b\cdot\mathrm{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot\mathrm{AD}\sin\theta=\frac{1}{2}(b+c)\cdot15\sin\theta=15a\sin\theta\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$15a\sin\theta=6a$ となり，$\sin\theta=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

すると，$A=2\theta$ から，$\cos A=\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\dfrac{4}{25}=\dfrac{17}{25}\cdots\cdots\cdots⑤$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{17}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{(25+17)(25-17)}}{25}=\frac{4\sqrt{21}}{25}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2) ⑥より，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{2\sqrt{21}}{25}bc$ となり，③に代入すると，

$$\frac{2\sqrt{21}}{25}bc=6a,\ \ bc=\frac{75}{\sqrt{21}}a=\frac{25\sqrt{21}}{7}a\cdots\cdots\cdots⑦$$

また，$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用して，①⑤を利用すると，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\frac{17}{25}=4a^2-\frac{84}{25}bc\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より，$a^2=4a^2-\dfrac{84}{25}\cdot\dfrac{25\sqrt{21}}{7}a$ となり，$3a^2=12\sqrt{21}a$ から，

$$\mathrm{BC}=a=4\sqrt{21}$$

コメント

三角比の応用問題です。試行錯誤が少し必要ですが，(1)の結論と(2)のプロセスとの繋がりを見つけるのがポイントになっています。

問　題

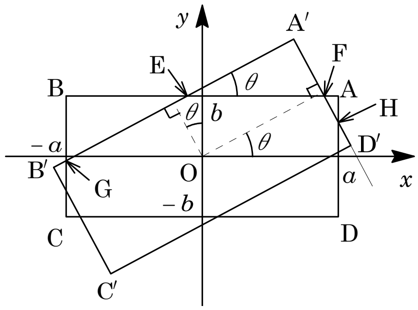
横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。　[2012]

解答例

(i)　$a \neq b$ のとき

まず，$a > b$ としても一般性を失わない。

右図のように，長方形の中心を原点とし，長方形 ABCD の各辺が座標軸に平行になるようにとる。そして，原点中心に θ だけ回転した長方形を $\mathrm{A'B'C'D'}$ とする。



さて，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のときを考える。

そこで，直線 $\mathrm{AB}: y = b$ と直線 $\mathrm{A'B'}: y = x\tan\theta + \dfrac{b}{\cos\theta}$ を連立して，

$$b = x\tan\theta + \frac{b}{\cos\theta},\quad x = \frac{b}{\tan\theta}\Big(1 - \frac{1}{\cos\theta}\Big) = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta}$$

よって，直線 AB と直線 $\mathrm{A'B'}$ の交点 E は，$\mathrm{E}\Big(\dfrac{b(\cos\theta-1)}{\sin\theta},\ b\Big)$ となり，

$$\mathrm{BE} = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta} - (-a) = \frac{a\sin\theta + b\cos\theta - b}{\sin\theta}$$

$$\triangle\mathrm{BEG} = \frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BE}\tan\theta = \frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

次に，直線 $\mathrm{AB}: y = b$ と直線 $\mathrm{A'D'}: y = -\dfrac{1}{\tan\theta}\Big(x - \dfrac{a}{\cos\theta}\Big)$ を連立して，

$$b = -\frac{1}{\tan\theta}\Big(x - \frac{a}{\cos\theta}\Big),\quad x = -b\tan\theta + \frac{a}{\cos\theta} = \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって，直線 AB と直線 $\mathrm{A'D'}$ の交点 F は，$\mathrm{F}\Big(\dfrac{a - b\sin\theta}{\cos\theta},\ b\Big)$ となり，

$$\mathrm{AF} = a - \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta - a}{\cos\theta}$$

$$\triangle\mathrm{AFH} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\tan\theta} = \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

したがって，長方形 ABCD と長方形 $\mathrm{A'B'C'D'}$ の共通部分の面積 $S(\theta)$ は，

$$S(\theta)=\square\mathrm{ABCD}-2(\triangle\mathrm{BEG}+\triangle\mathrm{AFH})$$
$$=4ab-2\left\{\frac{(a\sin\theta+b\cos\theta-b)^2}{2\sin\theta\cos\theta}+\frac{(a\cos\theta+b\sin\theta-a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}\right\}$$
$$=4ab-\frac{2(a^2+b^2-a^2\cos\theta-b^2\cos\theta+2ab\sin\theta\cos\theta-2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=4ab-\frac{2(1-\cos\theta)(a^2+b^2-2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$\theta=0$ のときは，$S(\theta)=4ab$ である。

(ii)　$a=b$ のとき

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき, $(*)$において $a=b$ とおくと,

$$S(\theta)=4a^2-\frac{2(1-\cos\theta)(2a^2-2a^2\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=4a^2\left\{1-\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\right\}$$
$$=\frac{4a^2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{\sin\theta\cos\theta}$$

なお，$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ のときは，$S(\theta)=4a^2$ である。

コメント

最初の設定から始める必要があり，そこで時間を費やしてしまいます。上の解答例では座標系を設定しましたが，計算量はかなりハードなものがあります。なお，回転角 θ は $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ ですが，$\theta=\frac{\pi}{2}$ となるのは正方形のときのみです。

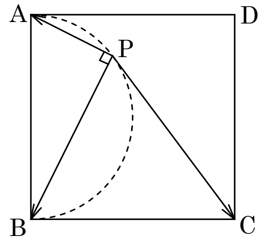
問　題

正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$ を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ とするとき，x, y を α を用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた x，y の和 $x+y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。　[2018]

解答例



(1)　正方形 ABCD の内部の点 P は，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$ を満たすので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdots\cdots\cdots②$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ より $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ となり，①②から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2(y-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2$$

$$1+\alpha^2=x^2+\alpha^2(y-1)^2\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\{x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}\}=0$ となり，①②から，

$$x|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-\alpha^2(y-1)|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0,\ x-\alpha^2(y-1)=0\cdots\cdots\cdots④$$

さらに，直線 PB に関して，点 A と点 C は反対側にあるので，$x<0\cdots\cdots\cdots⑤$

③④より，$1+\alpha^2=\alpha^4(y-1)^2+\alpha^2(y-1)^2$ となり，$\alpha^2(y-1)^2=1$

$$y-1=\pm\frac{1}{\alpha},\ x=\pm\alpha\ （複号同順）$$

すると，⑤より，$x=-\alpha$，$y=1-\dfrac{1}{\alpha}$

(2)　(1)より，$x+y=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}=1-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ となる。

ここで，$\alpha>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geqq 2$ となり，

$$x+y\leqq 1-2=-1$$

等号成立は，$\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$ すなわち $\alpha=1$ のときである。

以上より，$x+y$ の最大値は -1 であり，このとき，②から $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$ となり，点 P は正方形 ABCD の対角線の交点に位置する。

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。座標の設定という方法も考えられます。

問　題

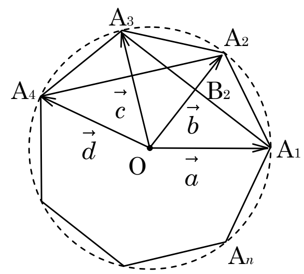
n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

解答例



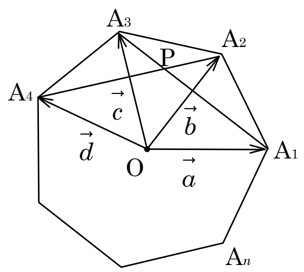
(1) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 OA_2 は線分 A_1A_3 の垂直二等分線であり，OA_2 と A_1A_3 との交点を B_2 とおくと，

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 OA_3 は線分 A_2A_4 の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。



(2) まず，P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　条件から，$\mathrm{A_1P : PA_3} = t : 1-t$ より，$\triangle\mathrm{PA_2A_3} = \dfrac{1-t}{t}\triangle\mathrm{PA_1A_2}$ ………③

また，$\mathrm{A_2P : PA_4} = 1-t : t$ より，$\triangle\mathrm{PA_1A_2} = (1-t)\triangle\mathrm{A_1A_2A_4}$ ………④

③④より，$\triangle\mathrm{PA_2A_3} = \dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle\mathrm{A_1A_2A_4}$ となり，(2)から，

$$\frac{(1-t)^2}{t} - \frac{1}{12} = \frac{12t^2 - 25t + 12}{12t} = \frac{(3t-4)(4t-3)}{12t} > 0$$

よって，$\dfrac{\triangle\mathrm{PA_2A_3}}{\triangle\mathrm{A_1A_2A_4}} = \dfrac{(1-t)^2}{t} > \dfrac{1}{12}$ である。

コメント

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

問　題

座標平面上にすべての内角が180°未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は$0\leqq k\leqq 1$を満たす定数とする。0以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

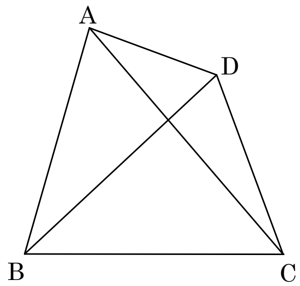
で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2) $E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3) 対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

解答例



(1) 原点 O, 四角形 ABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。定数 k は$0\leqq k\leqq 1$，0 以上の実数 s, t, u は $k+s+t+u=1$ を満たす。

そして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

まず，$k=1$ のとき $s+t+u=0$ から $s=t=u=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$ となる。すなわち，$E(1)$ は点 A である。

次に，$k=0$ のとき $s+t+u=1$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=1-s-t\geqq 0$ となり，

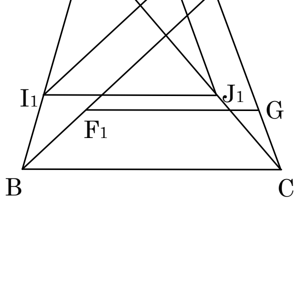
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+t\vec{c}+(1-s-t)\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{d}=s(\vec{b}-\vec{d})+t(\vec{c}-\vec{d})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}\quad (s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

よって，$E(0)$ は△DBC の内部または辺上となる。

(2) $k=\dfrac{1}{3}$ のとき，$s+t+u=\dfrac{2}{3}$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=\dfrac{2}{3}-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+\left(\frac{2}{3}-s-t\right)\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおき，DB, DC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{F_1}$，$\mathrm{G_1}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

これより，点 Q は△$\mathrm{DF_1G_1}$ の内部または辺上にある。

さらに，AD，AB，AC を$2:1$に内分する点を，それぞれH_1，I_1，J_1とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DF}_1}=\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{I}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG}_1}=\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{J}_1}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}_1}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{P}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{I}_1}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{J}_1}\left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

よって，$E\left(\frac{1}{3}\right)$は$\triangle\mathrm{H}_1\mathrm{I}_1\mathrm{J}_1$の内部または辺上となる。

(3)　(2)と同様にして，$s+t+u=1-k$から$s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=1-k-s-t\geqq 0$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+(1-k-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\{k\vec{a}+(1-k)\vec{d}\}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

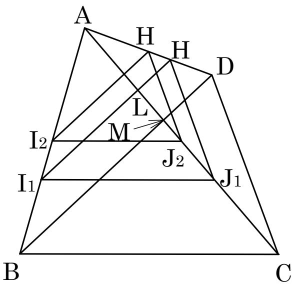
ここで，AD, AB, AC を$1-k:k$に内分する点を，それぞれ H, I, J とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{s}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HI}}+\frac{t}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HJ}}\left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{s}{1-k}+\frac{t}{1-k}\leqq 1\right)$$

よって，$E(k)$は△HIJ の内部または辺上となる。

さて，$k=\frac{1}{2}$のとき，AD，AB，AC の中点を，それぞれH_2，I_2，J_2とおくと，$E\left(\frac{1}{2}\right)$は$\triangle\mathrm{H}_2\mathrm{I}_2\mathrm{J}_2$の内部または辺上となる。

すると，$\frac{1}{3}\leqq k\leqq\frac{1}{2}$において，どの$E(k)$にも属するような点 P が存在する条件は，$E\left(\frac{1}{3}\right)$と$E\left(\frac{1}{2}\right)$に共通部分が存在することである。すなわち，対角線 AC，BD の交点を M，AC と$\mathrm{H}_1\mathrm{I}_1$の交点を L とすると，



$$\mathrm{AJ}_2\geqq\mathrm{AL},\ \frac{1}{2}\mathrm{AC}\geqq\frac{2}{3}\mathrm{AM}$$

よって，求める条件は，$3\mathrm{AC}\geqq 4\mathrm{AM}$である。

コメント

平面ベクトルと領域に関する問題です。解答例が書きにくいタイプで，やや冗長な感じもします。また，丁寧な誘導のため，後半になるに従い省略ぎみに記しましたが，それでもボリュームはかなりのものとなっています。

問　題

三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

解答例

(1)　G は△ABC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ………①

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

ここで，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ……②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$ となり，△ABC の外心 O は M と一致する。

したがって，△ABC は $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形である。

(2)　条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで，②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3k-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，$k\neq\dfrac{1}{3}$ より，3 点 O，A，M は同一直線上にある。一方，O は△ABC の外心なので，辺 BC の垂直二等分線上にあり，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ となるので，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である。

(3)　まず，O と M が一致しないとき，(2)より，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ ………③

ここで，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ または $\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ のとき

O と I が一致し，③より，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(ii)　$\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ のとき

③より，O，I，M は同一直線上にあり，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)(ii)より，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

次に，O と M が一致するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{MI}}\neq\vec{0}$ なので，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

よって，いずれの場合も $\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ であり，これより $\mathrm{IB}=\mathrm{IC}$ となり，

$$\angle\mathrm{IBC}=\angle\mathrm{ICB},\ 2\angle\mathrm{IBC}=2\angle\mathrm{ICB},\ \angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は二等辺三角形である。

コメント

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。

問　題

$a_1=3$，$a_2=2$とし，$n\geqq 2$のとき，$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n-1$として数列$\{a_n\}$を定める。

(1)　$n\geqq 2$のとき$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$が成り立つような自然数$n$を求めよ。　[2019]

解答例

(1)　$a_1=3$，$a_2=2$，$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n-1\ (n\geqq 2)$……①で定められる$\{a_n\}$に対して，

$$a_{n+1}+1=a_n(a_n+1)\quad (n\geqq 2)\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$n\geqq 2$において，

$$a_{n+1}+1=(a_2+1)a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=3\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$$

よって，$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$……③が成り立つ。

(2)　$n\geqq 2$のとき，①より，$a_n{}^2=a_{n+1}-a_n+1$となり，③を利用すると，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1{}^2+\sum_{i=2}^{n}a_i{}^2=3^2+\sum_{i=2}^{n}(a_{i+1}-a_i+1)=9+a_{n+1}-a_2+(n-1)$$

$$=9+(a_1a_2\cdots a_n-1)-2+n-1=a_1a_2\cdots a_n+n+5$$

ここで，条件より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$……④なので，

$$a_1a_2\cdots a_n+n+5=a_1a_2\cdots a_n+100,\quad n+5=100$$

よって，$n=95$となり，この値は$n\geqq 2$を満たしている。

なお，$n=1$のとき，条件④は$3^2=3+100$となり，成立しない。

コメント

少しスパイスの効いた漸化式が対象です。(1)は数学的帰納法でも示せますが，結論をみて②という変形をしています。解法の詳細は「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。

問　題

a は実数とする。座標平面上で連立不等式

$$y \geqq x^2,\ \ y \leqq (2a+3)x-a(a+3)$$

の表す領域を $D(a)$ とおく。いま, x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする。

(1)　n を整数とする。このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ。

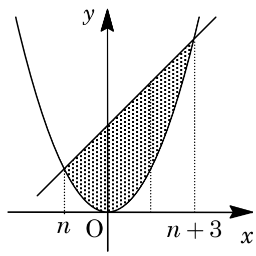
(2)　任意の実数 a について，$D(a)$ に含まれる格子点と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ。　[2019]

解答例

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2$ ……①，$y \leqq (2a+3)x-a(a+3)$ ……②で表される領域 $D(a)$ の境界線の交点は,

$$x^2=(2a+3)x-a(a+3),\ \ x^2-(2a+3)x+a(a+3)=0$$

すると，$(x-a)(x-a-3)=0$ から，$x=a,\ a+3$ となる。



ここで, n を整数として，$a=n$ のとき領域 $D(n)$ に属する格子点は，まず直線 $x=n,\ n+3$ 上で 1 個ずつである。

次に，直線 $x=n+1$ 上では，2 つの境界線との交点がともに格子点となるので，その個数は,

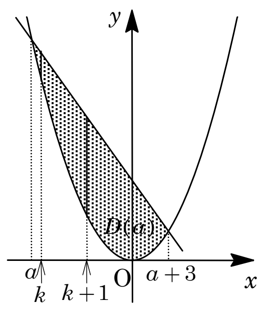
$$(2n+3)(n+1)-n(n+3)-(n+1)^2+1$$
$$=-(n+1-n)(n+1-n-3)+1=2+1=3$$

また，直線 $x=n+2$ 上でも同様で，格子点の個数は,

$$(2n+3)(n+2)-n(n+3)-(n+2)^2+1$$
$$=-(n+2-n)(n+2-n-3)+1=2+1=3$$

よって，$D(n)$ に含まれる格子点の個数は，$1+1+3+3=8$ である。

(2)　まず, a が整数のとき, (1)から $D(a)=D(a+1)=8$ である。



ここで，a が整数でない実数のとき，①と②の境界線の交点は $x=a,\ a+3$ となるので, k を整数として,

$$a<k<a+1<k+1<a+2<k+2<a+3$$

そこで，$L_a(x)$ を次式のように定めると,

$$L_a(x)=(2a+3)x-a(a+3)-x^2$$
$$=-(x-a)(x-a-3)$$

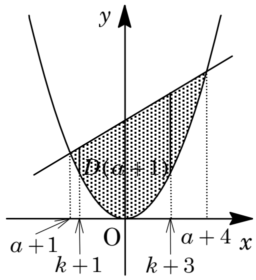
すると，$x=k,\ k+1,\ k+2$ と①の境界線の交点は，いずれも格子点となり，$L_a(k)=-(k-a)(k-a-3)$

$$L_a(k+1)=-(k-a+1)(k-a-2),\ \ L_a(k+2)=-(k-a+2)(k-a-1)$$

次に，②において，a を $a+1$ に変え，$y \leqq \{2(a+1)+3\}x-(a+1)(a+1+3)$

$$y \leqq (2a+5)x-(a+1)(a+4) \cdots\cdots\cdots ③$$

このとき，①と③の境界線の交点は $x=a+1,\ a+4$ となるので，k を整数として，



$$a+1<k+1<a+2<k+2<a+3<k+3<a+4$$

同様に，$L_{a+1}(x)$ を次式のように定めると，

$$L_{a+1}(x)=(2a+5)x-(a+1)(a+4)-x^2$$
$$=-(x-a-1)(x-a-4)$$

すると，$x=k+1,\ k+2,\ k+3$ と①の境界線の交点は，いずれも格子点となり，

$$L_{a+1}(k+1)=-(k+1-a-1)(k+1-a-4)=-(k-a)(k-a-3)$$
$$L_{a+1}(k+2)=-(k+2-a-1)(k+2-a-4)=-(k-a+1)(k-a-2)$$
$$L_{a+1}(k+3)=-(k+3-a-1)(k+3-a-4)=-(k-a+2)(k-a-1)$$

これより，$D(a)$ と $D(a+1)$ に含まれる線分の長さについて，

$$L_a(k)=L_{a+1}(k+1)\ ,\ L_a(k+1)=L_{a+1}(k+2)\ ,\ L_a(k+2)=L_{a+1}(k+3)$$

よって，$D(a)$ に含まれる格子点と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しい。

コメント

格子点の個数についての問題です。(1)で $x=n+1$ や $x=n+2$ 上の格子点を数えるのに，因数分解をした形式の方が数えやすく，この点が(2)の誘導になっていました。もっとも，これ以外は，ほとんど工夫をしていませんが。

問　題

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1=7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{d_l\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{d_l\}$ の初項から第 l 項までの和 $S_l=\displaystyle\sum_{i=1}^{l} d_i$ を求めよ。　[2018]

解答例

(1) 初項 1, 公差 6 である等差数列 $\{a_n\}$ について，$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

また，初項 3, 公差 4 である等差数列 $\{b_m\}$ について，$b_m=3+4(m-1)=4m-1$

ここで，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とすると，$a_n=b_m$ から，

$$6n-5=4m-1,\ 3n-2m=2\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす 1 つの解が $(n,\ m)=(2,\ 2)$ より，$3\times2-2\times2=2\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$3(n-2)-2(m-2)=0$，$3(n-2)=2(m-2)$

ここで，3 と 2 は互いに素なので，j を整数として，$n-2=2j$，$m-2=3j$ から，

$$n=2j+2,\ m=3j+2\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$m\geqq1$，$n\geqq1$ より $j\geqq0$ となるので，$k=j+1\geqq1$ とおくと，③より，

$$n=2(k-1)+2=2k,\ m=3(k-1)+2=3k-1$$

よって，$\{c_k\}$ の一般項は，$c_k=a_{2k}=12k-5$ である。

(2) まず，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。ここで，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$ に注意して，$\{d_l\}$ の d_3 以降を項数 4 のグループに分け，$c_1=7$ から 4 項を第 1 群，$c_2=19$ から 4 項を第 2 群，$c_3=31$ から 4 項を第 3 群，…と呼ぶ。

$$1,\ 3\,\Big|\,\underbrace{\underline{7},\ 11,\ 13,\ 15}_{\text{第 1 群}}\,\Big|\,\underbrace{\underline{19},\ 23,\ 25,\ 27}_{\text{第 2 群}}\,\Big|\,\underbrace{\underline{31},\ 35,\ 37,\ 39}_{\text{第 3 群}}\,\Big|\cdots\cdots$$

さて，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$ から，数列 $\{d_l\}$ の第 k 群には c_k，a_{2k+1}，b_{3k}，b_{3k+1} の 4 項が含まれ，$a_{2k+1}=c_k+6$，$b_{3k}=c_k+4$，$b_{3k+1}=c_k+8$ より，

$$c_k<b_{3k}<a_{2k+1}<b_{3k+1}$$

これより，$d_1=1$，$d_2=3$ で，$l \geqq 3$ の d_l に対して，第 k 群の 4 項は,

$$(d_{4k-1},\ d_{4k},\ d_{4k+1},\ d_{4k+2})=(c_k,\ b_{3k},\ a_{2k+1},\ b_{3k+1})$$

(i)　$l=4k-1$ のとき　$d_l=c_k=12k-5=12\cdot\dfrac{l+1}{4}-5=3l-2$

(ii)　$l=4k$ のとき　$d_l=c_k+4=12k-1=12\cdot\dfrac{l}{4}-1=3l-1$

(iii)　$l=4k+1$ のとき　$d_l=c_k+6=12k+1=12\cdot\dfrac{l-1}{4}+1=3l-2$

(iv)　$l=4k+2$ のとき　$d_l=c_k+8=12k+3=12\cdot\dfrac{l-2}{4}+3=3l-3$

ここで，(iii)に $l=1$ をあてはめると $d_1=3\cdot1-2=1$，(iv)に $l=2$ をあてはめると $d_2=3\cdot2-3=3$ となり，ともに成立している。よって，(i)～(iv)について，l を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると，d_l は,

$$d_l=3l-1\ (l\equiv0),\quad d_l=3l-2\ (l\equiv1,\ 3),\quad d_l=3l-3\ (l\equiv2)$$

(3)　i を自然数として，$s_i=d_{4i-3}+d_{4i-2}+d_{4i-1}+d_{4i}$ とおくと，(2)より,

$$s_i=\{12(i-1)+1\}+\{12(i-1)+3\}+(12i-5)+(12i-1)=48i-26$$

ここで, p を自然数として，$S_l=\displaystyle\sum_{i=1}^{l}d_i$ とすると,

(i)　$l=4p$ のとき

$$S_l=S_{4p}=\sum_{i=1}^{p}s_i=\sum_{i=1}^{p}(48i-26)=\frac{22+(48p-26)}{2}\cdot p=2p(12p-1)$$
$$=2\cdot\frac{l}{4}\left(12\cdot\frac{l}{4}-1\right)=\frac{3}{2}l^2-\frac{1}{2}l$$

(ii)　$l=4p-1$ のとき

$$S_l=S_{4p-1}=S_{4p}-d_{4p}=2p(12p-1)-(12p-1)=(2p-1)(12p-1)$$
$$=\left(2\cdot\frac{l+1}{4}-1\right)\left(12\cdot\frac{l+1}{4}-1\right)=\frac{3}{2}l^2-\frac{1}{2}l-1$$

(iii)　$l=4p-2$ のとき

$$S_l=S_{4p-2}=S_{4p-1}-d_{4p-1}=(2p-1)(12p-1)-(12p-5)$$
$$=2p(12p-13)+6=2\cdot\frac{l+2}{4}\left(12\cdot\frac{l+2}{4}-13\right)+6=\frac{3}{2}l^2-\frac{1}{2}l-1$$

(iv)　$l=4p-3$ のとき

$$S_l=S_{4p-3}=S_{4p-2}-d_{4p-2}=2p(12p-13)+6-\{12(p-1)+3\}$$
$$=2p(12p-19)+15=2\cdot\frac{l+3}{4}\left(12\cdot\frac{l+3}{4}-19\right)+15=\frac{3}{2}l^2-\frac{1}{2}l$$

(i)～(iv)より, l を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると，S_l は,

$$S_l=\frac{3}{2}l^2-\frac{1}{2}l\ (l\equiv0,\ 1),\quad S_l=\frac{3}{2}l^2-\frac{1}{2}l-1\ (l\equiv2,\ 3)$$

コメント

2 つの等差数列の共通数列が題材です。記述量はかなりのものです。なお，(2)では(1)の数列$\{c_k\}$に注目し，d_1とd_2は特別に扱い，d_3以降を群数列の考え方で処理しています。ただ，この扱いは，結果的には不要だったのですが。

問　題

p を 2 でない素数とし，自然数 m，n は，$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$ を満たすとする。

(1) 互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ で，$m+n\sqrt{p}=\dfrac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$ を満たすものが存在することを示せ。

(2) x は(1)の条件を満たす自然数とする。x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることが，同値であることを示せ。 [2016]

解答例

(1) 3 以上の素数 p，自然数 $m,\ n$ に対して，$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$ より，

$$m^2-n^2p=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$m^2=n^2p+1\geqq 1^2\cdot 3+1=4$ から，$m\geqq 2$ となる。

さて，条件より，互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ に対して，

$$m+n\sqrt{p}=\frac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②を同値変形すると，$(m+n\sqrt{p})(x-y\sqrt{p})=x+y\sqrt{p}$ となり，

$$(mx-npy-x)+(nx-my-y)\sqrt{p}=0$$

$m,\ n,\ x,\ y$ は自然数，$\sqrt{p}$ は無理数なので，

$$mx-npy-x=0\ \cdots\cdots\cdots③,\quad nx-my-y=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より，$(m-1)x-npy=0$，$y=\dfrac{m-1}{np}x\ \cdots\cdots\cdots⑤$

④より，$nx-(m+1)y=0$，$y=\dfrac{n}{m+1}x\ \cdots\cdots\cdots⑥$

ここで，①から，$\dfrac{m-1}{np}-\dfrac{n}{m+1}=\dfrac{m^2-1-n^2p}{np(m+1)}=0$ なので，⑤と⑥は一致する。

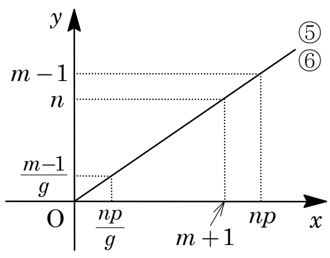
よって，②を満たす互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ は，

(i) $\dfrac{m-1}{np}$ が既約分数のとき　$(x,\ y)=(np,\ m-1)$

(ii) $\dfrac{m-1}{np}$ が既約分数でないとき

np と $m-1$ の最大公約数を g $(g\geqq 2)$ とすると，

$$(x,\ y)=\left(\frac{np}{g},\ \frac{m-1}{g}\right)$$



(i)(ii)より，②を満たす互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ は，

$$(x,\ y)=\left(\frac{np}{g},\ \frac{m-1}{g}\right)\ （g\ は\ np\ と\ m-1\ の最大公約数）$$

(2)　(1)と同様にして，$m+1$ と n の最大公約数を h とすると，②を満たす互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ は,

$$x=\frac{np}{g}=\frac{m+1}{h}\cdots\cdots\cdots⑦,\ \ y=\frac{m-1}{g}=\frac{n}{h}\cdots\cdots\cdots⑧$$

さて，x が p で割り切れないとき，⑦から $xg=np$ なので g は p の倍数となり，k を自然数として $g=kp$ とかける。

すると，⑧から $y=\dfrac{m-1}{kp}$ となり，$m=ykp+1$ すなわち m を p で割った余りは 1 である。

また，逆に m を p で割った余りが 1 であるとき，l を自然数として $m=lp+1$ とかける。すると，⑦から $x=\dfrac{lp+1+1}{h}=\dfrac{lp+2}{h}$ となり,

$$xh=lp+2\cdots\cdots\cdots⑨$$

ここで，x が p で割り切れるとすると，j を自然数として $x=jp$ とかけ，⑨から,

$$jph=lp+2,\ (jh-l)p=2\cdots\cdots\cdots⑩$$

ところが，p は 3 以上の素数より⑩は成立しないので，x は p で割り切れない。

以上より，x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることは同値である。

コメント

約数・倍数の関係が絡んだ整数問題です。①のもとで，②と⑤が同値，または②と⑥が同値ということに着目しつつ，直線⑤，⑥のイメージ図を参照しながら解答例を作成しました。

問　題

b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b, c がともに整数であることである。これを証明せよ。 [2015]

解答例

(1) $b^2+4c>0$ のとき，$x^2-bx-c=0$ の実数解 α，β について，

$$\alpha+\beta=b\,,\ \alpha\beta=-c\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\ \cdots\cdots②$から，①と合わせて，

$$\begin{aligned}ba_{n+1}+ca_n&=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\\&=\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1}-(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\end{aligned}$$

よって，$a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n\ \cdots\cdots③$が成立する。

(2) a_n がすべて整数のとき，①②から，$a_1=\alpha^0+\beta^0=2$，$a_2=\alpha^1+\beta^1=b$

これより b は整数となり，③から，$a_3=ba_2+ca_1$，$a_4=ba_3+ca_2$ となり，

$$2c=a_3-ba_2\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ bc=a_4-ba_3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，①②から $a_3=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=b^2+2c$ となり，③から，

$$a_5=ba_4+ca_3\,,\ (b^2+2c)c=a_5-ba_4\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤⑥より，$2c$，bc，$(b^2+2c)c$ はすべて整数である。

さて，$2c$ が整数より，k を整数として $c=\dfrac{k}{2}$ とおくことができる。

ここで，k が奇数と仮定すると，$bc=\dfrac{bk}{2}$ が整数より b は偶数となる。

ところが，$(b^2+2c)c=\dfrac{(b^2+k)k}{2}$ は，分子 $(b^2+k)k$ が奇数より，整数ではない。

したがって，k は奇数ではなく偶数となり，c も整数である。

逆に，b, c がともに整数であるとき，$a_1=2$，$a_2=b$ はともに整数であり，③から，帰納的に a_n $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ はすべて整数となる。

以上より，a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。

コメント

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2)の設問は，見かけよりは難しめで，詰めに時間がかかりました。

問　題

自然数 n に対して，和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ を考える。

(1)　各自然数 n に対して $2^k\leqq n$ を満たす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2 つの奇数 a_n，b_n が存在して，$S_n=\dfrac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$ と表されることを示せ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3)　さらに，自然数 m, $n(m<n)$ に対して，和 $S_{m,\,n}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ を考える。

$S_{m,\,n}$ はどんな m, $n(m<n)$ に対しても整数にならないことを示せ。　[2014]

解答例

(1)　自然数 n を素因数分解すると，$2^l\times$(3 以上の素数の積)，すなわち $2^l\times$(奇数)という形に書くことができる。ただし，整数 l は，$2^k\leqq n$ を満たす最大の整数 k を $f(n)$ としたとき，$0\leqq l\leqq f(n)$ である。

さて，$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ について，分母を最小公倍数 $2^{f(n)}\times$(奇数)で通分すると，$\dfrac{1}{2^{f(n)}}$ の項の分子は奇数であるが，それ以外の項の分子は $2^{f(n)-l}\times$(奇数)となり，$f(n)<l$ よりすべて偶数となる。

これより，S_n の分子は奇数となり，a_n，b_n を奇数として，$S_n=\dfrac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$ と表すことができる。

(2)　$n\geqq 2$ のとき $f(n)\geqq 1$ より，S_n の分子は奇数，分母は偶数となるので，S_n は整数にならない。

(3)　$m<n$ のとき，$S_{m,\,n}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ に対して，

(i)　$f(m-1)<f(n)$ のとき

$$S_{m,\,n}=S_n-S_{m-1}=\frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}-\frac{a_{m-1}}{2^{f(m-1)}b_{m-1}}=\frac{a_nb_{m-1}-2^{f(n)-f(m-1)}a_{m-1}b_n}{2^{f(n)}b_nb_{m-1}}$$

すると，$S_{m,\,n}$ の分子は奇数，分母は偶数より，$S_{m,\,n}$ は整数にならない。

(ii)　$f(m-1)=f(n)$ のとき

このとき，$S_{m,\,n}$ の項数 $n-m+1$ は $2^{f(m-1)}$ より小となり，

$$S_{m,\,n}<\frac{1}{2^{f(m-1)}}+\frac{1}{2^{f(m-1)}}+\cdots+\frac{1}{2^{f(m-1)}}<\frac{1}{2^{f(m-1)}}\cdot 2^{f(m-1)}=1$$

よって，$S_{m,\,n}$ は整数にならない。

(i)(ii)より，$S_{m,\,n}$ はどんな m, $n(m<n)$ に対しても整数にならない。

コメント

非常に記述しにくい問題です。上のようにアバウトにまとめるだけでも，かなりの時間を費やしました。なお，記述は省きましたが，具体例を通して考えています。

問　題

整数 p, $q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0! = 1$ とする。

(1) n, k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。　[2013]

解答例

(1) $${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right) = \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!\,n!}\left\{\frac{k!\,n!}{(n+k)!} - \frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!}\right\}$$
$$= \frac{n+k+1}{k+1} - \frac{n+1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

(2) (1)の等式について，$k = 2$ とすると，
$${}_{n+3}\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right) = \frac{2}{3},\quad \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)$$

これより，m が 3 以上の整数のとき，$S = \dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ とおくと，
$$S = \sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right) + \cdots + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right) = \frac{3}{2}\left\{1 - \frac{2}{m(m-1)}\right\} = \frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}$$

コメント

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については，迷いはあまりないと思えます。

問　題

m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。 [2013]

解答例

整数 m に対して，$m^4+14m^2=m^2(m^2+14)$ が $2m+1$ の整数倍となるのは,

(i)　$2m+1=\pm1$ $(m=0,\ -1)$ のとき　m^4+14m^2 は $2m+1$ の整数倍である。

(ii)　$2m+1\neq\pm1$ $(m\neq0,\ m\neq-1)$ のとき

まず, m と $2m+1$ の公約数を g とおくと，m_1，m_2 を整数として,

$$m=gm_1,\ 2m+1=gm_2$$

すると，$2gm_1+1=gm_2$，$g(m_2-2m_1)=1$ から, g は 1 の約数となり，$g=\pm1$

よって, m と $2m+1$ は互いに素であり，m^2 と $2m+1$ は互いに素となる。

これより，$m^2(m^2+14)$ が $2m+1$ の整数倍になることと，m^2+14 が $2m+1$ の整数倍になることは同値である。

すると, k を整数として，$m^2+14=k(2m+1)$ から,

$$m^2-2km+14-k=0,\ m=k\pm\sqrt{k^2+k-14}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, n を 0 以上の整数とすると, m が整数より, ①から,

$$k^2+k-14=n^2,\ 4k^2+4k-56=4n^2,\ (2k+1)^2-(2n)^2=57$$

$$(2k+1+2n)(2k+1-2n)=3\times19\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$2k+1+2n\geqq2k+1-2n$ より, ②を満たす k, n は,

$$(2k+1+2n,\ 2k+1-2n)=(57,\ 1),\ (-1,\ -57),\ (19,\ 3),\ (-3,\ -19)$$

$$(k+n,\ k-n)=(28,\ 0),\ (-1,\ -29),\ (9,\ 1),\ (-2,\ -10)$$

$m\neq0$, $m\neq-1$ なので, ①より，$m=k\pm n=-29,\ -10,\ -2,\ 1,\ 9,\ 28$

(i)(ii)より，m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m は,

$$m=-29,\ -10,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 9,\ 28$$

コメント

ノーヒントの整数問題です。上記のような解法をとりましたが，$2^4(m^4+14m^2)$ を考える方法もあり，この方がかなり簡単です。ただ，気付きませんでした。

問　題

すべての項が整数である数列を整数列という。$p,\ q,\ r,\ s$ を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p + qn + rn^2,\ \ b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2)　数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。　[2012]

解答例

(1)　まず，$a_n = p + qn + rn^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$a_1 = p+q+r$ が整数であり，しかも $a_{n+1} - a_n$ が整数であることより，

$$a_{n+1} - a_n = \{p + q(n+1) + r(n+1)^2\} - (p + qn + rn^2) = (q+r) + 2rn$$

これより，数列 $\{a_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$p+q+r$ と $q+r$ と $2r$ が整数，すなわち p と $q+r$ と $2r$ が整数となることである。

よって，数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2)　$b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$ に対し，数列 $\{b_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$b_1 = p+q+r+s$ が整数であり，しかも $b_{n+1} - b_n$ が整数である。

ここで，$c_n = b_{n+1} - b_n$ とおくと，

$$\begin{aligned} c_n &= \{p + q(n+1) + r(n+1)^2 + s(n+1)^3\} - (p + qn + rn^2 + sn^3) \\ &= (q+r+s) + (2r+3s)n + 3sn^2 \end{aligned}$$

(1)の結果を利用すると，数列 $\{c_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$q+r+s$ と $2r+3s+3s = 2r+6s$ と $2\cdot 3s = 6s$ が整数となることである。

よって，数列 $\{b_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$p+q+r+s$ と $q+r+s$ と $2r+6s$ と $6s$ が整数，すなわち p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ が整数となることである。

コメント

整数と整式の有名問題ですが，次数下げの方法を知らないとかなり面倒です。(1)は(2)での利用を考えて必要十分条件を求めています。

問　題

$l,\ n,\ d$ を自然数とする。このとき自然数の積 $(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2l+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ。 [2012]

解答例

自然数 l, n, d に対して，$(2l+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$ ……①より，

$$(2l+1)nd=am+\frac{1}{2}m(m-1)d\ ,\ \ am=(2l+1)nd-\frac{1}{2}m(m-1)d$$

a を分離して，$a=\left\{\dfrac{(2l+1)n}{m}-\dfrac{m-1}{2}\right\}d$ ………②

(i)　$n>l$ のとき　$m=2l+1\geqq 3$ とすると，②より，

$$a=\left\{\frac{(2l+1)n}{2l+1}-\frac{2l}{2}\right\}d=(n-l)d>0$$

(ii)　$l\geqq n$ のとき　$m=2n\geqq 2$ とすると，②より，

$$a=\left\{\frac{(2l+1)n}{2n}-\frac{2n-1}{2}\right\}d=\left(\frac{2l+1}{2}-\frac{2n-1}{2}\right)d=(l-n+1)d>0$$

(i)(ii)より，$(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて①と表せる。

コメント

自然数 a と m を自然数 $l,\ n,\ d$ を用いて表せることを示します。ここで，m が 2 以上というのが，意外なことに大きなヒントになっています。

問　題

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

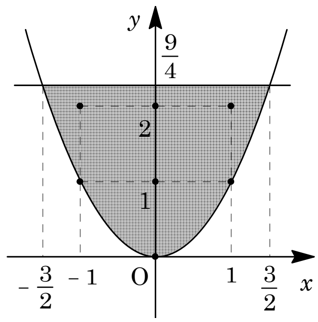
とし, D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で, x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき, D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　a, b がともに整数であるとき, D に含まれる格子点の個数は, a, b の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

解答例

(1)　$a=0$ のとき, $D: x^2\leqq y\leqq b$ であり, 境界線 $y=x^2$ と $y=b$ の交点は, $x=\pm\sqrt{b}$ となる。



これより, D の面積は,

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\sqrt{b}+\sqrt{b})^3=\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より, $\dfrac{4}{3}(\sqrt{b})^3=\dfrac{9}{2}$ となり, $\sqrt{b}=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{9}{4}$

よって, D に含まれる格子点は, $(-1,\ 1)$, $(-1,\ 2)$, $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$ となり, その個数は 7 個である。

(2)　$D: x^2\leqq y\leqq ax+b$ に対して, 境界線 $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点は,

$$x^2-ax-b=0,\quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

ここで, $\alpha=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $\beta=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ とおくと, D の面積は,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3$$

条件より, $\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3=\dfrac{9}{2}$ となり, $\sqrt{a^2+4b}=3$, $a^2+4b=9$ ………(＊)

このとき, $\alpha=\dfrac{a-3}{2}$, $\beta=\dfrac{a+3}{2}$ である。

さて, a, b は整数なので, (＊)から a は奇数となり, α, β はともに整数である。

すると, D に含まれる格子点の個数は, $\dfrac{a-3}{2}=\alpha\leqq x\leqq\beta=\dfrac{a+3}{2}$ において,

(i)　$x=\dfrac{a-3}{2}$ のとき　格子点は $(\alpha,\ \alpha^2)$ のみより, 1 個である。

(ii)　$x=\dfrac{a-1}{2}$ のとき　(＊)より，$b=\dfrac{9-a^2}{4}$ となり，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2-2a+9-a^2-a^2+2a-1+4)=3$$

(iii)　$x=\dfrac{a+1}{2}$ のとき　(ii)と同様にすると，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2+2a+9-a^2-a^2-2a-1+4)=3$$

(iv)　$x=\dfrac{a+3}{2}$ のとき　格子点は$(\beta,\ \beta^2)$のみより, 1 個である。

(i)～(iv)より，格子点の個数は, a, b の値によらず，$1+3+3+1=8$ 個である。

コメント

(1)は(2)の誘導ではありませんが，うまくまとまった格子点の個数の問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　$3^n=k^3+1$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

(2)　$3^n=k^2-40$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$3^n=k^3+1$ より，$3^n=(k+1)(k^2-k+1)$ ………①

ここで，$(k^2-k+1)-(k+1)=k(k-2)$ から，$k\geqq 3$ において，$k^2-k+1>k+1$

(i)　$k=1$ のとき　①より $3^n=2$ となり，正の整数 n は存在しない。

(ii)　$k=2$ のとき　①より $3^n=9$ となり，$n=2$ である。

(iii)　$k\geqq 3$ のとき　①より，l を 2 以上の整数として，

$$k+1=3^l\ \cdots\cdots\cdots②,\quad k^2-k+1=3^{n-l}\ \cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$n-l>l$ から $l<\dfrac{n}{2}$ となり，$2\leqq l<\dfrac{n}{2}$ である。

②から，$k=3^l-1$ となり，③に代入すると，$(3^l-1)^2-(3^l-1)+1=3^{n-l}$

$$3^{2l}-3^{l+1}+3=3^{n-l},\quad 3^{2l-1}-3^l+1=3^{n-l-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$2l-1\geqq 3$，$n-l-1=n-2l+l-1>1$ となり，④は左辺が 3 の倍数ではなく右辺が 3 の倍数となるので，成立しない。

(i)(ii)(iii)より，①を満たす正の整数の組は，$(k,\ n)=(2,\ 2)$ である。

(2)　まず，3^n を 10 で割った余りは，n が奇数のとき 3 または 7，n が偶数のとき 1 または 9 である。また，k^2 を 10 で割った余りは，0, 1, 4, 5, 6, 9 のいずれかである。

さて，$3^n=k^2-40$ ……⑤より，両辺を 10 で割った余りが等しくなるのは，n が偶数のときであり，m を自然数として $n=2m$ とおくと，⑤から，

$$3^{2m}-k^2=-40,\quad (3^m+k)(3^m-k)=-2^3\times 5\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

$3^m+k>0>3^m-k$ であり，3^m+k と 3^m-k は偶奇が一致することより，

(i)　$(3^m+k,\ 3^m-k)=(2,\ -20)$ のとき　$3^m=-9$ となり，不適である。

(ii)　$(3^m+k,\ 3^m-k)=(4,\ -10)$ のとき　$3^m=-3$ となり，不適である。

(iii)　$(3^m+k,\ 3^m-k)=(10,\ -4)$ のとき

$3^m=3$ から $m=1$，$k=7$ となる。このとき，$n=2$ である。

(iv)　$(3^m+k,\ 3^m-k)=(20,\ -2)$ のとき

$3^m=9$ から $m=2$，$k=11$ となる。このとき，$n=4$ である。

(i)～(iv)より，⑤を満たす正の整数の組は，$(k,\ n)=(7,\ 2),\ (11,\ 4)$ である。

コメント

(1)は右辺の因数分解が糸口になっていますが，(2)はそれができません。いろいろ失敗を重ねた後の解答例です。