

2020 入試対策  
過去問ライブラリー

# 千葉大学

## 理系数学22か年

1998 - 2019

---

外林康治 編著

電送数学舎

## まえがき

本書には、1998年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお、複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

## 本書の構成

- 1 本書は2部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
  - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
  - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
  - (3) 1つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
  - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
  - (5) 出題の流れをウェブサイトを入試直前に確認する。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。  
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

## PDF版とKindle版のリンクについて

本書では、対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号、解答編の **問題** の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について、PDF版とKindle版に違いがあります。

- 【PDF版】 リンクが無効の場合、PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。
- 【Kindle版】 現状では、Kindle アプリで、リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

## 目 次

分野別問題一覧 .....	3
分野別問題と解答例 .....	31
図形と式 .....	32
図形と計量 .....	45
ベクトル .....	49
整数と数列 .....	66
確 率 .....	85
論 証 .....	106
複素数 .....	109
曲 線 .....	122
極 限 .....	124
微分法 .....	126
積分法 .....	156
積分の応用 .....	172

# 分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式 |||

1  $t$  を 0 以上の実数とし、 $O$  を原点とする座標平面上の 2 点  $P(p, p^2)$ ,  $Q(q, q^2)$  で 3 つの条件  $PQ=2$ ,  $p < q$ ,  $p+q=\sqrt{t}$  を満たすものを考える。 $\triangle OPQ$  の面積を  $S$  とする。ただし、点  $P$  または点  $Q$  が原点  $O$  と一致する場合は  $S=0$  とする。

- (1)  $p$  と  $q$  をそれぞれ  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $S$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $S=1$  となるような  $t$  の個数を求めよ。 [2017]

2 座標平面上に、原点を中心とする半径 1 の円と、その円に外接し各辺が  $x$  軸または  $y$  軸に平行な正方形がある。円周上の点  $(\cos\theta, \sin\theta)$  (ただし  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする  $\theta$  を求めよ。 [2014]

3  $a, b$  を実数とし、 $a > 0$  とする。放物線  $y = \frac{x^2}{4}$  上に 2 点  $A(a, \frac{a^2}{4})$ ,  $B(b, \frac{b^2}{4})$  をとる。点  $A$  における放物線の接線と法線をそれぞれ  $l_A$  と  $n_A$ , 点  $B$  における放物線の接線と法線をそれぞれ  $l_B$  と  $n_B$  とおいたとき、 $l_A$  と  $l_B$  が直交しているものとする。2 つの接線  $l_A, l_B$  の交点を  $P$  とし、2 つの法線  $n_A, n_B$  の交点を  $Q$  とする。

- (1)  $b$  を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $P, Q$  の座標を  $a$  を用いて表せ。
- (3) 長方形  $AQBP$  の面積が最小となるような  $a$  の値と、そのときの面積を求めよ。 [2013]

4 放物線  $y = x^2$  上の点  $(a, a^2)$  における接線を  $l_a$  とする。

- (1) 直線  $l_a$  が不等式  $y > -x^2 + 2x - 5$  の表す領域に含まれるような  $a$  の範囲を求めよ。
- (2)  $a$  が(1)で求めた範囲を動くとき、直線  $l_a$  が通らない点  $(x, y)$  全体の領域  $D$  を図示せよ。
- (3) 連立不等式  $(y - x^2)(y + x^2 - 2x + 5) \leq 0$ ,  $y(y + 5) \leq 0$  の表す領域を  $E$  とする。 $D$  と  $E$  の共通部分の面積を求めよ。 [2012]

**5**  $a$  を 1 より大きい実数とし、座標平面上に、点  $O(0, 0)$ 、 $A(1, 0)$  をとる。曲線  $y = \frac{1}{x}$  上の点  $P(p, \frac{1}{p})$  と、曲線  $y = \frac{a}{x}$  上の点  $Q(q, \frac{a}{q})$  が、3 条件

- (i)  $p > 0, q > 0$                           (ii)  $\angle AOP < \angle AOQ$   
 (iii)  $\triangle OPQ$  の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき、 $\tan \angle POQ$  の最大値が  $\frac{3}{4}$  となるような  $a$  の値を求めよ。

[2010]

**6** 座標平面上に点  $A(3, 0)$ 、 $B(0, 2)$  をとる。線分  $AB$  上に点  $P$  をとり、 $P$  から  $x$  軸に下ろした垂線を  $PH$ 、 $A$  と  $H$  の中点を  $M$  とする。ただし点  $H$  は  $x$  軸上の点とし、また  $P$  は  $A$  と異なるものとする。 $O$  を原点とし  $\triangle OPM$  を  $O$  を中心に座標平面内で 1 回転するとき、通過する点全体が作る円の面積が最小となる点  $P$  の座標を求めよ。

[2009]

**7**  $a, t$  を実数とするとき、座標平面において、 $x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$  で定義される図形  $C$  を考える。

- (1) すべての  $t$  に対して  $C$  が円であるような  $a$  の範囲を求めよ。ただし、点は円とみなさないものとする。  
 (2)  $a = 4$  とする。 $t$  が  $t > 0$  の範囲を動くとき、 $C$  が通過してできる領域を求め、図示せよ。  
 (3)  $a = 6$  とする。 $t$  が  $t > 0$  であって、かつ  $C$  が円であるような範囲を動くとき、 $C$  が通過してできる領域を求め、図示せよ。

[2006]

**8** (1) 次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \geq \log_{10}(-2x^2 + 2x + 1)$$

(2)  $x, y$  が(1)の不等式を満たすとき、 $x + y$  の最大値と最小値を求めよ。

[2005]

**9**  $C$  は、2 次関数  $y = x^2$  のグラフを平行移動した放物線で、頂点が円  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  上にある。原点から  $C$  に引いた接線で傾きが正のものを  $l$  とおく。このとき、 $C$  と  $l$  の接点の  $x$  座標が最大および最小になるときの  $C$  の頂点の座標をそれぞれ求めよ。

[2001]

■ 図形と計量 |||

1 三角形 ABC は  $AB + AC = 2BC$  を満たしている。また、角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 $AD = 15$  である。さらに、三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

- (1)  $\theta = \angle BAD$  とするとき  $\sin \theta$  の値を求めよ。また、 $A = \angle BAC$  とするとき、 $\sin A$  と  $\cos A$  の値を求めよ。  
 (2) 辺 BC の長さを求めよ。 [2019]

2 1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において、辺 BC を 1:2 に内分する点を D とする。また、辺 OC 上に点 E をとり、 $CE = t$  とする。

- (1) AD の長さを求めよ。  
 (2)  $\cos \angle DAE$  を  $t$  を用いて表せ。  
 (3)  $\triangle ADE$  の面積が最小になるときの  $t$  の値とそのときの面積を求めよ。 [2013]

3 横  $2a$ 、縦  $2b$  の長方形を長方形の中心のまわりに角  $\theta$  だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積  $S(\theta)$  を求めよ。ただし、長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし、長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また、回転角  $\theta$  は 0 以上、長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。 [2012]

■ ベクトル |||

1 正方形 ABCD の辺を除く内部に、 $PA \perp PB$  を満たす点 P がある。ベクトル  $\overrightarrow{PC}$  を  $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$  と表すとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$  とするとき、 $x, y$  を  $\alpha$  を用いて表せ。  
 (2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき、(1)で求めた  $x, y$  の和  $x + y$  の最大値を求め、そのときの P がどのような点かを答えよ。 [2018]

**2**  $n$  を 4 以上の整数とする。座標平面上で正  $n$  角形  $A_1A_2\cdots A_n$  は点  $O$  を中心とする半径 1 の円に内接している。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$ ,  $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$  とし、 $k = 2\cos\frac{2\pi}{n}$  とおく。そして、線分  $A_1A_3$  と線分  $A_2A_4$  との交点  $P$  は線分  $A_1A_3$  を  $t:1-t$  に内分するとする。

(1)  $\vec{a}$  および  $\vec{d}$  を,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $k$  を用いて表せ。

(2)  $t$  を  $k$  を用いて表し,  $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$  を示せ。

(3) 不等式  $\frac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} > \frac{1}{12}$  を示せ。 [2017]

**3** 座標平面上にすべての内角が  $180^\circ$  未満の四角形  $ABCD$  がある。原点を  $O$  とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$  とおく。 $k$  は  $0 \leq k \leq 1$  を満たす定数とする。0 以上の実数  $s, t, u$  が  $k+s+t+u=1$  を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$$

で定められる点  $P$  の存在範囲を  $E(k)$  とする。

(1)  $E(1)$  および  $E(0)$  を求めよ。

(2)  $E\left(\frac{1}{3}\right)$  を求めよ。

(3) 対角線  $AC, BD$  の交点を  $M$  とする。どの  $E(k)$  ( $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}$ ) にも属するような点  $P$  を考える。このような点  $P$  が存在するための必要十分条件を, 線分  $AC, AM$  の長さを用いて答えよ。 [2016]

**4** 三角形  $ABC$  の外心を  $O$ , 重心を  $G$ , 内心を  $I$  とする。

(1)  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$  が成り立つならば, 三角形  $ABC$  は直角三角形であることを証明せよ。

(2)  $k$  が  $k \neq \frac{1}{3}$  を満たす実数で,  $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$  が成り立つならば, 三角形  $ABC$  は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  が成り立つならば, 三角形  $ABC$  は二等辺三角形であることを証明せよ。 [2011]



5  $\triangle ABC$  は、1 辺の長さが 1 の正三角形で、 $t$  は正の実数とする。 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$  とおく。直線  $AB$ 、 $AC$  上にそれぞれ点  $D$ 、 $E$  があり、 $\overrightarrow{AD} = t\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AE} = t\vec{c}$  を満たしている。正三角形  $\triangle ADE$  の重心を  $G$ 、線分  $BE$  の中点を  $M$  とする。

- (1) 内積  $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG}$  を計算せよ。
- (2)  $t$  が正の実数全体を動くとき、 $\triangle CGM$  の面積を最小にする  $t$  の値と、そのときの面積を求めよ。 [2010]

6 平面上の  $\triangle ABC$  において、辺  $AB$  を  $4:3$  に内分する点を  $D$ 、辺  $BC$  を  $1:2$  に内分する点を  $E$  とし、線分  $AE$  と  $CD$  の交点を  $O$  とする。

- (1)  $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$  とするとき、ベクトル  $\overrightarrow{AO}$  を  $\vec{p}$ 、 $\vec{q}$  で表せ。
- (2) 点  $O$  が  $\triangle ABC$  の外接円の中心になるとき、3 辺  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  の長さの 2 乗の比を求めよ。 [2008]

7  $\triangle OAB$  において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおき、 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$  とする。辺  $AB$  上に点  $P_1$  をとる。ただし  $P_1$  は  $A$ 、 $B$  とは異なるとする。 $P_1$  から辺  $OB$  に垂線  $P_1Q_1$  を下ろす。次に、 $Q_1$  から辺  $OA$  に垂線  $Q_1R_1$  を下ろす。さらに、 $R_1$  から辺  $AB$  に垂線  $R_1P_2$  を下ろす。以下、同様の操作を続けて、点  $P_n$ 、 $Q_n$ 、 $R_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を定める。 $\overrightarrow{AP_n} = t_n(\vec{b} - \vec{a})$  により  $t_n$  ( $0 < t_n < 1$ ) を定める。

- (1)  $\overrightarrow{BQ_1}$  を  $t_1$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (2)  $t_2$  を  $t_1$  を用いて表せ。
- (3)  $t_n$  を  $t_1$  と  $n$  を用いて表せ。
- (4)  $P_1 = P_2$  となるような  $t_1$  の値を求めよ。
- (5)  $P_1 = P_2$  のとき、 $\triangle P_1Q_1R_1$  の面積を求めよ。 [2006]

8  $xyz$  空間内に点  $A(1, 1, 2)$  と点  $B(-5, 4, 0)$  がある。点  $C$  が  $y$  軸上を動くとき、三角形  $ABC$  の面積の最小値を求めよ。 [2004]

9  $R$  を平面上の凸六角形とし、その頂点を順に  $A, B, C, D, E, F$  とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$  とおく。 $R$  が  $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$  を満たすとする。

- (1)  $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$  であることを示せ。
- (2) 三角形  $ACE$  と三角形  $BDF$  の重心が一致するとき、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  の間の関係を求めよ。
- (3)  $R$  が(2)の条件を満たし、さらに内積に関して  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$  を満たすとき、 $R$  の面積を求めよ。 [2003]

10 四角形  $ABCD$  は半径 1 の円に内接し、 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$  を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $AC$  は線分  $BD$  の中点を通ることを示せ。
- (2) 四角形  $ABCD$  の 4 辺の各辺の長さを求めよ。 [2002]

11 四面体  $OABC$  において  $OA = 3$ ,  $OB = 4$ ,  $OC = 6$ ,  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$  とする。 $OA$  を  $t:1-t$  の比に内分する点を  $D$ ,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (2)  $\angle BDC = \theta$  としたとき  $\cos \theta$  を  $t$  の式で表せ。
- (3) 三角形  $BDC$  の面積の最小値を求めよ。 [1999]

12 平面上の三角形  $OAB$  は、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおくと、 $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$  をみたすとする。辺  $AB$  を  $1:2$  に内分する点を  $P$  とし、直線  $OP$  に関して

$A$  と対称な点を  $Q$ ,  $OQ$  の延長と  $AB$  の交点を  $R$  とおく。

- (1)  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  で表せ。
- (2)  $\overrightarrow{OR}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  で表せ。
- (3)  $\triangle PQR$  の面積を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列 |||

1  $a_1 = 3, a_2 = 2$  とし,  $n \geq 2$  のとき,  $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$  とし、数列  $\{a_n\}$  を定める。

(1)  $n \geq 2$  のとき  $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$  が成り立つことを証明せよ。

(2)  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100$  が成り立つような自然数  $n$  を求めよ。 [2019]

2 初項が 1 で公差が 6 である等差数列  $1, 7, 13, \dots$  の第  $n$  項を  $a_n$  とし, また初項が 3 で公差が 4 である等差数列  $3, 7, 11, \dots$  の第  $m$  項を  $b_m$  とする。2 つの数列  $\{a_n\}, \{b_m\}$  に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{c_k\}$  とし, 2 つの数列  $\{a_n\}, \{b_m\}$  の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{d_l\}$  とする。したがって  $c_1 = 7$  であり, また数列  $\{d_l\}$  のはじめの 5 項は  $1, 3, 7, 11, 13$  となる。

(1) 数列  $\{c_k\}$  の一般項を求めよ。

(2) 数列  $\{d_l\}$  の一般項を求めよ。

(3) 数列  $\{d_l\}$  の初項から第  $l$  項までの和  $S_l = \sum_{i=1}^l d_i$  を求めよ。 [2018]

3  $b$  と  $c$  を  $b^2 + 4c > 0$  を満たす実数として,  $x$  に関する 2 次方程式  $x^2 - bx - c = 0$  の相異なる解を  $\alpha, \beta$  とする。数列  $\{a_n\}$  を,  $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} (n = 1, 2, 3, \dots)$  により定める。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 数列  $\{a_n\}$  は漸化式  $a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  を満たすことを示せ。

(2) 数列  $\{a_n\}$  の項  $a_n$  がすべて整数であるための必要十分条件は,  $b, c$  がともに整数であることである。これを証明せよ。 [2015]

4 座標平面上に、円  $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  と点  $Q(1, 2)$  がある。点  $P_1$  の座標を  $(3, 0)$  とし、 $x$  軸上の点  $P_2, P_3, \dots$  を以下の条件によって決め、 $P_n$  の座標を  $(p_n, 0)$  とする。

点  $P_n$  から円  $C$  に接線を引き、その  $y$  座標が正である接点を  $T_n$  とする。このとき、3 点  $Q, T_n, P_{n+1}$  は同一直線上にある。 ( $n=1, 2, \dots$ )

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $T_1$  の座標を求めよ。
- (2) 点  $P_2$  の座標を求めよ。
- (3) 点  $T_n$  の座標を  $p_n$  の式で表せ。
- (4) 点  $P_n$  の座標を  $n$  の式で表せ。 [2014]

5 整数  $p, q (p \geq q \geq 0)$  に対して 2 項係数を  ${}_p C_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$  と定める。なお、 $0! = 1$  とする。

(1)  $n, k$  が 0 以上の整数のとき、 ${}_{n+k+1} C_{k+1} \times \left( \frac{1}{{}_{n+k} C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1} C_k} \right)$  を計算し、 $n$  によら

ない値になることを示せ。

(2)  $m$  が 3 以上の整数のとき、和  $\frac{1}{{}_3 C_3} + \frac{1}{{}_4 C_3} + \frac{1}{{}_5 C_3} + \dots + \frac{1}{{}_m C_3}$  を求めよ。 [2013]

6 1 より小さい正の実数  $a$  に対して、円  $C(a): (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$  と定める。そのうえで、数列  $\{a_n\}$  を以下の方法によって定める。

(i)  $n=1$  のときは、円  $C(a)$  が  $x$  軸と接するような定数  $a$  の値を  $a_1$  とする。さらに、円  $C(a_1)$  と  $x$  軸との接点を  $P_1$  とし、円  $C(a_1)$  の中心を  $Q_1$  とおく。

(ii)  $n \geq 2$  のときは、円  $C(a)$  が直線  $P_{n-1}Q_{n-1}$  と接するような定数  $a$  の値を  $a_n$  とする。さらに、円  $C(a_n)$  と直線  $P_{n-1}Q_{n-1}$  との接点を  $P_n$  とし、円  $C(a_n)$  の中心を  $Q_n$  とおく。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_1$  を求めよ。
- (2)  $a_2$  を求めよ。
- (3)  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。 [2012]

**7** 放物線  $y = x^2$  と直線  $y = ax + b$  によって囲まれる領域を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq ax + b\}$$

とし、 $D$  の面積が  $\frac{9}{2}$  であるとする。座標平面上で、 $x$  座標、 $y$  座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

- (1)  $a = 0$  のとき、 $D$  に含まれる格子点の個数を求めよ。
- (2)  $a, b$  がともに整数であるとき、 $D$  に含まれる格子点の個数は、 $a, b$  の値によらず一定であることを示せ。 [2010]

**8** 以下の問いに答えよ。

- (1)  $x$  を有理数とする。 $7x^2$  が整数ならば、 $x$  は整数であることを示せ。
- (2)  $a, b$  を整数とする。 $a^2 - 7b^2$  が 4 の倍数ならば、 $a$  と  $b$  はともに偶数であることを示せ。
- (3)  $r$  は整数、 $s$  は有理数とする。 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$  が整数ならば、 $s$  は整数であることを示せ。 [2008]

**9**  $n$  を奇数とする。

- (1)  $n^2 - 1$  は 8 の倍数であることを証明せよ。
- (2)  $n^5 - n$  は 3 の倍数であることを証明せよ。
- (3)  $n^5 - n$  は 120 の倍数であることを証明せよ。 [2007]

**10**  $n$  を自然数とする。 $n$  次多項式  $P_n(x)$  は、 $n+1$  個の整数  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  に対して、 $P_n(k) = 2^k - 1$  を満たす。

- (1)  $P_2(x) - P_1(x)$  および  $P_3(x) - P_2(x)$  を因数分解せよ。
- (2)  $P_n(x)$  を求めよ。 [2004]

**11** 数列  $\{a_n\}$  は次の(i), (ii)を満たすとする。

$$(i) \quad a_1 = \frac{1}{2} \qquad (ii) \quad n \geq 2 \text{ について, } a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$$

ただし、 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  である。

- (1)  $a_2$  を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  に対して、 $S_n$  を  $S_{n-1}$  で表せ。
- (3)  $S_n$  を求めよ。
- (4)  $n \geq 2$  に対して、 $a_n$  を求めよ。 [2000]

**12**  $a_1 = 1$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_n = 3(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) で与えられる数列  $\{a_n\}$  がある。ただし,  $S_n$  は  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和である。

(1)  $a_2$  を求めよ。

(2)  $\sqrt{S_n}$  を求めよ。

(3)  $a_n$  を求めよ。

[1999]

**13** 座標平面において, 2 点  $P, Q$  をそれぞれ直線  $x = -1$ ,  $x = 2$  上の点とし, 直線  $PQ$  が円  $x^2 + y^2 = 1$  に接するように動くものとする。このとき, 2 点  $P, Q$  の  $y$  座標がともに整数であるような  $P, Q$  の組をすべて求めよ。

[1998]

■ 確率 |||||

**1** コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって, これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱  $A, B, C$  のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚, 箱  $A$  に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚, 箱  $B$  に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚, 箱  $C$  に入れる。さいころを 5 回振ったとき, 次の問いに答えよ。

(1) 箱  $A$  と箱  $B$  にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2)  $A, B, C$  いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。

(3) 試行の後に箱  $A$  を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた。このとき箱  $B$  にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ。

[2019]

**2** 箱の中に  $n$  枚のカードが入っている。ただし  $n \geq 3$  とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの  $(n-2)$  枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が  $k$  回目にはじめてちょうど 100 点となる確率  $P(k)$  を求めよ。

[2018]

**3** 1個のさいころを3回投げて、以下のルールで各回の得点を決める。

- ・ 1回目は、出た目が得点になる。
- ・ 2回目は、出た目が1回目と同じならば得点は0、異なれば出た目が得点になる。
- ・ 3回目は、出た目が1回目または2回目と同じならば得点は0、どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3回の得点の和を総得点とし、総得点が $n$ となる確率を $p_n$ とする。

- (1) 総得点 $n$ の最大値、最小値と、それらの $n$ に対する $p_n$ を求めよ。
- (2)  $p_6$ を求めよ。
- (3)  $p_n$ が最大となるような $n$ と、そのときの $p_n$ を求めよ。 [2017]

**4** 数直線上の点 $Q$ は、はじめは原点 $x=0$ にあり、さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。 $Q$ が $x=a$ にあるとき、

- ・ 出た目が1ならば $x=a$ にとどまる。
- ・ 出た目が2, 3ならば $x=a+1$ へ動く。
- ・ 出た目が4, 5, 6ならば $x=0$ に戻る ( $a=0$ ならば動かない)。

- (1) 整数 $a \geq 0$ に対して、さいころを3回投げたとき、 $Q$ が $x=a$ にある確率を求めよ。
- (2) さいころを $n$ 回投げたとき、 $Q$ が $x=0$ にある確率を求めよ。
- (3) さいころを $n$ 回投げたとき、 $Q$ が $x=1$ にある確率を求めよ。 [2016]

**5** コインを $n$ 回続けて投げ、1回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

- ・ コイン投げの第1回目には、1点を得点とする。
- ・ コイン投げの第2回目以降において、ひとつ前の回と異なる面が出たら、1点を得点とする。
- ・ コイン投げの第2回目以降において、ひとつ前の回と同じ面が出たら、2点を得点とする。

たとえば、コインを3回投げて(裏, 表, 裏)の順に出たときの得点は、 $1+1+1=3$ より3点となる。また(裏, 裏, 表)の順に出たときの得点は、 $1+2+1=4$ より4点となる。コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とし、このゲームで得られる得点が $m$ となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $n \geq 2$ が与えられたとき、 $P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。
- (2)  $n \leq m \leq 2n-1$ について、 $P_{n,m}$ を $n$ と $m$ の式で表せ。 [2015]

〔6〕 袋の中に、赤玉が 3 個、白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し、色を確認してから、再び袋に戻すという試行を行う。この試行を  $N$  回繰り返したときに、赤玉を  $A$  回 (ただし  $0 \leq A \leq N$ ) 取り出す確率を  $p(N, A)$  とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 確率  $p(N, A)$  を  $N$  と  $A$  を用いて表せ。
- (2)  $N$  が 10 の倍数、すなわち  $N = 10n$  となる自然数  $n$  があるとする。確率  $p(10n, 0)$ ,  $p(10n, 1)$ ,  $\dots$ ,  $p(10n, 10n)$  のうち、一番大きな値は  $p(10n, 3n)$  であることを次の手順により証明せよ。
  - (i) 0 以上の整数  $a$ , 自然数  $b$  に対して,  $\frac{b!}{a!} \leq b^{b-a}$  を示す。ただし  $0! = 1$  とする。
  - (ii) 0 以上  $10n$  以下の整数  $m$  に対して,  $\frac{p(10n, m)}{p(10n, 3n)} \leq 1$  を示す。 [2014]

〔7〕 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

- (1) 下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。
- (2) 下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。  
ただし、条件(A), (B)は次のとおりである。  
(A) 番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。  
(B) 番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には、ちょうど 1 枚のカードがある。 [2013]

〔8〕 さいころを 7 回投げ、 $k$  回目 ( $1 \leq k \leq 7$ ) に出る目を  $X_k$  とする。

- (1) 積  $X_1 X_2$  が 18 以下である確率を求めよ。
- (2) 積  $X_1 X_2 \dots X_7$  が偶数である確率を求めよ。
- (3) 積  $X_1 X_2 \dots X_7$  が 4 の倍数である確率を求めよ。
- (4) 積  $X_1 X_2 \dots X_7$  を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。 [2012]

〔9〕  $k+1$  個 ( $k \geq 1$ ) の部屋  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$  がある。千葉君はある部屋から、その部屋以外の部屋を等しい確率  $\frac{1}{k}$  で 1 つ選び、そこへ移動する。最初、部屋  $A_0$  にいた千葉君が、 $n$  回 ( $n \geq 1$ ) 部屋を移動した後に部屋  $A_1$  にいる確率を求めよ。 [2011]



**10** 数直線の原点上にある点が、以下の規則で移動する試行を考える。

(規則) サイコロを振って出た目が奇数の場合は、正の方向に 1 移動し、出た目が偶数の場合は、負の方向に 1 移動する。

$k$  回の試行の後の、点の座標を  $X(k)$  とする。

- (1)  $X(10) = 0$  である確率を求めよ。
- (2)  $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(5) \neq 0$  であって、かつ、 $X(6) = 0$  となる確率を求めよ。
- (3)  $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \dots, X(9) \neq 0$  であって、かつ、 $X(10) = 0$  となる確率を求めよ。

[2010]

**11** 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた 4 つの番号の積を  $X$  とおく。

- (1)  $X$  が 5 の倍数になる確率を求めよ。
- (2)  $X$  が 12 の倍数になる確率を求めよ。
- (3)  $X$  が平方数になる確率を求めよ。ただし、 $X$  は平方数であるとは、ある自然数  $n$  を用いて  $X = n^2$  と表されることである。

[2009]

**12** 1 から  $n$  までの番号が書かれた  $n$  枚のカードがある。この  $n$  枚のカードの中から 1 枚を取り出し、その番号を記録してからもとに戻す。この操作を 3 回繰り返す。記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を  $X$  とする。2 つが一致し、1 つがこれと異なる場合には、2 つの同じ値を  $X$  とし、3 つとも同じならその値を  $X$  とする。

- (1) 確率  $P(X \leq k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) を求めよ。
- (2) 確率  $P(X = k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) を求めよ。
- (3)  $P(X = k)$  が最大となる  $k$  の値はいくつか。

[2008]

■ 論証 |||||

1  $n$  を自然数とするととき、次の問いに答えよ。

- (1)  $k$  を  $1 \leq k \leq n$  を満たす自然数とするととき、 $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_n C_k \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$  が成り立つことを示せ。ただし  ${}_n C_k$  は二項係数である。
- (2) 不等式  $\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$  が成り立つことを示せ。
- (3) 不等式  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$  が成り立つことを示せ。 [2009]

2 関数  $f(x)$  はすべての実数  $x$  に対して定義され、すべての実数  $x$  で微分可能であるとする。このとき、以下の命題について、正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ。

- (1)  $x_1 < x_2$  を満たすすべての実数  $x_1, x_2$  に対して  $f(x_1) < f(x_2)$  が成り立つとする。このとき、すべての実数  $x$  に対して  $f'(x) > 0$  である。
- (2)  $f(0) = 0$  かつすべての実数  $x$  に対して  $f'(x) > 0$  ならば、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  である。
- (3)  $f(0) = 0$  かつすべての実数  $x$  に対して  $f'(x) > 0$  ならば、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$  である。 [2003]

3 次の問いに答えよ。

- (1)  $\log_2 3$  は無理数であることを証明せよ。
- (2)  $n$  が正の整数のとき、 $\log_2 n$  が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。 [2002]

■ 複素数 |||||

1 複素数平面上の点  $z \left(z \neq -\frac{i}{2}\right)$  に対して、 $w = \frac{z+2i}{2z+i}$  とする。

- (1) 点  $z$  が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、点  $w$  の描く図形を求めよ。
- (2) 点  $z$  が点  $\alpha$  を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、点  $w$  は原点を中心とする半径  $r$  の円周を描く。このような  $r$  と  $\alpha$  の組をすべて求めよ。 [2017]

2  $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$  ( $i$  は虚数単位) とおく。

(1)  $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$  を求めよ。

(2)  $\alpha = z + z^2 + z^4$  とするとき、 $\alpha + \bar{\alpha}$ 、 $\alpha \bar{\alpha}$  および  $\alpha$  を求めよ。ただし、 $\bar{\alpha}$  は  $\alpha$  の共役複素数である。

(3)  $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$  を求めよ。 [2016]

3  $a, b, c$  は実数とし、 $f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$  とおく。さらに 4 次方程式  $f(x) = 0$  は異なる 2 つの実数解  $\alpha, \beta$  と 2 つの虚数解をもち、 $\alpha + \beta = -(a+1)$ 、 $\alpha\beta = \frac{1}{a}$  を満たすと仮定する。

(1)  $b, c$  を  $a$  を用いて表せ。

(2)  $a$  のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)  $b$  のとり得る値の範囲を求めよ。 [2011]

4  $\alpha$  は絶対値 1 の複素数とし、複素数  $z$  に対して、 $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$  とおく。ただし  $\bar{\alpha}$  は  $\alpha$  の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で、 $z$  が原点と点  $\alpha$  を通る直線上 (ただし、点  $\frac{\alpha}{2}$  を除く) を動くとき、 $w$  の表す点は原点と点  $\bar{\alpha}$  を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で、 $z$  が不等式  $|z| > 1$  を満たすとき、複素数  $w$  を表す点はどのような図形上を動くか。 [2005]

5  $0 < t < 1$  とする。2 次方程式  $x^2 - 2tx + 1 = 0$  の解の 1 つを  $\alpha$  とする。複素数平面上の 4 点を  $O(0)$ 、 $A(-1)$ 、 $B(1)$ 、 $P(\alpha)$  とし、 $AB$  を直径とする円を  $C$  とする。点  $A$  を通り  $OP$  に平行な直線が円  $C$  と交わる  $A$  以外の点を  $Q$  とする。

(1)  $|\alpha|$  を求めよ。

(2) 四角形  $ABPQ$  の面積が最大となる  $t$  の値とそのときの面積を求めよ。 [2004]

6  $a$  を実数とし、 $z$  を複素数とする。複素数平面上で、 $a, z, z^2, z^3$  が表す 4 点があるひし形の 4 頂点になるとする。ただし、 $a$  と  $z^2$  が表す頂点是对角線上にあるとする。このような  $a$  と  $z$  の値をすべて求めよ。 [2003]

7 次の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上で方程式  $|z - 3i| = 2|z|$  が表す図形を求め、図示せよ。

(2) 複素数  $z$  が(1)で求めた図形から  $z = i$  を除いた部分を動くとき、複素数  $w = \frac{z+i}{z-i}$  で表される点の軌跡を求め、図示せよ。 [2002]

8  $i$  を虚数単位とし、複素数  $z$  に共役な複素数を  $\bar{z}$  で表す。

(1)  $\alpha$  を実数の定数とする。条件  $1 - \bar{z} = (\alpha + i)(z - \bar{z})$  を満たす複素数平面上の点  $z$  の全体が直線であるとき、 $\alpha$  の値を求めよ。

(2) 実軸上にない複素数  $\alpha$  に対して、3 点  $0, 1, \alpha$  を通る複素数平面上の円の中心を  $\beta$  とする。このとき、 $\beta$  を  $\alpha$  と  $\bar{\alpha}$  を用いて表せ。

(3)  $\alpha, \beta$  を(2)の複素数とする。点  $\alpha$  が(1)の直線上を動くとき、 $\frac{\beta}{\alpha}$  は一定であることを証明せよ。 [2001]

9  $s, t$  は  $0 < s < 1, 0 < t < 1$  を満たす実数とし、 $\alpha = si, \beta = t$  とおく。ここで、 $i$  は虚数単位である。複素数  $\gamma$  は実部と虚部が正であるものとし、複素数平面上で、 $\alpha, \beta, \gamma$  は正三角形をなすとする。

(1)  $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$  を求めよ。

(2)  $s, t$  が上記の範囲を動くとき、 $\gamma$  が描く図形を図示せよ。 [2000]

10 複素数平面上に三角形  $ABC$  があり、その頂点  $A, B, C$  を表す複素数をそれぞれ  $z_1, z_2, z_3$  とする。複素数  $w$  に対して、 $z_1 = wz_3, z_2 = wz_1, z_3 = wz_2$  が成り立つとき、次の各問いに答えよ。

(1)  $1 + w + w^2$  の値を求めよ。

(2) 三角形  $ABC$  はどんな形の三角形か。

(3)  $z = z_1 + 2z_2 + 3z_3$  の表す点を  $D$  とすると、三角形  $OBD$  はどんな形の三角形か。ただし、 $O$  は原点である。 [1999]

**11** 複素数  $z$  に対して複素数  $w$  を  $w = \frac{2iz}{z-\alpha}$  で定める。ただし、 $\alpha$  は 0 でない複素数の定数とする。

- (1) 点  $z$  が  $\alpha$  以外のすべての複素数を動くとき、点  $w$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 点  $z$  がある円周  $C$  上を動くとき、点  $w$  は原点  $O$  を中心とする半径 1 の円周を描くものとする。このとき、円周  $C$  の中心と半径を  $\alpha$  を用いて表せ。また円周  $C$  の中心が  $i$  のとき、 $\alpha$  の値を求めよ。
- (3)  $\alpha$  は(2)で求めた値とする。点  $z$  が実軸上を動くとき、点  $w$  の描く図形を求めよ。

[1998]

■ 曲線 |||||

**1** 双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  ……①の漸近線  $y = x$  ……②上の点  $P_0 : (a_0, a_0)$  (ただし  $a_0 > 0$ ) を通る双曲線①の接線を考え、接点を  $Q_1$  とする。  $Q_1$  を通り漸近線②と垂直に交わる直線と、漸近線②との交点を  $P_1 : (a_1, a_1)$  とする。次に  $P_1$  を通る双曲線①の接線の接点を  $Q_2$  ,  $Q_2$  を通り漸近線②と垂直に交わる直線と、漸近線②との交点を  $P_2 : (a_2, a_2)$  とする。この手続きを繰り返して同様に点  $P_n : (a_n, a_n)$  ,  $Q_n$  を定義していく。

- (1)  $Q_n$  の座標を  $a_n$  を用いて表せ。
- (2)  $a_n$  を  $a_0$  を用いて表せ。
- (3)  $\triangle P_n Q_n P_{n-1}$  の面積を求めよ。

[2015]

■ 極限 |||

1  $r$  は  $0 < r < 1$  を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが  $r^n$  の正方形  $R_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) があり、その頂点を反時計まわりに  $A_n, B_n, C_n, D_n$  とする。さらに  $R_n$  は次の条件(i), (ii)を満たすとする。

(i) 正方形  $R_0$  の頂点は  $A_0(0, 0), B_0(1, 0), C_0(1, 1), D_0(0, 1)$  である。

(ii)  $A_{n+1} = C_n$  で、点  $D_{n+1}$  は辺  $C_nD_n$  上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $A_2, A_3, A_4$  の座標を  $r$  を用いて表せ。
- (2)  $A_{4n}$  の座標を  $(x_n, y_n)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) とおく。  $x_{n+1} - x_n$  および  $y_{n+1} - y_n$  を  $r, n$  の式で表せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  を  $r$  を用いて表せ。 [2011]

■ 微分法 |||

1 座標平面上の円  $C$  は、点  $(0, 0)$  を通り、中心が直線  $x + y = 0$  上にあり、さらに双曲線  $xy = 1$  と接する。このとき、円  $C$  の方程式を求めよ。ただし、円と双曲線がある点で接するとは、その点における円の接線と双曲線の接線が一致することをいう。

[2019]

2  $a$  を正の数とし、 $t$  は  $0 \leq t < a$  を満たす数とする。点  $(t, (t-a)^2)$  における曲線  $y = (x-a)^2$  の接線と、 $x$  軸および  $y$  軸で囲まれた領域を  $D(t)$  とする。

- (1) 領域  $D(t)$  の表す図形の面積を  $a$  および  $t$  を用いて表せ。
- (2) 領域  $D(t)$  の表す図形の面積の最大値、およびそのときの  $t$  の値を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $s$  は  $0 \leq s \leq t$  を満たす数とする。領域  $D(t)$  と領域  $D(s)$  を合わせてできる領域  $D(t) \cup D(s)$  の表す図形の面積の最大値、およびそのときの  $s$  と  $t$  の値を  $a$  を用いて表せ。 [2018]

**3** 曲線  $C$  は曲線  $y = -e^x$  を平行移動したものとする。  $C$  と曲線  $y = e^{-x}$  は  $x$  座標が  $t$  ( $t \geq 0$ ) である点を共有し、その点で共通の接線をもつとする。  $C$  と  $x$  軸と  $y$  軸とで囲まれた部分の面積を  $S(t)$  とする。

- (1)  $C$  の方程式を求めよ。
- (2)  $S(t)$  を求めよ。
- (3)  $S(t)$  が最大となるような  $t$  の値がただ 1 つ存在することを示せ。 [2017]

**4** 以下の問いに答えよ。

- (1)  $x > 0$  において、不等式  $\log x < x$  を示せ。
- (2)  $1 < a < b$  のとき、不等式  $\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b} < \frac{b-a}{a(\log a)^2}$  を示せ。
- (3)  $x \geq e$  において、不等式  $\int_e^x \frac{dt}{t \log(t+1)} \geq \log(\log x) + \frac{1}{2(\log x)^2} - \frac{1}{2}$  を示せ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。 [2016]

**5**  $c$  を実数とし、曲線  $y = x^2 + c$  ……①と曲線  $y = \log x$  ……②の共通接線を考える。

- (1) 共通接線の本数を、実数  $c$  の値によって答えよ。
- (2) 共通接線が 1 本であるとき、その接線と①、②それぞれとの接点を求めよ。
- (3) 共通接線が 1 本であるとき、①、②と  $x$  軸で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2015]

**6** 関数  $f(x) = e^{\sin x}(\sin 2x - 2\cos x)$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$  の値を求めよ。
- (2)  $0 \leq x < 2\pi$  における  $f(x)$  の最大値を求めよ。
- (3)  $x \geq 0$  のとき  $(x^2 + 2x - 2)e^x \geq f(x)$  が成り立つことを示せ。 [2014]

7  $f(x) = \frac{1}{x}$  とし、また実数  $a, b$  について  $g(x) = e^{-ax+b}$  とおく。ただし、 $e$  は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

- (1)  $x > 0$  においてつねに  $f(x) \geq g(x)$  が成り立つために  $a, b$  が満たすべき条件を求めよ。
- (2)  $y = g(x)$  のグラフが点  $(1, 1)$  で  $y = f(x)$  のグラフと接するように  $a, b$  を定めたときの  $g(x)$  を  $g_1(x)$  とする。同様に  $y = g(x)$  のグラフが点  $(2, \frac{1}{2})$  で  $y = f(x)$  のグラフと接するように  $a, b$  を定めたときの  $g(x)$  を  $g_2(x)$  とする。このとき、 $y = g_1(x)$  と  $y = g_2(x)$  の交点を求めよ。
- (3) (2) で定めた  $y = g_1(x)$ ,  $y = g_2(x)$  と  $y = f(x)$  の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2009]

8  $e$  を自然対数の底とし、 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\log_e|x| + \frac{3}{4}$  とする。

- (1) 曲線  $y = f(x)$  の 2 接線で、互いに垂直であるものをすべて求めよ。
- (2) 直線  $l$  は曲線  $y = f(x)$  の接線で、原点を通りかつ傾きが正とする。 $l$  の方程式は  $y = x$  であることを示せ。
- (3) 曲線  $y = f(x)$  と 2 直線  $x = e$ ,  $y = x$  で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2007]

9  $a \neq 0, b \neq 0$  とする。 $f(x) = a\cos^2x + b\cos x + c$  について、 $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸と原点で接しているとする。

- (1)  $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸と接する点の  $x$  座標をすべて求めよ。
- (2) さらに  $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$  が成り立っているとき、 $f(x) = 0$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) を満たす  $x$  の値をすべて求めよ。 [2006]

10 3 次関数  $f(x)$  および 2 次関数  $g(x)$  を、 $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = ax^2 + bx + c$  とし、 $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフが点  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$  で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1)  $b, c$  を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $f(x) - g(x)$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最小値を  $a$  を用いて表せ。 [2004]



**11** 実数  $t$  に対して、 $u$  の 3 次方程式  $u^3 - 3u + 2t = 0$  の実数解のうちで絶対値が最小のものを  $f(t)$  とする。

- (1) 媒介変数  $t$  を用いて、 $x = f(t)$ ,  $y = -2t$  ( $t$  は実数) と表される曲線を図示せよ。  
 (2) 関数  $f(t)$  が連続でない  $t$  の値を求め、 $f(t)$  のグラフをかけ。 [2003]

**12**  $a$  は定数とし、 $n$  は 2 以上の整数とする。関数  $f(x) = ax^n \log x - ax$  ( $x > 0$ ) の最小値が  $-1$  のとき、定積分  $\int_1^e f(x) dx$  の値を  $n$  と自然対数の底  $e$  を用いて表せ。

[2003]

**13**  $a, b$  を整数とする。3 次関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$  が、 $0 < x < 2$  の範囲で極大値と極小値をもつとき、 $a, b$  の値を求めよ。

[2001]

**14**  $a, b$  を実数、 $e$  を自然対数の底とする。すべての実数  $x$  に対して  $e^x \geq ax + b$  が成立するとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  の満たすべき条件を求めよ。  
 (2) 次の定積分  $\int_0^1 (e^x - ax - b) dx$  の最小値と、そのときの  $a, b$  の値を求めよ。

[2001]

**15** 与えられた実数  $a, b$  のうち、大きくない方を  $\min\{a, b\}$  で表すことにする。関数  $f(x) = x^3 - 7x$  に対して  $g(x) = \min\{f(x+1), f(x-1)\}$  とおく。

- (1)  $0 \leq x \leq 3$  のとき、 $y = g(x)$  が最大となる  $x$  の値、および最小となる  $x$  の値をそれぞれ求めよ。  
 (2) 2 つのグラフ  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  で囲まれた部分の面積を求めよ。 [1998]

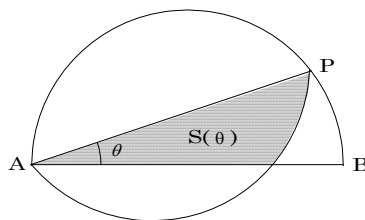
**16** AB を直径とする半径 1 の半円がある。P を半円周上の動点とし、 $\angle PAB = \theta$  とおくと、P は  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  をみたく範囲を動く。直径 AB と弦 AP と弧 PB で囲まれた部分の面積を  $T(\theta)$  で表す。

(1)  $T(\theta)$  を求めよ。

(2) P が半円周上を  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  の範囲で動くとき、

右図のように、線分 AP を折り目にしてこの半円を折り重ね、重なった部分の面積を  $S(\theta)$  とおく。

このとき  $S(\theta)$  を  $T(\theta)$  と  $T(2\theta)$  を用いて表せ。



(3) (2)の  $S(\theta)$  の最大値を与える  $\theta$  の値を  $\alpha$  とするとき、 $\cos 2\alpha$  の値を求めよ。

[1998]

■ 積分法 |||||

**1**  $n$  を正の整数とする。

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2} \theta d\theta$  を  $n$  の式で表せ。

(2)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7 \theta d\theta$  を求めよ。

[2019]

**2** (1) 次の定積分を求めよ。  $f(x) = \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x) dt$

(2) (1)で求めた  $x$  の関数  $f(x)$  に対し、極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  を求めよ。

[2018]

**3** 0 以上の整数  $n$  に対して、整式  $T_n(x)$  を

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 0 以上の任意の整数  $n$  に対して、 $\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$  となることを示せ。

(2) 定積分  $\int_{-1}^1 T_n(x) dx$  の値を求めよ。

[2015]

4  $n, m$  を 0 以上の整数とし,  $I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$  とおく。このとき, 以下

の問いに答えよ。

(1)  $n \geq 2$  のとき,  $I_{n,m}$  を  $I_{n-2,m+2}$  を使って表せ。

(2) 次の式  $I_{2n+1, 2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$  を示せ。

(3) 次の式  $\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{mC_0}{n+1} - \frac{mC_1}{n+2} + \dots + (-1)^m \frac{mC_m}{n+m+1}$  を示せ。ただし

$0! = 1$  とする。

[2014]

5 以下の問いに答えよ。

(1) 関数  $f(x)$  は第 2 次導関数  $f''(x)$  が連続で, ある  $a < b$  に対して,  $f'(a) = f'(b) = 0$  を満たしているものとする。このとき

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \left( \frac{a+b}{2} - x \right) f''(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が, 時刻 0 で発進後, 距離  $L$  だけ離れた次の信号に時刻  $T$  で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が  $\frac{4L}{T^2}$  以上である瞬間があることを示せ。 [2012]

6  $f(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ ,  $g(x) = \log(1+x^2)$  ( $x$  は実数) とおく。ただし,  $\log x$  は

$x$  の自然対数を表す。

(1)  $\int_0^1 f(x) dx$  の値を求めよ。

(2)  $x > 0$  のとき  $f(x) > g(x)$  であることを証明せよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n \right\}$  の値を求めよ。 [2011]

7  $a, b$  は実数とする。関数  $f(x)$  は,  $f(x) = a \sin x + b \cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt$  を

満たし, かつ  $-\pi \leq x \leq \pi$  における最大値は  $2\pi$  である。このとき,  $\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$  を

最小にする  $a, b$  の値と, その最小値を求めよ。

[2010]

8 次の問いに答えよ。

(1) 置換  $x = \tan^3 \theta$  により、定積分  $\int_1^{3\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} \right) dx$  を求めよ。

(2)  $t > 1$  に対して、 $g(t) = \int_1^t \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx$  と定める。 $t \rightarrow \infty$  のとき  $g(t) - at^b$  が収束するような正の実数  $a, b$  を求めよ。 [2009]

9  $x$  の関数  $f(x) = \int_{x-2}^{x+2} |y(y-5)| dy$  の  $2 \leq x$  における最小値を求めよ。 [2007]

10 関数  $f(x) = 3 \cos 2x + 7 \cos x$  について、 $\int_0^\pi |f(x)| dx$  を求めよ。 [2005]

11  $n$  を 2 以上の整数とし、 $I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt dt$  ( $x \geq 0$ ) と定める。

(1)  $n = 2$  のとき、 $I(x)$  の最大値を求めよ。

(2)  $I(x)$  の最大値が  $\frac{n}{n^2 - 1}$  であるならば、 $n$  は偶数であることを証明せよ。 [2002]

12  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  に対し、 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$  ( $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ )、 $f_n(0) = n$  で与えられる関数の列  $\{f_n(x)\}$  と  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$  からなる数列  $\{I_n\}$  とがある。

(1)  $f_n(x)$  は  $x = 0$  で連続であることを示せ。

(2)  $I_{n+1} - I_{n-1}$  を  $n$  の式で表せ。

(3)  $S_m = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{2k-1}$  とするとき、 $I_n$  を  $S_m$  を用いて表せ。 [1999]

■ 積分の応用 |||||

1 2点  $O(0, 0)$ ,  $A(0, 2)$  を直径とする円周から  $O$  を除いた部分を点  $Q$  が動く。点  $A$  を通り  $x$  軸に平行な直線と直線  $OQ$  の交点を  $R$  とする。点  $Q$  を通り  $x$  軸と平行な直線と、点  $R$  を通り  $y$  軸と平行な直線との交点を  $P$  とする。点  $P$  の軌跡を  $C$  とする。

- (1)  $C$  の方程式を求めよ。
- (2) 正の実数  $a$  に対して、 $C$  と  $x$  軸と 2 直線  $x = a$ ,  $x = -a$  によって囲まれる図形を、 $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $V(a)$  とする。このとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$  を求めよ。 [2016]

2  $a$  は 0 でない実数とする。直線  $y = ax$  と曲線  $y = x \log(x + 1)$  で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2013]

3 関数  $y = \log|x|$  のグラフ  $G$  上に動点  $A, B$  があり、それぞれの  $x$  座標を  $a, b$  とする。 $A$  における接線と  $B$  における接線が直交し、 $a > 0$  であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $ab$  を求めよ。
- (2) 線分  $AB$  の中点の存在範囲を求めよ。
- (3) 直線  $AB$  が点  $(1, 0)$  を通り、 $a \neq 1$  を満たすとき、直線  $AB$  と  $G$  で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2008]

4 媒介変数表示  $x = \cos \theta$ ,  $y = \cos^2 \theta \cdot \tan \frac{\theta}{2}$  (ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) が表す曲線を  $C$  とする。

- (1)  $y$  を最大にする  $\theta$  の値を  $\alpha$  とするとき、 $\cos \alpha$  の値を求めよ。
- (2) 曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2007]

5 関数  $f(x)$  を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

また、 $g(x) = -x^2 + ax + b$  とする。 $y = g(x)$  のグラフが  $y = f(x)$  のグラフと 2 点で接するとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  の値を求めよ。  
 (2)  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。 [2006]

6 以下において  $\log x$  は自然対数を表す。

- (1)  $a > \frac{1}{e}$  のとき、 $x > 0$  に対し  $x^a > \log x$  であることを示せ。  
 (2)  $a > \frac{1}{e}$  のとき、 $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = 0$  が成り立つことを示せ。  
 (3)  $0 < t < \frac{1}{e}$  として、曲線  $y = x \log x$  ( $t \leq x \leq 1$ ) および  $x$  軸と直線  $x = t$  で囲まれた部分を、 $y$  軸のまわりに回転して得られる図形の体積を  $V(t)$  とする。このとき、 $\lim_{t \rightarrow +0} V(t)$  を求めよ。 [2005]

7  $xy$  平面上の動点  $A$  は原点  $O(0, 0)$  を出発し、 $x$  軸上を点  $(2, 0)$  まで動くとする。また動点  $B$  は点  $(0, 1)$  を出発し、 $AB = OB = 1$  なる条件を満たしながら第 1 象限を点  $(1, 0)$  まで動くとする。点  $P$  は線分  $AB$  上の点で  $2BP = OA$  を満たす。

- (1)  $\angle AOB = \theta$  とするとき、点  $P$  の座標を  $\theta$  で表せ。ただし点  $A$  が点  $O$  と一致するときを除く。  
 (2) 点  $P$  の軌跡と  $x$  軸、 $y$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。 [2004]

8 座標空間内の 6 点  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 0, 1)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ ,  $D(0, 0, 0)$ ,  $E(1, 0, 0)$ ,  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  がある。動点  $P$  は  $A$  を出発し,  $B, C, A$  の順に  $\triangle ABC$  の周を一定の速さで一周する。 $P$  と同時に動点  $Q$  は  $E$  を出発し,  $F, D, E$  の順に  $\triangle DEF$  の周を  $P$  と同じ速さで一周する。線分  $PQ$  が動いて作られる図形と  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DEF$  によって囲まれる立体を  $K$  とする。

- (1)  $AP = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) のとき, 点  $Q$  の座標を  $t$  で表せ。
- (2) (1) の  $P, Q$  に対して, 線分  $PQ$  と平面  $z = a$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) との交点  $R(t)$  の座標を求めよ。
- (3) 平面  $z = a$  ( $0 \leq a \leq 1$ ) による  $K$  の切り口の面積  $S(a)$  を求めよ。
- (4)  $K$  の体積  $V$  を求めよ。 [2000]

9 長さ 1 の棒  $PQ$  が座標平面上にある。 $P$  は  $A(1, 0)$  から出発し,  $x$  軸上を原点  $O$  まで動き,  $Q$  は  $O$  を出発し,  $B(0, 1)$  まで  $y$  軸上を動く。この棒の上に動点  $R$  があり, つねに  $PR = AP$  であるとする。

- (1)  $\angle OQP = \theta$  としたとき,  $R$  の座標を  $\theta$  で表せ。
- (2)  $R$  が動いてできる曲線と  $x$  軸,  $y$  軸によって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2000]

# 分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用



**問題**

$t$  を 0 以上の実数とし、 $O$  を原点とする座標平面上の 2 点  $P(p, p^2)$ ,  $Q(q, q^2)$  で 3 つの条件  $PQ=2$ ,  $p < q$ ,  $p+q=\sqrt{t}$  を満たすものを考える。 $\triangle OPQ$  の面積を  $S$  とする。ただし、点  $P$  または点  $Q$  が原点  $O$  と一致する場合は  $S=0$  とする。

- (1)  $p$  と  $q$  をそれぞれ  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $S$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $S=1$  となるような  $t$  の個数を求めよ。

[2017]

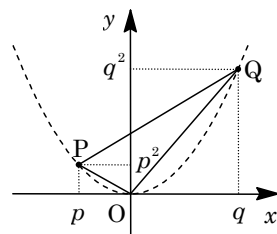
**解答例**

- (1) 点  $P(p, p^2)$ ,  $Q(q, q^2)$  ( $p < q$ ) に対して、 $PQ=2$  より、  
 $(q-p)^2 + (q^2 - p^2)^2 = 4$ ,  $(q-p)^2 \{1 + (q+p)^2\} = 4$   
 ここで、 $p+q=\sqrt{t}$  ( $t \geq 0$ ) ……①より、

$$(q-p)^2(1+t) = 4, \quad q-p = \frac{2}{\sqrt{1+t}} \dots\dots\dots ②$$

$$\text{①②より, } q = \frac{1}{2} \left( \sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{1+t}} \right) = \frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{1}{\sqrt{1+t}} \dots\dots\dots ③$$

$$p = \frac{1}{2} \left( \sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{1+t}} \right) = \frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \dots\dots\dots ④$$



- (2)  $\triangle OPQ$  の面積を  $S$  とすると、③④より、

$$S = \frac{1}{2} |pq^2 - p^2q| = \frac{1}{2} |pq(q-p)| = \frac{1}{2} \left| \left( \frac{t}{4} - \frac{1}{1+t} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{1+t}} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+t}} \left| \frac{t^2+t-4}{4(1+t)} \right| = \frac{|t^2+t-4|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

- (3) 条件より  $S=1$  なので、 $\frac{|t^2+t-4|}{4(1+t)\sqrt{1+t}} = 1$  となり、

$$|t^2+t-4| = 4(1+t)\sqrt{1+t}, \quad (t^2+t-4)^2 = 16(1+t)^3 \dots\dots\dots ⑤$$

⑤を展開してまとめると、 $t^4 - 14t^3 - 55t^2 - 56t = 0$  となり、

$$t = 0 \dots\dots\dots ⑥, \quad t^3 - 14t^2 - 55t - 56 = 0 \dots\dots\dots ⑦$$

ここで、 $f(t) = t^3 - 14t^2 - 55t - 56$  とおくと、

$$f'(t) = 3t^2 - 28t - 55 = (t-11)(3t+5)$$

すると、 $f(t)$  の増減は右表のようになり、

$t > 0$  において⑦の解はただ 1 つ存在する。

$t$	0	…	11	…
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	-56	↘		↗

以上より、⑤の解すなわち  $S=1$  となる  $t$  の個数は、⑥を合わせて 2 である。

**コメント**

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では、同値変形とはいうものの、両辺を 2 乗して 4 次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが……。

## 問題

座標平面上に、原点を中心とする半径 1 の円と、その円に外接し各辺が  $x$  軸または  $y$  軸に平行な正方形がある。円周上の点  $(\cos\theta, \sin\theta)$  (ただし  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする  $\theta$  を求めよ。 [2014]

## 解答例

原点を中心とする半径 1 の円周上の点  $(\cos\theta, \sin\theta)$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) における接線の方程式は、

$$x \cos\theta + y \sin\theta = 1$$

直線  $x=1$  と連立して、 $y \sin\theta = 1 - \cos\theta$ ,  $y = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$

そこで、 $L = AP + PB + BA$  とすると、 $\angle PAB = \theta$  となることを用いて、

$$\begin{aligned} L &= \left(1 - \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right) \left(1 + \tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta + 1}{\cos\theta} \\ &= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{\sin\theta \cos\theta} = \frac{1 + 2\sin\theta \cos\theta - 1}{\sin\theta \cos\theta} = 2 \end{aligned}$$

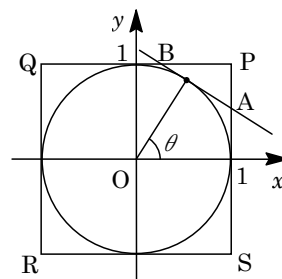
また、 $\triangle APB$  の面積を  $S$  とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \tan\theta = \frac{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}{2\sin^2\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}{2\sin\theta \cos\theta} = \frac{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1} \dots\dots(*) \end{aligned}$$

ここで、 $t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$  とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より  $1 < t \leq \sqrt{2}$  となり、(\*)から、

$$S = \frac{(t-1)^2}{t^2-1} = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}$$

よって、 $S$  が最大となるのは、 $t = \sqrt{2}$  すなわち  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のときである。



## コメント

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと、円と正方形の位置関係について、ミスをしてしまいそうです。

問題

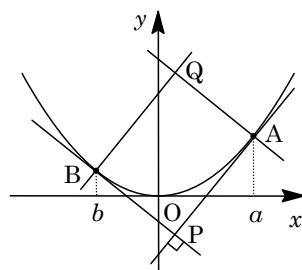
$a, b$  を実数とし、 $a > 0$  とする。放物線  $y = \frac{x^2}{4}$  上に 2 点  $A(a, \frac{a^2}{4})$ ,  $B(b, \frac{b^2}{4})$  をとる。点  $A$  における放物線の接線と法線をそれぞれ  $l_A$  と  $n_A$ , 点  $B$  における放物線の接線と法線をそれぞれ  $l_B$  と  $n_B$  とおいたとき、 $l_A$  と  $l_B$  が直交しているものとする。2 つの接線  $l_A, l_B$  の交点を  $P$  とし、2 つの法線  $n_A, n_B$  の交点を  $Q$  とする。

- (1)  $b$  を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $P, Q$  の座標を  $a$  を用いて表せ。
- (3) 長方形  $AQBP$  の面積が最小となるような  $a$  の値と、そのときの面積を求めよ。

[2013]

解答例

- (1)  $y = \frac{x^2}{4}$  より  $y' = \frac{x}{2}$  となり、点  $A(a, \frac{a^2}{4})$  における接線  $l_A$ ,  $B(b, \frac{b^2}{4})$  における接線  $l_B$  の傾きは、それぞれ  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{b}{2}$  である。



ここで、 $l_A$  と  $l_B$  が直交していることより、

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = -1, \quad b = -\frac{4}{a} \dots\dots\dots ①$$

- (2) まず、 $l_A : y - \frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}(x - a)$  より、 $y = \frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} \dots\dots\dots ②$

$$l_B : y = \frac{b}{2}x - \frac{b^2}{4} \dots\dots\dots ③$$

②③を連立すると、 $\frac{a}{2}x - \frac{a^2}{4} = \frac{b}{2}x - \frac{b^2}{4}$  より、 $(a - b)x = \frac{a^2 - b^2}{2}$  となり、

$$x = \frac{a + b}{2}, \quad y = \frac{a}{2} \cdot \frac{a + b}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{ab}{4}$$

①を代入すると、 $x = \frac{a}{2} - \frac{2}{a}$ ,  $y = -1$  より、 $P(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}, -1)$  となる。

また、四角形  $AQBP$  は長方形なので、対角線  $AB$  の中点  $(\frac{a + b}{2}, \frac{a^2 + b^2}{8})$  と対角線  $PQ$  の中点が一致することより、 $Q(x, y)$  とおくと、①から、

$$x = \frac{a + b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{2}{a}, \quad y = 2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{8} - (-1) = \frac{1}{4}(a^2 + \frac{16}{a^2}) + 1 = \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + 1$$

よって、 $Q(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}, \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + 1)$  となる。

(3) 長方形 AQBP の面積を  $S$  とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + 1 - (-1) \right\} (a-b) = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} + 2 \right) \left( a + \frac{4}{a} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( a^2 + \frac{16}{a^2} + 8 \right) \left( a + \frac{4}{a} \right) = \frac{1}{8} \left( a + \frac{4}{a} \right)^3 \end{aligned}$$

ここで、相加平均と相乗平均の関係より、 $a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{4} = 4$

なお、等号は、 $a = \frac{4}{a}$  すなわち  $a = 2$  のとき成立する。

以上より、 $S$  は  $a = 2$  のとき最小値  $\frac{1}{8} \cdot 4^3 = 8$  をとる。

### コメント

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが、長方形の性質を利用して、計算量を減らしています。

**問題**

放物線  $y = x^2$  上の点  $(a, a^2)$  における接線を  $l_a$  とする。

- (1) 直線  $l_a$  が不等式  $y > -x^2 + 2x - 5$  の表す領域に含まれるような  $a$  の範囲を求めよ。
- (2)  $a$  が(1)で求めた範囲を動くとき、直線  $l_a$  が通らない点  $(x, y)$  全体の領域  $D$  を図示せよ。
- (3) 連立不等式  $(y - x^2)(y + x^2 - 2x + 5) \leq 0$ ,  $y(y + 5) \leq 0$  の表す領域を  $E$  とする。  
 $D$  と  $E$  の共通部分の面積を求めよ。 [2012]

**解答例**

- (1)  $y = x^2$  に対して、 $y' = 2x$  となり、点  $(a, a^2)$  における接線  $l_a$  の方程式は、

$$y - a^2 = 2a(x - a), \quad y = 2ax - a^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

直線  $l_a$  が不等式  $y > -x^2 + 2x - 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$  の表す領域に含まれることより、 $\textcircled{1}$  を  $\textcircled{2}$  に代入して、

$$2ax - a^2 > -x^2 + 2x - 5, \quad x^2 + 2(a - 1)x - a^2 + 5 > 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$  が任意の  $x$  に対して成立することより、

$$D/4 = (a - 1)^2 - (-a^2 + 5) = 2(a^2 - a - 2) < 0$$

すると、 $(a - 2)(a + 1) < 0$  より、 $-1 < a < 2$  である。

- (2) 直線  $l_a$  が通らない点  $(x, y)$  は、 $\textcircled{1}$  より、 $a^2 - 2xa + y = 0$  が  $-1 < a < 2$  に実数解をもたない条件として求めることができる。

ここで、 $f(a) = a^2 - 2xa + y = (a - x)^2 - x^2 + y$  とおくと、

- (i)  $x \leq -1$  のとき

(a)  $f(-1) = 1 + 2x + y \geq 0$  より、 $y \geq -2x - 1$

(b)  $f(2) = 4 - 4x + y \leq 0$  より、 $y \leq 4x - 4$

- (ii)  $-1 < x < 2$  のとき

(a)  $f(x) = -x^2 + y > 0$  より、 $y > x^2$

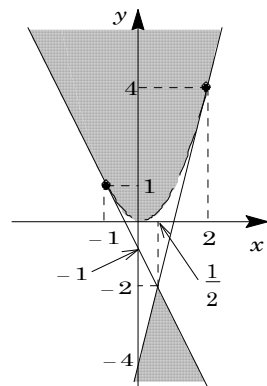
(b)  $f(-1) = 1 + 2x + y \leq 0$ ,  $f(2) = 4 - 4x + y \leq 0$  より、  
 $y \leq -2x - 1$ ,  $y \leq 4x - 4$

- (iii)  $x \geq 2$  のとき

(a)  $f(-1) = 1 + 2x + y \leq 0$  より、 $y \leq -2x - 1$

(b)  $f(2) = 4 - 4x + y \geq 0$  より、 $y \geq 4x - 4$

(i)~(iii)より、点  $(x, y)$  全体の領域  $D$  は右図の網点部となる。ただし、破線の境界線のみ領域に含まない。



(3) 不等式  $(y-x^2)(y+x^2-2x+5) \leq 0$  を変形すると、  
 $x^2 > -x^2 + 2x - 5$  より、

$$-x^2 + 2x - 5 \leq y \leq x^2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

また、 $y(y+5) \leq 0$  より、

$$-5 \leq y \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

よって、連立不等式④⑤の表す領域  $E$  は右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。

さて、直線  $y = -2x - 1$  と放物線  $y = -x^2 + 2x - 5$  を連立すると、

$$-2x - 1 = -x^2 + 2x - 5, \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

重解  $x = 2$  をもつことより、 $x = 2$  で接する。

また、直線  $y = 4x - 4$  と放物線  $y = -x^2 + 2x - 5$  を連立すると、

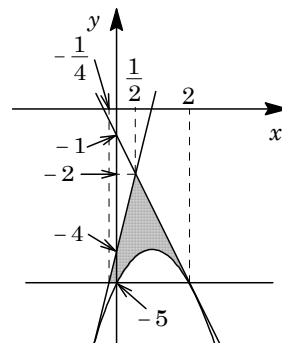
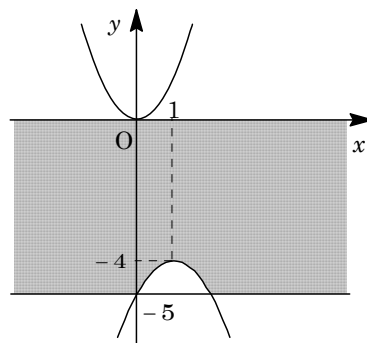
$$4x - 4 = -x^2 + 2x - 5, \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

重解  $x = -1$  をもつことより、 $x = -1$  で接する。

これより、領域  $D$  と  $E$  の共通部分を図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。

そこで、この共通部分の面積を  $S$  とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{1}{4} \right) (-2 + 5) - \int_0^2 (-x^2 + 2x - 5 + 5) dx \\ &= \frac{27}{8} - \int_0^2 -x(x-2) dx = \frac{27}{8} - \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{49}{24} \end{aligned}$$



### コメント

計算量の多い問題で、時間はかなり必要です。(2)はオーソドックスに解きましたが、図形的に解くのが出題者の意図かもしれません。

**問題**

$a$  を 1 より大きい実数とし、座標平面上に、点  $O(0, 0)$ 、 $A(1, 0)$  をとる。曲線  $y = \frac{1}{x}$  上の点  $P(p, \frac{1}{p})$  と、曲線  $y = \frac{a}{x}$  上の点  $Q(q, \frac{a}{q})$  が、3 条件

(i)  $p > 0, q > 0$     (ii)  $\angle AOP < \angle AOQ$

(iii)  $\triangle OPQ$  の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき、 $\tan \angle POQ$  の最大値が  $\frac{3}{4}$  となるような  $a$  の値を求めよ。

[2010]

**解答例**

$P(p, \frac{1}{p})$ 、 $Q(q, \frac{a}{q})$  に対して、 $\angle AOP = \alpha$ 、 $\angle AOQ = \beta$

とおくと、 $\tan \alpha = \frac{1}{p^2}$ 、 $\tan \beta = \frac{a}{q^2}$  となる。

条件より、 $\alpha < \beta$  なので、 $\tan \alpha < \tan \beta$

$$\frac{1}{p^2} < \frac{a}{q^2}, \quad ap^2 - q^2 > 0 \dots\dots\dots \text{①}$$

さて、 $\triangle OPQ$  の面積を  $S$  とすると、①より、

$$S = \frac{1}{2} \left| p \cdot \frac{a}{q} - \frac{1}{p} \cdot q \right| = \frac{1}{2pq} |ap^2 - q^2| = \frac{1}{2pq} (ap^2 - q^2)$$

条件より、 $\frac{1}{2pq} (ap^2 - q^2) = 3$ 、 $ap^2 - q^2 = 6pq \dots\dots\dots \text{②}$

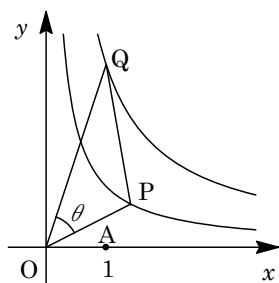
ここで、 $\angle POQ = \theta$  とおくと、 $\theta = \beta - \alpha$  から、

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{\frac{a}{q^2} - \frac{1}{p^2}}{1 + \frac{a}{q^2} \cdot \frac{1}{p^2}} = \frac{ap^2 - q^2}{p^2q^2 + a}$$

②を代入すると、 $\tan \theta = \frac{6pq}{p^2q^2 + a} = \frac{6}{pq + \frac{a}{pq}} \leq \frac{6}{2\sqrt{a}} = \frac{3}{\sqrt{a}}$

等号は、 $pq = \frac{a}{pq}$  すなわち  $pq = \sqrt{a}$  のときに成立する。

よって、 $\tan \theta$  の最大値は  $\frac{3}{\sqrt{a}}$  となり、 $\frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3}{4}$  から、 $a = 16$  である。



**コメント**

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて、微分法の利用という手もありますが、おすすめは前者です。なお、等号の成立する  $p, q$  の値が存在することは明らかなので、記述を省いています。

**問題**

座標平面上に点  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 2)$  をとる。線分  $AB$  上に点  $P$  をとり、 $P$  から  $x$  軸に下ろした垂線を  $PH$ ,  $A$  と  $H$  の中点を  $M$  とする。ただし点  $H$  は  $x$  軸上の点とし、また  $P$  は  $A$  と異なるものとする。 $O$  を原点とし  $\triangle OPM$  を  $O$  を中心に座標平面内で 1 回転するとき、通過する点全体が作る円の面積が最小となるとき点  $P$  の座標を求めよ。 [2009]

**解答例**

線分  $AB$  上の点  $P$  を、 $0 \leq t < 1$  として、

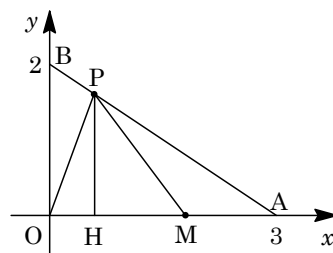
$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} = (3t, 2(1-t))$$

すると、 $P(3t, 2(1-t))$ ,  $H(3t, 0)$ ,  $M(\frac{3t+3}{2}, 0)$

となり、これより、

$$OP^2 = (3t)^2 + 4(1-t)^2 = 13t^2 - 8t + 4$$

$$OM^2 = \frac{9}{4}(t+1)^2$$



さて、 $\triangle OPM$  を  $O$  を中心に回転したときにできる円の面積を  $S$  とすると、

(i)  $13t^2 - 8t + 4 \geq \frac{9}{4}(t+1)^2$  ( $0 \leq t \leq \frac{7}{43}$ ) のとき

このとき、 $OP^2 \geq OM^2$  より、

$$S = \pi OP^2 = \pi(13t^2 - 8t + 4) = \pi \left\{ 13 \left( t - \frac{4}{13} \right)^2 + \frac{36}{13} \right\}$$

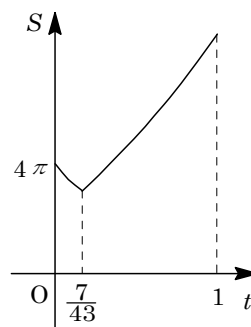
(ii)  $13t^2 - 8t + 4 \leq \frac{9}{4}(t+1)^2$  ( $\frac{7}{43} \leq t < 1$ ) のとき

このとき、 $OP^2 \leq OM^2$  より、

$$S = \pi OM^2 = \frac{9}{4} \pi (t+1)^2$$

(i)(ii) より、 $S$  の値の変化は右図のようになる。

よって、 $t = \frac{7}{43}$  のとき  $S$  は最小となり、このとき  $P$  の座標は、 $(\frac{21}{43}, \frac{72}{43})$  である。



**コメント**

円の半径は  $OP$  または  $OM$  となりますが、この大小関係に注目して場合分けをするところがポイントです。



**問題**

$a, t$  を実数とすると、座標平面において、 $x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$  で定義される図形  $C$  を考える。

- (1) すべての  $t$  に対して  $C$  が円であるような  $a$  の範囲を求めよ。ただし、点は円とみなさないものとする。
- (2)  $a = 4$  とする。  $t$  が  $t > 0$  の範囲を動くとき、  $C$  が通過してできる領域を求め、図示せよ。
- (3)  $a = 6$  とする。  $t$  が  $t > 0$  であって、かつ  $C$  が円であるような範囲を動くとき、  $C$  が通過してできる領域を求め、図示せよ。 [2006]

**解答例**

(1)  $C : x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$  より、

$$(x-t)^2 + (y-t)^2 = 2t^2 - at + 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①が円を表す条件  $2t^2 - at + 4 > 0$  が、すべての  $t$  に対して成立するためには、

$$D = a^2 - 32 < 0, \quad -4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}$$

(2)  $a = 4$  のとき、  $C : x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - 4) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

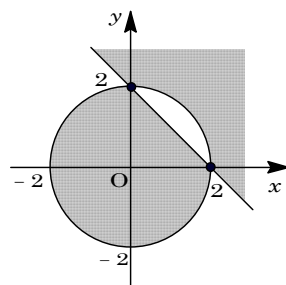
$t$  が  $t > 0$  の範囲を動くとき、  $C$  が通過する領域は、②を  $t$  の方程式としてみたとき、  $t > 0$  の解をもつ条件として表される。

まず、  $2x + 2y - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$  のとき、  $t > 0$  の解をもつのは、  $x^2 + y^2 - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$  の場合だけである。ここで、③④を連立することにより  $(x, y) = (2, 0), (0, 2)$  となり、  $C$  はこの点を通過する。

次に、  $2x + 2y - 4 \neq 0$  のときは、  $t = \frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 4}$  となり、

$$\frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 4} > 0, \quad (x^2 + y^2 - 4)(x + y - 2) > 0$$

よって、  $C$  が通過する領域は右図の網点部となる。ただし、点  $(2, 0), (0, 2)$  以外の境界は含まない。



(3)  $a = 6$  のとき、  $C : x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - 6) = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$

⑤が円を表す条件は、(1)より  $2t^2 - 6t + 4 > 0$  すなわち  $(t-1)(t-2) > 0$  であり、  $t > 0$  と合わせて、  $0 < t < 1, 2 < t \cdots \cdots (*)$  となる。

まず、  $2x + 2y - 6 = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$  のとき、  $t > 0$  の解をもつのは、  $x^2 + y^2 - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$  の場合だけである。ここで、⑥より  $y = -x + 3$  となり、⑦に代入すると、

$$x^2 + (-x + 3)^2 - 4 = 0, \quad 2x^2 - 6x + 5 = 0$$

しかし、  $D/4 = -1$  より実数解をもたず、不適である。

次に、 $2x+2y-6 \neq 0$  のときは、 $t = \frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}$  となり、

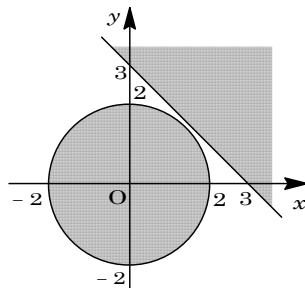
(\*)より、

$$0 < \frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6} < 1 \dots\dots \textcircled{8}, \quad 2 < \frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6} \dots\dots \textcircled{9}$$

⑧の左側の不等式は、

$$(x^2+y^2-4)(x+y-3) > 0 \dots\dots \textcircled{10}$$

不等式⑩を図示すると、右上図の網点部となる。ただし、境界は含まない。



⑧の右側の不等式は、 $(x^2+y^2-4)(2x+2y-6) < (2x+2y-6)^2$

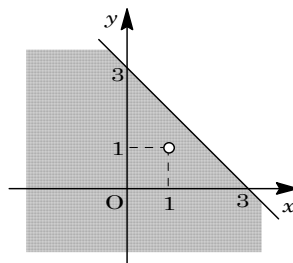
$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-2x-2y+6) < 0$$

$$(x+y-3)\{(x-1)^2+(y-1)^2\} < 0 \dots\dots \textcircled{11}$$

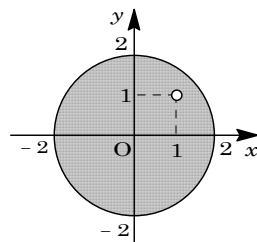
すると、 $(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0$  から、不等式⑪は、

$$(x, y) \neq (1, 1) \text{ かつ } x+y-3 < 0$$

よって、図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は含まない。



まとめると、不等式⑧は、不等式⑩と⑪を連立したものであるなので、その共通部分を領域として図示すると、右下図の網点部となる。ただし、境界および点(1, 1)は含まない。



さらに、⑨を変形すると、

$$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6) > 2(2x+2y-6)^2$$

$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-4x-4y+12) > 0$$

$$(x+y-3)\{(x-2)^2+(y-2)^2\} > 0 \dots\dots \textcircled{12}$$

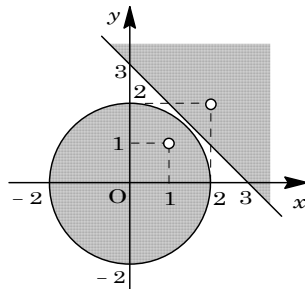
すると、 $(x-2)^2+(y-2)^2 \geq 0$  から、不等式⑫は、

$$(x, y) \neq (2, 2) \text{ かつ } x+y-3 > 0$$

したがって、不等式⑨は、直線  $x+y-3=0$  の上側から、点(2, 2)を除いた領域を表す。

以上より、C が通過する領域は不等式⑧または⑨で表されるので、図示すると右図の網点部となる。

ただし、境界線および2点(1, 1), (2, 2)は含まない。



**コメント**

記述量が多い問題です。ステップを1つずつ踏んで図示していただくのですが、かなりの計算力と忍耐力が要求されます。

**問題**

(1) 次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \geq \log_{10}(-2x^2 + 2x + 1)$$

(2)  $x, y$  が(1)の不等式を満たすとき,  $x + y$  の最大値と最小値を求めよ。 [2005]

**解答例**

(1)  $\log_{10}(-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \geq \log_{10}(-2x^2 + 2x + 1)$  に対して,

まず,  $-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 > 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$-2x^2 + 2x + 1 > 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ のもとで,  $-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \geq -2x^2 + 2x + 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$

ここで,  $\textcircled{2}\textcircled{3}$ より,  $\textcircled{1}$ はつねに成り立つ。

$\textcircled{3}$ を整理して,  $y^2 + (2x - 1)y - (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) \leq 0$

$$y^2 + (2x - 1)y - (x^2 - 1)(x^2 - 2x) \leq 0$$

$$\{y + (x^2 - 1)\}\{y - (x^2 - 2x)\} \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}$ より,  $2x^2 - 2x - 1 < 0$ ,  $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

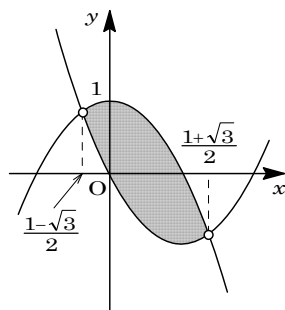
また,  $\textcircled{4}$ で表される領域の境界線の方程式は,

$$y = -x^2 + 1 \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad y = x^2 - 2x \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}\textcircled{6}$ の共有点は,  $-x^2 + 1 = x^2 - 2x$  より,

$$2x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

さて, 点  $(0, -1)$  は  $\textcircled{4}$  を満たさないので,  $\textcircled{2}$ かつ  $\textcircled{4}$  の満たす領域は右図の網点部となる。なお, 白丸以外の境界線は領域に含む。



(2)  $x + y = k \cdots \cdots \textcircled{7}$ とおき, 直線  $\textcircled{7}$  と(1)の領域が共有点をもつ  $k$  の範囲を求める。

まず,  $\textcircled{5}$ と  $\textcircled{7}$ が接するのは,  $x + (-x^2 + 1) = k$ ,  $x^2 - x + k - 1 = 0$

$$D = 1 - 4(k - 1) = 0, \quad k = \frac{5}{4}$$

このとき,  $x = \frac{1}{2}$  となり,  $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  を満たす。

次に,  $\textcircled{6}$ と  $\textcircled{7}$ が接するのは,  $x + (x^2 - 2x) = k$ ,  $x^2 - x - k = 0$

$$D = 1 + 4k = 0, \quad k = -\frac{1}{4}$$

このとき,  $x = \frac{1}{2}$  となり,  $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  を満たす。

以上より,  $x + y$  の最大値は  $\frac{5}{4}$ , 最小値は  $-\frac{1}{4}$  である。

## コメント

④の左辺を因数分解することに、やや時間を取られることを除くと、見かけよりはるかに基本的です。

**問題**

$C$  は、2 次関数  $y = x^2$  のグラフを平行移動した放物線で、頂点が円  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  上にある。原点から  $C$  に引いた接線で傾きが正のものを  $l$  とおく。このとき、 $C$  と  $l$  の接点の  $x$  座標が最大および最小になるときの  $C$  の頂点の座標をそれぞれ求めよ。

[2001]

**解答例**

$0 \leq \theta < 2\pi$  として、円  $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  上の点を  $(\cos \theta, \sin \theta + 2)$  とする。

この点が、放物線  $y = x^2$  を平行移動した放物線の頂点とすると、その方程式は、

$$y = (x - \cos \theta)^2 + \sin \theta + 2$$

ここで、接点を  $(t, (t - \cos \theta)^2 + \sin \theta + 2)$  ( $t > 0$ ) とおく。

すると、 $y' = 2(x - \cos \theta)$  なので、条件より、

$$\frac{(t - \cos \theta)^2 + \sin \theta + 2}{t} = 2(t - \cos \theta)$$

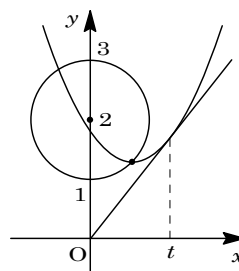
$$(t - \cos \theta)^2 + \sin \theta + 2 = 2t(t - \cos \theta)$$

まとめて、 $t^2 = \cos^2 \theta + \sin \theta + 2 = -\sin^2 \theta + \sin \theta + 3 = -\left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$

$$t > 0 \text{ より、} t = \sqrt{-\left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}}$$

$-1 \leq \sin \theta \leq 1$  より、 $t$  が最大となるのは  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  のとき、すなわち  $\theta = \frac{\pi}{6}$  または  $\theta = \frac{5\pi}{6}$  のときである。このとき頂点の座標は、 $(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} + 2) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$  または  $(\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6} + 2) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$  となる。

また、 $t$  が最小となるのは  $\sin \theta = -1$  のとき、すなわち  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  のときである。このとき頂点の座標は、 $(\cos \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2} + 2) = (0, 1)$  となる。



**コメント**

円周上の点をパラメータ表示して、放物線の方程式を作りました。なお、最大となる場合が 2 つありましたが、問題文を読んだときには見抜けませんでした。

**問題**

三角形 ABC は  $AB + AC = 2BC$  を満たしている。また、角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 $AD = 15$  である。さらに、三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)  $\theta = \angle BAD$  とするとき  $\sin \theta$  の値を求めよ。また、 $A = \angle BAC$  とするとき、 $\sin A$  と  $\cos A$  の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。 [2019]

**解答例**

(1)  $\triangle ABC$  に対して、 $AB = c$ 、 $BC = a$ 、 $CA = b$  とおく。また、 $\angle A$  の二等分線と辺 BC の交点を D として、

$$b + c = 2a \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad AD = 15 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて、 $\triangle ABC$  は内接円の半径が 4 より、その面積を  $S$  とおくと、 $\textcircled{1}$ より、

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot 4 = 2 \cdot 3a = 6a \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $\theta = \angle BAD = \angle CAD$  から、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ を用いて、

$$S = \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \theta + \frac{1}{2}c \cdot AD \sin \theta = \frac{1}{2}(b + c) \cdot 15 \sin \theta = 15a \sin \theta \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より、 $15a \sin \theta = 6a$  となり、 $\sin \theta = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

すると、 $A = 2\theta$  から、 $\cos A = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \frac{4}{25} = \frac{17}{25} \cdots \cdots \textcircled{5}$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{17}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{(25+17)(25-17)}}{25} = \frac{4\sqrt{21}}{25} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

(2)  $\textcircled{6}$ より、 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{2\sqrt{21}}{25}bc$  となり、 $\textcircled{3}$ に代入すると、

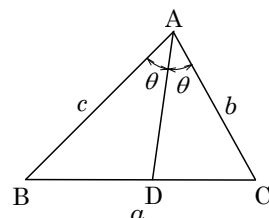
$$\frac{2\sqrt{21}}{25}bc = 6a, \quad bc = \frac{75}{\sqrt{21}}a = \frac{25\sqrt{21}}{7}a \cdots \cdots \textcircled{7}$$

また、 $\triangle ABC$  に余弦定理を適用して、 $\textcircled{1}\textcircled{5}$ を利用すると、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b + c)^2 - 2bc - 2bc \cdot \frac{17}{25} = 4a^2 - \frac{84}{25}bc \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}\textcircled{8}$ より、 $a^2 = 4a^2 - \frac{84}{25} \cdot \frac{25\sqrt{21}}{7}a$  となり、 $3a^2 = 12\sqrt{21}a$  から、

$$BC = a = 4\sqrt{21}$$



**コメント**

三角比の応用問題です。試行錯誤が少し必要ですが、(1)の結論と(2)のプロセスとの繋がりを見つめるのがポイントになっています。

**問題**

1 辺の長さが 3 の正四面体  $OABC$  において、辺  $BC$  を  $1:2$  に内分する点を  $D$  とする。また、辺  $OC$  上に点  $E$  をとり、 $CE=t$  とする。

- (1)  $AD$  の長さを求めよ。
- (2)  $\cos\angle DAE$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $\triangle ADE$  の面積が最小になるときの  $t$  の値とそのときの面積を求めよ。 [2013]

**解答例**

- (1)  $\triangle ABD$  に余弦定理を適用すると、

$$AD^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 7$$

よって、 $AD = \sqrt{7}$  となる。

- (2)  $\triangle ACE$  に余弦定理を適用すると、

$$AE^2 = 3^2 + t^2 - 2 \cdot 3 \cdot t \cdot \cos 60^\circ = t^2 - 3t + 9$$

また、 $\triangle CDE$  に余弦定理を適用すると、

$$DE^2 = 2^2 + t^2 - 2 \cdot 2 \cdot t \cdot \cos 60^\circ = t^2 - 2t + 4$$

さらに、 $\triangle ADE$  に余弦定理を適用すると、

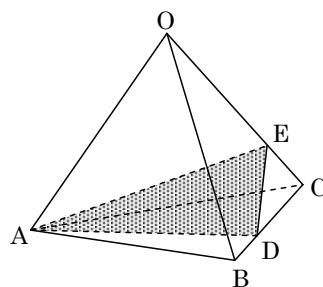
$$\cos\angle DAE = \frac{7 + (t^2 - 3t + 9) - (t^2 - 2t + 4)}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}} = \frac{12 - t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}}$$

- (3) (2)より、 $\sin\angle DAE = \sqrt{1 - \frac{(12-t)^2}{28(t^2 - 3t + 9)}} = \frac{\sqrt{27t^2 - 60t + 108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}}$

すると、 $\triangle ADE$  の面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{7} \sqrt{t^2 - 3t + 9} \cdot \frac{\sqrt{27t^2 - 60t + 108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{9t^2 - 20t + 36} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{9\left(t - \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{224}{9}} \end{aligned}$$

よって、 $S$  は  $t = \frac{10}{9}$  のとき、最小値  $\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{224}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$  をとる。



**コメント**

三角比の空間図形への適用問題です。基本的な定理の確認となっています。

**問題**

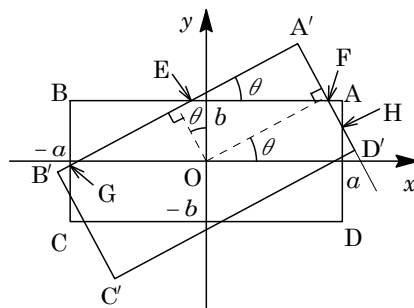
横  $2a$ , 縦  $2b$  の長方形を長方形の中心のまわりに角  $\theta$  だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積  $S(\theta)$  を求めよ。ただし、長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし、長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また、回転角  $\theta$  は  $0$  以上、長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。 [2012]

**解答例**

(i)  $a \neq b$  のとき

まず、 $a > b$  としても一般性を失わない。

右図のように、長方形の中心を原点とし、長方形  $ABCD$  の各辺が座標軸に平行になるようにとる。そして、原点中心に  $\theta$  だけ回転した長方形を  $A'B'C'D'$  とする。



さて、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のときを考える。

そこで、直線  $AB: y = b$  と直線  $A'B': y = x \tan \theta + \frac{b}{\cos \theta}$  を連立して、

$$b = x \tan \theta + \frac{b}{\cos \theta}, \quad x = \frac{b}{\tan \theta} \left( 1 - \frac{1}{\cos \theta} \right) = \frac{b(\cos \theta - 1)}{\sin \theta}$$

よって、直線  $AB$  と直線  $A'B'$  の交点  $E$  は、 $E\left(\frac{b(\cos \theta - 1)}{\sin \theta}, b\right)$  となり、

$$BE = \frac{b(\cos \theta - 1)}{\sin \theta} - (-a) = \frac{a \sin \theta + b \cos \theta - b}{\sin \theta}$$

$$\triangle BEG = \frac{1}{2} BE \cdot BE \tan \theta = \frac{(a \sin \theta + b \cos \theta - b)^2}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

次に、直線  $AB: y = b$  と直線  $A'D': y = -\frac{1}{\tan \theta} \left( x - \frac{a}{\cos \theta} \right)$  を連立して、

$$b = -\frac{1}{\tan \theta} \left( x - \frac{a}{\cos \theta} \right), \quad x = -b \tan \theta + \frac{a}{\cos \theta} = \frac{a - b \sin \theta}{\cos \theta}$$

よって、直線  $AB$  と直線  $A'D'$  の交点  $F$  は、 $F\left(\frac{a - b \sin \theta}{\cos \theta}, b\right)$  となり、

$$AF = a - \frac{a - b \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a \cos \theta + b \sin \theta - a}{\cos \theta}$$

$$\triangle AFH = \frac{1}{2} AF \cdot \frac{AF}{\tan \theta} = \frac{(a \cos \theta + b \sin \theta - a)^2}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

したがって、長方形  $ABCD$  と長方形  $A'B'C'D'$  の共通部分の面積  $S(\theta)$  は、



$$\begin{aligned}
 S(\theta) &= \square ABCD - 2(\triangle BEG + \triangle AFH) \\
 &= 4ab - 2\left\{ \frac{(a \sin \theta + b \cos \theta - b)^2}{2 \sin \theta \cos \theta} + \frac{(a \cos \theta + b \sin \theta - a)^2}{2 \sin \theta \cos \theta} \right\} \\
 &= 4ab - \frac{2(a^2 + b^2 - a^2 \cos \theta - b^2 \cos \theta + 2ab \sin \theta \cos \theta - 2ab \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \\
 &= 4ab - \frac{2(1 - \cos \theta)(a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \dots\dots\dots (*)
 \end{aligned}$$

なお、 $\theta = 0$  のときは、 $S(\theta) = 4ab$  である。

(ii)  $a = b$  のとき

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき、(\*)において  $a = b$  とおくと、

$$\begin{aligned}
 S(\theta) &= 4a^2 - \frac{2(1 - \cos \theta)(2a^2 - 2a^2 \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} = 4a^2 \left\{ 1 - \frac{(1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \right\} \\
 &= \frac{4a^2(\sin \theta + \cos \theta - 1)}{\sin \theta \cos \theta}
 \end{aligned}$$

なお、 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$  のときは、 $S(\theta) = 4a^2$  である。

**コメント**

最初の設定から始める必要があり、そこで時間を費やしてしまいます。上の解答例では座標系を設定しましたが、計算量はかなりハードなものがあります。なお、回転角  $\theta$  は  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  ですが、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  となるのは正方形のときのみです。

## 問題

正方形 ABCD の辺を除く内部に、 $PA \perp PB$  を満たす点 P がある。ベクトル  $\overrightarrow{PC}$  を  $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$  と表すとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $\alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$  とするとき、 $x, y$  を  $\alpha$  を用いて表せ。

(2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき、(1) で求めた  $x, y$  の和  $x + y$  の最大値を求め、そのときの P がどのような点かを答えよ。 [2018]

## 解答例

(1) 正方形 ABCD の内部の点 P は、 $PA \perp PB$  を満たすので、

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$  より、 $|\overrightarrow{PB}| = \alpha |\overrightarrow{PA}| \cdots \cdots \textcircled{2}$

さて、 $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$  から、

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} = x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}$$

まず、 $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|$  より  $|\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}| = |x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}|$  となり、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から、

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + \alpha^2 |\overrightarrow{PA}|^2 = x^2 |\overrightarrow{PA}|^2 + \alpha^2 (y-1)^2 |\overrightarrow{PA}|^2$$

$$1 + \alpha^2 = x^2 + \alpha^2 (y-1)^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  から  $(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) \cdot \{x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}\} = 0$  となり、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から、

$$x |\overrightarrow{PA}|^2 - \alpha^2 (y-1) |\overrightarrow{PA}|^2 = 0, \quad x - \alpha^2 (y-1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さらに、直線 PB に関して、点 A と点 C は反対側にあるので、 $x < 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$  より、 $1 + \alpha^2 = \alpha^4 (y-1)^2 + \alpha^2 (y-1)^2$  となり、 $\alpha^2 (y-1)^2 = 1$

$$y-1 = \pm \frac{1}{\alpha}, \quad x = \pm \alpha \quad (\text{複号同順})$$

すると、 $\textcircled{5}$  より、 $x = -\alpha, y = 1 - \frac{1}{\alpha}$

(2) (1) より、 $x + y = -\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$  となる。

ここで、 $\alpha > 0$  から、相加平均と相乗平均の関係を用いると、 $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$  となり、

$$x + y \leq 1 - 2 = -1$$

等号成立は、 $\alpha = \frac{1}{\alpha}$  すなわち  $\alpha = 1$  のときである。

以上より、 $x + y$  の最大値は  $-1$  であり、このとき、 $\textcircled{2}$  から  $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA}|$  となり、点 P は正方形 ABCD の対角線の交点に位置する。

## コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。座標の設定という方法も考えられます。

**問題**

$n$  を 4 以上の整数とする。座標平面上で正  $n$  角形  $A_1A_2\cdots A_n$  は点  $O$  を中心とする半径 1 の円に内接している。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$ ,  $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$  とし、 $k = 2\cos\frac{2\pi}{n}$  とおく。そして、線分  $A_1A_3$  と線分  $A_2A_4$  との交点  $P$  は線分  $A_1A_3$  を  $t:1-t$  に内分するとする。

- (1)  $\vec{a}$  および  $\vec{d}$  を,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $k$  を用いて表せ。
- (2)  $t$  を  $k$  を用いて表し,  $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$  を示せ。
- (3) 不等式  $\frac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} > \frac{1}{12}$  を示せ。

[2017]

**解答例**

- (1) 点  $O$  を中心とする半径 1 の円に内接する正  $n$  角形  $A_1A_2\cdots A_n$  に対し、直線  $OA_2$  は線分  $A_1A_3$  の垂直二等分線であり、 $OA_2$  と  $A_1A_3$  との交点を  $B_2$  とおくと、

$$OB_2 = \cos\frac{2\pi}{n} = \frac{k}{2}$$

すると、 $\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{k}{2}\vec{b}$  より、 $\vec{a} = k\vec{b} - \vec{c}$  である。

同様に、直線  $OA_3$  は線分  $A_2A_4$  の垂直二等分線なので、 $\vec{d} = k\vec{c} - \vec{b}$  である。

なお、 $n=4$  のときは  $k=0$  であるが、このときも成立している。

- (2) まず、 $P$  は線分  $A_1A_3$  を  $t:1-t$  に内分するので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1-t)\vec{a} + t\vec{c} = (1-t)(k\vec{b} - \vec{c}) + t\vec{c} \\ &= (1-t)k\vec{b} + (2t-1)\vec{c} \cdots\cdots\text{①} \end{aligned}$$

また、対称性より、 $P$  は線分  $A_4A_2$  を  $t:1-t$  に内分するので、同様にすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (1-t)\vec{d} + t\vec{b} = (1-t)(k\vec{c} - \vec{b}) + t\vec{b} \\ &= (2t-1)\vec{b} + (1-t)k\vec{c} \cdots\cdots\text{②} \end{aligned}$$

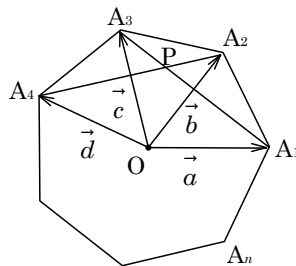
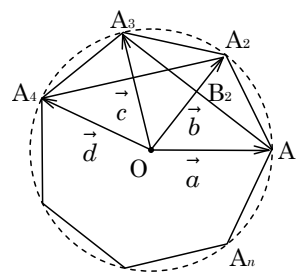
①②より、 $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  は 1 次独立なので、 $(1-t)k = 2t-1$  となり、

$$(k+2)t = k+1, \quad t = \frac{k+1}{k+2}$$

ここで、 $n \geq 4$  より  $0 < \frac{2\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$  となり、これより  $0 \leq k < 2$  なので、

$$t - \frac{1}{2} = \frac{k+1}{k+2} - \frac{1}{2} = \frac{k}{2(k+2)} \geq 0, \quad t - \frac{3}{4} = \frac{k+1}{k+2} - \frac{3}{4} = \frac{k-2}{4(k+2)} < 0$$

よって、 $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$  である。



(3) 条件から,  $A_1P:PA_3 = t:1-t$  より,  $\triangle PA_2A_3 = \frac{1-t}{t} \triangle PA_1A_2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

また,  $A_2P:PA_4 = 1-t:t$  より,  $\triangle PA_1A_2 = (1-t) \triangle A_1A_2A_4 \cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より,  $\triangle PA_2A_3 = \frac{(1-t)^2}{t} \triangle A_1A_2A_4$  となり, (2)から,

$$\frac{(1-t)^2}{t} - \frac{1}{12} = \frac{12t^2 - 25t + 12}{12t} = \frac{(3t-4)(4t-3)}{12t} > 0$$

よって,  $\frac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} = \frac{(1-t)^2}{t} > \frac{1}{12}$  である。

### コメント

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

**問題**

座標平面上にすべての内角が $180^\circ$ 未満の四角形  $ABCD$  がある。原点を  $O$  とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$  とおく。 $k$  は  $0 \leq k \leq 1$  を満たす定数とする。0 以上の実数  $s, t, u$  が  $k + s + t + u = 1$  を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$$

で定められる点  $P$  の存在範囲を  $E(k)$  とする。

- (1)  $E(1)$  および  $E(0)$  を求めよ。
- (2)  $E\left(\frac{1}{3}\right)$  を求めよ。
- (3) 対角線  $AC, BD$  の交点を  $M$  とする。どの  $E(k)$  ( $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}$ ) にも属するような点  $P$  を考える。このような点  $P$  が存在するための必要十分条件を、線分  $AC, AM$  の長さを用いて答えよ。

[2016]

**解答例**

- (1) 原点  $O$ , 四角形  $ABCD$  に対し、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$  とおく。定数  $k$  は  $0 \leq k \leq 1$ , 0 以上の実数  $s, t, u$  は  $k + s + t + u = 1$  を満たす。

そして、 $\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$  で定められる点  $P$  の存在範囲を  $E(k)$  とする。

まず、 $k=1$  のとき  $s+t+u=0$  から  $s=t=u=0$  より、 $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$  となる。すなわち、 $E(1)$  は点  $A$  である。

次に、 $k=0$  のとき  $s+t+u=1$  から  $s \geq 0, t \geq 0, u = 1-s-t \geq 0$  となり、

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{b} + t\vec{c} + (1-s-t)\vec{d}, \quad \overrightarrow{OP} - \vec{d} = s(\vec{b} - \vec{d}) + t(\vec{c} - \vec{d})$$

$$\overrightarrow{DP} = s\overrightarrow{DB} + t\overrightarrow{DC} \quad (s \geq 0, t \geq 0, s+t \leq 1)$$

よって、 $E(0)$  は  $\triangle DBC$  の内部または边上となる。

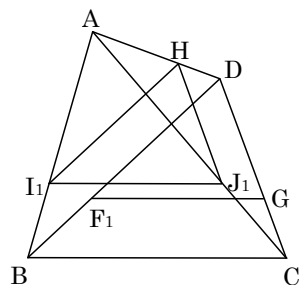
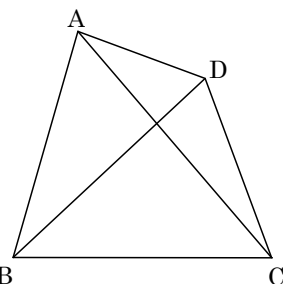
- (2)  $k = \frac{1}{3}$  のとき、 $s+t+u = \frac{2}{3}$  から  $s \geq 0, t \geq 0, u = \frac{2}{3} - s - t \geq 0$  となり、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + \left(\frac{2}{3} - s - t\right)\vec{d}, \quad \overrightarrow{OP} - \frac{\vec{a} + 2\vec{d}}{3} = s\overrightarrow{DB} + t\overrightarrow{DC}$$

ここで、 $\overrightarrow{DQ} = s\overrightarrow{DB} + t\overrightarrow{DC}$  とおき、 $DB, DC$  を  $2:1$  に内分する点を、それぞれ  $F_1, G_1$  とすると、

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}s\overrightarrow{DF_1} + \frac{3}{2}t\overrightarrow{DG_1} \quad (s \geq 0, t \geq 0, \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}t \leq 1)$$

これより、点  $Q$  は  $\triangle DF_1G_1$  の内部または边上にある。



さらに、AD, AB, AC を 2:1 に内分する点を、それぞれ  $H_1, I_1, J_1$  とおくと、  
 $\overrightarrow{DF_1} = \overrightarrow{H_1I_1}, \overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{H_1J_1}$  から、

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{H_1P} = \frac{3}{2}s\overrightarrow{H_1I_1} + \frac{3}{2}t\overrightarrow{H_1J_1} \left( s \geq 0, t \geq 0, \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}t \leq 1 \right)$$

よって、 $E\left(\frac{1}{3}\right)$  は  $\triangle H_1I_1J_1$  の内部または辺上となる。

(3) (2)と同様にして、 $s+t+u=1-k$  から  $s \geq 0, t \geq 0, u=1-k-s-t \geq 0$  となり、

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + (1-k-s-t)\vec{d}, \overrightarrow{OP} - \{k\vec{a} + (1-k)\vec{d}\} = s\overrightarrow{DB} + t\overrightarrow{DC}$$

ここで、AD, AB, AC を  $1-k:k$  に内分する点を、それぞれ H, I, J とおくと、

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{HP} = \frac{s}{1-k}\overrightarrow{HI} + \frac{t}{1-k}\overrightarrow{HJ} \left( s \geq 0, t \geq 0, \frac{s}{1-k} + \frac{t}{1-k} \leq 1 \right)$$

よって、 $E(k)$  は  $\triangle HIJ$  の内部または辺上となる。

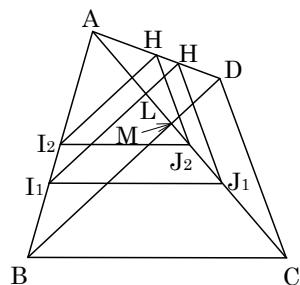
さて、 $k = \frac{1}{2}$  のとき、AD, AB, AC の中点を、それぞれ  $H_2, I_2, J_2$  とおくと、

$E\left(\frac{1}{2}\right)$  は  $\triangle H_2I_2J_2$  の内部または辺上となる。

すると、 $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}$  において、どの  $E(k)$  にも属するよう  
 な点 P が存在する条件は、 $E\left(\frac{1}{3}\right)$  と  $E\left(\frac{1}{2}\right)$  に共通部分が  
 存在することである。すなわち、対角線 AC, BD の交点  
 を M, AC と  $H_1I_1$  の交点を L とすると、

$$AJ_2 \geq AL, \frac{1}{2}AC \geq \frac{2}{3}AM$$

よって、求める条件は、 $3AC \geq 4AM$  である。



### コメント

平面ベクトルと領域に関する問題です。解答例が書きにくいタイプで、やや冗長な感じもします。また、丁寧な誘導のため、後半になるに従い省略ぎみに記しましたが、それでもボリュームはかなりのものとなっています。

**問題**

三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

- (1)  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$  が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。
- (2)  $k$  が  $k \neq \frac{1}{3}$  を満たす実数で,  $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$  が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。
- (3)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。 [2011]

**解答例**

- (1) G は  $\triangle ABC$  の重心より,  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \dots\dots\dots ①$

条件から,  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$  なので, ①に代入すると,

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

ここで, 辺 BC の中点を M とおくと,  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \dots\dots\dots ②$  から,  $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

となり,  $\triangle ABC$  の外心 O は M と一致する。

したがって,  $\triangle ABC$  は  $\angle A = 90^\circ$  の直角三角形である。

- (2) 条件から,  $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$  なので, ①に代入すると,

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (3k - 1)\overrightarrow{OA}$$

ここで, ②から,  $\overrightarrow{OM} = \frac{3k-1}{2}\overrightarrow{OA}$  となり,  $k \neq \frac{1}{3}$  より, 3点 O, A, M は同一直線上にある。一方, O は  $\triangle ABC$  の外心なので, 辺 BC の垂直二等分線上にあり,  $OM \perp BC$  である。

したがって,  $AM \perp BC$  となるので,  $\triangle ABC$  は  $AB = AC$  の二等辺三角形である。

- (3) まず, O と M が一致しないとき, (2)より,  $OM \perp BC \dots\dots\dots ③$

ここで, 条件より,  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  なので,  $\overrightarrow{OI} = \vec{0}$  または  $OI \perp BC$  である。

- (i)  $\overrightarrow{OI} = \vec{0}$  のとき

O と I が一致し, ③より,  $IM \perp BC$  である。

- (ii)  $OI \perp BC$  のとき

③より, O, I, M は同一直線上にあり,  $IM \perp BC$  である。

- (i)(ii)より,  $IM \perp BC$  である。

次に, O と M が一致するとき,  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  から  $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  となり,  $\overrightarrow{MI} \neq \vec{0}$  なので,  $IM \perp BC$  である。

よって、いずれの場合も  $IM \perp BC$  であり、これより  $IB = IC$  となり、

$$\angle IBC = \angle ICB, \quad 2\angle IBC = 2\angle ICB, \quad \angle ABC = \angle ACB$$

したがって、 $\triangle ABC$  は二等辺三角形である。

### コメント

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。



**問題**

$\triangle ABC$  は、1 辺の長さが 1 の正三角形で、 $t$  は正の実数とする。 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$  とおく。直線  $AB$ 、 $AC$  上にそれぞれ点  $D$ 、 $E$  があり、 $\overrightarrow{AD} = t\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AE} = t\vec{c}$  を満たしている。正三角形  $\triangle ADE$  の重心を  $G$ 、線分  $BE$  の中点を  $M$  とする。

- (1) 内積  $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG}$  を計算せよ。  
 (2)  $t$  が正の実数全体を動くとき、 $\triangle CGM$  の面積を最小にする  $t$  の値と、そのときの面積を求めよ。 [2010]

**解答例**

(1) 条件から、 $|\vec{b}| = |\overrightarrow{AB}| = 1$ 、 $|\vec{c}| = |\overrightarrow{AC}| = 1$  ……①

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \dots\dots\dots ②$$

さて、 $\overrightarrow{AD} = t\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AE} = t\vec{c}$  より、

$$\overrightarrow{MC} = \vec{c} - \frac{\vec{b} + t\vec{c}}{2} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(2-t)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{t\vec{b} + t\vec{c}}{3} - \frac{\vec{b} + t\vec{c}}{2} = \frac{1}{6}(2t-3)\vec{b} - \frac{1}{6}t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG} = -\frac{1}{12}(2t-3)|\vec{b}|^2 + \frac{1}{12}\{(2t-3)(2-t) + t\}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{12}t(2-t)|\vec{c}|^2$$

①②より、 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG} = -\frac{1}{12}(2t-3) + \frac{1}{12}(-t^2 + 4t - 3) - \frac{1}{12}(2t-t^2) = 0$

(2) ①②より、 $|\overrightarrow{MC}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}(2-t)\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}(2-t)^2|\vec{c}|^2$   
 $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(2-t) + \frac{1}{4}(2-t)^2 = \frac{1}{4}(t^2 - 3t + 3)$

$$|\overrightarrow{MG}|^2 = \frac{1}{36}(2t-3)^2|\vec{b}|^2 - \frac{1}{18}t(2t-3)\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{36}t^2|\vec{c}|^2$$

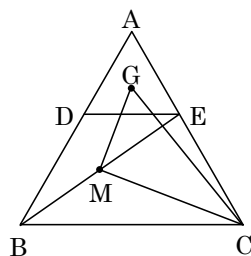
$$= \frac{1}{36}(2t-3)^2 - \frac{1}{36}t(2t-3) + \frac{1}{36}t^2 = \frac{1}{12}(t^2 - 3t + 3)$$

(1)より、 $MC$  と  $MG$  は直交するので、 $\triangle CGM$  の面積  $S$  は、

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{MG}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - 3t + 3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{t^2 - 3t + 3}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}(t^2 - 3t + 3) = \frac{1}{8\sqrt{3}} \left\{ \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

よって、 $t = \frac{3}{2}$  のとき、 $S$  は最小値  $\frac{1}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{32}$  をとる。



**コメント**

見かけはベクトルの応用問題ですが、実際は、ただひたすら計算に専念です。

## 問題

平面上の $\triangle ABC$ において、辺  $AB$  を  $4:3$  に内分する点を  $D$ 、辺  $BC$  を  $1:2$  に内分する点を  $E$  とし、線分  $AE$  と  $CD$  の交点を  $O$  とする。

- (1)  $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$  とするとき、ベクトル  $\overrightarrow{AO}$  を  $\vec{p}$ 、 $\vec{q}$  で表せ。  
 (2) 点  $O$  が  $\triangle ABC$  の外接円の中心になるとき、3 辺  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  の長さの 2 乗の比を求めよ。 [2008]

## 解答例

- (1)  $\triangle ABE$  と直線  $CD$  に対して、メネラウスの定理を用いると、

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EO}{OA} = 1, \quad \frac{EO}{OA} = \frac{DB}{AD} \cdot \frac{CE}{BC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

よって、 $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AE}$  となり、

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\vec{p} + \vec{q}}{3} = \frac{4}{9} \vec{p} + \frac{2}{9} \vec{q}$$

- (2) まず、 $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \frac{4}{9} \vec{p} + \frac{2}{9} \vec{q} - \vec{p} = -\frac{5}{9} \vec{p} + \frac{2}{9} \vec{q}$

$$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AC} = \frac{4}{9} \vec{p} + \frac{2}{9} \vec{q} - \vec{q} = \frac{4}{9} \vec{p} - \frac{7}{9} \vec{q}$$

条件より、点  $O$  は  $\triangle ABC$  の外心なので、 $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}|$ 、 $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{CO}|$

$$|4\vec{p} + 2\vec{q}| = |-5\vec{p} + 2\vec{q}| \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad |4\vec{p} + 2\vec{q}| = |4\vec{p} - 7\vec{q}| \cdots \cdots \textcircled{2}$$

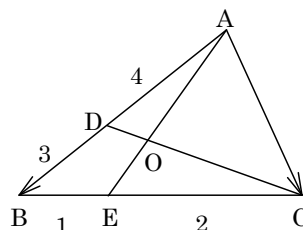
$$\textcircled{1} \text{より}, \quad 16|\vec{p}|^2 + 16\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = 25|\vec{p}|^2 - 20\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2, \quad |\vec{p}|^2 = 4\vec{p} \cdot \vec{q}$$

$$\textcircled{2} \text{より}, \quad 16|\vec{p}|^2 + 16\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = 16|\vec{p}|^2 - 56\vec{p} \cdot \vec{q} + 49|\vec{q}|^2, \quad 5|\vec{q}|^2 = 8\vec{p} \cdot \vec{q}$$

さて、 $\vec{p} \cdot \vec{q} = k$  とおくと、 $AB^2 = |\vec{p}|^2 = 4k$ 、 $CA^2 = |\vec{q}|^2 = \frac{8}{5}k$  となり、

$$BC^2 = |\vec{p} - \vec{q}|^2 = 4k - 2k + \frac{8}{5}k = \frac{18}{5}k$$

よって、 $AB^2 : BC^2 : CA^2 = 4k : \frac{18}{5}k : \frac{8}{5}k = 10 : 9 : 4$



## コメント

平面ベクトルの三角形への応用についての基本問題です。

**問題**

$\triangle OAB$  において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおき、 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$  とする。  
 辺  $AB$  上に点  $P_1$  をとる。ただし  $P_1$  は  $A$ 、 $B$  とは異なるとする。 $P_1$  から辺  $OB$  に垂線  $P_1Q_1$  を下ろす。次に、 $Q_1$  から辺  $OA$  に垂線  $Q_1R_1$  を下ろす。さらに、 $R_1$  から辺  $AB$  に垂線  $R_1P_2$  を下ろす。以下、同様の操作を続けて、点  $P_n$ 、 $Q_n$ 、 $R_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を定める。 $\overrightarrow{AP_n} = t_n(\vec{b} - \vec{a})$  により  $t_n$  ( $0 < t_n < 1$ ) を定める。

- (1)  $\overrightarrow{BQ_1}$  を  $t_1$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (2)  $t_2$  を  $t_1$  を用いて表せ。
- (3)  $t_n$  を  $t_1$  と  $n$  を用いて表せ。
- (4)  $P_1 = P_2$  となるような  $t_1$  の値を求めよ。
- (5)  $P_1 = P_2$  のとき、 $\triangle P_1Q_1R_1$  の面積を求めよ。

[2006]

**解答例**

- (1) 条件より、 $\overrightarrow{AP_1} = t_1(\vec{b} - \vec{a})$  なので、

$$\overrightarrow{OP_1} = \vec{a} + t_1(\vec{b} - \vec{a}) = (1 - t_1)\vec{a} + t_1\vec{b}$$

$\overrightarrow{OQ_1}$  は  $\overrightarrow{OP_1}$  の  $\vec{b}$  方向への正射影ベクトルより、

$$\overrightarrow{OQ_1} = \left( \overrightarrow{OP_1} \cdot \frac{\vec{b}}{\sqrt{3}} \right) \frac{\vec{b}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \{ (1 - t_1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t_1|\vec{b}|^2 \} \vec{b}$$

ここで、 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$  から、

$$\overrightarrow{OQ_1} = \frac{1}{3}(1 - t_1 + 3t_1)\vec{b} = \frac{1}{3}(2t_1 + 1)\vec{b}$$

よって、 $\overrightarrow{BQ_1} = \frac{1}{3}(2t_1 + 1)\vec{b} - \vec{b} = \frac{2}{3}(t_1 - 1)\vec{b}$

- (2)  $\overrightarrow{OR_1}$  は  $\overrightarrow{OQ_1}$  の  $\vec{a}$  方向への正射影ベクトルより、

$$\overrightarrow{OR_1} = \left( \overrightarrow{OQ_1} \cdot \frac{\vec{a}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\vec{a}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6} \{ (2t_1 + 1)\vec{a} \cdot \vec{b} \} \vec{a} = \frac{1}{6}(2t_1 + 1)\vec{a}$$

さて、 $\overrightarrow{AP_2} = t_2(\vec{b} - \vec{a})$  から、 $\overrightarrow{OP_2} = (1 - t_2)\vec{a} + t_2\vec{b}$  となり、

$$\overrightarrow{R_1P_2} = \left( 1 - t_2 - \frac{1}{3}t_1 - \frac{1}{6} \right) \vec{a} + t_2\vec{b} = \left( \frac{5}{6} - \frac{1}{3}t_1 - t_2 \right) \vec{a} + t_2\vec{b}$$

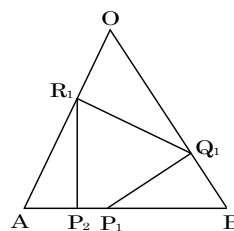
ここで、 $R_1P_2$  と  $AB$  は垂直なので、 $\overrightarrow{R_1P_2} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$  より、

$$\left( \frac{5}{6} - \frac{1}{3}t_1 - t_2 \right) |\vec{a}|^2 + \left( t_2 - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}t_1 + t_2 \right) \vec{a} \cdot \vec{b} - t_2|\vec{b}|^2 = 0$$

よって、 $2\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}t_1 - t_2\right) + \left(2t_2 - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}t_1\right) - 3t_2 = 0$  から、 $t_2 = -\frac{1}{9}t_1 + \frac{5}{18}$

- (3) (2) と同様にすると、 $t_{n+1} = -\frac{1}{9}t_n + \frac{5}{18}$  から、 $t_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9}\left(t_n - \frac{1}{4}\right)$

$$t_n - \frac{1}{4} = \left(t_1 - \frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}, \quad t_n = \left(t_1 - \frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$



(4)  $P_1 = P_2$  から  $t_1 = t_2$  となり, (2) から  $t_1 = -\frac{1}{9}t_1 + \frac{5}{18}$  なので,  $t_1 = \frac{1}{4}$  である。

(5)  $t_1 = \frac{1}{4}$  より,  $\overrightarrow{OQ_1} = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OR_1} = \frac{1}{6}\left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a}$

よって,  $P_1$  は  $AB$  を  $1:3$ ,  $R_1$  は  $OA$  を  $1:3$  に内分し,  $Q_1$  は  $AB$  の中点から,

$$\triangle P_1Q_1R_1 = \left(1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) \triangle OAB = \frac{5}{16} \triangle OAB$$

さて,  $\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 3 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$  より,

$$\triangle P_1Q_1R_1 = \frac{5}{16} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{32}$$

### コメント

難問というわけではありませんが, 設問が 5 つもあるため, かなりの時間を費やしてしまいます。

## 問題

$xyz$  空間内に点  $A(1, 1, 2)$  と点  $B(-5, 4, 0)$  がある。点  $C$  が  $y$  軸上を動くとき、三角形  $ABC$  の面積の最小値を求めよ。 [2004]

## 解答例

点  $C(0, t, 0)$  とし、 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とする。

$\vec{AB} = (-6, 3, -2)$ ,  $\vec{AC} = (-1, t-1, -2)$  より、

$$|\vec{AB}| = \sqrt{36+9+4} = 7, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{1+(t-1)^2+4} = \sqrt{t^2-2t+6}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6+3(t-1)+4 = 3t+7$$

$$\text{すると, } S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{49(t^2-2t+6) - (3t+7)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{40t^2 - 140t + 245} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{8\left(t - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{49}{2}}$$

よって、 $t = \frac{7}{4}$  のとき、 $S$  は最小値  $\frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{10}}{4}$  をとる。

## コメント

三角形の面積公式への代入練習とも思える問題です。

**問題**

$R$  を平面上の凸六角形とし、その頂点を順に  $A, B, C, D, E, F$  とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$  とおく。 $R$  が  $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$  を満たすとする。

- (1)  $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$  であることを示せ。
- (2) 三角形  $ACE$  と三角形  $BDF$  の重心が一致するとき、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  の間の関係を求めよ。
- (3)  $R$  が(2)の条件を満たし、さらに内積に関して  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$  を満たすとき、 $R$  の面積を求めよ。 [2003]

**解答例**

(1)  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

(2) 条件より、 $\triangle ACE$  と  $\triangle BDF$  は重心が一致するので、

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF})$$

ここで、 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{c}$  より、

$$(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{c}$$

よって、 $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$  ……(\*)

(3) (1)より、対角線  $AD$  の中点を中心として、四角形  $ABCD$  を  $180^\circ$  回転すると、四角形  $DEFA$  に重なるので、六角形  $R$  の面積は四角形  $ABCD$  の面積の 2 倍である。

さて、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$  なので、(\*)から  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 4$ ,  $|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 4$  で、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$  より、

$$|\vec{a}|^2 = 5, \quad |\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{5}$$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$  なので、(\*)から  $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{c} = 1$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 1$  で、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$  より、

$$|\vec{c}|^2 = 2, \quad |\overrightarrow{CD}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$$

また、 $|\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{c}|^2 = 5 + 2 \cdot (-1) + 2 = 5$  より、 $|\overrightarrow{BC}| = |\vec{b}| = \sqrt{5}$

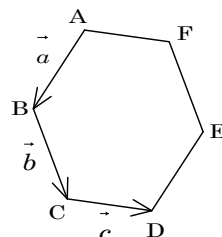
さらに、 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 5 + 2 \cdot 4 + 5 = 18$  より、 $|\overrightarrow{AC}| = |\vec{a} + \vec{b}| = 3\sqrt{2}$  となり、

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = -1 + 1 = 0$$

$$\text{よって、} \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2 |\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \times 5 - (-4)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3$$

以上より、 $R$  の面積は、 $(\triangle ABC + \triangle ACD) \times 2 = \left(\frac{3}{2} + 3\right) \times 2 = 9$  である。



**コメント**

(3)では、 $AB = BC$  であることが気になりましたが、この点は無視して、普通に三角形の面積を計算しました。

**問題**

四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 、 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$  を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。
- (2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。

[2002]

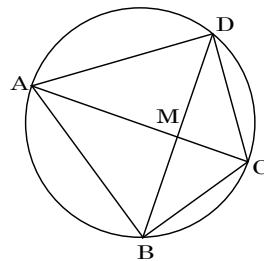
**解答例**

- (1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$  より、

$$\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2} = -2 \cdot \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}}{2}$$

BD の中点を M とすると、 $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{CM} \dots\dots\dots(*)$

よって、A, M, C は同一直線上にあるので、直線 AC は線分 BD の中点を通る。



- (2) (1)より、BM = DM

また、条件より  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  なので、 $AC \perp BD$

これより、AC は BD の垂直二等分線となり、 $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$  となるので、

$$\angle ABC = \angle ADC$$

また、四角形 ABCD は円に内接するので、 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$  より、

$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

すなわち、AC は半径 1 である四角形 ABCD の外接円の直径となり、 $AC = 2$  である。

ここで、(\*)より、 $AM : MC = 2 : 1$  なので、 $AM = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

外接円の中心を O とすると、 $OM = AM - AO = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって、 $AB = AD = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$BC = DC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4 - \frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**コメント**

(1)の誘導によって、AC が外接円の直径であることを見つけるのが最大のポイントです。

## 問題

四面体  $OABC$  において  $OA = 3$ ,  $OB = 4$ ,  $OC = 6$ ,  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$  とする。  $OA$  を  $t:1-t$  の比に内分する点を  $D$ ,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (2)  $\angle BDC = \theta$  としたとき  $\cos \theta$  を  $t$  の式で表せ。
- (3) 三角形  $BDC$  の面積の最小値を求めよ。

[1999]

## 解答例

$$(1) \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{b} - t\vec{a}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \vec{c} - t\vec{a}$$

$$(2) \text{条件より, } |\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 4, \quad |\vec{c}| = 6$$

$$\text{また, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 \cos 60^\circ = 6$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 12$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 6 \cdot 3 \cos 60^\circ = 9$$

$$\text{すると, } |\overrightarrow{DB}|^2 = |\vec{b} - t\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{a}|^2 = 9t^2 - 12t + 16$$

$$|\overrightarrow{DC}|^2 = |\vec{c} - t\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2t\vec{c} \cdot \vec{a} + t^2|\vec{a}|^2 = 9(t^2 - 2t + 4)$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = (\vec{b} - t\vec{a}) \cdot (\vec{c} - t\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{c} - t\vec{a} \cdot \vec{b} - t\vec{c} \cdot \vec{a} + t^2|\vec{a}|^2 = 3(3t^2 - 5t + 4)$$

$$\text{よって, } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{3t^2 - 5t + 4}{\sqrt{9t^2 - 12t + 16} \sqrt{t^2 - 2t + 4}}$$

$$(3) \triangle BCD = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{DC}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{DC}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{DB}|^2 |\overrightarrow{DC}|^2 - (\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC})^2}$$

$$f(t) = |\overrightarrow{DB}|^2 |\overrightarrow{DC}|^2 - (\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC})^2 \text{ とおくと, } \triangle BCD = \frac{1}{2} \sqrt{f(t)}$$

$$f(t) = 9(9t^2 - 12t + 16)(t^2 - 2t + 4) - 9(3t^2 - 5t + 4)^2$$

$$= 9(27t^2 - 40t + 48) = 9 \cdot 27 \left(t - \frac{20}{27}\right)^2 + \frac{896}{3}$$

よって,  $t = \frac{20}{27}$  のとき  $f(t)$  は最小値  $\frac{896}{3}$  をとり, このとき  $\triangle BCD$  の面積は最小

となる。その最小値は,  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{896}{3}} = \frac{4\sqrt{42}}{3}$  である。

## コメント

内容的には基本だけですが, 計算がたいへんです。特に(3)の計算では, 初めは  $f(t)$  を微分して増減表を作り, 最小値をとる  $t$  の値を求めたのですが, その後, また  $f(t)$  からやり直したのが上の解です。



**問 題**

平面上の三角形 OAB は、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおくとき、 $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$  をみたすとする。辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P とし、直線 OP に関して

A と対称な点を Q, OQ の延長と AB の交点を R とおく。

- (1)  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  で表せ。
- (2)  $\overrightarrow{OR}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  で表せ。
- (3)  $\triangle PQR$  の面積を求めよ。

[1998]

**解答例**

- (1)  $\overrightarrow{OP} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$  で、AQ と OP の交点を H とおくと、 $\overrightarrow{OH}$  は  $\vec{a}$  の  $\overrightarrow{OP}$  方向への正射影

ベクトルとなるので、

$$\overrightarrow{OH} = \left( \vec{a} \cdot \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} \right) \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^2} \overrightarrow{OP}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \frac{1}{9} |2\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{9} (4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP} = \vec{a} \cdot \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{1}{3} (2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{5}{6}$$

$$\text{よって、} \overrightarrow{OH} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{8} \overrightarrow{OP} = \frac{15}{16} \cdot \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{5}{16} (2\vec{a} + \vec{b})$$

H は AQ の中点より、 $\frac{\vec{a} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \overrightarrow{OH}$  から、

$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OH} - \vec{a} = \frac{5}{8} (2\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}$$

- (2) R は OQ 上の点なので、 $\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{5}{8}k\vec{b}$

R は AB 上の点なので、 $\frac{1}{4}k + \frac{5}{8}k = 1$ ,  $k = \frac{8}{7}$

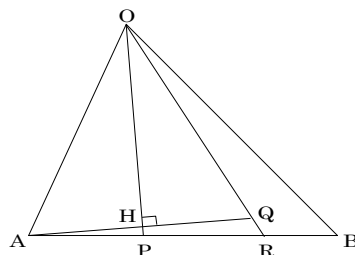
$$\text{よって、} \overrightarrow{OR} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \vec{a} + \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{7} \vec{b} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}$$

- (3) (2)より、AR : RB = 5 : 2, すなわち  $AR = \frac{5}{7}AB$

条件より、 $AP = \frac{1}{3}AB$  から、 $PR = \frac{5}{7}AB - \frac{1}{3}AB = \frac{8}{21}AB$

また、(2)で  $k = \frac{8}{7}$  より、 $QR = \frac{1}{8}OR$

$$\text{よって、} \triangle PQR = \frac{8}{21} \cdot \frac{1}{8} \triangle OAB = \frac{1}{21} \triangle OAB$$



$$\text{ここで, } \triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{以上より, } \triangle PQR = \frac{1}{21} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{84}$$

### コメント

よく見かける頻出題です。(1)では正射影ベクトルを利用しましたが、普通に  $\vec{OQ} = x\vec{a} + y\vec{b}$  とおいて、 $x, y$  の連立方程式を立て、それを解いても構いません。

**問題**

$a_1 = 3, a_2 = 2$  とし,  $n \geq 2$  のとき,  $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$  として数列  $\{a_n\}$  を定める。

(1)  $n \geq 2$  のとき  $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$  が成り立つことを証明せよ。

(2)  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100$  が成り立つような自然数  $n$  を求めよ。 [2019]

**解答例**

(1)  $a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{1}$  で定められる  $\{a_n\}$  に対して,

$$a_{n+1} + 1 = a_n(a_n + 1) \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$  より,  $n \geq 2$  において,

$$a_{n+1} + 1 = (a_2 + 1)a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 3 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$$

よって,  $a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n - 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$  が成り立つ。

(2)  $n \geq 2$  のとき,  $\textcircled{1}$  より,  $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$  となり,  $\textcircled{3}$  を利用すると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i^2 &= a_1^2 + \sum_{i=2}^n a_i^2 = 3^2 + \sum_{i=2}^n (a_{i+1} - a_i + 1) = 9 + a_{n+1} - a_2 + (n-1) \\ &= 9 + (a_1 a_2 \cdots a_n - 1) - 2 + n - 1 = a_1 a_2 \cdots a_n + n + 5 \end{aligned}$$

ここで, 条件より,  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100 \cdots \cdots \textcircled{4}$  なので,

$$a_1 a_2 \cdots a_n + n + 5 = a_1 a_2 \cdots a_n + 100, \quad n + 5 = 100$$

よって,  $n = 95$  となり, この値は  $n \geq 2$  を満たしている。

なお,  $n = 1$  のとき, 条件 $\textcircled{4}$ は  $3^2 = 3 + 100$  となり, 成立しない。

**コメント**

少しスパイスの効いた漸化式が対象です。(1)は数学的帰納法でも示せますが, 結論をみて $\textcircled{2}$ という変形をしています。解法の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

**問題**

初項が 1 で公差が 6 である等差数列  $1, 7, 13, \dots$  の第  $n$  項を  $a_n$  とし, また初項が 3 で公差が 4 である等差数列  $3, 7, 11, \dots$  の第  $m$  項を  $b_m$  とする. 2 つの数列  $\{a_n\}, \{b_m\}$  に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{c_k\}$  とし, 2 つの数列  $\{a_n\}, \{b_m\}$  の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{d_l\}$  とする. したがって  $c_1 = 7$  であり, また数列  $\{d_l\}$  のはじめの 5 項は  $1, 3, 7, 11, 13$  となる.

- (1) 数列  $\{c_k\}$  の一般項を求めよ.
- (2) 数列  $\{d_l\}$  の一般項を求めよ.
- (3) 数列  $\{d_l\}$  の初項から第  $l$  項までの和  $S_l = \sum_{i=1}^l d_i$  を求めよ. [2018]

**解答例**

- (1) 初項 1, 公差 6 である等差数列  $\{a_n\}$  について,  $a_n = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$   
 また, 初項 3, 公差 4 である等差数列  $\{b_m\}$  について,  $b_m = 3 + 4(m-1) = 4m - 1$   
 ここで,  $\{a_n\}, \{b_m\}$  に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{c_k\}$  とすると,  $a_n = b_m$  から,

$$6n - 5 = 4m - 1, \quad 3n - 2m = 2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①を満たす 1 つの解が  $(n, m) = (2, 2)$  より,  $3 \times 2 - 2 \times 2 = 2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$

①②より,  $3(n-2) - 2(m-2) = 0, \quad 3(n-2) = 2(m-2)$

ここで, 3 と 2 は互いに素なので,  $j$  を整数として,  $n-2 = 2j, \quad m-2 = 3j$  から,

$$n = 2j + 2, \quad m = 3j + 2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

ここで,  $m \geq 1, \quad n \geq 1$  より  $j \geq 0$  となるので,  $k = j + 1 \geq 1$  とおくと, ③より,

$$n = 2(k-1) + 2 = 2k, \quad m = 3(k-1) + 2 = 3k - 1$$

よって,  $\{c_k\}$  の一般項は,  $c_k = a_{2k} = 12k - 5$  である.

- (2) まず,  $\{a_n\}, \{b_m\}$  の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{d_l\}$  とする. ここで,  $c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$  に注意して,  $\{d_l\}$  の  $d_3$  以降を項数 4 のグループに分け,  $c_1 = 7$  から 4 項を第 1 群,  $c_2 = 19$  から 4 項を第 2 群,  $c_3 = 31$  から 4 項を第 3 群,  $\dots$  と呼ぶ.

$$1, 3 \mid \underbrace{7, 11, 13, 15}_{\text{第 1 群}} \mid \underbrace{19, 23, 25, 27}_{\text{第 2 群}} \mid \underbrace{31, 35, 37, 39}_{\text{第 3 群}} \mid \dots\dots$$

さて,  $c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$  から, 数列  $\{d_l\}$  の第  $k$  群には  $c_k, a_{2k+1}, b_{3k}, b_{3k+1}$  の 4 項が含まれ,  $a_{2k+1} = c_k + 6, \quad b_{3k} = c_k + 4, \quad b_{3k+1} = c_k + 8$  より,

$$c_k < b_{3k} < a_{2k+1} < b_{3k+1}$$

これより,  $d_1 = 1, d_2 = 3$  で,  $l \geq 3$  の  $d_l$  に対して, 第  $k$  群の 4 項は,

$$(d_{4k-1}, d_{4k}, d_{4k+1}, d_{4k+2}) = (c_k, b_{3k}, a_{2k+1}, b_{3k+1})$$

(i)  $l = 4k - 1$  のとき  $d_l = c_k = 12k - 5 = 12 \cdot \frac{l+1}{4} - 5 = 3l - 2$

(ii)  $l = 4k$  のとき  $d_l = c_k + 4 = 12k - 1 = 12 \cdot \frac{l}{4} - 1 = 3l - 1$

(iii)  $l = 4k + 1$  のとき  $d_l = c_k + 6 = 12k + 1 = 12 \cdot \frac{l-1}{4} + 1 = 3l - 2$

(iv)  $l = 4k + 2$  のとき  $d_l = c_k + 8 = 12k + 3 = 12 \cdot \frac{l-2}{4} + 3 = 3l - 3$

ここで, (iii)に  $l = 1$  をあてはめると  $d_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ , (iv)に  $l = 2$  をあてはめると  $d_2 = 3 \cdot 2 - 3 = 3$  となり, とともに成立している。よって, (i)~(iv)について,  $l$  を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると,  $d_l$  は,

$$d_l = 3l - 1 (l \equiv 0), d_l = 3l - 2 (l \equiv 1, 3), d_l = 3l - 3 (l \equiv 2)$$

(3)  $i$  を自然数として,  $s_i = d_{4i-3} + d_{4i-2} + d_{4i-1} + d_{4i}$  とおくと, (2)より,

$$s_i = \{12(i-1) + 1\} + \{12(i-1) + 3\} + (12i - 5) + (12i - 1) = 48i - 26$$

ここで,  $p$  を自然数として,  $S_l = \sum_{i=1}^l d_i$  とすると,

(i)  $l = 4p$  のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p} &= \sum_{i=1}^p s_i = \sum_{i=1}^p (48i - 26) = \frac{22 + (48p - 26)}{2} \cdot p = 2p(12p - 1) \\ &= 2 \cdot \frac{l}{4} \left( 12 \cdot \frac{l}{4} - 1 \right) = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l \end{aligned}$$

(ii)  $l = 4p - 1$  のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-1} &= S_{4p} - d_{4p} = 2p(12p - 1) - (12p - 1) = (2p - 1)(12p - 1) \\ &= \left( 2 \cdot \frac{l+1}{4} - 1 \right) \left( 12 \cdot \frac{l+1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 \end{aligned}$$

(iii)  $l = 4p - 2$  のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-2} &= S_{4p-1} - d_{4p-1} = (2p - 1)(12p - 1) - (12p - 5) \\ &= 2p(12p - 13) + 6 = 2 \cdot \frac{l+2}{4} \left( 12 \cdot \frac{l+2}{4} - 13 \right) + 6 = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 \end{aligned}$$

(iv)  $l = 4p - 3$  のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-3} &= S_{4p-2} - d_{4p-2} = 2p(12p - 13) + 6 - \{12(p-1) + 3\} \\ &= 2p(12p - 19) + 15 = 2 \cdot \frac{l+3}{4} \left( 12 \cdot \frac{l+3}{4} - 19 \right) + 15 = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l \end{aligned}$$

(i)~(iv)より,  $l$  を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると,  $S_l$  は,

$$S_l = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l (l \equiv 0, 1), S_l = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 (l \equiv 2, 3)$$

**コメント**

2 つの等差数列の共通数列が題材です。記述量はかなりのものです。なお、(2)では(1)の数列  $\{c_k\}$  に注目し、 $d_1$  と  $d_2$  は特別に扱い、 $d_3$  以降を群数列の考え方で処理しています。ただ、この扱いは、結果的には不要だったのですが。

**問題**

$b$  と  $c$  を  $b^2 + 4c > 0$  を満たす実数として、 $x$  に関する 2 次方程式  $x^2 - bx - c = 0$  の相異なる解を  $\alpha, \beta$  とする。数列  $\{a_n\}$  を、 $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) により定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数列  $\{a_n\}$  は漸化式  $a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たすことを示せ。  
 (2) 数列  $\{a_n\}$  の項  $a_n$  がすべて整数であるための必要十分条件は、 $b, c$  がともに整数であることである。これを証明せよ。 [2015]

**解答例**

- (1)  $b^2 + 4c > 0$  のとき、 $x^2 - bx - c = 0$  の実数解  $\alpha, \beta$  について、

$$\alpha + \beta = b, \quad \alpha\beta = -c \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件より、 $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{2}$  から、 $\textcircled{1}$  と合わせて、

$$\begin{aligned} ba_{n+1} + ca_n &= (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \\ &= \alpha^{n+1} + \alpha\beta^n + \alpha^n\beta + \beta^{n+1} - (\alpha^n\beta + \alpha\beta^n) = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} \end{aligned}$$

よって、 $a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n \cdots \cdots \textcircled{3}$  が成立する。

- (2)  $a_n$  がすべて整数のとき、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から、 $a_1 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$ 、 $a_2 = \alpha^1 + \beta^1 = b$  これより  $b$  は整数となり、 $\textcircled{3}$  から、 $a_3 = ba_2 + ca_1$ 、 $a_4 = ba_3 + ca_2$  となり、

$$2c = a_3 - ba_2 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad bc = a_4 - ba_3 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

また、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から  $a_3 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = b^2 + 2c$  となり、 $\textcircled{3}$  から、

$$a_5 = ba_4 + ca_3, \quad (b^2 + 2c)c = a_5 - ba_4 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{4}\textcircled{5}\textcircled{6}$  より、 $2c, bc, (b^2 + 2c)c$  はすべて整数である。

さて、 $2c$  が整数より、 $k$  を整数として  $c = \frac{k}{2}$  とおくことができる。

ここで、 $k$  が奇数と仮定すると、 $bc = \frac{bk}{2}$  が整数より  $b$  は偶数となる。

ところが、 $(b^2 + 2c)c = \frac{(b^2 + k)k}{2}$  は、分子  $(b^2 + k)k$  が奇数より、整数ではない。

したがって、 $k$  は奇数ではなく偶数となり、 $c$  も整数である。

逆に、 $b, c$  がともに整数であるとき、 $a_1 = 2$ 、 $a_2 = b$  はともに整数であり、 $\textcircled{3}$  から、帰納的に  $a_n$  ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ) はすべて整数となる。

以上より、 $a_n$  がすべて整数であるための必要十分条件は、 $b, c$  がともに整数であることである。

**コメント**

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2) の設問は、見かけよりは難しめで、詰めに時間がかかりました。

**問題**

座標平面上に、円  $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$  と点  $Q(1, 2)$  がある。点  $P_1$  の座標を  $(3, 0)$  とし、 $x$  軸上の点  $P_2, P_3, \dots$  を以下の条件によって決め、 $P_n$  の座標を  $(p_n, 0)$  とする。

点  $P_n$  から円  $C$  に接線を引き、その  $y$  座標が正である接点を  $T_n$  とする。このとき、3 点  $Q, T_n, P_{n+1}$  は同一直線上にある。 ( $n=1, 2, \dots$ )

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点  $T_1$  の座標を求めよ。
- (2) 点  $P_2$  の座標を求めよ。
- (3) 点  $T_n$  の座標を  $p_n$  の式で表せ。
- (4) 点  $P_n$  の座標を  $n$  の式で表せ。

[2014]

**解答例**

- (1) 円  $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$  上の点  $T_1(x_1, y_1)$  における接線の方程式は、

$$(x_1-1)(x-1)+(y_1-1)(y-1)=1$$

点  $P_1(3, 0)$  を通ることより、

$$2(x_1-1)-(y_1-1)=1, \quad y_1=2x_1-2 \quad \dots\dots ①$$

$(x_1-1)^2+(y_1-1)^2=1$  と連立すると、 $(x_1-1)^2+(2x_1-3)^2=1$  から、

$$5x_1^2-14x_1+9=0, \quad (x_1-1)(5x_1-9)=0$$

よって、 $x_1 \neq 1$  から  $x_1 = \frac{9}{5}$ 、①から  $y_1 = \frac{8}{5}$  となり、 $T_1(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$  である。

- (2) 直線  $QT_1$  は、傾きが  $(\frac{8}{5}-2)/(\frac{9}{5}-1) = -\frac{1}{2}$  より、その方程式は、

$$y-2 = -\frac{1}{2}(x-1), \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$x$  軸との交点は、 $0 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$  より  $x = 5$  となり、 $P_2(5, 0)$  である。

- (3) (1)と同様にして、 $T_n(x_n, y_n)$  とおくと、接線の方程式は、

$$(x_n-1)(x-1)+(y_n-1)(y-1)=1$$

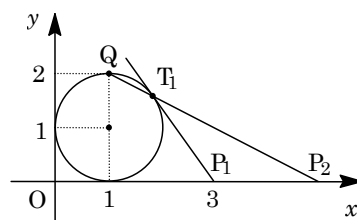
点  $P_n(p_n, 0)$  を通ることより、 $(p_n-1)(x_n-1)-(y_n-1)=1$

$$y_n = (p_n-1)(x_n-1) \quad \dots\dots ②$$

$(x_n-1)^2+(y_n-1)^2=1$  と連立すると、 $(x_n-1)^2+\{(p_n-1)(x_n-1)-1\}^2=1$

$$\{1+(p_n-1)^2\}(x_n-1)^2-2(p_n-1)(x_n-1)=0$$

よって、 $x_n \neq 1$  から、 $x_n = \frac{2(p_n-1)}{1+(p_n-1)^2} + 1 = \frac{p_n^2}{p_n^2-2p_n+2}$





②から  $y_n = \frac{2(p_n - 1)^2}{p_n^2 - 2p_n + 1}$  となり,  $T_n \left( \frac{p_n^2}{p_n^2 - 2p_n + 2}, \frac{2(p_n - 1)^2}{p_n^2 - 2p_n + 2} \right)$  である。

(4) (2)と同様にして, 直線  $QT_n$  は, 傾きが  $\left( \frac{2(p_n - 1)^2}{p_n^2 - 2p_n + 2} - 2 \right) / \left( \frac{p_n^2}{p_n^2 - 2p_n + 2} - 1 \right)$

すなわち  $-\frac{1}{p_n - 1}$  より, その方程式は,  $y - 2 = -\frac{1}{p_n - 1}(x - 1)$  である。

$x$  軸との交点  $P_{n+1}$  の  $x$  座標は,  $-2 = -\frac{1}{p_n - 1}(x - 1)$  より  $x = 2p_n - 1$  となり,

$$p_{n+1} = 2p_n - 1, \quad p_{n+1} - 1 = 2(p_n - 1)$$

すると,  $p_1 = 3$  から,  $p_n - 1 = (p_1 - 1) \cdot 2^{n-1} = 2^n$  となり,  $p_n = 2^n + 1$

よって,  $P_n(2^n + 1, 0)$  である。

### コメント

数列の図形への応用です。なお, (3)と(4)を先に記述するとよいかもしれません。

**問題**

整数  $p, q (p \geq q \geq 0)$  に対して 2 項係数を  ${}_p C_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$  と定める。なお、 $0! = 1$

とする。

- (1)  $n, k$  が 0 以上の整数のとき、 ${}_{n+k+1} C_{k+1} \times \left( \frac{1}{{}_{n+k} C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1} C_k} \right)$  を計算し、 $n$  によらない値になることを示せ。
- (2)  $m$  が 3 以上の整数のとき、和  $\frac{1}{{}_3 C_3} + \frac{1}{{}_4 C_3} + \frac{1}{{}_5 C_3} + \dots + \frac{1}{{}_m C_3}$  を求めよ。 [2013]

**解答例**

$$\begin{aligned} (1) \quad {}_{n+k+1} C_{k+1} \times \left( \frac{1}{{}_{n+k} C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1} C_k} \right) &= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)! n!} \left\{ \frac{k! n!}{(n+k)!} - \frac{k! (n+1)!}{(n+k+1)!} \right\} \\ &= \frac{n+k+1}{k+1} - \frac{n+1}{k+1} = \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

(2) (1)の等式について、 $k=2$  とすると、

$${}_{n+3} C_3 \times \left( \frac{1}{{}_{n+2} C_2} - \frac{1}{{}_{n+3} C_2} \right) = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{{}_{n+3} C_3} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{{}_{n+2} C_2} - \frac{1}{{}_{n+3} C_2} \right)$$

これより、 $m$  が 3 以上の整数のとき、 $S = \frac{1}{{}_3 C_3} + \frac{1}{{}_4 C_3} + \frac{1}{{}_5 C_3} + \dots + \frac{1}{{}_m C_3}$  とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{{}_{n+3} C_3} = \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{m-3} \left( \frac{1}{{}_{n+2} C_2} - \frac{1}{{}_{n+3} C_2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{{}_2 C_2} - \frac{1}{{}_3 C_2} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{{}_3 C_2} - \frac{1}{{}_4 C_2} \right) + \dots + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{{}_{m-1} C_2} - \frac{1}{{}_m C_2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{{}_2 C_2} - \frac{1}{{}_m C_2} \right) = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m-1)} \right\} = \frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)} \end{aligned}$$

**コメント**

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については、迷いはあまりないと思います。

**問題**

1 より小さい正の実数  $a$  に対して、円  $C(a): (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$  と定める。そのうえで、数列  $\{a_n\}$  を以下の方法によって定める。

- (i)  $n=1$  のときは、円  $C(a)$  が  $x$  軸と接するような定数  $a$  の値を  $a_1$  とする。さらに、円  $C(a_1)$  と  $x$  軸との接点を  $P_1$  とし、円  $C(a_1)$  の中心を  $Q_1$  とおく。
- (ii)  $n \geq 2$  のときは、円  $C(a)$  が直線  $P_{n-1}Q_{n-1}$  と接するような定数  $a$  の値を  $a_n$  とする。さらに、円  $C(a_n)$  と直線  $P_{n-1}Q_{n-1}$  との接点を  $P_n$  とし、円  $C(a_n)$  の中心を  $Q_n$  とおく。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_1$  を求めよ。
- (2)  $a_2$  を求めよ。
- (3)  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。 [2012]

**解答例**

(1)  $0 < a < 1$  から、円  $C(a): (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$  は、中心  $(1-a, 1-a)$  で半径  $\sqrt{2}a$  である。

ここで、 $a = a_1$  のとき、 $C(a_1)$  が  $x$  軸と接する条件は、

$$1 - a_1 = \sqrt{2}a_1, \quad (\sqrt{2} + 1)a_1 = 1$$

$$\text{よって、} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

(2) (1) より、 $P_1(2 - \sqrt{2}, 0)$ 、 $Q_1(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$  となり、直線  $P_1Q_1$  は  $x = 2 - \sqrt{2}$  である。

条件より、円  $C(a_2)$  は直線  $P_1Q_1$  と接することより、

$$|(1 - a_2) - (2 - \sqrt{2})| = \sqrt{2}a_2, \quad \sqrt{2} - 1 - a_2 = \pm\sqrt{2}a_2$$

(i)  $\sqrt{2} - 1 - a_2 = \sqrt{2}a_2$  のとき

$$(\sqrt{2} + 1)a_2 = \sqrt{2} - 1 \text{ より、} a_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

(ii)  $\sqrt{2} - 1 - a_2 = -\sqrt{2}a_2$  のとき

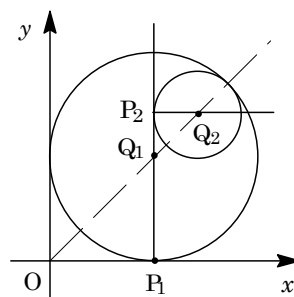
$$-(\sqrt{2} - 1)a_2 = \sqrt{2} - 1 \text{ となり、} 0 < a_2 < 1 \text{ に反する。}$$

(i)(ii) より、 $a_2 = 3 - 2\sqrt{2}$  である。

(3) 円  $C(a_n)$  は中心  $(1 - a_n, 1 - a_n)$  で半径  $\sqrt{2}a_n$  であり、直線  $P_{n-1}Q_{n-1}$  は  $x = 1 - a_{n-1}$  または  $y = 1 - a_{n-1}$  である。

条件より、円  $C(a_n)$  と直線  $P_{n-1}Q_{n-1}$  が接するので、

$$|(1 - a_n) - (1 - a_{n-1})| = \sqrt{2}a_n, \quad a_{n-1} - a_n = \pm\sqrt{2}a_n$$



(i)  $a_{n-1} - a_n = \sqrt{2}a_n$  のとき

$$(\sqrt{2}+1)a_2 = a_{n-1} \text{ より, } a_n = \frac{1}{\sqrt{2}+1}a_{n-1} = (\sqrt{2}-1)a_{n-1} = a_1(\sqrt{2}-1)^{n-1}$$

$$(1) \text{ より, } a_1 = \sqrt{2}-1 \text{ なので, } a_n = (\sqrt{2}-1)^n$$

(ii)  $a_{n-1} - a_n = -\sqrt{2}a_n$  のとき

$$-(\sqrt{2}-1)a_n = a_{n-1} \text{ となり, } 0 < a_n < 1, 0 < a_{n-1} < 1 \text{ に反する。}$$

(i)(ii) より,  $a_n = (\sqrt{2}-1)^n$  である。

### コメント

(3)では,  $n$  を偶奇に分けて処理が必要かとも思いましたが, 対称性から不要でした。なお, 円  $C(a)$  は  $a$  の値にかかわらず定点  $(1, 1)$  を通ることに注目すると, 場合分けが必要ありません。

**問題**

放物線  $y = x^2$  と直線  $y = ax + b$  によって囲まれる領域を

$$D = \{ (x, y) \mid x^2 \leq y \leq ax + b \}$$

とし、 $D$  の面積が  $\frac{9}{2}$  であるとする。座標平面上で、 $x$  座標、 $y$  座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

- (1)  $a = 0$  のとき、 $D$  に含まれる格子点の個数を求めよ。  
 (2)  $a, b$  がともに整数であるとき、 $D$  に含まれる格子点の個数は、 $a, b$  の値によらず一定であることを示せ。 [2010]

**解答例**

- (1)  $a = 0$  のとき、 $D : x^2 \leq y \leq b$  であり、境界線  $y = x^2$

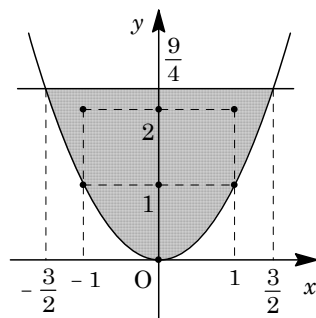
と  $y = b$  の交点は、 $x = \pm\sqrt{b}$  となる。

これより、 $D$  の面積は、

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} (b - x^2) dx = \frac{1}{6}(\sqrt{b} + \sqrt{b})^3 = \frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より、 $\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3 = \frac{9}{2}$  となり、 $\sqrt{b} = \frac{3}{2}$ 、 $b = \frac{9}{4}$

よって、 $D$  に含まれる格子点は、 $(-1, 1)$ 、 $(-1, 2)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(0, 2)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(1, 2)$  となり、その個数は 7 個である。



- (2)  $D : x^2 \leq y \leq ax + b$  に対して、境界線  $y = x^2$  と  $y = ax + b$  の交点は、

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

ここで、 $\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ 、 $\beta = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$  とおくと、 $D$  の面積は、

$$\int_{\alpha}^{\beta} (ax + b - x^2) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{a^2 + 4b})^3$$

条件より、 $\frac{1}{6}(\sqrt{a^2 + 4b})^3 = \frac{9}{2}$  となり、 $\sqrt{a^2 + 4b} = 3$ 、 $a^2 + 4b = 9 \dots\dots(*)$

このとき、 $\alpha = \frac{a-3}{2}$ 、 $\beta = \frac{a+3}{2}$  である。

さて、 $a, b$  は整数なので、 $(*)$  から  $a$  は奇数となり、 $\alpha, \beta$  はともに整数である。

すると、 $D$  に含まれる格子点の個数は、 $\frac{a-3}{2} = \alpha \leq x \leq \beta = \frac{a+3}{2}$  において、

- (i)  $x = \frac{a-3}{2}$  のとき 格子点は  $(\alpha, \alpha^2)$  のみより、1 個である。

(ii)  $x = \frac{a-1}{2}$  のとき (\*)より,  $b = \frac{9-a^2}{4}$  となり, 格子点の個数は,

$$a \cdot \frac{a-1}{2} + \frac{9-a^2}{4} - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4}(2a^2 - 2a + 9 - a^2 - a^2 + 2a - 1 + 4) = 3$$

(iii)  $x = \frac{a+1}{2}$  のとき (ii)と同様にすると, 格子点の個数は,

$$a \cdot \frac{a+1}{2} + \frac{9-a^2}{4} - \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2a + 9 - a^2 - a^2 - 2a - 1 + 4) = 3$$

(iv)  $x = \frac{a+3}{2}$  のとき 格子点は  $(\beta, \beta^2)$  のみより, 1個である。

(i)~(iv)より, 格子点の個数は,  $a, b$  の値によらず,  $1+3+3+1=8$ 個である。

### コメント

(1)は(2)の誘導ではありませんが, うまくまとまった格子点の個数の問題です。

**問題**

以下の問いに答えよ。

- (1)  $x$  を有理数とする。 $7x^2$  が整数ならば、 $x$  は整数であることを示せ。  
 (2)  $a, b$  を整数とする。 $a^2 - 7b^2$  が 4 の倍数ならば、 $a$  と  $b$  はともに偶数であることを示せ。  
 (3)  $r$  は整数、 $s$  は有理数とする。 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$  が整数ならば、 $s$  は整数であることを示せ。 [2008]

**解答例**

- (1)  $x$  は有理数より、 $p(>0), q$  を互いに素な整数として、 $x = \frac{q}{p}$  とおくことができ、

$$7x^2 = \frac{7q^2}{p^2}$$

条件より、 $7x^2$  は整数なので、 $p^2$  は  $7q^2$  の約数である。

ところが、 $p$  と  $q$  は互いに素なので、 $p^2$  と  $q^2$  も互いに素であり、 $p^2$  は素数 7 の約数、すなわち  $p^2 = 1$  または  $p^2 = 7$  である。

すると、 $p$  は自然数より、 $p = 1$  となり、つまり  $x$  は整数である。

- (2)  $k, l$  を整数とし、 $a, b$  を偶数、奇数に分けて考える。

- (i)  $a = 2k, b = 2l$  のとき

$$a^2 - 7b^2 = (2k)^2 - 7(2l)^2 = 4(k^2 - 7l^2)$$

- (ii)  $a = 2k, b = 2l+1$  のとき

$$a^2 - 7b^2 = (2k)^2 - 7(2l+1)^2 = 4(k^2 - 7l^2 - 7l - 2) + 1$$

- (iii)  $a = 2k+1, b = 2l$  のとき

$$a^2 - 7b^2 = (2k+1)^2 - 7(2l)^2 = 4(k^2 + k - 7l^2) + 1$$

- (iv)  $a = 2k+1, b = 2l+1$  のとき

$$a^2 - 7b^2 = (2k+1)^2 - 7(2l+1)^2 = 4(k^2 + k - 7l^2 - 7l - 2) + 2$$

(i)~(iv)より、 $a^2 - 7b^2$  が 4 の倍数ならば、 $a$  と  $b$  はともに偶数である。

- (3)  $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2 = \frac{r^2 - 7(2s)^2}{4}$  が整数のとき、 $r^2 - 7(2s)^2$  は 4 の倍数となり、しかも  $r$  が整数より、 $7(2s)^2$  は整数となる。

すると、 $s$  は有理数なので、(1)から、 $2s$  は整数である。

そこで、(2)の結果を用いると、 $r$  と  $2s$  はともに偶数となることより、 $s$  は整数である。

**コメント**

(1)と(2)が、(3)の巧みな誘導となっています。演習するに価値ある 1 題です。

## 問題

$n$  を奇数とする。

- (1)  $n^2 - 1$  は 8 の倍数であることを証明せよ。  
 (2)  $n^5 - n$  は 3 の倍数であることを証明せよ。  
 (3)  $n^5 - n$  は 120 の倍数であることを証明せよ。 [2007]

## 解答例

- (1)  $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$  より、 $n$  が奇数のとき、 $n-1$ 、 $n+1$  は連続する偶数となり、一方は 4 の倍数、もう一方は 4 の倍数でない偶数である。  
 よって、 $n^2 - 1$  は 8 の倍数である。  
 (2)  $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1)$  より、 $n-1$ 、 $n$ 、 $n+1$  は連続する 3 つの整数なので、いずれか 1 つは 3 の倍数である。  
 よって、 $n^5 - n$  は 3 の倍数である。  
 (3)  $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1) = (n-1)n(n+1)(n^2 - 4 + 5)$   
 $= (n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2) + 5\}$   
 $= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)$

これより、 $n-2$ 、 $n-1$ 、 $n$ 、 $n+1$ 、 $n+2$  は連続する 5 つの整数なので、いずれか 1 つは 5 の倍数である。また、 $5(n-1)n(n+1)$  は 5 の倍数である。

よって、 $n^5 - n$  は 5 の倍数となる。

そこで、(1) から  $n^5 - n = (n^2 - 1)n(n^2 + 1)$  は 8 の倍数、(2) から  $n^5 - n$  は 3 の倍数であることを考え合わせると、8、3、5 が互いに素より、 $n^5 - n$  は  $8 \times 3 \times 5 = 120$  の倍数となる。

## コメント

(3) では、 $n$  を 5 で割った余りで場合分けをする解法もあります。しかし、記述量が多くなるため、(2) をヒントに式変形を考えたのが上の解です。



問題

$n$  を自然数とする。 $n$  次多項式  $P_n(x)$  は、 $n+1$  個の整数  $k=0, 1, 2, \dots, n$  に対し、 $P_n(k) = 2^k - 1$  を満たす。

(1)  $P_2(x) - P_1(x)$  および  $P_3(x) - P_2(x)$  を因数分解せよ。

(2)  $P_n(x)$  を求めよ。

[2004]

解答例

(1)  $P_1(x)$  は 1 次多項式で、 $P_1(0) = 2^0 - 1 = 0$ 、 $P_1(1) = 2^1 - 1 = 1$  となるので、

$$P_1(x) = x$$

さて、 $Q_1(x) = P_2(x) - P_1(x)$  とすると、 $Q_1(x)$  は 2 次多項式で、

$$Q_1(0) = P_2(0) - P_1(0) = 0 - 0 = 0, \quad Q_1(1) = P_2(1) - P_1(1) = 1 - 1 = 0$$

これから、 $Q_1(x) = a_1x(x-1)$  ( $a_1 \neq 0$ ) とおくことができ、

$$P_2(x) = P_1(x) + Q_1(x) = x + a_1x(x-1)$$

そこで、 $P_2(2) = 2^2 - 1 = 3$  より、 $3 = 2 + 2a_1$ 、 $a_1 = \frac{1}{2}$

したがって、 $Q_1(x) = P_2(x) - P_1(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$

同様にして、 $Q_2(x) = P_3(x) - P_2(x)$  とすると、 $Q_2(x)$  は 3 次多項式となり、 $Q_2(0) = Q_2(1) = Q_2(2) = 0$  より、 $Q_2(x) = a_2x(x-1)(x-2)$  ( $a_2 \neq 0$ ) とおける。

$$\begin{aligned} P_3(x) &= P_2(x) + Q_2(x) = P_1(x) + Q_1(x) + Q_2(x) \\ &= x + \frac{1}{2}x(x-1) + a_2x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$P_3(3) = 2^3 - 1 = 7$  より、 $7 = 3 + 3 + 6a_2$ 、 $a_2 = \frac{1}{6}$

したがって、 $Q_2(x) = P_3(x) - P_2(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$

(2) (1) と同様に、 $Q_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x)$  とすると、 $Q_n(x)$  は  $n$  次多項式となり、

$Q_n(0) = Q_n(1) = Q_n(2) = \dots = Q_n(n) = 0$  から、

$$Q_n(x) = a_nx(x-1)(x-2)\dots(x-n) \quad (a_n \neq 0)$$

以下、 $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$  であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n=1$  のとき  $a_1 = \frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{2}$  より、成立する。

(ii)  $n \leq l$  のとき  $a_1 = \frac{1}{(1+1)!}$ 、 $a_2 = \frac{1}{(2+1)!}$ 、 $\dots$ 、 $a_l = \frac{1}{(l+1)!}$  と仮定すると、

$$\begin{aligned} P_{l+1}(x) &= P_l(x) + Q_l(x) = P_1(x) + Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_l(x) \\ &= x + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-l)}{(l+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき, } P_{l+2}(x) &= P_{l+1}(x) + Q_{l+1}(x) \\ &= P_{l+1}(x) + a_{l+1}x(x-1)(x-2)\cdots(x-l)(x-l-1) \end{aligned}$$

ここで,  $x = l+2$  を代入すると,

$$\begin{aligned} 2^{l+2} - 1 &= (l+2) + \frac{(l+2)(l+1)}{2!} + \frac{(l+2)(l+1)l}{3!} + \cdots + \frac{(l+2)(l+1)l\cdots 2}{(l+1)!} \\ &\quad + a_{l+1}(l+2)(l+1)l\cdots 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$2^{l+2} - {}_{l+2}C_0 = {}_{l+2}C_1 + {}_{l+2}C_2 + {}_{l+2}C_3 + \cdots + {}_{l+2}C_{l+1} + a_{l+1}(l+2)!$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } a_{l+1}(l+2)! &= 2^{l+2} - ({}_{l+2}C_0 + {}_{l+2}C_1 + {}_{l+2}C_2 + {}_{l+2}C_3 + \cdots + {}_{l+2}C_{l+1}) \\ &= (1+1)^{l+2} - ({}_{l+2}C_0 + {}_{l+2}C_1 + {}_{l+2}C_2 + {}_{l+2}C_3 + \cdots + {}_{l+2}C_{l+1}) \\ &= {}_{l+2}C_{l+2} = 1 \end{aligned}$$

よって,  $a_{l+1} = \frac{1}{(l+2)!}$  となり,  $n = l+1$  のときも成立する。

$$(i)(ii) \text{より, } a_n = \frac{1}{(n+1)!} \text{ すなわち } Q_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(n+1)!} \text{ となる。}$$

以上より,  $n \geq 2$  において,

$$P_n(x) = x + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \cdots + \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

なお,  $n = 1$  のときも,  $P_1(x) = x$  より成立する。

### コメント

最初は, 与えられた条件を連立方程式に直して,  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$ ,  $P_3(x) = \frac{1}{6}x(x^2+5)$  を導きました。しかし, この方法では, (2) に繋がりません。そこで, 考え直したのが上の解です。決してやさしくはありませんが, 演習する価値のある問題です。

**問題**

数列  $\{a_n\}$  は次の (i), (ii) を満たすとする。

$$(i) \quad a_1 = \frac{1}{2} \qquad (ii) \quad n \geq 2 \text{ について, } a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$$

ただし,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  である。

- (1)  $a_2$  を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  に対して,  $S_n$  を  $S_{n-1}$  で表せ。
- (3)  $S_n$  を求めよ。
- (4)  $n \geq 2$  に対して,  $a_n$  を求めよ。

[2000]

**解答例**

$$(1) \quad a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} \dots\dots \textcircled{1} \text{ に } n = 2 \text{ を代入すると, } a_2 = \frac{2S_2^2}{2S_2 - 1} = \frac{2(a_1 + a_2)^2}{2(a_1 + a_2) - 1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ より, } 2a_2\left(\frac{1}{2} + a_2\right) - a_2 = 2\left(\frac{1}{2} + a_2\right)^2 \text{ となり, } a_2 = -\frac{1}{4}$$

$$(2) \quad n \geq 2 \text{ で, } a_n = S_n - S_{n-1} \text{ より, } \textcircled{1} \text{ から, } \frac{2S_n^2}{2S_n - 1} = S_n - S_{n-1}$$

$$2S_n^2 = (S_n - S_{n-1})(2S_n - 1), \quad (2S_{n-1} + 1)S_n = S_{n-1} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{ここで, } S_{n-1} = -\frac{1}{2} \text{ とすると } \textcircled{2} \text{ は不成立なので, } S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1} + 1} \dots\dots \textcircled{3}$$

(3) ある  $n$  で  $S_n = 0$  とすると,  $\textcircled{3}$  より  $S_{n-1} = 0$  となり, 帰納的に  $S_1 = 0$  となるが, これは  $S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$  に反する。よって, どんな  $n$  に対しても  $S_n \neq 0$  である。

$$\textcircled{3} \text{ より, } \frac{1}{S_n} = \frac{2S_{n-1} + 1}{S_{n-1}} = 2 + \frac{1}{S_{n-1}} \text{ なので,}$$

$$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + 2(n-1) = 2 + 2(n-1) = 2n, \quad S_n = \frac{1}{2n}$$

$$(4) \quad \textcircled{1} \text{ より, } n \geq 2 \text{ で, } a_n = \frac{2 \cdot \frac{1}{4n^2}}{2 \cdot \frac{1}{2n} - 1} = \frac{1}{2n - 2n^2} = \frac{1}{2n(1-n)}$$

**コメント**

いわゆる和と一般項の関係を用いる問題です。(1)から(3)まで, 親切すぎるほどの誘導がついています。

**問題**

$a_1 = 1, a_n \neq 0, a_n = 3(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) (n = 2, 3, 4, \dots)$  で与えられる数列  $\{a_n\}$  がある。ただし、 $S_n$  は  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和である。

- (1)  $a_2$  を求めよ。
- (2)  $\sqrt{S_n}$  を求めよ。
- (3)  $a_n$  を求めよ。

[1999]

**解答例**

(1) 条件より、 $a_n = 3(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \frac{3(S_n - S_{n-1})}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} = \frac{3a_n}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}}$

$a_n \neq 0$  なので、 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = 3 (n \geq 2) \dots\dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$  に  $n = 2$  を代入すると、 $\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1} = 3, \sqrt{a_1 + a_2} + \sqrt{a_1} = 3$

$a_1 = 1$  より、 $\sqrt{1 + a_2} + 1 = 3, a_2 = 3$

(2)  $\textcircled{1}$  より、 $\sqrt{S_n} = -\sqrt{S_{n-1}} + 3, \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1} = 1$

$$\sqrt{S_n} - \frac{3}{2} = -\left(\sqrt{S_{n-1}} - \frac{3}{2}\right)$$

よって、 $\sqrt{S_n} - \frac{3}{2} = \left(\sqrt{S_1} - \frac{3}{2}\right)(-1)^{n-1} = -\frac{1}{2}(-1)^{n-1}$

$$\sqrt{S_n} = \frac{1}{2}\{3 - (-1)^{n-1}\} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

(3) (2) より、 $a_n = 3(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \frac{3}{2}\{3 - (-1)^{n-1}\} - \frac{3}{2}\{3 - (-1)^{n-2}\}$   
 $= \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)(-1)^{n-2} = 3(-1)^n (n \geq 2) \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$  に  $n = 1$  をあてはめると、 $a_1 = -3$  となり不成立。

よって、 $a_1 = 1, a_n = 3(-1)^n (n \geq 2)$

**コメント**

$\textcircled{1}$  のように、与えられた漸化式を予め変形しておく、解を求めやすくなります。

**問題**

座標平面において、2点  $P, Q$  をそれぞれ直線  $x = -1, x = 2$  上の点とし、直線  $PQ$  が円  $x^2 + y^2 = 1$  に接するように動くものとする。このとき、2点  $P, Q$  の  $y$  座標がともに整数であるような  $P, Q$  の組をすべて求めよ。 [1998]

**解答例**

$P(-1, a), Q(2, b)$  とする。

$\vec{PQ} = (3, b-a)$  から、直線  $PQ$  の法線ベクトルを  $\vec{n} = (a-b, 3)$  とおくことができる。

直線  $PQ$  の方程式は、

$$(a-b)(x+1) + 3(y-a) = 0$$

$$(a-b)x + 3y - 2a - b = 0$$

直線  $PQ$  が円  $x^2 + y^2 = 1$  に接するので、

$$\frac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2 + 9}} = 1 \text{ から, } |-2a-b| = \sqrt{(a-b)^2 + 9}$$

両辺 2 乗して、 $(2a+b)^2 = (a-b)^2 + 9, (2a+b+a-b)(2a+b-a+b) = 9$

$$a(a+2b) = 3$$

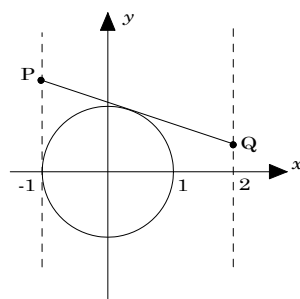
$a, b$  は整数より、 $a$  は 3 の約数となり、 $a = \pm 1, \pm 3$

$a = 1$  のとき  $a + 2b = 3$  から、 $b = 1$  となる。よって、 $P(-1, 1), Q(2, 1)$

$a = -1$  のとき  $a + 2b = -3$  から、 $b = -1$  となる。よって、 $P(-1, -1), Q(2, -1)$

$a = 3$  のとき  $a + 2b = 1$  から、 $b = -1$  となる。よって、 $P(-1, 3), Q(2, -1)$

$a = -3$  のとき  $a + 2b = -1$  から、 $b = 1$  となる。よって、 $P(-1, -3), Q(2, 1)$



**コメント**

円と直線が接する条件を整理すると、約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単に  $P, Q$  の座標が求まってしまいます。

**問題**

コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって、これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚, 箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚, 箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚, 箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき、次の問いに答えよ。

- (1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。
- (2) A, B, C いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。
- (3) 試行の後に箱 A を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた。このとき箱 B にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ。 [2019]

**解答例**

- (1) 条件より、さいころを 1 回振ってコインを 1 枚, 箱 A, 箱 B, 箱 C に入れる確率は、それぞれ  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{3}{6}$  である。

さて、さいころを 5 回振ったとき、箱 A, 箱 B, 箱 C にコインがそれぞれ 2 枚, 2 枚, 1 枚入っている確率は、

$$\frac{5!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3}{6^5} = \frac{5}{108} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

- (2) さいころを 5 回振ったとき、箱 A, 箱 B, 箱 C にコインが少なくとも 1 枚入っている事象をそれぞれ A, B, C とし、その確率を  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$  とおくと、

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5, \quad P(\bar{B}) = \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)^5 = \left(\frac{4}{6}\right)^5$$

$$P(\bar{C}) = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\right)^5 = \left(\frac{3}{6}\right)^5, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \left(\frac{3}{6}\right)^5, \quad P(\bar{B} \cap \bar{C}) = \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$P(\bar{C} \cap \bar{A}) = \left(\frac{2}{6}\right)^5, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0$$

すると、箱 A, 箱 B, 箱 C いずれにもコインが 1 枚以上入っている確率は、

$$P(A \cap B \cap C) = 1 - P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

ここで、 $P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$  の値は、

$$P(\bar{A}) + P(\bar{B}) + P(\bar{C}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{B} \cap \bar{C}) - P(\bar{C} \cap \bar{A}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \left(\frac{4}{6}\right)^5 + \left(\frac{3}{6}\right)^5 - \left(\frac{3}{6}\right)^5 - \left(\frac{1}{6}\right)^5 - \left(\frac{2}{6}\right)^5 + 0 = \frac{4116}{6^5} = \frac{343}{648}$$

よって、 $\textcircled{2}$ より、 $P(A \cap B \cap C) = 1 - \frac{343}{648} = \frac{305}{648}$

(3) さいころを 5 回振ったとき、コインが箱 A に 2 枚入っているのは、箱 B または C には 3 枚入っていることなので、その確率は、

$$\frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right)^3 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 5^3}{6^5} = \frac{2 \cdot 5^4}{6^5}$$

すると、箱 A に 2 枚のコインが入っていたとき、箱 B にもコインが 2 枚入っている条件付き確率は、①を利用して、

$$\frac{5}{108} \div \frac{2 \cdot 5^4}{6^5} = \frac{5}{3 \cdot 6^2} \cdot \frac{6^5}{2 \cdot 5^4} = \frac{6^2}{5^3} = \frac{36}{125}$$

### コメント

確率の標準的な問題です。(2)は余事象の確率と和事象の確率を組み合わせた有名な解法で記述しました。

## 問題

箱の中に  $n$  枚のカードが入っている。ただし  $n \geq 3$  とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの  $(n-2)$  枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が  $k$  回目にはじめてちょうど 100 点となる確率  $P(k)$  を求めよ。

[2018]

## 解答例

もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき, 金, 銀, 白である確率は, それぞれ  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{n-2}{n}$  である。そして, 金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, その合計点を考える。

さて,  $k$  回目に合計点をはじめて 100 点となるのは, 次の(a), (b)の場合がある。

(a)  $k-1$  回目までの合計点が 50 点で,  $k$  回目に金という場合

(a-i)  $1 \leq k-1 \leq 4$  ( $2 \leq k \leq 5$ ) のとき

$k-1$  回目までは, 金が 1 回, 白が  $k-2$  回となり, その確率は,

$${}_{k-1}C_1 \frac{1}{n} \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-2} \times \frac{1}{n} = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}$$

(a-ii)  $k-1 \geq 5$  ( $k \geq 6$ ) のとき

$k-1$  回目までは, 金が 1 回, 白が  $k-2$  回, または銀が 5 回, 白が  $k-6$  回となり, その確率は,

$$\begin{aligned} & {}_{k-1}C_1 \frac{1}{n} \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-2} \times \frac{1}{n} + {}_{k-1}C_5 \left( \frac{1}{n} \right)^5 \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-6} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} + \frac{{}_{k-1}C_5 (n-2)^{k-6}}{n^k} \end{aligned}$$

(b)  $k-1$  回目までの合計点が 90 点で,  $k$  回目に銀という場合

(b-i)  $5 \leq k-1 \leq 8$  ( $6 \leq k \leq 9$ ) のとき

$k-1$  回目までは, 金が 1 回, 銀が 4 回, 白が  $k-6$  回となり, その確率は,

$${}_{k-1}C_1 {}_{k-2}C_4 \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^4 \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-6} \times \frac{1}{n} = \frac{{}_{k-2}C_4 (k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

(b-ii)  $k-1 \geq 9$  ( $k \geq 10$ ) のとき

$k-1$  回目までは, 金が 1 回, 銀が 4 回, 白が  $k-6$  回, または銀が 9 回, 白が  $k-10$  回となり, その確率は,

$$\begin{aligned} & {}_{k-1}C_1 {}_{k-2}C_4 \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^4 \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-6} \times \frac{1}{n} + {}_{k-1}C_9 \left( \frac{1}{n} \right)^9 \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-10} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{{}_{k-2}C_4 (k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k} + \frac{{}_{k-1}C_9 (n-2)^{k-10}}{n^k} \end{aligned}$$



(a)(b)より,  $k$  回目に合計点がはじめて 100 点となる確率  $P(k)$  は,

(i)  $k=1$  のとき  $P(k)=0$

(ii)  $2 \leq k \leq 5$  のとき (a-i)より,  $P(k) = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}$

(iii)  $6 \leq k \leq 9$  のとき (a-ii)および(b-i)より,

$$P(k) = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} + \frac{{}_{k-1}C_5(n-2)^{k-6}}{n^k} + \frac{{}_{k-2}C_4(k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

ここで,  ${}_{k-2}C_4(k-1) = \frac{(k-1)!}{4!(k-6)!} = 5 \cdot \frac{(k-1)!}{5!(k-6)!} = 5 {}_{k-1}C_5$  となるので,

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{(k-1)(n-2)^{k-2} + (1+5) {}_{k-1}C_5(n-2)^{k-6}}{n^k} \\ &= \frac{(n-2)^{k-6}}{n^k} \{ (k-1)(n-2)^4 + 6 {}_{k-1}C_5 \} \end{aligned}$$

(iv)  $k \geq 10$  のとき (a-ii)および(b-ii)より,

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} + \frac{(1+5) {}_{k-1}C_5(n-2)^{k-6}}{n^k} + \frac{{}_{k-1}C_9(n-2)^{k-10}}{n^k} \\ &= \frac{(n-2)^{k-10}}{n^k} \{ (k-1)(n-2)^8 + 6 {}_{k-1}C_5(n-2)^4 + {}_{k-1}C_9 \} \end{aligned}$$

## コメント

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので, その 1 回手前の状態に着目しています。ただ, 記述量はかなりのもので, 忍耐力の勝負になります。

**問 題**

1 個のさいころを 3 回投げて、以下のルールで各回の得点を決める。

- ・ 1 回目は、出た目が得点になる。
- ・ 2 回目は、出た目が 1 回目と同じならば得点は 0、異なれば出た目が得点になる。
- ・ 3 回目は、出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0、どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし、総得点が  $n$  となる確率を  $p_n$  とする。

- (1) 総得点  $n$  の最大値, 最小値と, それらの  $n$  に対する  $p_n$  を求めよ。
- (2)  $p_6$  を求めよ。
- (3)  $p_n$  が最大となるような  $n$  と, そのときの  $p_n$  を求めよ。 [2017]

**解答例**

- (1) 題意の総得点  $n$  が最大となるのは, 3 回の出た目が 6, 5, 4 の場合で, 最大値は  $n = 6 + 5 + 4 = 15$  である。このときの確率  $p_{15}$  は,

$$p_{15} = 3! \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

また, 総得点  $n$  が最小となるのは, 3 回の出た目が 1, 1, 1 の場合で, 最小値は  $n = 1 + 0 + 0 = 1$  である。このときの確率  $p_1$  は,

$$p_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

- (2) 総得点が 6 のとき, 3 回の出た目について同じ目の出方で場合分けをする。

- (i) 同じ目が出なかったとき

出た目が 1, 2, 3 の場合だけであり, このときの確率は  $3! \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{6}{216}$  である。

- (ii) 同じ目が 2 回出たとき

出た目が 1, 1, 5 または 1, 5, 5 または 2, 2, 4 または 2, 4, 4 の場合であり, このときの確率は,

$$\frac{3!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{3!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{3!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{3!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 4 \cdot 3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{12}{216}$$

- (iii) 同じ目が 3 回出たとき

出た目が 6, 6, 6 の場合だけであり, このときの確率は  $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$  である。

- (i)~(iii)より, 総得点 6 の確率  $p_6$  は,  $p_6 = \frac{6}{216} + \frac{12}{216} + \frac{1}{216} = \frac{19}{216}$

- (3) 題意の総得点  $n$  の値の範囲は, (1)から  $1 \leq n \leq 15$  である。そして, (2)と同様に, 同じ目の出方について, 場合分けをする。

(i) 同じ目が出なかったとき

出た目が  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) のとき,  $n$  の値とその出方  $N$  通りの関係は,

$n$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$N$	3!	3!	2·3!	3·3!	3·3!	3·3!	3·3!	2·3!	3!	3!

(ii) 同じ目が 2 回出たとき

出た目が  $a, a, b$  か  $a, b, b$  ( $a < b$ ) のとき,  $n$  の値とその出方  $N$  通りの関係は,

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$N$	2·3	2·3	4·3	4·3	6·3	4·3	4·3	2·3	2·3

(iii) 同じ目が 3 回出たとき

出た目が  $a$  だけのとき,  $n$  の値とその出方  $N$  通りの関係は,

$n$	1	2	3	4	5	6
$N$	1	1	1	1	1	1

(i)~(iii)より,  $n$  の値とその出方  $N$  通りの関係をまとめると,

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$N$	1	1	7	7	13	19	24	24	30	24	24	18	12	6	6

以上より,  $n=9$  のとき  $N$  の値が最大となるので,  $p_n$  の最大値は,

$$p_9 = 30 \left( \frac{1}{6} \right)^3 = \frac{5}{36}$$

### コメント

確率の標準的な問題です。理系単独の(3)は, 1 組の出た目について, その確率がすべて  $\left(\frac{1}{6}\right)^3$  であることに着目して, 出た目のパターンを全調査しました。時間はかなりかかりましたが。

## 問題

数直線上の点  $Q$  は、はじめは原点  $x=0$  にあり、さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。 $Q$  が  $x=a$  にあるとき、

- ・ 出た目が 1 ならば  $x=a$  にとどまる。
- ・ 出た目が 2, 3 ならば  $x=a+1$  へ動く。
- ・ 出た目が 4, 5, 6 ならば  $x=0$  に戻る ( $a=0$  ならば動かない)。

- (1) 整数  $a \geq 0$  に対して、さいころを 3 回投げたとき、 $Q$  が  $x=a$  にある確率を求めよ。  
 (2) さいころを  $n$  回投げたとき、 $Q$  が  $x=0$  にある確率を求めよ。  
 (3) さいころを  $n$  回投げたとき、 $Q$  が  $x=1$  にある確率を求めよ。 [2016]

## 解答例

- (1) さいころを 3 回投げ  $Q$  が  $x=a$  にある確率を、 $a$  の値で場合分けをして求める。

- (i)  $a \geq 4$  のとき

到達点は  $a \leq 3$  なので、このときの確率は 0 である。

- (ii)  $a=3$  のとき

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  の場合のみより、このときの確率は  $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$  である。

- (iii)  $a=2$  のとき

$0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ,  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2$  の場合があり、これらの確率はそれぞれ  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$ ,  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{54}$ ,  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$  である。

よって、このときの確率は  $\frac{2}{27} + \frac{1}{54} + \frac{1}{54} = \frac{1}{9}$  である。

- (iv)  $a=1$  のとき

$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$  の場合があり、これらの確率はそれぞれ  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ ,  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$ ,  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ ,  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$  である。

よって、このときの確率は  $\frac{4}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{108} = \frac{1}{4}$  である。

- (v)  $a=0$  のとき

このときの確率は、(i)~(iv)の結果から、 $1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = \frac{65}{108}$  である。

- (2) さいころを  $n$  回投げ、 $Q$  が  $x=0$ ,  $x \neq 0$  にある確率をそれぞれ  $p_n$ ,  $q_n$  とおくと、

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}$$

すると、 $p_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{3}{5}\right)$  となり、 $p_1 = \frac{2}{3}$  から、

$$p_n - \frac{3}{5} = \left(p_1 - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって、 $p_n = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$  である。

(3) さいころを  $n$  回投げ、 $Q$  が  $x=1$  にある確率を  $r_n$  とおくと、 $r_1 = \frac{1}{3}$  で、(2)から、

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}r_n = \frac{1}{6}r_n + \frac{1}{45}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}$$

すると、両辺に  $6^n$  をかけて、 $6^n r_{n+1} = 6^{n-1} r_n + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} \cdot 6^n$  となり、 $n \geq 2$  で、

$$\begin{aligned} 6^{n-1} r_n &= 6^0 r_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{2}{15} + \frac{1}{5} \cdot 6^k \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}(n-1) + \frac{1}{5} \cdot \frac{6(6^{n-1}-1)}{6-1} \\ &= \frac{2}{15}n + \frac{1}{25} \cdot 6^n - \frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$r_n = \frac{2}{15}n \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{25} - \frac{1}{25} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{15}n - \frac{1}{25}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{25}$$

$n=1$  をあてはめると、 $r_1 = \frac{2}{15} - \frac{1}{25} + \frac{6}{25} = \frac{1}{3}$  となり成立するので、

$$r_n = \left(\frac{2}{15}n - \frac{1}{25}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{6}{25}$$

### コメント

設定が微妙に複雑な確率の問題です。(1)では、記述を省略しましたが、樹系図を書いて数えもれのチェックをしています。また、(2)は直接的に求めようかとも思いましたが、無難な漸化式という方針を採用しました。また、(3)は(2)の結果を利用しましたが、漸化式がやや複雑なタイプです。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。