2020 入試対策
過去問ライブラリー

広島大学
文系数学22か年

1998−2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された広島大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　座標平面上の 2 点 $A(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$B(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ を考え, A, B 間の距離を L とする。ただし，θ は条件 $(*)\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ かつ $\sin\theta-\cos\theta-1>0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　(＊)を満たす θ の範囲を求めよ。

(2)　$t=\sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　L を(2)の t を用いて表せ。

(4)　L の最大値, 最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。　[2017]

2　$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の定義域を求めよ。

(2)　不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け。

(3)　関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき，2^{m-2} を求めよ。

(4)　(3)の m について，1000^m の整数部分の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。　[2012]

3　次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。不等式 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ を満たす k の値の範囲を求めよ。

(2)　a，b は定数で，$a>0$ とする。2 次関数 $f(x)=ax^2-2x+b$ の定義域を $-1 \leqq x \leqq 2$ とし，$f(-1)<f(2)$ を満たすとする。関数 $y=f(x)$ の値域が $-1 \leqq y \leqq 7$ であるとき，定数 a, b の値を求めよ。　[2011]

4　$k>0$ を定数とするとき, x についての方程式 $\log_3 x=kx$ が 2 つの実数解 α と 3α をもつとする。このとき, k の値と α の値を求めよ。　[2006]

5　$P(x)$ は，x^3 の係数が 1 であるような 3 次式とする。$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りは $x+1$ であり，$(x-1)^2$ で割ったときの余りは $x+c$ である。ただし，c は定数である。このとき, c の値と $P(x)$ を求めよ。　[2005]

6　正の実数 x，y が $xy=100$ を満たすとき，$(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ。　[2005]

7　a, b を実数とする。x の方程式 $4^x + a\times 2^{x+1} + b = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$a=-1$，$b=-3$ のときの解を求めよ。

(2)　この方程式が異なる 2 つの実数解をもつような点 $(a,\ b)$ 全体の集合を，座標平面上に図示せよ。　[2004]

8　$-180^\circ < x < 180^\circ$ とする。c を実数とする。x の方程式

$$(*)\quad \sin x + \sqrt{3}\cos x + c = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　$(*)$を $\sin(x+A)=B$ の形で表せ。また，$c=\sqrt{3}$ のとき, x の値を求めよ。

(2)　$(*)$が異なる 2 つの解 α，β をもつための c の条件を求めよ。

(3)　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくとき，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を示せ。さらに，$(*)$を t についての 2 次方程式で表せ。

(4)　(2)の条件のもとで，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の値を求めよ。　[2004]

9　正の定数 a に対し，$\log_a(3x)+\log_{\sqrt{a}}(a-x)=1$ を満たす実数 x がちょうど 2 つある。このとき, a はどのような範囲にあるか。　[2002]

10　次の問いに答えよ。

(1)　次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。　$\log_3(x-7)+\log_3(x-5)\leqq 1$

(2)　次の不等式を満たす y の範囲を求めよ。　$9^y - 8\times 3^y - 9 \leqq 0$

(3)　x, y がそれぞれ(1), (2)の範囲を動くとき，$\log_2 x + 2^y$ の最大値を求めよ。 [2001]

11　$y=a(\sin\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta$ とする。ただし, a は正の定数である。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおいて, y を t の式で表せ。

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値 M と最小値 m を，それぞれ a を用いて表せ。　[2001]

12　関数 $y=(\sin^2\theta-2\sin\theta+3)^2+3(\cos 2\theta+4\sin\theta+1)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする。

(1)　$\sin^2\theta-2\sin\theta+3=x$ とおくとき，y を x の式で表せ。また，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。　[2000]

13　2 点$(1,\ 1)$，$(-1,\ 5)$を通る 2 次関数のグラフについて，頂点を$(p,\ q)$，y軸との交点を$(0,\ k)$とする。

(1)　p, qをkで表せ。

(2)　p, qがともに正のとき，kの値の範囲を求めよ。　[1999]

14　aを正の定数とし，$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$とする。

(1)　$f(x)$が最大となるxの値を求めよ。

(2)　$f(x)$の最大値が 4 以上のとき，aの値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 微分と積分

1　座標平面上の 2 つの曲線$C: y=x^3$，$C': y=8x^3$と曲線 C 上の点$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$を考える。点P_1を通り x 軸と平行な直線と曲線C'の交点をQ_1とし，点Q_1を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点をP_2とする。次に，点P_2を通り x 軸と平行な直線と曲線C'の交点をQ_2とし，点Q_2を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点をP_3とする。このように，自然数 n に対して，点P_nを通り x 軸と平行な直線と曲線C'の交点をQ_nとし，点Q_nを通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点をP_{n+1}とする。点P_nの x 座標をa_nとおく。次の問いに答えよ。

(1)　a_nをnを用いて表せ。

(2)　点P_{n+1}における曲線 C の接線，直線$x=a_n$および曲線 C で囲まれる部分のうち，$a_{n+1} \leqq x \leqq a_n$の領域にある面積を$S_n$とする。$S_n$を$n$を用いて表せ。

(3)　$T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$とおく。T_nをnを用いて表せ。　[2019]

2　O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}$ を考える。C 上の点 D$(-1,\ 2)$ における C の接線を l とし, D と異なる C と l の共有点を E とする。次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　E の座標を求めよ。

(3)　原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 A$(a,\ b)$ を考える。ただし, a と b はともに正であるとする。直線 l 上の動点 P に対し, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が P の位置によらず一定であるとき, A の座標を求めよ。

(4)　A を(3)で求めた点とする。点 Q が C 上を D から E まで動くときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ。　[2018]

3　座標平面上の 2 つの曲線 $C_1: y=4x^3-1$, $C_2: y=x^3$ を考える。$a>0$ に対して, x 座標が a である C_1 上の点を A とし, A における C_1 の接線を l とする。次の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の交点の x 座標を p とする。p の値を求めよ。

(2)　直線 l の方程式を, a を用いて表せ。

(3)　直線 l が C_2 に接するとき, a の値を求めよ。

(3)　(3)のとき, 直線 l と C_2 の接点を B とする。C_1, C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2017]

4　α, β は $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<1$ を満たす実数とする。3 つの放物線

$$C_1: y=x(1-x),\ C_2: y=x(1-\beta-x),\ C_3: y=(x-\alpha)(1-x)$$

を考える。C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする。また, C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　γ を α, β を用いて表せ。

(2)　S を α, β を用いて表せ。

(3)　α, β が $\alpha+\beta=\frac{1}{4}$ を満たしながら動くとき, S の最大値を求めよ。　[2015]

5　放物線$y=2x^2-8$を C とする。x 軸上の点$\mathrm{A}(a,\ 0)$　$(a>0)$を通り C と接する直線が 2 本あるとき，次の問いに答えよ。

(1)　aの値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの接点 P，Q の x 座標をそれぞれα，$\beta\ (\alpha<\beta)$とする。$\beta-\alpha=3$のとき，a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2013]

6　放物線$C: y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$上に 2 点 A，B があり，A の x 座標は 3 である。点 A，点 B における C の接線をそれぞれ l，m とし，l と m の交点を P とおくと，$\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ であった。次の問いに答えよ。

(1)　接線 l の方程式を求めよ。

(2)　接線 m の傾きを求めよ。

(3)　点 P の座標を求めよ。

(4)　C, l, m で囲まれた図形において，不等式$x\geqq 0$を満たす部分の面積 S を求めよ。

[2012]

7　k は定数で，$k>0$ とする。曲線$C: y=kx^2\ (x\geqq 0)$と 2 つの直線$l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$との交点の x 座標をそれぞれα，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha-\beta$の値を求めよ。

(2)　$\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$および$\alpha^3-\beta^3$を k を用いて表せ。

(3)　曲線 C と 2 直線 l，m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。　[2010]

8　p，a を実数の定数とする。多項式$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$を$x-3$で割った余りが$10-6p$であり，3 次方程式$P(x)=0$の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1)　実数の範囲で$P(x)$を因数分解せよ。

(2)　aの値を求めよ。

(3)　関数$y=P(x)$が極値をもたないときの p の値を求めよ。　[2010]

9　関数 $y = x - x^3$ のグラフと，その上の点 $\mathrm{P}(t,\ t - t^3)$，および点 P における接線 l を考える。ただし $t > 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$y = x - x^3$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(2)　l と $y = x - x^3$ のグラフの交点を Q とおく。ただし Q は P と異なる点とする。点 Q の x 座標を求めよ。

(3)　三角形 OPQ の面積が 12 となるとき t を求めよ。ただし点 O は原点である。

[2009]

10　3 次関数 $y = x^3 - cx$ のグラフを考える。ただし, c は定数とする。そして, 2 点 P, Q が次の条件を満たしながら，このグラフ上全体を動くものとする。

（条件）　P の x 座標は Q の x 座標より 1 だけ小さい

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 PQ の傾きが最小になるときの点 P の x 座標と，傾きの最小値を求めよ。

(2)　線分 PQ の傾きが 0 となる点 P が存在するような, c の値の範囲を求めよ。

(3)　線分 PQ の中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点を R とする。点 R におけるグラフの接線の傾きは，線分 PQ の傾きよりつねに小さいことを示せ。

[2008]

11　α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし, x の関数

$$f(x) = \sqrt{2}x^3 - 3(\sin\alpha)x^2 + \sin\alpha\cos 2\alpha$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および方程式 $f'(x) = 0$ の解を求めよ。

(2)　方程式 $f(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような α の値の範囲を求めよ。

[2007]

12 pを正の定数とし，放物線C：$y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$上の点$\mathrm{P}(p,\ q)$における$C$の接線を$l$とする。

(1) 点$\mathrm{Q}(p,\ 0)$を通り，lに直交する直線mの方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標をα，β $(\alpha<\beta)$とすれば，$\alpha<0<\beta<p$であることを示せ。

(3) 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積をS_1，放物線Cと直線mおよび直線$x=p$で囲まれた図形の面積をS_2とする。このとき，$S_2-S_1=\dfrac{1}{6}p^3$であることを示せ。　[2007]

13 直線$y=-2x+m$が，放物線$y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax$ $(a>2)$に点$\mathrm{P}(p,\ q)$で接している。連立不等式 $0\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+ax$，$x\leqq p$の表す領域の面積を$S_1$とする。また，連立不等式 $-\dfrac{1}{2}x^2+ax\leqq y\leqq -2x+m$，$0\leqq x\leqq p$の表す領域の面積を$S_2$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a, m, qをpの式で表せ。

(2) S_1とS_2をpの式で表せ。

(3) $a>2$のとき，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{S_2}{S_1}<2$が成り立つことを示せ。　[2006]

14 各実数 t に対して，方程式$y=(2t-3)x-t^2$で表される直線L_tを考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線L_tとL_sが直交するとき，L_tとL_sの交点の y 座標は，t と s によらない定数になることを示せ。

(2) 放物線$y=ax^2+bx+c$にすべての直線L_tが接するとき，定数a，b，c の値を求めよ。

(3) (2)で求めた放物線と 2 つの直線L_t，L_{t+2}によって囲まれる図形の面積は，t によらない定数になることを示せ。　[2005]

15 $f(x)=x^2-4x+5$ とする。$p<2<q$ とし，放物線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線を，それぞれ $l,\ m$ とする。l と m は点 $\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{2},\ r\right)$ で交わり，それぞれの傾きを $a,\ b$ とするとき，$2a+b=0$ を満たすものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) p, q, r を求めよ。

(2) 接線 l, m の方程式を求めよ。

(3) 放物線 $y=f(x)$ と 2 つの接線 l, m で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　[2004]

16 次の問いに答えよ。

(1) a を 0 でない実数とするとき，2 つの曲線 $y=-x^2+2x$ と $y=-ax^2+1$ が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で 2 つの交点をもつように a の範囲を定めよ。

(2) a_0 を(1)で求めた a の範囲の最大値とするとき，定積分

$$I=\int_0^2\left|(-a_0x^2+1)-(-x^2+2x)\right|dx$$

を求めよ。　[2003]

17 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(a<b)$ における接線をそれぞれ l_{A}，l_{B} とする。

(1) l_{A} と l_{B} の交点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とするとき，a, b は 2 次方程式 $x^2-2px+q=0$ の解であることを示せ。

(2) 2 直線 l_{A}，$x=b$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積 S は，$\dfrac{1}{3}(b-a)^3$ であることを示せ。

(3) 交点 P が放物線 $y=-(x-1)^2$ 上を動くとき，面積 S の最小値を求めよ。　[2002]

18 放物線 $y=x^2$ と直線 l が 2 点で交わっている。それらの交点の x 座標を $s,\ t$ $(s<t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 l で囲まれた部分の面積 S は，$S=\dfrac{1}{6}(t-s)^3$ で与えられることを証明せよ。

(2) 直線 l が，点 $(t,\ t^2)$ における $y=x^2$ の接線と直交しているとき，s を t で表せ。

(3) (2)のとき，(1)の面積 S の最小値，および最小値を与える t を求めよ。　[2001]

19　a を正の定数とする。曲線 $y = x^2(x-a)$ の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2(p-a))$ における接線 l が y 軸と交わる点を $\mathrm{H}(0,\ h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　h を p の式で表せ。

(2)　$p \geqq 0$ のとき，h を最大にする p の値を求めよ。また，そのときの接線 l の方程式を求めよ。　[2000]

20　2 次関数 $f(x) = px^2 + qx + r$ は，次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $-4x+8$ である。

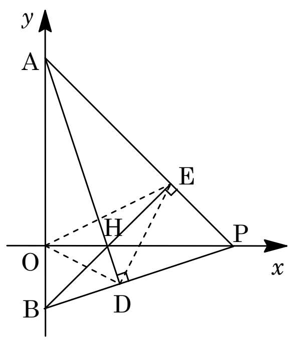
(ii)　$y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

(1)　$p,\ q$ の値と r の範囲を求めよ。

(2)　$y = f(x)$ のグラフが x 軸と交わる 2 点を A, B, y 軸と交わる点を C とし，三角形 ABC の面積を T とする。また，$y = f(x)$ のグラフが x 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。$S = 4T$ となるような r の値を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　原点を O とする座標平面上において，点 $\mathrm{A}(0,\ 3)$，$\mathrm{B}(0,\ -1)$ および x 軸上の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ があり，$\angle\mathrm{APB}$ は鈍角でないとする。$\triangle\mathrm{ABP}$ の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを，三角形の垂心という。



(1)　$\angle\mathrm{APB}$ が直角となる t の値を求めよ。

(2)　点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3)　点 H が $\triangle\mathrm{ODE}$ の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が $180°$ である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4)　$\triangle\mathrm{ODE}$ の内接円の半径を t を用いて表せ。　[2019]

2　次の問いに答えよ。

(1)　t の 2 次関数 $s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ。

(2)　次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

　(A)　2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(3)　次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

　(B)　2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(4)　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。　[2018]

3　座標平面上の 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ を考える。C を線分 OA 上にあり，$\angle\mathrm{OBC}=45^\circ$ を満たす点とする。また, P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする。点 Q, R, P' を次により定める。

　(a)　点 P を通り傾きが 1 の直線と, 直線 AB の交点を Q とする。

　(b)　点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と, 直線 OB の交点を R とする。

　(c)　点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と, 直線 OA の交点を P' とする。

次の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 R の座標を t を用いて表せ。

(3)　点 P' の座標を t を用いて表せ。

(4)　点 P' の x 座標を $f(t)$ とする。数列 $\{t_n\}$ を $t_1=2$，$t_{n+1}=f(t_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ。　[2017]

4　a を正の定数とし，座標平面上において，円 $C_1:x^2+y^2=1$，放物線 $C_2:y=ax^2+1$ を考える。C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 l は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している。次の問いに答えよ。

(1)　$s,\ t$ および a を求めよ。

(2)　C_2, l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　円 C_1 上の点が点 P から点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする。C_2, l および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2016]

5 $a,\ b,\ c$ を実数とし，$a<1$ とする。座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y=x^2-x$，$C_2 : y=x^3+bx^2+cx-a$ を考える。C_1 と C_2 は，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ と，それとは異なる点 Q を通る。また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする。点 P における C_1 の接線を l_1，点 Q における C_1 の接線を l_2，点 Q における C_2 の接線を l_3 とする。次の問いに答えよ。

(1) b, c および点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) l_1，l_2，l_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ。

(3) l_1，l_2，l_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ。 [2015]

6 座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。C の外部にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線と C との接点を H，H$'$ とする。$\angle\mathrm{OPH}=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) PH の長さ，および $\sin\theta$ を a, b を用いて表せ。

(2) $\mathrm{HH}'=\mathrm{OP}$ となるような点 P の軌跡を求めよ。 [2014]

7 座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，2 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(s,\ 0)$ を考える。2 点 P，Q を通る直線を l とし，l と C の交点のうち P ではないものを R とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を s を用いて表せ。

(2) x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という。s が有理数のとき，R は有理点であることを示せ。 [2013]

8 放物線 $F : y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，A における F の接線に垂直な直線を l とし，l と放物線 F との交点のうち点 A と異なる方を $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{2}(b+1)^2\right)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式と b の値を求めよ。

(2) 放物線 F と直線 l で囲まれた部分の面積 T_1 を求めよ。

(3) 線分 AB を直径とする円を C とする。このとき，不等式 $y\leqq\dfrac{1}{2}(x+1)^2$ の表す領域で円 C の内部にある部分の面積 T_2 を求めよ。 [2011]

9　座標平面上の定点 P と，関数 $y=f(x)$ のグラフ上を動く点 Q を考える。このとき，点 P と点 Q の距離 PQ の最小値を，点 P と $y=f(x)$ のグラフの距離と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

(1)　点 $P_1\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_1 の値を求めよ。

(2)　点 $P_2\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_2 の値を求めよ。また，$d_2=P_2R$ となる $y=x^2$ のグラフ上の点 R をすべて求めよ。

(3)　点 P_2 を中心とする半径 d_2 の円と $y=x^2$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2009]

10　2 つの円

$$(*)\ \ x^2+y^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x-\frac{\sqrt{17}}{2}y+\sin^2\theta+\frac{17}{16}=0$$

$$(**)\ \ x^2+y^2=\frac{9}{16}$$

について，次の問いに答えよ。ただし，$0°<\theta<180°$ とする。

(1)　円(＊)の半径と中心の座標を θ を用いて表せ。

(2)　円(＊)と円(＊＊)が共有点をもたないような θ の値の範囲を求めよ。　[2005]

11　不等式 $\log_a b+\log_a(k-b)>2$ を満たす実数 $a,\ b$ について，次の問いに答えよ。ただし, k は $k>2$ を満たす定数とする。

(1)　点 $(a,\ b)$ 全体の集合を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a+b$ がとる値の範囲を求めよ。　[2003]

12　直線 $x+y=1$ 上の点 Q と，放物線 $y=x^2$ 上の原点 O とは異なる点 R に対し，2 つの半直線 OQ, OR の x 軸の正の向きからはかった角をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とおく。さらに，線分 QR の中点を P とおく。2 点 Q, R が $\alpha=\beta+45°$，$0°<\beta<45°$ を満たすように動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 OQ の傾きを a, 直線 OR の傾きを b とするとき，$a=\dfrac{1+b}{1-b}$ となることを示せ。

(2)　点 P の座標を b を用いて表せ。

(3)　点 P の軌跡を求めよ。　[2002]

13　次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数 $y=x^2$ のグラフと点 $(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円が原点以外に共有点をもつような r の値の範囲を求めよ。

(2)　連立不等式 $y \leqq x^2$, $x^2+(y-1)^2 \leqq 1$ の表す領域の面積を求めよ。　[2000]

14　正六角形 ABCDEF の頂点 A, B, C の座標をそれぞれ $(2,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ とする。ただし, $a>0$ とする。

(1)　a, b の値を求めよ。

(2)　対角線 AD, CF の交点の座標を求めよ。　[1999]

15　xy 平面上に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ がある。円 C 上を動く点 P に対して, 3 点 O, A, P が三角形をつくるとき, その三角形の重心を G とする。

(1)　G の軌跡を求めよ。

(2)　円 C 上の点 $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対する三角形 OAP_0 の重心を G_0 とする。(1)で求めた軌跡の G_0 における接線が x 軸と交わる点の座標を求めよ。　[1998]

■ 図形と計量

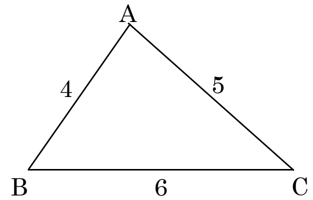
1　四角形 ABCD において, $\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{DBC}=90°$, $\angle\mathrm{BCD}=60°$, $\mathrm{AB}=\mathrm{AD}$, $\mathrm{BC}=1$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ。

(2)　対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ。

(3)　$\angle\mathrm{BAC}=\alpha$, $\angle\mathrm{ACD}=\beta$ とおくとき, $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$ を求めよ。　[2016]

2　図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある。次の問いに答えよ。



(1)　$45° < \angle\mathrm{B} < 60°$ を証明せよ。

(2)　$\angle\mathrm{A} = 2\angle\mathrm{C}$ を証明せよ。

(3)　$40° < \angle\mathrm{C} < 45°$ を証明せよ。　[2012]

3　三角形 ABC において，$AB=2$，$AC=1$とする。$\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を P とし，$\angle PAC=\theta$ とする。

(1)　三角形 ABC の面積をθを用いて表せ。

(2)　AP をθを用いて表せ。

(3)　$AP=BP$ のとき，θの値を求めよ。　[1999]

4　三角形 ABC において, 3 つの角の大きさの比が $A:B:C=7:4:1$，辺 AB の長さが 1 とする。

(1)　$\sin A$，$\sin C$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。　[1998]

■ ベクトル

1　座標空間に 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(s,\ s,\ s)$，$B(-1,\ 1,\ 1)$，$C(0,\ 0,\ 1)$がある。ただし，$s>0$ とする。$t,\ u,\ v$ を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}$，$\vec{e}=\overrightarrow{OC}-u\overrightarrow{OA}-v\overrightarrow{OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{OA}\perp\vec{d}$ のとき, t を s を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{OA}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{OA}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき, $u,\ v$ を s を用いて表せ。

(3)　(2)のとき，2 点 D，E を，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{OE}=\vec{e}$ となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき, s の値を求めよ。　[2016]

2　座標平面上に原点 O と 2 点 $A(1,\ 0)$，$B(0,\ 1)$ をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とする。点 C は $|\overrightarrow{OC}|=1$，$0^\circ<\angle AOC<90^\circ$，$0^\circ<\angle BOC<90^\circ$ を満たすとする。$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=t$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(2)　線分 AB と線分 OC の交点を D とする。$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(3)　点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする。D は(2)で定めた点とする。このとき，$\triangle OBD$ と $\triangle CDE$ の面積の和を t を用いて表せ。　[2015]

3 四面体 OABC において，△OAB の重心を F，△OAC の重心を G とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ。

(3) $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ のとき，FG の長さを求めよ。 [2014]

4 座標平面上に点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ がある。原点を O とし，x 軸に関して点 A と対称な点を B とする。次の問いに答えよ。

(1) $-1<\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\leqq\dfrac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ。

(2) 点 P を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める。点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする。θ が(1)で求めた範囲を動くとき，△POQ の面積の最大値を求めよ。 [2013]

5 平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O，線分 AB を $1:4$ に外分する点を C とする。P を直線 AB 上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ が垂直であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ で表せ。

(3) $\mathrm{PA}=1$，△PAB の面積が $\dfrac{3}{2}$ のとき，PB の長さを求めよ。 [2011]

6 座標平面上に点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{P}(4,\ 3)$ をとる。不等式 $(x-5)^2+(y-10)^2\leqq16$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) k は定数とする。直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を k を用いて表せ。

(2) 点 R が D 全体を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値および最小値を求めよ。 [2010]

7 四面体 OABC において $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$, $\mathrm{OC}=1$ とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき, $\vec{p}$ は実数 s, t を用いて $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$, $\vec{p}\cdot\vec{b}$, $\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ。

(2) 点 P が $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ を満たすとき, s, t の値を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点 P について, 直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$ を求めよ。

(4) (2)の条件を満たす点 P について, 2 つの四面体 OABP と OACP の体積の比を求めよ。 [2009]

8 三角形 OAB において, OA を $t:(1-t)$ に内分する点を M, OB を $t:(1-t)$ に内分する点を N とする。ただし, t は $0<t<1$ の範囲を動く。そして, 線分 AN と BM の交点を P とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表し, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であることを示せ。

(2) $s=\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}$ とするとき, s を t を用いて表し, s のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 三角形 AMP と三角形 OAB の面積比 $r=\dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}}$ を(2)の s を用いて表し, r の最大値を求めよ。 [2008]

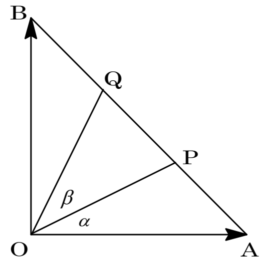
9 座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$, および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$, $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2) 上で求めた点 P に対し, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3) 上で求めた点 P と C に対し, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は 2 つの実数 a, b を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と表せることを示せ。 [2007]

10 平面上で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交し，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ を満たすとする。線分 AB を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，B に近い点を Q とする。また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<30°<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に，点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$ を k の式で表せ。

(4)　(3)の R に対して，$\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるとき，k の値を求めよ。　[2006]

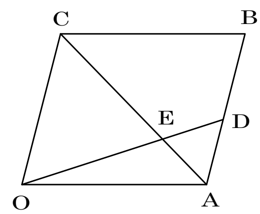
11 三角形 OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=4$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ で定める。次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2)　点 P から辺 OA に垂線を下ろし，OA との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\vec{a}$ を満たす実数 k の値を求めよ。

(3)　線分 PE の長さを求めよ。　[2005]

12 平行四辺形 OABC の辺 AB を $m:n$ に内分する点を D とし，線分 OD と対角線 AC との交点を E とする。次の問いに答えよ。



(1)　公式 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ を証明せよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$m$，$n$ を用いて表せ。

(3)　4 点 O, A, B, C を xy 平面上の点とし，3 点 O, A, C の座標を $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(a,\ b)$ とする。ただし，a, b は正の数とする。$m=1$，$n=2$ のとき，2 点 O, D を通る直線の方程式を求めよ。

(4)　(3)の条件のもとで，点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

補足説明：「点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H」とは，点 C から引いた線分 OD への垂線と線分 OD との交点 H のことである。　[2004]

13　三角形 ABC において，辺 BC を$2:1$の比に内分する点を M とする。辺 AB, AC をそれぞれ B, C の側に延長した半直線を l, m とし，M を通る直線 k と l, m との交点をそれぞれ P, Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\vec{c}$とおくとき，次の問いに答えよ。ただし，$p$, q は正の実数とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

(2)　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{q}=3$が成り立つことを示せ。

(3)　Q から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$, q で表せ。

(4)　M を通る直線 k が半直線 l, m と点 A 以外でそれぞれ交わるように変わるとき，三角形 APQ の面積を最小にする p, q の値を求めよ。　[2003]

14　三角形 ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=c$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=b$，$\vec{p}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}$，$\vec{q}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}$，$\vec{r}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{b}$とおき，$b<c$，$\angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{C}$とする。

(1)　$|\vec{r}-\vec{q}|<|\vec{q}-\vec{p}|$であることを示せ。

(2)　定数 s, t に対して，辺 AB 上の点 D，辺 AC 上の点 E があって，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=s(\vec{q}-\vec{p})$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=t(\vec{r}-\vec{q})$となっている。このとき，$s$, t を a, b, c の式で表し，さらに$|t(\vec{r}-\vec{q})|<|s(\vec{q}-\vec{p})|$であることを示せ。　[2002]

15　三角形 OAB において，辺 AB, BO をそれぞれ$1:2$に内分する点を M, N とする。また，線分 OM と AN の交点を P とする。

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。

(2)　OM と AN が直交し，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$のとき，$\angle\mathrm{AOB}$を求めよ。

(3)　(2)のとき，さらに$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$を求めよ。　[2001]

16　O を原点とする座標空間内に 3 点$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -1,\ 2)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 2)$がある。点 P が四面体 OABC の辺 BC 上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は 3 であることを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{AOP}$の大きさが最小になるときの点 P の座標を求めよ。　[2000]

17 xy 平面の点 O(0, 0), A(1, 1), B(2, −1) と実数 k に対して，点 C は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする。

(1) 内積$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が $2k$ となる点 P の描く図形は，C を通り，直線 OA と直交する直線であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{ACB}$ の大きさが 45° となる k を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列

1 $a>0$，$r>0$ とし，数列$\{a_n\}$を初項 a，公比 r の等比数列とする。また，数列$\{b_n\}$は次のように定義される。

$$b_1=a_1,\ b_{n+1}=b_na_{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) b_n を a, r および n を用いて表せ。

(2) 一般項が $c_n=\dfrac{\log_2 b_n}{n}$ である数列$\{c_n\}$は等差数列であることを証明せよ。

(3) (2)で与えられた数列$\{c_n\}$の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち，$M_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$ とする。このとき，一般項が $d_n=2^{M_n}$ である数列$\{d_n\}$は等比数列であることを証明せよ。 [2019]

2 次の問いに答えよ。

(1) 実数θが$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，不等式 $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}<1$ が成り立つことを示せ。

(2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$を満たす実数$\theta$に対し，$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}\ \left(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$により定まる実数$\alpha$は，$\theta$についての整式$f(\theta)$を用いて$\alpha=f(\theta)$と表すことができる。このような$f(\theta)$を 1 つ求めよ。

(3) (2)で求めた$f(\theta)$を用いて，数列$\{\theta_n\}$を，

$$\theta_1=\frac{\pi}{2},\ \theta_{n+1}=f(\theta_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列$\{\theta_n\}$の一般項を求めよ。

(4) (3)の数列$\{\theta_n\}$に対し，$\left|\theta_{n+1}-\theta_n\right|\leqq\dfrac{\pi}{1000}$となる最小の自然数 n を求めよ。

[2018]

3 n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする。ただし，p_1，q_1 は ${p_1}^2-4q_1=4$ を満たすとする。2 次方程式 $x^2-p_nx+q_n=0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする。ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする。$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ。

(2) c_n を n の式で表せ。

(3) $p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ。 [2015]

4 a_1，a_2，a_3 は定数で，$a_1>0$ とする。放物線 $C: y=a_1x^2+a_2x+a_3$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1+2a_2+a_3)$ における接線を l とし，l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$，l と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ a_4)$ とする。a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等差数列であるとき，次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 を a_1 を用いて表せ。

(2) q の値を求めよ。

(3) 放物線 C, 接線 l, および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする。$S=q$ となるとき，a_1 を求めよ。 [2014]

5 $\alpha>1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=\alpha$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a_n>1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $\sqrt{x}-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)$（ただし，$x>1$ とする。）

(3) $a_n-1\leqq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ [2014]

6 関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 0 以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}\{f(1)-f(0)\}$ を満たす x を k を用いて表せ。

(2) (1)で求めた x を x_k とおく。$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ。 [2013]

7　座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$ の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点をすべて求めよ。また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，P の隣接点の個数を求めよ。

(2)　領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(3)　領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

[2013]

8　n は 3 以上の整数とする。1 から n までの整数から連続する 2 つの整数 x，$x+1$ を取り除く。次の問いに答えよ。

(1)　$n=17$ のとき，残された整数の総和を個数 15 で割った値が $\dfrac{42}{5}$ であるとする。取り除いた 2 つの整数を求めよ。

(2)　$n \geqq 39$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1) > \dfrac{205}{11}(n-2)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　残された整数の総和を個数 $n-2$ で割った値が $\dfrac{205}{11}$ であるとする。n と取り除いた 2 つの整数を求めよ。　[2012]

9　次の問いに答えよ。

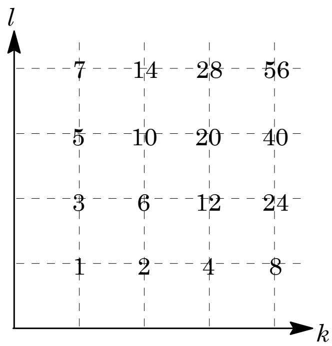
(1)　x，y が 4 で割ると 1 余る自然数ならば，積 xy も 4 で割ると 1 余ることを証明せよ。

(2)　0 以上の偶数 n に対して，3^n を 4 で割ると 1 余ることを証明せよ。

(3)　1 以上の奇数 n に対して，3^n を 4 で割った余りが 1 でないことを証明せよ。

(4)　m を 0 以上の整数とする。3^{2m} の正の約数のうち 4 で割ると 1 余る数全体の和を m を用いて表せ。　[2010]

10 k, l を自然数とし，座標平面上の点$(k,\ l)$に数$2^{k-1}(2l-1)$を記入する(右図を参照)。このとき，次の問いに答えよ。



(1) 点$(2,\ 25)$に記入される数を求めよ。

(2) 2008 が記入される点の座標を求めよ。

(3) どの自然数も座標平面上のどこかの点に 1 回だけ記入される。この理由を書け。

[2008]

11 $x_1 = x_2 = 1$とし，x_n $(n = 3,\ 4,\ \cdots)$はx_{n-2}とx_{n-1}の和を 3 で割ったときの余りであるとして，数列$\{x_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{x_n\}$の第 3 項から第 12 項までのそれぞれの値を，解答用紙にある表の中に書け。

(2) x_{346}を求めよ。

(3) $S_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ とおくとき，$S_m \geqq 684$を満たす最小の自然数 m を求めよ。 [2008]

12 図のように, 1 を左下のマス目におき, 1 の右に 2 を, 2 の上に 3 を，3 の左に 4 をおく。次に 2 の右に 5 をおき，5 の上に 6, 7 を，7 の左に 8, 9 をおく。このように，すでに埋められたマス目のまわりを右下から左上まで自然数を順に並べていく。左から j 番目，下から k 番目のマス目にある自然数を$a(j,\ k)$と書く。例えば$a(3,\ 4) = 14$，$a(3,\ 5) = 23$である。

16	15	14	13	
9	8	7	12	
4	3	6	11	
1	2	5	10	

(1) $a(1,\ k)$，$a(j,\ 1)$をそれぞれk, jの式で表せ。

(2) $a(j,\ k)$を$j \geqq k$と$j < k$の場合に分けて求めよ。

(3) $a(j,\ k) = 2007$となるj, kを求めよ。

(4) $\sum_{k=1}^{n} a(k,\ k)$を求めよ。 [2007]

13 $\sqrt{7}$の小数部分を p とするとき，$\dfrac{3}{p} - p$は整数であることを示し，その整数を求めよ。 [2006]

14　$a_1=1$ と $a_{n+1}=3a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　p と q を定数とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_n+pn+q$ によって定めると，$\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列になるとする。このとき，定数 p と q の値を求めよ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n の式で表せ。　[2006]

■ 確率

1　n を自然数とし，p を $0<p<1$ を満たす実数とする。一方の面に 0，もう一方の面に 1 と書いたカードがある。最初，このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある。表の出る確率が p のコインを投げ，裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う。n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく。次の問いに答えよ。

(1)　P_n を p および n を用いて表せ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。n 回の試行の後，カードの上の面に書かれた数字が 0 であり，さらに，途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている。このとき，ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ。　[2019]

2　座標平面上で, 3 つの不等式 $y\geqq 0$，$x+y\geqq 4$，$2x+3y\leqq 12$ によって表される領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1)　D を図示せよ。

(2)　座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。D に含まれる格子点をすべて求めよ。

(3)　1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目に出た目の数を X，2 回目に出た目の数を Y とする。点 $(X,\ Y)$ が D に含まれる確率を求めよ。

(4)　1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の数の中の最小の数を Z，最大の数を W とする。点 $(Z,\ W)$ が D に含まれる確率 P_n を求めよ。ただし, n は 2 以上の自然数とする。　[2018]

3　n を 2 以上の整数とする。n 個のさいころを投げ，出た目のすべての積を X とする。次の問いに答えよ。

(1)　X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ。

(2)　X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ。ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする。

(3)　X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ。

(4)　X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ。　[2017]

4　xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点$(3,\ 1)$に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を$(x_n,\ y_n)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$(x_4,\ y_4) = (0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

(2)　$(x_8,\ y_8) = (5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_8 + y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_{4n} + y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

[2016]

5　n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　変量 x のデータの値が x_1，x_2，…，x_n であるとし，$f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は x_1，x_2，…，x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1，x_2，…，x_n の分散であることを示せ。

(2)　c を定数として，変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\quad z_k=ck\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとする。このとき y_1，y_2，…，y_n の分散が z_1，z_2，…，z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3)　変量 x のデータの値が x_1，x_2，…，x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする。x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} の平均値を x_{n+1}，$\overline{x}$ および n を用いて表せ。

(4)　次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった。このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ。ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ。　[2016]

6　n を自然数とする。A, B, C, D, E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける。最初に A がボールを持っていて，A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，ボールを受けた人は，また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，以後同様にパスを続ける。n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とする。ここで，たとえば，A→C→D→A→E の順にボールをパスすれば，4 回パスしたと考える。次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。　[2015]

7　正六角形の頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする。1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に j, k とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となる確率を求めよ。

(2)　P_1，P_j，P_k が正三角形の 3 頂点となる確率を求めよ。

(3)　P_1，P_j，P_k が直角三角形の 3 頂点となる確率を求めよ。　[2014]

8　N は 4 以上の整数とする。次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる。

規則：出た目を毎回記録し，偶数の目が 3 回出るか，あるいは奇数の目が N 回出たところで，さいころを投げる操作を終了する。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げる回数は，最大で何回か。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ。

(5)　$N=4$ のとき，さいころを投げる回数の期待値を求めよ。　[2012]

9　さいころを n 回投げる。k 回目 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に投げた結果,

1 または 2 の目が出たとき $X_k=2$

3 または 4 の目が出たとき $X_k=3$

5 または 6 の目が出たとき $X_k=5$

とする。これらの積を $Y=X_1X_2\cdots X_n$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$n=5$ のとき，Y が偶数になる確率 p_1 を求めよ。

(2)　$n=5$ のとき，Y が 100 の倍数になる確率 p_2 を求めよ。

(3)　$n=2$ のとき，Y の期待値 E を求めよ。　[2011]

10　n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A，B，C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A，B，C の得点がそれぞれ 4，2，4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A，B，C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 $(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2)　$n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。　[2010]

11　2 人のプレーヤーA，B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1)　P_2 と P_4 を求めよ。

(2)　P_{2n-1} を求めよ。

(3)　P_{2n} を求めよ。

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。　[2009]

12 2点A, Bと，その上を動く1個の石を考える。この石は，時刻$t=0$で点Aにあり，その後，次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対して，

(a) 時刻tに石が点Aにあれば，時刻$t+1$に石が点Aにある確率は$\dfrac{1}{3}$，点Bにある確率は$\dfrac{2}{3}$である。

(b) 時刻tに石が点Bにあれば，時刻$t+1$に石が点Bにある確率は$\dfrac{1}{3}$，点Aにある確率は$\dfrac{2}{3}$である。

いま，nを自然数とし，時刻$t=n$において石が点Aにある確率をp_nとするとき，次の問いに答えよ。

(1) p_1を求めよ。

(2) p_{n+1}をp_nを用いて表せ。

(3) p_nを求めよ。 [2008]

13 袋の中に，1と書いた玉が2個，2と書いた玉がm個，3と書いた玉が$(8-m)$個，合計10個入っている。ただし，$2 \leqq m \leqq 7$とする。この袋から玉を2個取り出し，それらの玉に書かれた数の和をSとする。次の問いに答えよ。

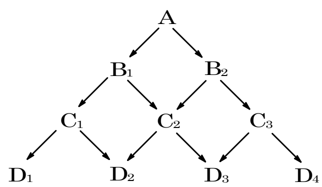
(1) $S=4$となる確率を求めよ。

(2) Sを3で割った余りが2である確率を求めよ。

(3) Sを3で割った余りの期待値Eを求めよ。

(4) Eの値を最大にするmの値とそのときのEの値を求めよ。 [2007]

14 図の一番上の点Aから玉を落とす。玉はそれぞれの分岐点において，確率pで左下に，確率$1-p$で右下に向かうものとする。また，この図のB_1，B_2の段を1段目，C_1，C_2，C_3の段を2段目として段数を数えるものとする。$0<p<1$として次の問いに答えよ。



(1) 2段目の点C_1，C_2，C_3に対して，玉がその点に落ちてくる確率を求めよ。

(2) 2段目の点のうち，点C_2に玉が落ちてくる確率が，他の点C_1，C_3の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき，pの値の範囲を求めよ。

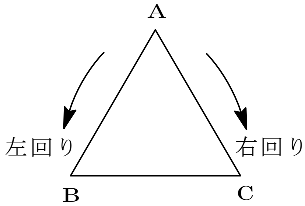
(3) 3段目の点のうち，点D_3に玉が落ちてくる確率が，他の点D_1，D_2，D_4の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき，pの値の範囲を求めよ。 [2006]

15　1 枚のコインを 1 回投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

　　表が出たとき，左回りで隣りの頂点に移し，

　　裏が出たとき，右回りで隣りの頂点に移す

という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。次の問いに答えよ。



(1)　この試行を 2 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率 P_2 を求めよ。

(2)　この試行を 3 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率 P_3 を求めよ。

(3)　この試行を 4 回繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率 Q_4 を求めよ。

(4)　この試行を n 回($n \geqq 2$)繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率 Q_n を求めよ。　[2005]

16　1, 2, 3, 4, 5 の数字を書いた 5 枚のカードがある。この 5 枚のカードを並べて 5 けたの数を作るとき，次の問いに答えよ。

(1)　偶数となる並べ方は何通りあるか。また，奇数となる並べ方は何通りあるか。

(2)　5 枚のカードをよく切って並べたとき，それが 54321 とちょうど 3 つの位で一致する確率を求めよ。

(3)　5 枚のカードをよく切って並べたとき，それが 54321 とちょうど 2 つの位で一致する確率を求めよ。

(4)　5 枚のカードを並べた数が，54321 と一致したときに 6 万円，54321 とちょうど 3 つの位で一致したときに 6 千円，54321 とちょうど 2 つの位で一致したときに 600 円もらえるものとする。これらの場合以外は何ももらえないものとする。5 枚のカードをよく切って並べる 1 回の試行での期待金額を求めよ。

補足説明：(2)「それが 54321 とちょうど 3 つの位で一致する」とは，たとえば，“52341”は 54321 とちょうど 3 つの位で一致するが，“54321”は 54321 とちょうど 3 つの位で一致するとは言わない。(3), (4)においても同等の意味とする。　[2004]

17　1 個のさいころを投げるという試行をくり返す。奇数の目が出たら A の勝ち，偶数の目が出たら B の勝ちとし，どちらかが 4 連勝したら試行を終了する。

(1)　この試行が 4 回で終了する確率を求めよ。

(2)　この試行が 7 回以下で終了する確率を求めよ。

(3)　この試行が 5 回以上続き，かつ 4 回目が A の勝ちである確率を求めよ。

(4)　この試行がちょうど 8 回で終了する確率を求めよ。　[2002]

18　さいころを投げて出た目の数が k で割り切れるという事象を A_k，2 個のさいころを同時に投げて出た 2 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を B_k，3 個のさいころを同時に投げて出た 3 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を C_k とする。

(1)　事象 A_2，A_3，A_4 の確率 $P(A_2)$，$P(A_3)$，$P(A_4)$ を，それぞれ求めよ。

(2)　事象 B_2，B_3，B_4 の確率 $P(B_2)$，$P(B_3)$，$P(B_4)$ を，それぞれ求めよ。

(3)　事象 C_2，C_3 の確率 $P(C_2)$，$P(C_3)$ を，それぞれ求めよ。　[2001]

19　1 から 7 までの番号が 1 つずつ書いてある 7 枚のカードの中から，1 枚ずつ 3 回抜き出す試行を考える。ただし，抜き出したカードはもとに戻さないものとする。この試行において，最後(3 回目)に抜き出したカードの番号が 1 回目および 2 回目に抜き出したカードの番号より大きければ，最後に抜き出したカードの番号が得点として与えられ，それ以外の場合の得点は 0 とする。次の問いに答えよ。

(1)　最後に抜き出したカードの番号が 3 である確率 q，および得点が 3 である確率 p_3 を求めよ。

(2)　得点が k（$3\leqq k\leqq 7$）である確率 p_k を k の式で表せ。また，得点が 0 である確率 p_0 を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。　[2000]

20　A と B の 2 人が同時に 1 個ずつサイコロを振り，出た目を比較して，大きい目を出した方の得点は 1，他方の得点は 0，となる試行を考える。ただし，2 つのサイコロの出た目が同じなら，A, B のいずれの得点も 0 とする。

(1)　この試行を 1 回行うとき，A の得点が 1 となる確率を p，B の得点が 1 となる確率を q，いずれの得点も 0 となる確率を r とする。p, q, r を求めよ。

(2)　この試行を 2 回行うとき，A の合計得点が B の合計得点より多くなる確率を求めよ。

(3)　この試行を 3 回行うとき，A の合計得点が B の合計得点より 1 点多くなる確率を求めよ。　[1998]

■ 論証

1 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。

(2) $p,\ q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。 [2011]

2 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1) $x<y$ ならば $x^2<y^2$ である。

(2) $\log_2 x=\log_3 y$ ならば $x\leqq y$ である。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(4) n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[2009]

3 次の問いに答えよ。

(1) a, b, c, d を正の整数とする。$(a+b\sqrt{2})^2=(c+d\sqrt{2})^2$ ならば，$a=c$，$b=d$ であることを示せ。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい。

(2) 次の 2 つの数 $r,\ s$ はそれぞれ，$a,\ b$ を正の整数として，$(a+b\sqrt{2})^2$ と表すことができるか。表すことができれば，$a,\ b$ の値を求めよ。表すことができなければ，その理由を示せ。

$$r=967+384\sqrt{2}\ ,\quad s=2107+1470\sqrt{2}$$

[2003]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

座標平面上の 2 点 $A(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$B(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ を考え，A, B 間の距離を L とする。ただし，θ は条件 (＊) $0 \leqq \theta < 2\pi$ かつ $\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) (＊)を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) $t = \sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) L を(2)の t を用いて表せ。

(4) L の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。 [2017]

解答例

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ より $\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 1$ となり，

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ から，$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ である。

(2) $t = \sin\theta\cos\theta$ より $t = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ となり，$\pi < 2\theta < 2\pi$ から $-\frac{1}{2} \leqq t < 0$ である。

(3) 2 点 $A(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$B(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ に対して，$L = AB$ より，

$$L^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2$$
$$= (\sin\theta - \cos\theta)^2\{1 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\} = (1 - 2t)(2 + 2t) = -4t^2 - 2t + 2$$

よって，$L = \sqrt{-4t^2 - 2t + 2}$ である。

(4) (2)から $-\frac{1}{2} \leqq t < 0$ において，(3)から $L^2 = -4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}$ となる。

これより，$t = -\frac{1}{4}$ $\left(\sin 2\theta = -\frac{1}{2}\right)$ のとき，L^2 は最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。すなわち，$\theta = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$ のとき，L は最大値 $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ をとる。

また，$t = -\frac{1}{2}$ $(\sin 2\theta = -1)$ のとき，L^2 は最小値 2 をとる。すなわち，$\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき，L は最小値 $\sqrt{2}$ をとる。

コメント

三角関数と 2 次関数を題材にした最大・最小問題です。たいへん細かな誘導がついています。

問　題

$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ。

(2) 不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け。

(3) 関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき，2^{m-2} を求めよ。

(4) (3)の m について，1000^m の整数部分の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。 [2012]

解答例

(1) $f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ に対して，定義域は，$x-1>0$ かつ $4-x>0$ より，$1<x<4$ である。

(2) $f(x)\geqq 0$ の解は，$\log_2(x-1)(4-x)\geqq 0$ より，$(x-1)(4-x)\geqq 1$ となり，

$$x^2-5x+5\leqq 0,\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq \frac{5+\sqrt{5}}{2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお, $(*)$は$1<x<4$ を満たしている。

(3) $f(x)=\log_2(x-1)(4-x)=\log_2(-x^2+5x-4)=\log_2\left\{-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right\}$

これより，$f(x)$ の最大値 m は，$m=\log_2\frac{9}{4}$ となり，

$$2^{m-2}=\frac{1}{4}\cdot 2^m=\frac{1}{4}\cdot 2^{\log_2\frac{9}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{16}$$

(4) まず，$a=1000^m$ とおくと，

$$\log_{10}a=m\log_{10}1000=3m=3\log_2\frac{9}{4}=6\log_2\frac{3}{2}=6(\log_2 3-1)$$

ここで，$\log_2 3=\dfrac{0.4771}{0.3010}\fallingdotseq 1.585$ より，$\log_{10}a\fallingdotseq 3.51$ となり, $3<\log_{10}a<4$

よって，$a=1000^m$ の整数部分は 4 桁である。

コメント

指数・対数についての基本問題です。ただ, (4)の数値計算には閉口しましたが。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。不等式 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ を満たす k の値の範囲を求めよ。

(2) a，b は定数で，$a>0$ とする。2 次関数 $f(x)=ax^2-2x+b$ の定義域を $-1\leqq x\leqq 2$ とし，$f(-1)<f(2)$ を満たすとする。関数 $y=f(x)$ の値域が $-1\leqq y\leqq 7$ であるとき，定数 a, b の値を求めよ。 [2011]

解答例

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ で，$1<\sqrt{3}<2$ から，整数部分 $a=3$，小数部分 $b=\sqrt{3}-1$ である。

すると，$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ より，

$$k>b\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{6}{a}\right)=(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3}-2)=3-\sqrt{3}$$

(2) $f(x)=ax^2-2x+b=a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2-\dfrac{1}{a}+b$ となり，$a>0$ で $f(-1)<f(2)$ から，

$$0<\frac{1}{a}<\frac{-1+2}{2},\ \ a>2 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$y=f(x)$ は，$-1\leqq x\leqq 2$ のとき $-1\leqq y\leqq 7$ であることより，

$$f(2)=4a+b-4=7,\ \ b=11-4a \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}+b=-1,\ \ b=\frac{1}{a}-1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$11-4a=\dfrac{1}{a}-1$，$4a^2-12a+1=0$ となり，①から，

$$a=\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\ \ b=11-4\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{2}=5-4\sqrt{2}$$

コメント

(2)では，最初，場合分けが必要かとも思いましたが，$f(-1)<f(2)$ から，それが回避できました。

問　題

$k>0$ を定数とするとき，x についての方程式 $\log_3 x = kx$ が 2 つの実数解 a と $3a$ をもつとする。このとき, k の値と a の値を求めよ。 [2006]

解答例

方程式 $\log_3 x = kx$ の解が $x = a$，$3a$ なので, $a>0$ において,

$$\log_3 a = ka \cdots\cdots\cdots①，\log_3 3a = 3ka \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$\log_3 3 + \log_3 a = 3ka$，$1 + \log_3 a = 3ka$

①を代入して，$1 + \log_3 a = 3\log_3 a$ から,

$$\log_3 a = \frac{1}{2}，a = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

①より，$\frac{1}{2} = \sqrt{3}k$，$k = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

コメント

センター対策に際して，まず行うような基本の確認問題です。

問　題

$P(x)$ は，x^3 の係数が 1 であるような 3 次式とする。$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りは $x+1$ であり，$(x-1)^2$ で割ったときの余りは $x+c$ である。ただし，c は定数である。このとき，c の値と $P(x)$ を求めよ。 [2005]

解答例

x^3 の係数が 1 である 3 次式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った商は，a を定数として，$x+a$ とおくことができ，

$$P(x)=(x+1)^2(x+a)+x+1=x^3+(a+2)x^2+(2a+2)x+a+1$$

このとき，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると，

$$P(x)=(x-1)^2(x+a+4)+(4a+9)x-3$$

条件より，この余りが $x+c$ なので，

$$4a+9=1,\ c=-3$$

$a=-2$ から，$P(x)=x^3-2x-1$

コメント

整式の除法を題材にした基本題です。

問　題

正の実数 $x,\ y$ が $xy=100$ を満たすとき，$(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ。 [2005]

解答例

$xy=100$ から，$\log_{10}xy=\log_{10}100$，$\log_{10}x+\log_{10}y=2$ となり，

$$\begin{aligned}P&=(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3\\&=(\log_{10}x+\log_{10}y)^3-3\log_{10}x\log_{10}y(\log_{10}x+\log_{10}y)\\&=8-6\log_{10}x\log_{10}y\end{aligned}$$

ここで，$\log_{10}x\log_{10}y=\log_{10}x\log_{10}\dfrac{100}{x}=\log_{10}x(2-\log_{10}x)$

$$=-(\log_{10}x)^2+2\log_{10}x=-(\log_{10}x-1)^2+1\leqq 1$$

なお，等号は $\log_{10}x=1$ $(x=10)$ のとき成立する。

よって，$P\geqq 8-6\times 1=2$ となり，P の最小値は 2 である。

また，このとき，$x=10$，$y=\dfrac{100}{10}=10$ である。

コメント

対数がらみの条件付き最大・最小問題です。

問　題

a, b を実数とする。x の方程式 $4^x + a\times 2^{x+1} + b = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$a = -1$，$b = -3$ のときの解を求めよ。

(2)　この方程式が異なる 2 つの実数解をもつような点 $(a,\ b)$ 全体の集合を，座標平面上に図示せよ。　[2004]

解答例

(1)　$a = -1$，$b = -3$ のとき，$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ より，$2^{2x} - 2\cdot 2^x - 3 = 0$

$$(2^x - 3)(2^x + 1) = 0$$

$2^x + 1 > 0$ から $2^x = 3$ となり，$x = \log_2 3$

(2)　$4^x + a\times 2^{x+1} + b = 0$ ……①に対して，$2^x = t > 0$ とおくと，

$$t^2 + 2at + b = 0 \text{………②}$$

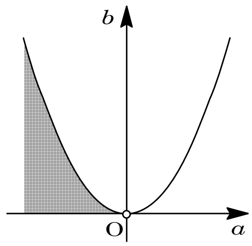
①が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，②が異なる正の実数解を 2 つもつことに等しい。

$f(t) = t^2 + 2at + b$ とおくと，$f(t) = (t + a)^2 - a^2 + b$ より，

$$t = -a > 0,\ f(-a) = -a^2 + b < 0,\ f(0) = b > 0$$

まとめると，$a < 0$，$0 < b < a^2$

この関係を満たす点 $(a,\ b)$ を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

指数関数と 2 次関数を題材とした穏やかな基本題です。

問　題

$-180°<x<180°$ とする。c を実数とする。x の方程式

$$(*)\quad \sin x+\sqrt{3}\cos x+c=0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $(*)$を $\sin(x+A)=B$ の形で表せ。また，$c=\sqrt{3}$ のとき，x の値を求めよ。

(2) $(*)$が異なる 2 つの解 α，β をもつための c の条件を求めよ。

(3) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくとき，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を示せ。さらに，$(*)$を t についての 2 次方程式で表せ。

(4) (2)の条件のもとで，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の値を求めよ。　[2004]

解答例

(1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x+c=0$ ……$(*)$より，$2\sin(x+60°)+c=0$

$$\sin(x+60°)=-\frac{c}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

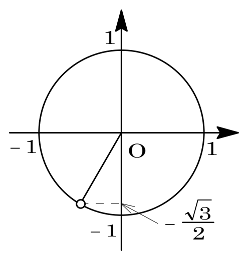
$c=\sqrt{3}$ のとき，①は $\sin(x+60°)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ここで，$-180°<x<180°$ から，$-120°<x+60°<240°$ となり，

$$x+60°=-60°,\ x=-120°$$

(2) ①が $-180°<x<180°$ で異なる 2 つの解をもつ条件は，$-120°<x+60°<240°$ より，$\left|-\dfrac{c}{2}\right|<1$ かつ $-\dfrac{c}{2}\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，すなわち $-2<c<2$ かつ $c\neq\sqrt{3}$ となる。

よって，$-2<c<\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<c<2$ である。



(3) 半角の公式より，$\tan^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ なので，$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$t^2(1+\cos x)=1-\cos x$ となり，

$$(1+t^2)\cos x=1-t^2,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

また，2 倍角の公式より，$\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$ となるので，

$$\sin x=\tan x\cos x=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$(*)$に代入して，$\dfrac{2t}{1+t^2}+\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+c=0$，$2t+\sqrt{3}(1-t^2)+c(1+t^2)=0$

$$(c-\sqrt{3})t^2+2t+c+\sqrt{3}=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(4) (＊)が $x=\alpha$，β を解にもつとき，②の解は $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\beta}{2}$ となり，$c\neq\sqrt{3}$ より，

解と係数の関係から，

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}=\frac{-2}{c-\sqrt{3}},\quad \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{c+\sqrt{3}}{c-\sqrt{3}}$$

よって，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=\dfrac{\frac{-2}{c-\sqrt{3}}}{1-\frac{c+\sqrt{3}}{c-\sqrt{3}}}=\dfrac{-2}{c-\sqrt{3}-c-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

コメント

三角関数の公式を確認する問題です。

問　題

正の定数 a に対し，$\log_a(3x)+\log_{\sqrt{a}}(a-x)=1$ を満たす実数 x がちょうど 2 つある。このとき, a はどのような範囲にあるか。　[2002]

解答例

$\log_a(3x)+\log_{\sqrt{a}}(a-x)=1$ ……①に対し，$a\neq 1$ のもとで，$3x>0$ かつ $a-x>0$ なので, $0<x<a$ である。

$$\log_a(3x)+\frac{\log_a(a-x)}{\frac{1}{2}\log_a a}=1,\ \log_a(3x)+\log_a(a-x)^2=1$$

$$\log_a 3x(a-x)^2=1,\ 3x(a-x)^2=a\ \cdots\cdots\cdots②$$

①を満たす実数 x が 2 つある条件は，$a\neq 1$ として，②を満たす実数が $0<x<a$ に 2 つある条件に一致する。

②より，$3x^3-6ax^2+3a^2x-a=0$ ………③

ここで，$f(x)=3x^3-6ax^2+3a^2x-a$ とおく。

$$f'(x)=9x^2-12ax+3a^2$$
$$=3(3x-a)(x-a)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		＋	0	－	
$f(x)$		↗		↘	

求める条件は，$f(0)=-a<0$，$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{9}a^3-a>0$，$f(a)=-a<0$

$a>0$ より $f(0)<0$ と $f(a)<0$ は成り立つので，$f\left(\frac{a}{3}\right)>0$ から $4a^2-9>0$

よって，$a>\frac{3}{2}$（これは $a\neq 1$ を満たす）

コメント

対数方程式の基本問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。　$\log_3(x-7)+\log_3(x-5)\leqq 1$

(2)　次の不等式を満たす y の範囲を求めよ。　$9^y-8\times 3^y-9\leqq 0$

(3)　x, y がそれぞれ(1), (2)の範囲を動くとき，$\log_2 x+2^y$ の最大値を求めよ。 [2001]

解答例

(1)　$\log_3(x-7)+\log_3(x-5)\leqq 1$ に対して，$x-7>0$，$x-5>0$ より $x>7$

$$\log_3(x-7)(x-5)\leqq 1,\ (x-7)(x-5)\leqq 3$$

まとめて，$x^2-12x+32\leqq 0$ より, $4\leqq x\leqq 8$

$x>7$ と合わせて, $7<x\leqq 8$

(2)　$9^y-8\times 3^y-9\leqq 0$ より，$(3^y-9)(3^y+1)\leqq 0$

$3^y+1>0$ なので，$3^y\leqq 9$ より，$y\leqq 2$

(3)　(1)(2)より，$\log_2 x\leqq \log_2 8=3$，$2^y\leqq 2^2=4$

したがって，$(x,\ y)=(8,\ 2)$ のとき，$\log_2 x+2^y$ は最大値 $3+4=7$ をとる。

コメント

指数不等式と対数不等式の基本的な解法を問うものです。教科書の例に載っているような問題です。

問　題

$y = a(\sin\theta + \cos\theta) + \sin 2\theta$ とする。ただし, a は正の定数である。

(1)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおいて, y を t の式で表せ。

(2)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値 M と最小値 m を, それぞれ a を用いて表せ。　[2001]

解答例

(1)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ のとき，$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta$ なので,

$$y = a(\sin\theta + \cos\theta) + \sin 2\theta = at + (t^2 - 1) = t^2 + at - 1$$

(2)　$t = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$ より，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(3)　(1)(2)より，$y = \left(t + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} - 1\ (-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})$

$a > 0$ より，$-\dfrac{a}{2} < 0$ なので，$t = \sqrt{2}$ のとき最大値をとる。

$$M = 2 + \sqrt{2}a - 1 = \sqrt{2}a + 1$$

また，$-\dfrac{a}{2} < -\sqrt{2}\ (a > 2\sqrt{2})$ のときは，$t = -\sqrt{2}$ で最小値をとり,

$$m = 2 - \sqrt{2}a - 1 = -\sqrt{2}a + 1$$

$-\dfrac{a}{2} \geqq -\sqrt{2}\ (0 < a \leqq 2\sqrt{2})$ のときは，$t = -\dfrac{a}{2}$ で最小値をとり,

$$m = -\frac{a^2}{4} - 1$$

コメント

ていねいな誘導がついていますが，この誘導がなくても完答が望まれます。

問　題

関数 $y=(\sin^2\theta-2\sin\theta+3)^2+3(\cos 2\theta+4\sin\theta+1)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0°\leqq\theta<360°$ とする。

(1) $\sin^2\theta-2\sin\theta+3=x$ とおくとき，y を x の式で表せ。また，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) y の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。　[2000]

解答例

(1) $\cos 2\theta+4\sin\theta+1=1-2\sin^2\theta+4\sin\theta+1=-2(\sin^2\theta-2\sin\theta-1)$ となるので，$x=\sin^2\theta-2\sin\theta+3$ とおくと，

$$y=(\sin^2\theta-2\sin\theta+3)^2+3(\cos 2\theta+4\sin\theta+1)$$
$$=x^2-6(x-4)=x^2-6x+24$$

ここで，$x=(\sin\theta-1)^2+2$ と変形すると，$0°\leqq\theta<360°$ から $-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ となり, x のとりうる値の範囲は $2\leqq x\leqq 6$ である。

(2) (1)より, $2\leqq x\leqq 6$ において，$y=(x-3)^2+15$

よって，$x=6$ のとき最大値 24 をとる。このとき，$(\sin\theta-1)^2+2=6$ から，$\sin\theta=-1$ すなわち $\theta=270°$ となる。

また，$x=3$ のとき最小値 15 をとる。このとき，$(\sin\theta-1)^2+2=3$ から，$\sin\theta=0$ すなわち $\theta=0°$，$180°$ となる。

コメント

数Ⅱの教科書の例題あたりに載っていそうな基本問題です。

問　題

2 点$(1,\ 1)$，$(-1,\ 5)$を通る 2 次関数のグラフについて，頂点を$(p,\ q)$，y 軸との交点を$(0,\ k)$とする。

(1) p, q を k で表せ。

(2) p, q がともに正のとき, k の値の範囲を求めよ。 [1999]

解答例

(1) y 軸との交点が$(0,\ k)$より，$y = ax^2 + bx + k\ (a \neq 0)$とおける。

点$(1,\ 1)$を通るので，$a + b + k = 1$………①

点$(-1,\ 5)$を通るので，$a - b + k = 5$………②

①②より，$b = -2$……③，$a + k = 3$……④

③より，$y = ax^2 - 2x + k = a\left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a} + k$

頂点が$(p,\ q)$より，④を代入して，

$$p = \frac{1}{a} = \frac{1}{3-k},\quad q = -\frac{1}{a} + k = -\frac{1}{3-k} + k = \frac{-k^2 + 3k - 1}{3-k}$$

(2) 条件より，$\dfrac{1}{3-k} > 0$……⑤，$\dfrac{-k^2 + 3k - 1}{3-k} > 0$……⑥

⑤より，$3 - k > 0$, $k < 3$………⑦

⑥に代入すると，$-k^2 + 3k - 1 > 0$，$k^2 - 3k + 1 < 0$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ \text{………⑧}$$

⑦⑧より，$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < k < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

コメント

数 I の教科書に載っている例題のような問題です。

問　題

a を正の定数とし，$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$ とする。

(1)　$f(x)$ が最大となる x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最大値が 4 以上のとき, a の値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$ より，$a+x>0$，$a-x>0$ なので，$-a<x<a$

$$f(x)=\log_2(a+x)+\frac{\log_2(a-x)}{2}=\frac{1}{2}\log_2(a+x)^2(a-x)$$

ここで，$g(x)=(a+x)^2(a-x)=-(x+a)^2(x-a)$ とおくと，

$$g'(x)=-2(x+a)(x-a)-(x+a)^2$$
$$=-(x+a)(3x-a)$$

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右表より $x=\dfrac{a}{3}$ のとき，$g(x)$ は最大値をとり，このとき $f(x)$ も最大となる。

(2)　$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2}{3}a\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2^5}{3^3}a^3$

条件より，$\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2^5}{3^3}a^3\geqq 4$，$\dfrac{2^5}{3^3}a^3\geqq 2^8$，$a^3\geqq 2^3\cdot 3^3$

よって，$a\geqq 6$

コメント

数Ⅱの教科書レベルの 計算ミスが致命的となる基本問題です。

問　題

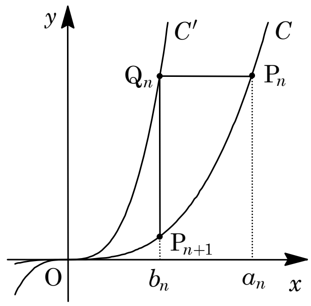
座標平面上の 2 つの曲線 $C : y = x^3$，$C' : y = 8x^3$ と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ を考える。点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし，点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする。次に，点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし，点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする。このように，自然数 n に対して，点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし，点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする。点 P_n の x 座標を a_n とおく。次の問いに答えよ。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) 点 P_{n+1} における曲線 C の接線，直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち，$a_{n+1} \leqq x \leqq a_n$ の領域にある面積を S_n とする。S_n を n を用いて表せ。

(3) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく。T_n を n を用いて表せ。　[2019]

解答例



(1) 曲線 $C : y = x^3$，$C' : y = 8x^3$ に対して，C 上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n{}^3)$，$C'$ 上の点を $\mathrm{Q}_n(b_n,\ 8b_n{}^3)$ とおく。

P_n を通り x 軸と平行な直線と C' の交点が Q_n より，

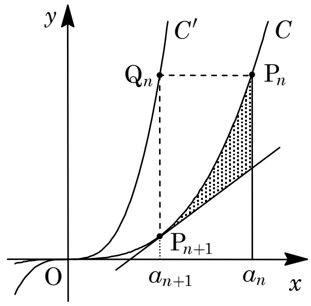
$$a_n{}^3 = 8b_n{}^3,\ a_n = 2b_n \cdots\cdots\cdots ①$$

Q_n を通り y 軸と平行な直線と C の交点が P_{n+1} より，

$$b_n = a_{n+1} \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$ となり，$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$ から，

$$a_n = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots\cdots\cdots ③$$



(2) (1)から $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$ なので，$\mathrm{P}_{n+1}\left(\dfrac{1}{2}a_n,\ \dfrac{1}{8}a_n{}^3\right)$ となる。

$C : y = x^3$ に対し $y' = 3x^2$ より，P_{n+1} における接線は，

$$y - \frac{1}{8}a_n{}^3 = 3\cdot\frac{1}{4}a_n{}^2\left(x - \frac{1}{2}a_n\right),\ y = \frac{3}{4}a_n{}^2x - \frac{1}{4}a_n{}^3$$

すると，$x = a_n$ との交点は，$y = \dfrac{3}{4}a_n{}^3 - \dfrac{1}{4}a_n{}^3 = \dfrac{1}{2}a_n{}^3$

これより，右図の網点部の面積 S_n は，③から，

$$S_n = \int_{\frac{1}{2}a_n}^{a_n} x^3\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}a_n{}^3 + \frac{1}{2}a_n{}^3\right)\left(a_n - \frac{1}{2}a_n\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\,x^4\,\Big]_{\frac{1}{2}a_n}^{a_n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}a_n{}^3\cdot\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{4}a_n{}^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}a_n{}^4 - \frac{5}{32}a_n{}^4 = \frac{5}{64}a_n{}^4$$

$$= \frac{5}{64}\left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)} = \frac{5}{64}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

(3)　$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{5}{4}\cdot\frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}$

コメント

漸化式と微積分の融合問題です。計算ミスに要注意です。

問　題

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}$ を考える。C 上の点 $\mathrm{D}(-1,\ 2)$ における C の接線を l とし，D と異なる C と l の共有点を E とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) E の座標を求めよ。

(3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を考える。ただし，a と b はともに正であるとする。直線 l 上の動点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が P の位置によらず一定であるとき，A の座標を求めよ。

(4) A を(3)で求めた点とする。点 Q が C 上を D から E まで動くときの $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ。　[2018]

解答例

(1) 曲線 $C: y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}$ ……①に対して，$y'=-x^2+\frac{1}{2}$ となり，C 上の点 $\mathrm{D}(-1,\ 2)$ における接線 l の方程式は，その傾きが $y'=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ から，

$$y-2=-\frac{1}{2}(x+1),\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2) C と l の共有点は，①②を連立して，$-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{13}{6}=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$$\frac{1}{3}x^3-x-\frac{2}{3}=0,\quad x^3-3x-2=0,\quad (x+1)^2(x-2)=0$$

よって，$x=-1,\ 2$ となり，D と異なる共有点 E の座標は $\mathrm{E}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ である。

(3) 原点 O を中心とする半径 1 の円の周上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$ に対し，

$$a=\cos\theta,\quad b=\sin\theta\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

また，直線 l 上の動点 P に対し，$\mathrm{P}\left(t,\ -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\cos\theta-\frac{1}{2}t\sin\theta+\frac{3}{2}\sin\theta=\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)t+\frac{3}{2}\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots③$$

③が P の位置によらず一定，すなわち t の値によらず一定である条件は，

$$\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=0,\quad \sin\theta=2\cos\theta$$

すると，$4\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$ から，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ となり，このとき A の座標は $\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ である。

(4)　点 Q が C 上を D から E まで動くとき，$\mathrm{Q}\Big(s,\ -\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{2}s+\frac{13}{6}\Big)$とおく。ただし，$-1\leqq s\leqq 2$である。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(s-\frac{2}{3}s^3+s+\frac{13}{3}\Big)=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-\frac{2}{3}s^3+2s+\frac{13}{3}\Big)$$

ここで，$f(s)=-\frac{2}{3}s^3+2s+\frac{13}{3}$とおくと，

$$f'(s)=-2s^2+2=-2(s+1)(s-1)$$

$-1\leqq s\leqq 2$における $f(s)$ の増減は右表のようになり，$s=1$のとき最大となる。

s	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(s)$	0	$+$	0	$-$	
$f(s)$		$\nearrow$	$\frac{17}{3}$	$\searrow$	

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$の最大値は，$\dfrac{17}{3\sqrt{5}}=\dfrac{17}{15}\sqrt{5}$ である。

コメント

微分と増減にベクトルの内積が味付けされています。方針に迷うような箇所はなく，計算はスムーズに進んでいきます。

問　題

座標平面上の 2 つの曲線 $C_1: y=4x^3-1$，$C_2: y=x^3$ を考える。$a>0$ に対して，x 座標が a である C_1 上の点を A とし，A における C_1 の接線を l とする。次の問いに答えよ。

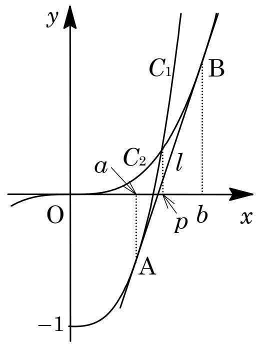
(1)　C_1 と C_2 の交点の x 座標を p とする。p の値を求めよ。

(2)　直線 l の方程式を，a を用いて表せ。

(3)　直線 l が C_2 に接するとき，a の値を求めよ。

(3)　(3)のとき，直線 l と C_2 の接点を B とする。C_1，C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2017]

解答例



(1)　$C_1: y=4x^3-1$……①，$C_2: y=x^3$……②を連立し，

$$4x^3-1=x^3,\ 3x^3=1,\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

よって，C_1 と C_2 の交点の x 座標 p は $p=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ である。

(2)　$a>0$ のとき，$A(a,\ 4a^3-1)$ における C_1 の接線 l の方程式は，①より $y'=12x^2$ から，

$$y-(4a^3-1)=12a^2(x-a)$$

$$y=12a^2x-8a^3-1\text{………①}$$

(3)　$B(b,\ b^3)$ における C_2 の接線の方程式は，②より $y'=3x^2$ から，

$$y-b^3=3b^2(x-b),\ y=3b^2x-2b^3\text{………②}$$

ここで，l が C_2 に接することより，①と②が一致し，

$$12a^2=3b^2\text{………③},\ -8a^3-1=-2b^3\text{………④}$$

③より，$b^2=4a^2$ となり $b=\pm 2a$ である。

$a>0$ で，④より $8a^3+1=2b^3$ から $b>0$ となり，$b=-2a$ は不適である。よって，$b=2a$ を④に代入することにより，

$$8a^3+1=16a^3,\ 8a^3=1$$

以上より，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$ である。

(4)　(3)より，$l: y=3x-2$ となり，C_1，C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{p}(4x^3-1-3x+2)\,dx+\int_{p}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$

$$=\Big[x^4-\frac{3}{2}x^2+x\Big]_{\frac{1}{2}}^{p}+\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_{p}^{1}$$

数値を代入すると，

$$S=p^4-\frac{1}{16}-\frac{3}{2}\left(p^2-\frac{1}{4}\right)+p-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1-p^4)-\frac{3}{2}(1-p^2)+2(1-p)$$

$$=\frac{3}{4}p^4-p+\frac{9}{16}=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}-1\right)\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{9}{16}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{9}{16}=-\frac{\sqrt[3]{9}}{4}+\frac{9}{16}$$

コメント

標準的な内容の微積分の総合問題です。計算も難というほどではありません。

問　題

α，β は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ を満たす実数とする。3 つの放物線

$$C_1 : y=x(1-x),\quad C_2 : y=x(1-\beta-x),\quad C_3 : y=(x-\alpha)(1-x)$$

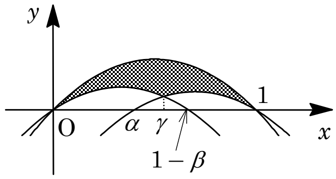
を考える。C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする。また，C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　γ を α，β を用いて表せ。

(2)　S を α，β を用いて表せ。

(3)　α，β が $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ を満たしながら動くとき，S の最大値を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ のとき，$C_1 : y=x(1-x)$，$C_2 : y=x(1-\beta-x)$，$C_3 : y=(x-\alpha)(1-x)$ に対して，C_2 と C_3 の式を連立すると，

$$x(1-\beta-x)=(x-\alpha)(1-x)$$

$$(1-\beta)x=-\alpha+(\alpha+1)x$$

よって，$(\alpha+\beta)x=\alpha$ より $x=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ となり，$\gamma=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

(2)　C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\gamma}\{x(1-x)-x(1-\beta-x)\}dx+\int_{\gamma}^{1}\{x(1-x)-(x-\alpha)(1-x)\}dx$$

$$=\int_0^{\gamma}\beta x\,dx-\int_{\gamma}^{1}\alpha(x-1)\,dx=\frac{\beta}{2}\Big[\,x^2\Big]_0^{\gamma}-\frac{\alpha}{2}\Big[\,(x-1)^2\Big]_{\gamma}^{1}$$

$$=\frac{\beta}{2}\gamma^2+\frac{\alpha}{2}(\gamma-1)^2=\frac{\alpha+\beta}{2}\gamma^2-\alpha\gamma+\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}-\alpha\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{2}=-\frac{\alpha^2}{2(\alpha+\beta)}+\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}$$

(3)　$\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，(2)から，$S=2\alpha\beta$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，$\sqrt{\alpha\beta}\leqq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となり，

$$\alpha\beta\leqq\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2=\Big(\frac{1}{8}\Big)^2=\frac{1}{64}$$

等号は $\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}$ のときに成立する。

よって，S の最大値は $2\cdot\dfrac{1}{64}=\dfrac{1}{32}$ である。

コメント

定積分と面積に関する基本題です。(3)は，1 文字消去で計算を進めても構いません。

問　題

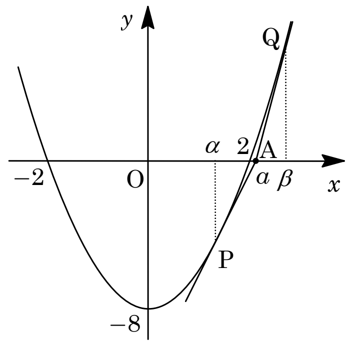
放物線 $y=2x^2-8$ を C とする。x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$　$(a>0)$ を通り C と接する直線が 2 本あるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの接点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$\beta-\alpha=3$ のとき，a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　$C: y=2x^2-8$ に対して，$y'=4x$

C 上の接点を $(t,\ 2t^2-8)$ とすると，接線は，

$$y-(2t^2-8)=4t(x-t)$$

$$y=4tx-2t^2-8\ \cdots\cdots\cdots①$$

①が $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通ることより，

$$0=4ta-2t^2-8,\quad t^2-2at+4=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

接線が 2 本より，②は異なる 2 つの実数解をもち，

$$D/4=a^2-4>0$$

すると，$a>0$ から $a>2$ である。

(2)　②の解を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=a-\sqrt{a^2-4}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-4}$

ここで，$\beta-\alpha=3$ より，$2\sqrt{a^2-4}=3$ となり，

$$a^2-4=\frac{9}{4},\quad a^2=\frac{25}{4}$$

$a>0$ から $a=\dfrac{5}{2}$ であり，このとき，$\alpha=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}=1$，$\beta=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}=4$ となる。

よって，①より，2 本の接線の方程式は，

$$y=4x-10,\quad y=16x-40$$

(3)　2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}(2x^2-8-4x+10)\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(2x^2-8-16x+40)\,dx$$

$$=2\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2\,dx+2\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2\,dx=\frac{2}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_1^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\Big[(x-4)^3\Big]_{\frac{5}{2}}^4$$

$$=\frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\Big)^3+\frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\Big)^3=\frac{9}{2}$$

コメント

放物線の接線と面積についての超有名題です。

問　題

放物線 $C: y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ 上に 2 点 A, B があり，A の x 座標は 3 である。点 A，点 B における C の接線をそれぞれ l, m とし，l と m の交点を P とおくと，$\angle\mathrm{APB}=45°$ であった。次の問いに答えよ。

(1)　接線 l の方程式を求めよ。

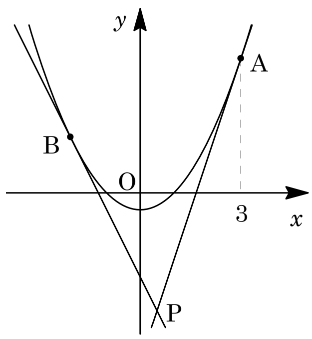
(2)　接線 m の傾きを求めよ。

(3)　点 P の座標を求めよ。

(4)　C, l, m で囲まれた図形において，不等式 $x\geqq 0$ を満たす部分の面積 S を求めよ。

[2012]

解答例



(1)　$C: y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ に対して，$y'=x$ より，点 A$(3,\ 4)$ における接線 l の方程式は，

$$y-4=3(x-3)\,,\ \ y=3x-5\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　接線 l, m と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると，①より，$\tan\alpha=3$ である。

条件より，$\beta=\alpha+45°$ なので，

$$\tan\beta=\tan(\alpha+45°)=\frac{3+1}{1-3\times 1}=-2$$

よって，接線 m の傾きは -2 である。

(3)　点 B の x 座標は，$y'=x$ と接線 m の傾きが -2 から，$x=-2$ である。すると，B$\left(-2,\ \dfrac{3}{2}\right)$ から，接線 m の方程式は，$y-\dfrac{3}{2}=-2(x+2)$，$y=-2x-\dfrac{5}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$

①②を連立すると，$3x-5=-2x-\dfrac{5}{2}$ より，$x=\dfrac{1}{2}$ となり，$y=-\dfrac{7}{2}$

よって, l と m の交点は，P$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{7}{2}\right)$ である。

(4)　C, l, m で囲まれた図形の $x\geqq 0$ を満たす部分の面積 S は,

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}+2x+\frac{5}{2}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-3x+5\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{1}{2}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}+x^2+2x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{6}(x-3)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{3}=\frac{1}{48}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{6}\cdot\frac{125}{8}=\frac{31}{8}$$

コメント

微積分の基本問題です。なお, (2)については，位置関係を図形的に決めています。

問　題

k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C: y=kx^2\ (x \geqq 0)$ と 2 つの直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

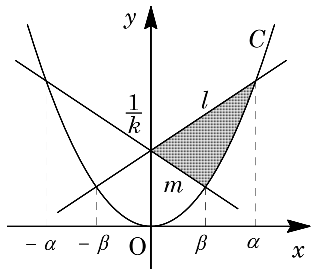
(1) $\alpha-\beta$ の値を求めよ。

(2) $\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ。

(3) 曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。 [2010]

解答例

(1) 曲線 $y=kx^2$ は y 軸対称であり，また直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$ と $m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ は y 軸対称である。



そこで，$C: y=kx^2\ (x \geqq 0)$ と l, m の交点の x 座標をそれぞれ α，β とすると，曲線 $y=kx^2$ と l との交点の x 座標は，α，$-\beta$ となる。

さて，$y=kx^2$ と $y=kx+\dfrac{1}{k}$ を連立して，

$$kx^2=kx+\frac{1}{k},\quad k^2x^2-k^2x-1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の解が $x=\alpha$，$-\beta$ となるので，$\alpha-\beta=\dfrac{k^2}{k^2}=1$

(2) (1)と同様にして，$(*)$から，$\alpha(-\beta)=-\dfrac{1}{k^2}$ より，$\alpha\beta=\dfrac{1}{k^2}$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=1+\frac{2}{k^2}$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=1+\frac{3}{k^2}$$

(3) 曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を S とすると，(1), (2)より，

$$S=\frac{1}{2}\Big(k\alpha^2+\frac{1}{k}\Big)\alpha-\frac{1}{2}\Big(k\beta^2+\frac{1}{k}\Big)\beta-\int_\beta^\alpha kx^2dx$$

$$=\frac{1}{2}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)-\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)=\frac{1}{6}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{6}k\Big(1+\frac{3}{k^2}\Big)+\frac{1}{2k}=\frac{1}{6}k+\frac{1}{k}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$\dfrac{1}{6}k+\dfrac{1}{k}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{6}k\cdot\dfrac{1}{k}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

なお，等号は $\dfrac{1}{6}k=\dfrac{1}{k}$ すなわち $k=\sqrt{6}$ のとき成立する。

よって，$k=\sqrt{6}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

コメント

微積分の総合問題で，対称性への着目がポイントとなっています。なお，(3)は(2)の利用を考えて，台形の面積を使っています。

問　題

p, a を実数の定数とする。多項式$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$を$x-3$で割った余りが$10-6p$であり，3 次方程式$P(x)=0$の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1)　実数の範囲で$P(x)$を因数分解せよ。

(2)　aの値を求めよ。

(3)　関数$y=P(x)$が極値をもたないときのpの値を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$に対し，条件より，

$$P(3)=10-6p\cdots\cdots\cdots①,\ P(a)=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$P(x)$を$x-a$で割ると，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

ここで，$P(x)=0$の実数解は a のみより，$x^2-2px+1=0$が重解$x=a$をもつ場合を考えると，

(i)　$a=p=1$のとき

$P(x)=(x-1)^3$となり，$P(3)=8$から，①を満たさない。

(ii)　$a=p=-1$のとき

$P(x)=(x+1)^3$となり，$P(3)=64$から，①を満たさない。

(i)(ii)より，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

(2)　(1)より，$x^2-2px+1=0$は虚数解をもつことより，

$$D/4=p^2-1<0,\ -1<p<1\cdots\cdots\cdots③$$

①より，$(3-a)(9-6p+1)=10-6p$

③から$10-6p\neq 0$なので，$3-a=1$となり，$a=2$

(3)　(2)より，$P(x)=x^3-(2p+2)x^2+(4p+1)x-2$となり，

$$P'(x)=3x^2-2(2p+2)x+(4p+1)$$

関数$y=P(x)$が極値をもたない条件は，つねに$P'(x)\geqq 0$であることより，

$$D/4=(2p+2)^2-3(4p+1)\leqq 0,\ 4p^2-4p+1\leqq 0$$

これより，$(2p-1)^2\leqq 0$となり，$p=\dfrac{1}{2}$である。

なお，この値は③を満たしている。

コメント

剰余の定理と微分法の応用を組み合わせた問題です。なお，(1)は用心深く書いていますが，冒頭の 3 行だけでも構わないでしょう。

問　題

関数 $y=x-x^3$ のグラフと，その上の点 $\mathrm{P}(t,\ t-t^3)$，および点 P における接線 l を考える。ただし $t>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$y=x-x^3$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(2)　l と $y=x-x^3$ のグラフの交点を Q とおく。ただし Q は P と異なる点とする。点 Q の x 座標を求めよ。

(3)　三角形 OPQ の面積が 12 となるとき t を求めよ。ただし点 O は原点である。

[2009]

解答例

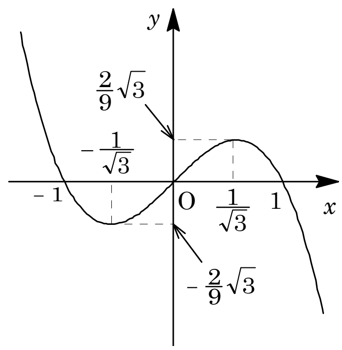
(1)　$y=x-x^3$ ……①に対して，

$$y'=1-3x^2=-(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘

右表より，極大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(x=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，極小値 $-\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ である。

また，グラフは右下図のようになる。



(2)　$\mathrm{P}(t,\ t-t^3)$ における接線 l の方程式は，

$$y-(t-t^3)=(1-3t^2)(x-t)$$

$$y=(1-3t^2)x+2t^3 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$x-x^3=(1-3t^2)x+2t^3$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0,\ (x-t)^2(x+2t)=0$$

よって，点 Q の x 座標は，$x\neq t$ から $x=-2t$ である。

(3)　(2)から，$\mathrm{Q}(-2t,\ -2t+8t^3)$ となり，

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\,t(-2t+8t^3)-(-2t)(t-t^3)\,\right|=\frac{1}{2}\left|\,6t^4\,\right|=3t^4$$

条件より，$3t^4=12$ すなわち $t^2=2$ となる。

すると，$t>0$ から $t=\sqrt{2}$ である。

コメント

有名な構図の頻出基本問題です。

問　題

3 次関数 $y=x^3-cx$ のグラフを考える。ただし, c は定数とする。そして, 2 点 P, Q が次の条件を満たしながら, このグラフ上全体を動くものとする。

（条件）　P の x 座標は Q の x 座標より 1 だけ小さい

このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　線分 PQ の傾きが最小になるときの点 P の x 座標と, 傾きの最小値を求めよ。

(2)　線分 PQ の傾きが 0 となる点 P が存在するような, c の値の範囲を求めよ。

(3)　線分 PQ の中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点を R とする。点 R におけるグラフの接線の傾きは, 線分 PQ の傾きよりつねに小さいことを示せ。

[2008]

解答例

(1)　$y=x^3-cx$ ……①に対して, $\mathrm{P}(t,\ t^3-ct)$, $\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^3-c(t+1))$ とおく。

ここで, 線分 PQ の傾きを m とすると,

$$m=\frac{(t+1)^3-c(t+1)-(t^3-ct)}{(t+1)-t}=3t^2+3t+1-c=3\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-c\ \cdots\cdots\cdots②$$

よって, m は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\dfrac{1}{4}-c$ をとる。

(2)　$m=0$ となる P が存在する条件は, ②より, $\dfrac{1}{4}-c\leqq 0$ から, $c\geqq\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　条件より, 点 R の x 座標は, $x=t+\dfrac{1}{2}$ となる。

①より, $y'=3x^2-c$ から, R における接線の傾き n は,

$$n=3\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-c\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $m>n$ となり, 点 R におけるグラフの接線の傾きは, 線分 PQ の傾きよりつねに小さい。

コメント

接線についての基本問題です。(2)では, グラフを考えて, 条件を記しています。

問　題

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし, x の関数

$$f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos 2\alpha$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および方程式 $f'(x)=0$ の解を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような α の値の範囲を求めよ。

[2007]

解答例

(1)　$f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos 2\alpha$ に対し,

$$f'(x)=3\sqrt{2}x^2-6(\sin\alpha)x$$

また, 方程式 $f'(x)=0$ の解は, $x=0$ または $x=\dfrac{6\sin\alpha}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin\alpha$ である。

(2)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より, $0<\sqrt{2}\sin\alpha$ となるので, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}\sin\alpha$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると, $f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつ条件は,

$$f(0)=\sin\alpha\cos 2\alpha>0\cdots\cdots\cdots①$$

$$f(\sqrt{2}\sin\alpha)=4\sin^3\alpha-6\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha<0\cdots\cdots\cdots②$$

①より, $\sin\alpha>0$ なので, $\cos 2\alpha>0$ から, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots③$

②より, $\sin\alpha>0$ なので, $-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha<0$

$$-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\alpha<0,\ (2\sin\alpha+1)(2\sin\alpha-1)>0$$

よって, $\sin\alpha>\dfrac{1}{2}$ より, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots④$

③④より, 求める α の範囲は, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

コメント

微分法の 3 次方程式への応用問題です。三角関数によって味が付けられています。

問　題

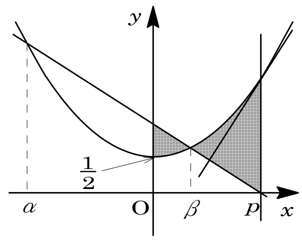
p を正の定数とし，放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における C の接線を l とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通り，l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすれば，$\alpha<0<\beta<p$ であることを示せ。

(3) 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1，放物線 C と直線 m および直線 $x=p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_2-S_1=\dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ。 [2007]

解答例



(1) $C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ ……①に対して，$y'=x$

すると，$x=p$ のとき $y'=p$ である。

これより，直線 l の傾きは p となり，l に直交する直線 m は，傾きが $-\dfrac{1}{p}$ で，$\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通るので，その方程式は，

$$y=-\frac{1}{p}(x-p),\quad y=-\frac{1}{p}x+1\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2) C と m の交点の x 座標は，①②から，$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{p}x+1$，$x^2+\dfrac{2}{p}x-1=0$

ここで，$f(x)=x^2+\dfrac{2}{p}x-1$ とおくと，

$$f(0)=-1<0,\quad f(p)=p^2+1>0$$

よって，$f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\alpha<0<\beta<p$ である。

(3) $S_1=\displaystyle\int_0^{\beta}\left(-\frac{1}{p}x+1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dx$，$S_2=\displaystyle\int_{\beta}^{p}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\right)dx$ より，

$$\begin{aligned}S_2-S_1&=\int_{\beta}^{p}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\right)dx+\int_0^{\beta}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\right)dx\\&=\int_0^{p}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2p}x^2-\frac{1}{2}x\right]_0^p\\&=\frac{p^3}{6}+\frac{1}{2p}p^2-\frac{1}{2}p=\frac{p^3}{6}\end{aligned}$$

コメント

微積分の総合問題です。(3)では，S_1，S_2 を単独で求めずに S_1-S_2 を計算すればよいということは，問題文から推測できます。

問　題

直線 $y=-2x+m$ が，放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax$ $(a>2)$ に点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接している。連立不等式 $0\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+ax$，$x\leqq p$ の表す領域の面積を S_1 とする。また，連立不等式 $-\dfrac{1}{2}x^2+ax\leqq y\leqq -2x+m$，$0\leqq x\leqq p$ の表す領域の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a,\ m,\ q$ を p の式で表せ。

(2) S_1 と S_2 を p の式で表せ。

(3) $a>2$ のとき，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{S_2}{S_1}<2$ が成り立つことを示せ。　[2006]

解答例

(1) まず，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は，放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax$ 上にあるので，

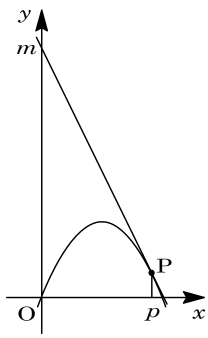
$$q=-\frac{1}{2}p^2+ap\cdots\cdots\cdots①$$

$y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax$ に対して，$y'=-x+a$ より，$\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線の方程式は，

$$y-q=(-p+a)(x-p),\quad y=(-p+a)x+p^2-ap+q$$

この式が $y=-2x+m$ と一致するので，

$$-p+a=-2\cdots\cdots\cdots②,\quad p^2-ap+q=m\cdots\cdots\cdots③$$



②より $a=p-2$ となり，①に代入して，

$$q=-\frac{1}{2}p^2+(p-2)p=\frac{1}{2}p^2-2p$$

③に代入すると，$m=p^2-(p-2)p+\dfrac{1}{2}p^2-2p=\dfrac{1}{2}p^2$

(2) (1)から，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+(p-2)x$ 上の点 P における接線は，$y=-2x+\dfrac{1}{2}p^2$ より，

$$S_1=\int_0^p\left\{-\frac{1}{2}x^2+(p-2)x\right\}dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{p-2}{2}x^2\right]_0^p$$

$$=-\frac{1}{6}p^3+\frac{p-2}{2}p^2=\frac{1}{3}p^3-p^2$$

$$S_2=\int_0^p\left\{-2x+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}x^2-(p-2)x\right\}dx=\frac{1}{2}\int_0^p(x-p)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x-p)^3}{3}\right]_0^p=\frac{1}{6}p^3$$

(3)　(1)より, $a>2$ のとき $p>4$ となり, (2)から,

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{6}p^3}{\frac{1}{3}p^3-p^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p-3}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{p-3}\right)$$

すると，$0<\dfrac{3}{p-3}<3$ から，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{S_2}{S_1}<2$ となる。

コメント

放物線の接線と面積が絡んだ数Ⅱの典型頻出問題です。ただ，(3)の普通の解法は上に記したとおりでしょうが，分子を定数化する変形は，現行の課程では数Ⅲということになっています。

問　題

各実数 t に対して，方程式 $y=(2t-3)x-t^2$ で表される直線 L_t を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線 L_t と L_s が直交するとき，L_t と L_s の交点の y 座標は，t と s によらない定数になることを示せ。

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ にすべての直線 L_t が接するとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

(3) (2)で求めた放物線と 2 つの直線 L_t，L_{t+2} によって囲まれる図形の面積は，t によらない定数になることを示せ。　[2005]

解答例

(1) $L_t: y=(2t-3)x-t^2$ ……①，$L_s: y=(2s-3)x-s^2$ ……②に対して，L_t と L_s が直交するとき，

$$(2t-3)(2s-3)=-1 \quad \cdots\cdots\cdots③$$

このとき，①②の交点は，$(2t-3)x-t^2=(2s-3)x-s^2$ から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2$$

$t\neq s$ より，$x=\dfrac{t+s}{2}$ となり，交点の y 座標は，

$$y=(2t-3)\cdot\frac{t+s}{2}-t^2=ts-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}s=\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{4}$$

③から，$\left(t-\dfrac{3}{2}\right)\left(s-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$ なので，$y=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{5}{2}$ である。

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ ……④と直線①の共有点は，

$$ax^2+bx+c=(2t-3)x-t^2,\ ax^2+(b+3-2t)x+c+t^2=0$$

④と①が接することより，

$$D=(b+3-2t)^2-4a(c+t^2)=0$$

$$(4-4a)t^2-4(b+3)t+(b+3)^2-4ac=0 \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤がすべての t で成立することより，

$$4-4a=0,\ b+3=0,\ (b+3)^2-4ac=0$$

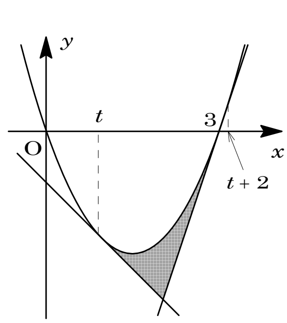
よって，$a=1$，$b=-3$，$c=0$

(3) (2)より，放物線の方程式は，$y=x^2-3x$ ………⑥

直線 L_t と⑥との接点は，$x^2-3x=(2t-3)x-t^2$

$$x^2-2tx+t^2=0,\ x=t$$

同様にして，直線 L_{t+2} と⑥との接点は，$x=t+2$ となる。



さらに L_t，L_{t+2} の交点は, (1)より,

$$x=\frac{t+(t+2)}{2}=t+1$$

以上より，放物線⑥と 2 直線 L_t，L_{t+2} によって囲まれる図形の面積 S は,

$$S=\int_t^{t+1}(x-t)^2\,dx+\int_{t+1}^{t+2}\{x-(t+2)\}^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-t)^3\Big]_t^{t+1}+\frac{1}{3}\Big[(x-t-2)^3\Big]_{t+1}^{t+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

コメント

放物線と面積についての有名頻出問題です。

問　題

$f(x)=x^2-4x+5$とする。$p<2<q$とし，放物線$y=f(x)$上の2点$\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$における接線を，それぞれl, mとする。lとmは点$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{2},\ r\right)$で交わり，それぞれの傾きを$a$, bとするとき，$2a+b=0$を満たすものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) p, q, rを求めよ。

(2) 接線l, mの方程式を求めよ。

(3) 放物線$y=f(x)$と2つの接線l, mで囲まれた図形の面積Sを求めよ。　[2004]

解答例

(1) $f(x)=x^2-4x+5$より，$f'(x)=2x-4$となり，

$$a=f'(p)=2p-4\,,\ \ b=f'(q)=2q-4$$

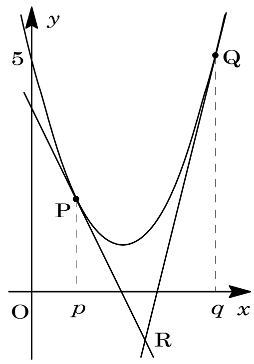
条件から，$2a+b=0$より，$2(2p-4)+(2q-4)=0$

$$2p+q=6\cdots\cdots\cdots①$$

Pにおける接線lは,

$$y-(p^2-4p+5)=(2p-4)(x-p)$$

$$y=(2p-4)x-p^2+5\cdots\cdots\cdots②$$



同様にして，$m: y=(2q-4)x-q^2+5\cdots\cdots\cdots③$

②③の交点は，$(2p-4)x-p^2+5=(2q-4)x-q^2+5$

$$2(p-q)x=p^2-q^2,\ \ x=\frac{p+q}{2}$$

条件より，$\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{5}{2}$，$p+q=5\cdots\cdots\cdots④$

①④より，$p=1$，$q=4$

このとき，②は$y=-2x+4$となり，$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{2},\ r\right)$を通ることより，$r=-5+4=-1$

(2) ②より$l: y=-2x+4$，③より$m: y=4x-11$

(3) $$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\{(x^2-4x+5)-(-2x+4)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{(x^2-4x+5)-(4x-11)\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_1^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-4)^3\Big]_{\frac{5}{2}}^4$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}=\frac{9}{4}$$

コメント

センター試験でも過去に類題が出た頻出問題の1つです。交点Rのx座標は，接点P, Qのx座標の相加平均になっています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　a を 0 でない実数とするとき，2 つの曲線 $y=-x^2+2x$ と $y=-ax^2+1$ が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で 2 つの交点をもつように a の範囲を定めよ。

(2)　a_0 を(1)で求めた a の範囲の最大値とするとき，定積分

$$I=\int_0^2\left|(-a_0x^2+1)-(-x^2+2x)\right|dx$$

を求めよ。　[2003]

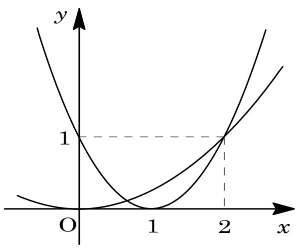
解答例

(1)　2 曲線 $y=-x^2+2x$ ……①，$y=-ax^2+1$ ……②の共有点は，

$$-x^2+2x=-ax^2+1,\quad ax^2=(x-1)^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①と②が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲に 2 つの交点をもつ条件は，③から $y=ax^2$ と $y=(x-1)^2$ が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲に 2 つの交点をもつことに等しい。

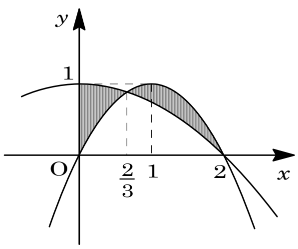
すると，$y=ax^2$ が点 $(2,\ 1)$ を通るのは，$1=4a$，$a=\dfrac{1}{4}$ なので，右図より，求める a の範囲は $0<a\leqq\dfrac{1}{4}$ である。



(2)　(1)より，$a_0=\dfrac{1}{4}$ となり，このとき①と②の交点は，③より，

$$\frac{1}{4}x^2=(x-1)^2,\quad \pm\frac{1}{2}x=x-1$$

よって，$x=\dfrac{2}{3}$，$x=2$ となるので，



$$\begin{aligned}
I&=\int_0^2\left|\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)-(-x^2+2x)\right|dx\\
&=\int_0^2\left|\frac{3}{4}x^2-2x+1\right|dx\\
&=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}x^2-2x+1\right)dx-\int_{\frac{2}{3}}^2\left(\frac{3}{4}x^2-2x+1\right)dx\\
&=\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}\int_{\frac{2}{3}}^2\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)\,dx\\
&=\frac{8}{27}-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{27}
\end{aligned}$$

コメント

a が変化するとき，$y=ax^2$ のグラフの動きを考え，(1)は図から a の範囲を求めました。

問　題

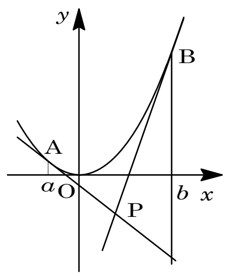
放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(a<b)$ における接線をそれぞれ l_{A}，l_{B} とする。

(1) l_{A} と l_{B} の交点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とするとき, a, b は 2 次方程式 $x^2-2px+q=0$ の解であることを示せ。

(2) 2 直線 l_{A}，$x=b$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積 S は，$\dfrac{1}{3}(b-a)^3$ であることを示せ。

(3) 交点 P が放物線 $y=-(x-1)^2$ 上を動くとき，面積 S の最小値を求めよ。　[2002]

解答例



(1) $y=x^2$ より $y'=2x$ なので，$\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2\cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線は，同様にして,

$$y=2bx-b^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②の交点 P は，$2ax-a^2=2bx-b^2$

$$2(b-a)x=b^2-a^2,\ \ x=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

①より，$y=2a\cdot\dfrac{a+b}{2}-a^2=ab$

交点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ なので $p=\dfrac{a+b}{2}$，$q=ab$ となり，解と係数の関係から, a, b は 2 次方程式 $x^2-2px+q=0$ の解である。

(2) $S=\displaystyle\int_a^b\{x^2-(2ax-a^2)\}dx=\int_a^b(x-a)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-a)^3\Big]_a^b=\frac{1}{3}(b-a)^3$

(3) 条件より，$q=-(p-1)^2$，$q=-p^2+2p-1\cdots\cdots\cdots③$

$a<b$ から, (1)より $a=p-\sqrt{p^2-q}$，$b=p+\sqrt{p^2-q}$ となり,

$$S=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{p^2-q}\right)^3=\frac{8}{3}\left(\sqrt{p^2-q}\right)^3$$

③より，$p^2-q=2p^2-2p+1=2\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$ なので，S は $p=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{8}{3}\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^3=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

コメント

センター試験に出題されそうな頻出基本問題です。

問　題

放物線 $y=x^2$ と直線 l が 2 点で交わっている。それらの交点の x 座標を s, t $(s<t)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

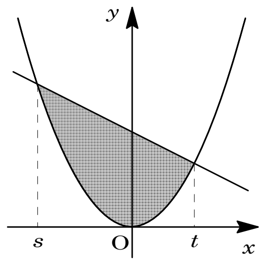
(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 l で囲まれた部分の面積 S は, $S=\dfrac{1}{6}(t-s)^3$ で与えられることを証明せよ。

(2) 直線 l が, 点 $(t,\ t^2)$ における $y=x^2$ の接線と直交しているとき, s を t で表せ。

(3) (2)のとき, (1)の面積 S の最小値, および最小値を与える t を求めよ。　[2001]

解答例

(1) 放物線 $y=x^2$ ……①, 直線 $l:\ y=mx+n$ ……②



①②の交点は, $x^2-mx-n=0$ ………③

条件から, ③の解が $x=s,\ t$ $(s<t)$ なので,

$$x^2-mx-n=(x-s)(x-t)$$

よって, $S=\displaystyle\int_s^t(mx+n-x^2)\,dx=-\int_s^t(x-s)(x-t)\,dx$

$$=-\int_s^t(x-s)(x-s+s-t)\,dx$$

$$=-\int_s^t\{(x-s)^2-(t-s)(x-s)\}dx$$

$$=-\frac{1}{3}\Big[(x-s)^3\Big]_s^t+\frac{1}{2}(t-s)\Big[(x-s)^2\Big]_s^t=\frac{1}{6}(t-s)^3$$

(2) 直線 l の傾きは, $m=\dfrac{t^2-s^2}{t-s}=t+s$ である。また, ①より $y'=2x$ なので, 点 $(t,\ t^2)$ における接線の傾きは $2t$ となり, 条件より,

$$(t+s)\cdot 2t=-1,\quad s=-t-\frac{1}{2t}$$

(3) (1)(2)より, $S=\dfrac{1}{6}\left(t+t+\dfrac{1}{2t}\right)^3=\dfrac{1}{6}\left(2t+\dfrac{1}{2t}\right)^3$

ここで, $s<t$ より, $-t-\dfrac{1}{2t}<t$, $t+\dfrac{1}{2t}>0$ となり, $t>0$ である。

すると, 相加平均と相乗平均の関係から,

$$S=\frac{1}{6}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^3\geqq\frac{1}{6}\left(2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}\right)^3=\frac{4}{3}$$

よって, S は最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。このとき, $2t=\dfrac{1}{2t}$ から, $t=\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

(3)まで含めて, 有名な頻出問題の 1 つです。数Ⅱの微積分の標準的な問題です。

問　題

a を正の定数とする。曲線 $y=x^2(x-a)$ の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2(p-a))$ における接線 l が y 軸と交わる点を $\mathrm{H}(0,\ h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) h を p の式で表せ。

(2) $p \geqq 0$ のとき，h を最大にする p の値を求めよ。また，そのときの接線 l の方程式を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $y=x^2(x-a)=x^3-ax^2$ から，$y'=3x^2-2ax$

$x=p$ のとき $y'=3p^2-2ap$ より，$\mathrm{P}(p,\ p^2(p-a))$ における接線は，

$$y-p^2(p-a)=(3p^2-2ap)(x-p)$$

$$y=(3p^2-2ap)x-2p^3+ap^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

y 切片が $\mathrm{H}(0,\ h)$ より，$h=-2p^3+ap^2 \cdots\cdots\cdots ②$

(2) ②より，$h'=-6p^2+2ap=-2p(3p-a)$

$a>0$ より，$p=\dfrac{a}{3}$ のとき，h は最大となる。

このとき接線は，①より，

$$y=-\frac{1}{3}a^2x+\frac{1}{27}a^3$$

p	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$
h'		$+$	0	$-$
h		$\nearrow$		$\searrow$

コメント

a が正なので，場合分けも必要なく，あっさり結論が導けます。

問　題

2 次関数 $f(x)=px^2+qx+r$ は，次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $-4x+8$ である。

(ii)　$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

(1)　$p,\ q$ の値と r の範囲を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸と交わる 2 点を A, B, y 軸と交わる点を C とし，三角形 ABC の面積を T とする。また，$y=f(x)$ のグラフが x 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。$S=4T$ となるような r の値を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　(i)より，$f'(x)=-4x+8$ から，$f(x)=\int(-4x+8)\,dx=-2x^2+8x+C$

$f(x)=px^2+qx+r$ から，$p=-2,\ q=8$

よって，$f(x)=-2x^2+8x+r$

(ii)より，$f(x)=0$ の判別式が正より，$D/4=16+2r>0,\ r>-8$

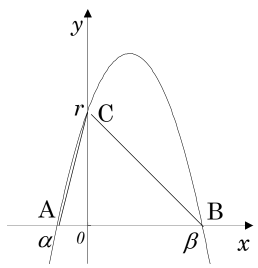
(2)　$\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 0)$ とすると，$\alpha,\ \beta$ は $f(x)=0$ の 2 つの解となる。

$\alpha<\beta$ とすると，$\alpha=\dfrac{4-\sqrt{16+2r}}{2}$，$\beta=\dfrac{4+\sqrt{16+2r}}{2}$

$\beta-\alpha=\sqrt{16+2r}$ ………(＊)

ここで，$T=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)|r|$

$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta-2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$



条件から，$S=4T$

$\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=4\cdot\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)|r|$，$(\beta-\alpha)^2=6|r|$

(＊)から，$16+2r=6|r|$，$16+2r=\pm6r$

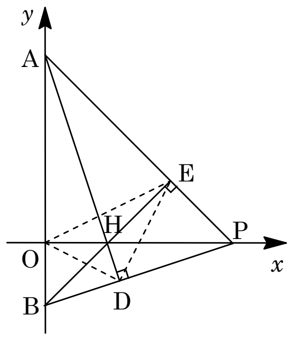
よって，$r=4,\ -2$

コメント

センター試験レベルの問題です。(2)では，図に気をとられすぎると，r に絶対値をつけ忘れしそうです。

問　題

原点を O とする座標平面上において，点 A(0, 3)，B(0, −1) および x 軸上の正の部分を動く点 P(t, 0) があり，∠APB は鈍角でないとする。△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを，三角形の垂心という。



(1)　∠APB が直角となる t の値を求めよ。

(2)　点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3)　点 H が△ODE の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が $180°$ である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

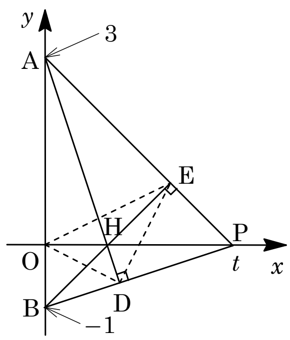
(4)　△ODE の内接円の半径を t を用いて表せ。　[2019]

解答例

(1)　$t>0$ のとき，A(0, 3)，B(0, −1)，P(t, 0) に対し，直線 AP の傾きは $\dfrac{-3}{t}$，直線 BP の傾きは $\dfrac{1}{t}$ なので，∠APB が直角の条件は，

$$\frac{-3}{t}\cdot\frac{1}{t}=-1,\ t^2=3$$

よって，$t>0$ から $t=\sqrt{3}$ である。



(2)　AD ⊥ BP より，直線 AD は傾き $-t$ から，その方程式は，

$$y=-tx+3\cdots\cdots\text{①}$$

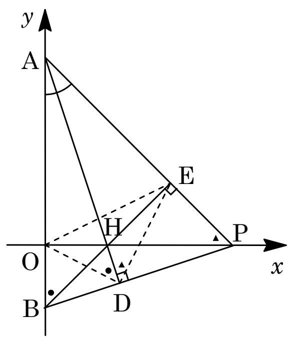
直線 AD と OP の交点が△ABP の垂心 H なので，$0=-tx+3$ より $x=\dfrac{3}{t}$ となり，H$\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ である。

(3)　$t>\sqrt{3}$ のとき，∠APB は鋭角となる。

さて，∠BOH＋∠BDH＝180° より，四角形 OBDH は円に内接するので，

$$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{ABE}\cdots\cdots\text{②}$$

また，∠PEH＋∠PDH＝180° より，四角形 PEHD は円に内接するので，



$$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{APO} \cdots\cdots\cdots ③$$

さらに，$\triangle \mathrm{ABE}$ と $\triangle \mathrm{AOP}$ はともに直角三角形なので，

$$\angle \mathrm{ABE} = 90^\circ - \angle \mathrm{BAP} = \angle \mathrm{APO} \cdots\cdots\cdots ④$$

②③④より，$\angle \mathrm{ADO} = \angle \mathrm{ADE}$ となり，直線 AD は $\angle \mathrm{ODE}$ の二等分線である。

同様にすると，直線 BE は $\angle \mathrm{OED}$ の二等分線である。

以上より，直線 AD と BE の交点 H は，$\triangle \mathrm{ODE}$ の内心になる。

(4)　まず，直線 BP の方程式は，$y = \dfrac{1}{t}x - 1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

①⑤を連立して，$-tx + 3 = \dfrac{1}{t}x - 1$ より，$\dfrac{t^2+1}{t}x = 4$ となり，

$$x = \frac{4t}{t^2+1},\ \ y = -\frac{4t^2}{t^2+1} + 3 = -\frac{t^2-3}{t^2+1}$$

これより，$\mathrm{D}\left(\dfrac{4t}{t^2+1},\ -\dfrac{t^2-3}{t^2+1}\right)$ となり，直線 OD の方程式は，

$$y = -\frac{t^2-3}{4t}x,\ \ (t^2-3)x + 4ty = 0$$

すると，$\triangle \mathrm{ODE}$ の内接円の半径 r は，$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ と直線 OD の距離になり，$t > \sqrt{3}$ から，

$$r = \frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2 + 16t^2}} = \frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}} = \frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{t^4+10t^2+9}}$$

コメント

三角形の垂心と内心を題材にした図形と式の問題です。(3)はいろいろな解法が考えられますが，問題文の誘導に従ったもので記述しています。有名題ですが……。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　t の 2 次関数 $s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$ のグラフを図示せよ。

(2)　次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(A)　2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(3)　次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

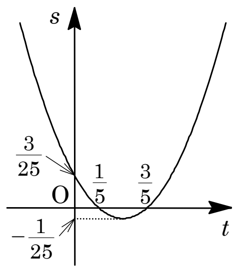
(B)　2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(4)　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　$s=\left(t-\dfrac{1}{5}\right)\left(t-\dfrac{3}{5}\right)=t^2-\dfrac{4}{5}t+\dfrac{3}{25}=\left(t-\dfrac{2}{5}\right)^2-\dfrac{1}{25}$

これより，グラフは右図のようになる。



(2)　まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ とおく。

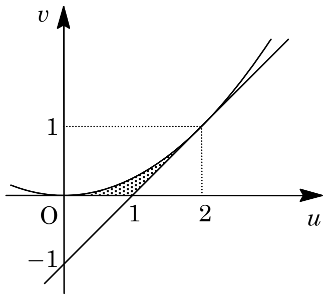
条件(A)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ なので，

$$-\frac{u^2}{4}+v\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots①,\ \ 0\leqq\frac{u}{2}\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$f(0)=v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$f(1)=1-u+v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots④$$

①③から $0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$，②から $0\leqq u\leqq 2$，④から $v\geqq u-1$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



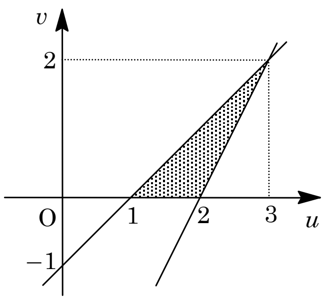
(3)　条件(B)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ なので，

$$f(0)=v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$f(1)=1-u+v\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

$$f(2)=4-2u+v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥から $0\leqq v\leqq u-1$，⑦から $v\geqq 2u-4$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。



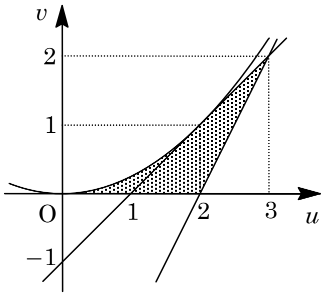
　ただし，境界は領域に含む。

(4)　点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき, x, y の条件は$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 2$と表せ，これは(2), (3)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

　ここで，$f(t)=0$の 2 解$t=x,\ y$について，解と係数の関係から,

$$x+y=u\ ,\ \ xy=v$$

　これより，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲は点$(u,\ v)$の動く範囲に対応し, (2), (3)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして，その面積Sは,



$$S=\int_0^2 \frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{12}\left[\,u^3\,\right]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

コメント

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(2)と(3)の結果が(4)にストレートにつながっています。ただ, (1)の意図は不明ですが。

問　題

座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を考える。C を線分 OA 上にあり，$\angle\mathrm{OBC}=45^\circ$ を満たす点とする。また，P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする。点 Q, R, P' を次により定める。

(a)　点 P を通り傾きが 1 の直線と，直線 AB の交点を Q とする。

(b)　点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と，直線 OB の交点を R とする。

(c)　点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と，直線 OA の交点を P' とする。

次の問いに答えよ。

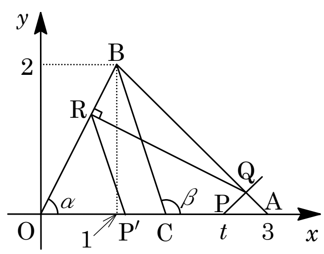
(1)　点 Q の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 R の座標を t を用いて表せ。

(3)　点 P' の座標を t を用いて表せ。

(4)　点 P' の x 座標を $f(t)$ とする。数列 $\{t_n\}$ を $t_1=2$，$t_{n+1}=f(t_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ。　[2017]

解答例



(1)　$\mathrm{P}(t,\ 0)$ を通り傾き 1 の直線の方程式は，

$$y=x-t\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ に対し，直線 AB の方程式は，

$$y=-(x-3)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$x-t=-(x-3)$ となり，$x=\dfrac{t+3}{2}$，

$y=\dfrac{t+3}{2}-t=\dfrac{-t+3}{2}$ から，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+3}{2},\ \dfrac{-t+3}{2}\right)$ となる。

(2)　直線 OB の方程式は，$y=2x\ \cdots\cdots\cdots③$

Q を通り OB に垂直な直線の方程式は，$y-\dfrac{-t+3}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{t+3}{2}\right)\cdots\cdots\cdots④$

③④を連立して，$2x-\dfrac{-t+3}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{t+3}{2}\right)$ となり，$x=\dfrac{-t+9}{10}$

$$y=2\cdot\frac{-t+9}{10}=\frac{-t+9}{5}$$

よって，$\mathrm{R}\left(\dfrac{-t+9}{10},\ \dfrac{-t+9}{5}\right)$ となる。

(3)　$\angle\mathrm{OBC}=45^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{BOC}=\alpha$，$\angle\mathrm{BCA}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=2$ より，

$$\tan\beta=\tan(\alpha+45^\circ)=\frac{2+1}{1-2\cdot1}=-3$$

これより，直線 BC の傾きは-3となり，点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線の方程式は，

$$y-\frac{-t+9}{5}=-3\left(x-\frac{-t+9}{10}\right)$$

直線 OA すなわちx軸との交点は，$-\dfrac{-t+9}{5}=-3\left(x-\dfrac{-t+9}{10}\right)$より，$x=\dfrac{-t+9}{6}$となり，$\mathrm{P}'\left(\dfrac{-t+9}{6},\ 0\right)$である。

(4)　$f(t)=\dfrac{-t+9}{6}$より，数列$\{t_n\}$は，$t_1=2$，$t_{n+1}=f(t_n)=\dfrac{-t_n+9}{6}$で定められ，

$$t_{n+1}-\frac{9}{7}=-\frac{1}{6}\left(t_n-\frac{9}{7}\right)$$

すると，$t_n-\dfrac{9}{7}=\left(t_1-\dfrac{9}{7}\right)\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{5}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$となり，

$$t_n=\frac{5}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{9}{7}$$

コメント

直線の方程式についての基本的な問題です。(4)で漸化式という付録がついていますが。

問　題

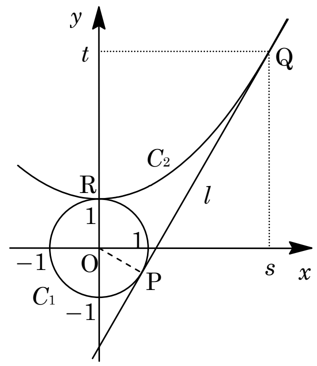
a を正の定数とし，座標平面上において，円 $C_1 : x^2+y^2=1$，放物線 $C_2 : y=ax^2+1$ を考える。C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 l は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している。次の問いに答えよ。

(1) s, t および a を求めよ。

(2) C_2, l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 円 C_1 上の点が点 P から点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする。C_2, l および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2016]

解答例



(1) $C_1 : x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 l の方程式は,

$$l : \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1,\quad y=\sqrt{3}x-2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$C_2 : y=ax^2+1$ と①を連立すると,

$$ax^2+1=\sqrt{3}x-2,\quad ax^2-\sqrt{3}x+3=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

l と C_2 が接することより，$D=3-12a=0$，$a=\dfrac{1}{4}$

このとき，②の重解は $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2a}=2\sqrt{3}$

よって，接点 Q の x 座標 $s=2\sqrt{3}$ となり，①から $t=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-2=4$ である。

(2) C_2, l および y 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2+1-\sqrt{3}x+2\right)dx=\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4}(x-2\sqrt{3})^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(x-2\sqrt{3})^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{3}}=\frac{1}{12}\cdot 24\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

(3) C_2, l および C_3 で囲まれた部分の面積 T は，$\angle\mathrm{POR}=\dfrac{2}{3}\pi$，$l$ の y 切片が -2 から,

$$T=S-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

コメント

円と放物線の関係を題材にした面積に関する基本題です。