

2020 入試対策  
過去問ライブラリー

# 広島大学

## 理系数学22か年

1998 - 2019

---

外林康治 編著

電送数学舎

## まえがき

本書には、1998年度以降に出題された広島大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお、複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

## 本書の構成

- 1 本書は2部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
  - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
  - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
  - (3) 1つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
  - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
  - (5) 出題の流れをウェブサイトを入試直前に確認する。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。  
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

## PDF版とKindle版のリンクについて

本書では、対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号、解答編の **問題** の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について、PDF版とKindle版に違いがあります。

- 【PDF版】 リンクが無効の場合、PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。
- 【Kindle版】 現状では、Kindle アプリで、リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

## 目 次

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 分野別問題一覧 .....   | 3   |
| 分野別問題と解答例 ..... | 37  |
| 図形と式 .....      | 38  |
| 図形と計量 .....     | 50  |
| ベクトル .....      | 51  |
| 整数と数列 .....     | 64  |
| 確 率 .....       | 84  |
| 論 証 .....       | 115 |
| 複素数 .....       | 118 |
| 曲 線 .....       | 131 |
| 極 限 .....       | 135 |
| 微分法 .....       | 145 |
| 積分法 .....       | 161 |
| 積分の応用 .....     | 174 |

# 分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

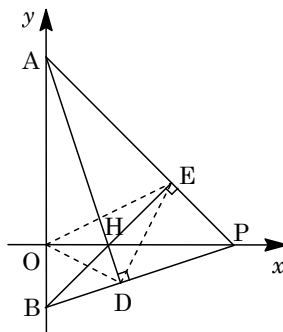
整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 原点を  $O$  とする座標平面上において、点  $A(0, 3)$ 、 $B(0, -1)$  および  $x$  軸上の正の部分をもつ動く点  $P(t, 0)$  があり、 $\angle APB$  は鈍角でないとする。 $\triangle ABP$  の垂心を  $H$ 、頂点  $A$  から辺  $BP$  に下ろした垂線と辺  $BP$  との交点を  $D$ 、頂点  $B$  から辺  $PA$  に下ろした垂線と辺  $PA$  との交点を  $E$  とする。次の問いに答えよ。ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを、三角形の垂心という。



- (1)  $\angle APB$  が直角となる  $t$  の値を求めよ。
- (2) 点  $H$  の座標を  $t$  を用いて表せ。  
以下では、 $t$  が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。
- (3) 点  $H$  が  $\triangle ODE$  の内心であることを証明せよ。ただし、1 組の対角の和が  $180^\circ$  である四角形は円に内接することを、証明なしに利用してもよい。
- (4)  $\triangle ODE$  の内接円の半径を  $t$  の関数  $f(t)$  として表せ。
- (5) (4)で求めた関数  $f(t)$  は最大値をもつことを示せ。ただし、最大値を与える  $t$  の値を求める必要はない。 [2019]

2 次の問いに答えよ。

- (1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点  $(u, v)$  の存在範囲を図示せよ。  
(A) 2 次式  $t^2 - ut + v$  は、 $0 \leq x \leq 1$ 、 $0 \leq y \leq 1$  を満たす実数  $x, y$  を用いて  $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$  と因数分解される。
- (2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点  $(u, v)$  の存在範囲を図示せよ。  
(B) 2 次式  $t^2 - ut + v$  は、 $0 \leq x \leq 1$ 、 $1 \leq y \leq 2$  を満たす実数  $x, y$  を用いて  $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$  と因数分解される。
- (3) 座標平面上の点  $(x, y)$  が 4 点  $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(0, 2)$  を頂点とする長方形の周および内部を動くとき、点  $(x+y, xy)$  の動く範囲の面積を求めよ。 [2018]

**3** 座標平面上で、曲線  $C: y = x^3 - 3x$  と、 $b > a^3 - 3a$  を満たすように動く点  $P(a, b)$  を考える。また、点  $P$  に対し、2 つの不等式  $|x - a| \leq 1$ 、 $|y - b| \leq 1$  によって表される座標平面上の領域を  $B$  とする。領域  $B$  と曲線  $C$  に対して、 $B$  と  $C$  が共有点  $Q$  をもち、さらに  $B$  と  $C$  の共有点が  $B$  の境界線上にしかないとき、 $B$  と  $C$  は点  $Q$  で接するというようにする。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  の概形をかき、さらに点  $P$  の座標が  $(-2, 3)$  のときの領域  $B$  を図示せよ。
- (2)  $B$  と  $C$  が  $x < -1$  の範囲にある点で接するように、点  $P$  は動くとする。このときの点  $P$  の軌跡を求めよ。
- (3)  $B$  と  $C$  がある点で接するように点  $P$  は動くとする。このときの点  $P$  の軌跡を求めよ。
- (4) (3)の点  $P$  の軌跡は、ある関数  $y = f(x)$  のグラフで表すことができる。この  $f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能であることを示せ。 [2018]

**4** 座標平面上の 2 点  $A(0, 1)$   $B(t, 0)$  を考える。ただし、 $t \geq 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分  $AB$  を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について、2 点  $A, B$  以外の頂点の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2) (1)で求めた 2 点のうち  $x$  座標が小さい方を  $C$  とする。 $t$  を動かすとき、点  $C$  の軌跡を図示せよ。
- (3)  $k$  を定数とする。点  $B$  と直線  $y = kx$  上の点  $P$  をそれぞれうまく選ぶことで 3 点  $A, B, P$  を頂点とする正三角形ができるとき、 $k$  の値の範囲を求めよ。 [2013]

**5** 座標平面上の 3 点  $A(0, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(x, y)$  を考える。ただし  $y > 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle ABC$  が二等辺三角形であるとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。
- (2)  $\triangle ABC$  が鋭角三角形であるとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。
- (3) 3 つの角  $\angle CAB$ 、 $\angle ABC$ 、 $\angle BCA$  をそれぞれ  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  とし、不等式  $\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$  を満たすとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。
- (4)  $x, y$  が(3)の条件を満たすとき、 $\gamma$  がとりうる値の範囲を求めよ。 [2009]

6 次の問いに答えよ。

(1) 点(3, 3)における円  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  の接線の方程式を求めよ。

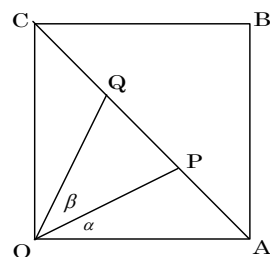
(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} y, \log_2(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) \leq \log_2 5$$

(3)  $a$  を正の数とする。点  $(x, y)$  が(2)で求めた領域を動くとき、 $ax + y$  の最大値が 4 になるように  $a$  の値を定めよ。 [2004]

■ 図形と計量 |||

1 正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し、図のように、A に近い点を P、C に近い点を Q とする。また、 $\angle AOP = \alpha$ 、 $\angle POQ = \beta$  とする。次の問いに答えよ。



(1)  $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$  の値を求めよ。

(2)  $\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$  を示せ。

(3) 線分 PQ 上に点 R を  $\angle POR = \alpha$  となるようにとる。このとき、比  $AR : RC$  を求めよ。 [2006]

■ ベクトル |||

1 座標空間に 4 点  $O(0, 0, 0)$ 、 $A(s, s, s)$ 、 $B(-1, 1, 1)$ 、 $C(0, 0, 1)$  がある。ただし、 $s > 0$  とする。 $t, u, v$  を実数とし、 $\vec{d} = \vec{OB} - t\vec{OA}$ 、 $\vec{e} = \vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}$  とおく。次の問いに答えよ。

(1)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$  のとき、 $t$  を  $s$  を用いて表せ。

(2)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$ 、 $\vec{OA} \perp \vec{e}$ 、 $\vec{d} \perp \vec{e}$  のとき、 $u, v$  を  $s$  を用いて表せ。

(3) (2) のとき、2 点 D、E を、 $\vec{OD} = \vec{d}$ 、 $\vec{OE} = \vec{e}$  となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき、 $s$  の値を求めよ。 [2016]

2 座標空間内に 5 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 0, \frac{3}{4})$ ,  $B(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ,  $C(s, t, 0)$ ,  $D(0, u, 0)$  がある。ただし,  $s, t, u$  は実数で,  $s > 0$ ,  $t > 0$ ,  $s+t=1$  を満たすとする。

3 点  $A, B, C$  の定める平面が  $y$  軸と点  $D$  で交わっているとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $AB$  と  $x$  軸との交点の  $x$  座標を求めよ。
- (2)  $u$  を  $t$  を用いて表せ。また,  $0 < u < 1$  であることを示せ。
- (3) 点  $(0, 1, 0)$  を  $E$  とする。点  $D$  が線分  $OE$  を  $12:1$  に内分するとき,  $t$  の値を求めよ。

[2015]

3 四面体  $OABC$  において  $OA = OB = OC = AB = AC = 1$  とする。  $\triangle OAB$  の重心を  $F$ ,  $\triangle OAC$  の重心を  $G$  とし, 辺  $OA$  の中点を  $M$  とする。また,  $\angle BOC = 2\theta$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{OF}$  を  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{BC}$  であることを示せ。
- (3)  $\triangle MBC$  の面積を  $\theta$  を用いて表せ。

[2014]

4  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。原点  $O$  を中心とする単位円周上の異なる 3 点  $A, B, C$  が条件  $(\cos\theta)\overrightarrow{OA} + (\sin\theta)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$  を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) 2 つのベクトル  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  は垂直であることを証明せよ。
- (2)  $|\overrightarrow{CA}|$ ,  $|\overrightarrow{CB}|$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (3) 三角形  $ABC$  の周の長さ  $AB+BC+CA$  を最大にする  $\theta$  を求めよ。

[2012]

5 平面上で, 線分  $AB$  を  $1:2$  に内分する点を  $O$  とし,  $O$  を中心とする半径  $OB$  の円を  $S$ , 円  $S$  と直線  $AB$  との交点のうち点  $B$  と異なる方を  $C$  とする。点  $P$  は円  $S$  の内部にあり, 線分  $BC$  上にないものとする。円  $S$  と直線  $PB$  との交点のうち点  $B$  と異なる方を  $Q$  とする。  $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ ,  $\angle APB = \theta$  とおくとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{PO}$ ,  $\overrightarrow{PC}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表せ。
- (2) 点  $P$  が円  $S$  の内部にあることを用いて,  $\cos\theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$  を証明せよ。
- (3)  $PQ$  の長さを  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $\theta$  で表せ。
- (4)  $PA = 3$ ,  $PB = 2$  とする。  $\triangle QAB = 3\triangle POB$  を満たすとき,  $\triangle PAB$  の面積を求めよ。

[2011]



6 四面体  $OABC$  において  $\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$ ,  $OA = OB = 2$ ,  $OC = 1$  とする。3 点  $A, B, C$  を通る平面上の点  $P$  を考え、 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$  とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とするとき、 $\vec{p}$  は実数  $s, t$  を用いて  $\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$  と表される。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積  $\vec{p} \cdot \vec{a}$ ,  $\vec{p} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{p} \cdot \vec{c}$  を  $s, t$  を用いて表せ。
- (2) 点  $P$  が  $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$  を満たすとき、 $s, t$  の値を求めよ。
- (3) (2)の条件を満たす点  $P$  について、直線  $AP$  と直線  $BC$  の交点を  $Q$ , 直線  $BP$  と直線  $AC$  の交点を  $R$  とする。 $BQ : QC$  および  $AR : RC$  を求めよ。
- (4) (2)の条件を満たす点  $P$  について、3 つの四面体  $OABP, OBCP, OCAP$  の体積の比を求めよ。 [2009]

7 座標空間の 2 点  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, -1, 0)$ , および  $\vec{u} = (-1, 2, 5)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{w} = (-1, 3, 1)$  と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{AP}$  と  $\vec{u}$  が平行かつ  $\overrightarrow{BP}$  と  $\vec{v}$  が平行となるような点  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 上で求めた点  $P$  に対し、 $\overrightarrow{CP}$  と  $\vec{w}$  が直交するような点  $C(0, 0, c)$  を求めよ。
- (3) 上で求めた点  $P$  と  $C$  に対し、 $P$  は 3 点  $A, B, C$  の定める平面上にあることを示せ。 [2007]

8  $OA = OB$  を満たす二等辺三角形  $OAB$  において、頂点  $A, B$  からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を  $G$ , 辺  $AB$  の中点を  $H$  とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\angle AOB = \theta$  とおく。

- (1)  $\overrightarrow{OG} = s\vec{a} + t\vec{b}$  を満たす  $s, t$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (2) 点  $G$  が三角形  $OAB$  の外部または周上にあるときの  $\theta$  の値の範囲を求めよ。
- (3)  $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$  のとき、 $\frac{|\overrightarrow{GH}|}{|\overrightarrow{OH}|}$  の値の範囲を求めよ。 [1999]

9 空間に 4 点  $P_1\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ ,  $P_2\left(0, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ ,  $P_3\left(1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ,  $P_4\left(-1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$  を定め、線分  $P_1P_2$  の中点を  $Q$  とする。

- (1) 内積  $\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{QP_3}$  と  $\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{QP_4}$  を求めよ。
- (2)  $\overrightarrow{QP_3}$  と  $\overrightarrow{QP_4}$  のなす角を  $\theta$  とするとき、 $\sin \theta$  の値を求めよ。
- (3) 四面体  $P_1P_2P_3P_4$  の体積を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列 |||||

1  $a > 0$ ,  $r > 0$  とし、数列  $\{a_n\}$  を初項  $a$ , 公比  $r$  の等比数列とする。また、数列  $\{b_n\}$  は次のように定義される。

$$b_1 = a_1, b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1)  $b_n$  を  $a, r$  および  $n$  を用いて表せ。
- (2) 一般項が  $c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$  である数列  $\{c_n\}$  は等差数列であることを証明せよ。
- (3) (2) で与えられた数列  $\{c_n\}$  の初項から第  $n$  項までの平均を  $M_n$  とする。すなわち、 $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$  とする。このとき、一般項が  $d_n = 2^{M_n}$  である数列  $\{d_n\}$  は等比数列であることを証明せよ。 [2019]

2  $x$  座標,  $y$  座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点  $O(0, 0)$  および  $A(50, 14)$  を考える。次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$  を満たす格子点  $P$  を 1 つ求めよ。
- (2)  $m$  を自然数とする。  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$  を満たす格子点  $P$  のうち、長さ  $OP$  が  $m$  番目に小さい点を  $P_m$  とする。  $P_1$  および  $P_2$  を求めよ。
- (3)  $P_m$  を (2) で定めた格子点とする。自然数  $k$  に対し、ベクトル  $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$  および  $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}}$  を成分表示せよ。
- (4)  $P_m$  を (2) で定めた格子点とする。  $Q$  を  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}}$  を満たす点とする。四角形  $OQP_{16}P_{14}$  の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。 [2017]

**3** 数列  $x_n = 2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を考える。この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,  $\dots$  であるが、各項の下 1 桁をみると、1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6,  $\dots$  となっており、2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

- (1) 数列  $\{x_n\}$  の各項の下 2 桁は、あるところから循環する。循環が始まるところと、循環の周期を求めよ。ここで、1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすとする。たとえば、2 の下 2 桁は 02 とする。
- (2) 4 の倍数で、25 で割って 1 余る 2 桁の自然数  $A$  を求めよ。
- (3) 8 の倍数で、125 で割って 1 余る 3 桁の自然数  $B$  を求めよ。
- (4) 数列  $\{x_n\}$  の各項の下 3 桁は、あるところから循環する。循環が始まるところと、循環の周期を求めよ。ここで、 $2^m$  を 125 で割って 1 余るような最小の自然数  $m$  が 100 であることを用いてもよい。 [2016]

**4**  $\alpha > 1$  とする。数列  $\{a_n\}$  を、 $a_1 = \alpha$ 、 $a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

- (1)  $a_n > 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )
- (2)  $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1)$  (ただし、 $x \geq 0$  とする。)
- (3)  $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) [2014]

**5** 座標平面上の点で、 $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点という。 $n$  を 3 以上の自然数とし、連立不等式  $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $x + y \leq n$  の表す領域を  $D$  とする。格子点  $A(a, b)$  に対して、領域  $D$  内の格子点  $B(c, d)$  が  $|a - c| + |b - d| = 1$  を満たすとき、点  $B$  を点  $A$  の隣接点という。次の問いに答えよ。

- (1) 領域  $D$  内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。
- (2) 領域  $D$  から格子点を 1 つ選ぶとき、隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような  $n$  の範囲を求めよ。ただし、格子点の選ばれる方は同様に確からしいものとする。
- (3) 領域  $D$  から異なる格子点を 2 つ選ぶとき、互いに隣接点である確率を求めよ。ただし、異なる格子点の選ばれる方は同様に確からしいものとする。 [2013]

〔6〕  $a$  を実数とし、 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$  とおく。数列  $\{x_n\}$  を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数  $n$  について  $x_n = a$  となるとき、 $a$  を求めよ。
- (2)  $a < 1$  のとき、 $x_n < 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを証明せよ。
- (3)  $0 < a < 1$  のとき、 $x_n < x_{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを証明せよ。

[2012]

〔7〕 4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を  $A$  とする。すなわち、

$$A = \{4k + 1 \mid k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $x$  および  $y$  が  $A$  に属するならば、その積  $xy$  も  $A$  に属することを証明せよ。
- (2) 0 以上の偶数  $m$  に対して、 $3^m$  は  $A$  に属することを証明せよ。
- (3)  $m, n$  を 0 以上の整数とする。 $m + n$  が偶数ならば  $3^m 7^n$  は  $A$  に属し、 $m + n$  が奇数ならば  $3^m 7^n$  は  $A$  に属さないことを証明せよ。
- (4)  $m, n$  を 0 以上の整数とする。 $3^{2m+1} 7^{2n+1}$  の正の約数のうち  $A$  に属する数全体の和を  $m$  と  $n$  を用いて表せ。

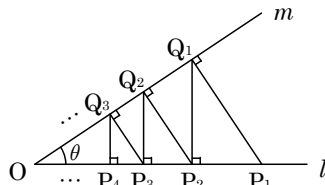
[2010]

〔8〕 平面上のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  は、その大きさがともに  $\sqrt{2}$  であり、なす角が  $120^\circ$  である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  を求めよ。
- (2)  $k, l$  を整数とすると、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は偶数であることを示せ。
- (3) (2) で、 $k$  または  $l$  が奇数のとき、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は 4 の倍数ではないことを示せ。
- (4)  $m, n$  が整数であり、 $m = n = 0$  ではないならば、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$  は整数ではないことを示せ。

[2008]

9 右図のように、点  $O$  から出る 2 本の半直線  $l, m$  があり、 $l$  と  $m$  のなす角を  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。 $l$  上に  $OP_1 = 1$  となるように点  $P_1$  を定め、 $P_1$  から  $m$  に垂線  $P_1Q_1$  を下ろし、 $Q_1$  から  $l$  に垂線  $Q_1P_2$  を下ろし、 $P_2$  から  $m$  に垂線  $P_2Q_2$  を下ろし、 $Q_2$  から  $l$  に垂線  $Q_2P_3$  を下ろす。同様にくりかえして、点  $P_n, Q_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) を定め、三角形  $P_nQ_nP_{n+1}$  の面積を  $S_n$  とする。次の問いに答えよ。



- (1)  $\frac{P_2Q_2}{P_1Q_1}$  を求めよ。
- (2)  $\frac{S_2}{S_1}$  を求めよ。
- (3)  $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$  を求め、 $\sin 2\theta$  と  $\cos 2\theta$  を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた  $S$  を  $\theta$  の関数と考えて、 $S$  の最大値を求めよ。ただし、その最大値を与える  $\theta$  の値は求めなくてよい。 [2008]

- 10 条件  $a_1 = -30$ 、 $9a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定義される数列  $\{a_n\}$  がある。
- (1)  $b_n = 3^n a_n$  とおくと、数列  $\{b_n\}$  の漸化式を求めよ。
  - (2) 一般項  $a_n$  を求めよ。
  - (3)  $a_n$  を最大にする  $n$  の値を求めよ。 [2002]

**11** 1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと, 1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある。100 のカードをまず 1 番の箱に入れ, 次に 99, 98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ, さらに, 97, 96, 95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる。以下, この操作を続けて,  $k$  番目の箱に  $k$  枚のカードを数の大きい方から順に入れていく。ただし, 1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする。したがって, 1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある。1 のカードが入っている箱の番号を  $N$  とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $N$  の値を求めよ。また,  $N$  番の箱には何枚のカードが入っているか。
- (2)  $k$  番 ( $1 \leq k \leq N$ ) の箱において, その箱の中のカードに書かれている最大の数を  $k$  の式で表せ。
- (3)  $k$  番 ( $1 \leq k \leq N$ ) の箱の中のカードに書かれている数の合計を  $S_k$  とする。 $1 \leq k \leq N-1$  のとき,  $S_k$  を  $k$  の式で表せ。また,  $1 \leq k \leq N$  のとき,  $S_k$  の最大値を求めよ。

[2000]

**12**  $n$  が自然数のとき, 次の不等式を証明せよ。ただし,  $a > 0$  とする。

- (1)  $(a+1)^n \geq a^n + na^{n-1}$
- (2)  $(n+1)^n \geq 2n^n$
- (3)  $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$

[1999]

■ 確率 |||||

1 箱の中に 1 から  $N$  までの数が 1 つずつ書かれた  $N$  枚のカードが入っている。ただし、 $N$  を 2 以上の自然数とする。「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し、そのカードに書かれた数を読み取り、そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す。1 回目、2 回目、3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を、それぞれ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  とする。また、座標平面上に 4 点  $P_1(a_1, 0), P_2(a_1, a_2), P_3(a_1 - a_3, a_2), P_4(a_1 - a_3, a_2 - a_4)$  を定める。次の問いに答えよ。

- (1)  $P_4$  が原点  $O(0, 0)$  に一致する確率を  $N$  を用いて表せ。
- (2)  $P_4$  が連立不等式  $x \geq 0, y \leq 0$  の表す領域にある確率を  $N$  を用いて表せ。
- (3)  $P_4$  が直線  $y = x$  上にある確率を  $N$  を用いて表せ。
- (4)  $N = 2^m$  とする。ただし、 $m$  を自然数とする。 $P_4$  が原点  $O$  に一致し、かつ、四角形  $P_1P_2P_3P_4$  の面積が  $2^m$  となる確率を  $m$  を用いて表せ。 [2019]

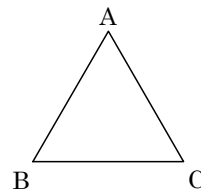
2 0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し、書かれた数字を見て元に戻す。この操作を  $N$  回繰り返し、カードに書かれた数字を順に  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  とする。ここで、 $N$  は 3 以上の自然数である。さらに、複素数  $\alpha = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$  を用いて、項数  $N$  の数列  $\{X_n\}$  を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, X_{n+1} = X_n \alpha^{Z_{n+1}} \quad (n=1, 2, \dots, N-1)$$

により定める。 $n=1, 2, \dots, N$  に対し、 $X_n = \alpha$  となる確率を  $P_n$  とし、 $X_n = \alpha^2$  となる確率を  $Q_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $P_1$  を求めよ。
- (2)  $n=1, 2, \dots, N-1$  とする。 $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$  となる確率を求めよ。
- (3)  $n=1, 2, \dots, N$  とする。 $X_n = 1$  となる確率を、 $P_n$  と  $Q_n$  を用いて表せ。
- (4)  $n=1, 2, \dots, N-1$  に対し、 $P_n$  を用いて  $P_{n+1}$  を表せ。
- (5)  $n=1, 2, \dots, N$  に対し、 $P_n$  を求めよ。 [2018]

3 表が出る確率が  $p$ , 裏が出る確率が  $1-p$  であるようなコインがある。ただし,  $0 < p < 1$  である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点  $A, B, C$  を次の規則で移動する動点  $R$  を考える。



コインを投げて表が出れば  $R$  は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば  $R$  は時計まわりに隣の頂点に移動する。

$R$  は最初  $A$  にあり, 全部で  $(2N+3)$  回移動する。ここで,  $N$  は自然数である。移動回数がちょうど  $k$  に達したときに  $R$  が  $A$  に初めて戻る確率を  $P_k$  ( $k=2, 3, \dots, 2N+3$ ) とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $P_2, P_3$  を求めよ。
- (2)  $P_{2m}, P_{2m+1}$  ( $2 \leq m \leq N+1$ ) を求めよ。
- (3)  $p = \frac{1}{2}$  とする。移動回数がちょうど  $2N+3$  に達したときに  $R$  が  $A$  に 2 度目に戻る確率  $Q$  を求めよ。 [2017]

4  $xy$  平面上に原点を出発点として動く点  $Q$  があり, 次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ, 表が出たら  $Q$  は  $x$  軸の正の方向に 1, 裏が出たら  $y$  軸の正の方向に 1 動く。ただし, 点  $(3, 1)$  に到達したら  $Q$  は原点に戻る。

この試行を  $n$  回繰り返した後の  $Q$  の座標を  $(x_n, y_n)$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $(x_4, y_4) = (0, 0)$  となる確率を求めよ。
- (2)  $(x_8, y_8) = (5, 3)$  となる確率を求めよ。
- (3)  $x_8 + y_8 \leq 4$  となる確率を求めよ。
- (4)  $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$  となる確率を  $n$  と  $k$  で表せ。ここで  $k$  は  $n$  以下の自然数とする。

[2016]



5  $m, n$  を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)  $m \geq 2, n \geq 2$  とする。異なる  $m$  種類の文字から重複を許して  $n$  個を選び、1 列に並べる。このとき、ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)  $n \geq 3$  とする。3 種類の文字  $a, b, c$  から重複を許して  $n$  個を選び、1 列に並べる。

このとき  $a, b, c$  すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)  $n \geq 3$  とする。 $n$  人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率  $p_n$  を求めよ。ただし、どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば、 $n=3$  のとき、 $A, B, C$  の 3 人をグループ分けする方法は、

$\{(A, B, C)\}, \{(A, B), (C)\}, \{(A, C), (B)\},$

$\{(B, C), (A)\}, \{(A), (B), (C)\}$

の 5 通りであるので、 $p_3 = \frac{3}{5}$  である。

(4) (3) の確率  $p_n$  が  $\frac{1}{3}$  以下となるような  $n$  の値の範囲を求めよ。 [2015]

6 1 辺の長さが 1 の正六角形において、頂点を反時計回りに  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  とする。1 個のさいころを 2 回投げて、出た目を順に  $j, k$  とする。 $P_1, P_j, P_k$  が異なる 3 点となるとき、この 3 点を頂点とする三角形の面積を  $S$  とする。 $P_1, P_j, P_k$  が異なる 3 点とならないときは、 $S=0$  と定める。次の問いに答えよ。

(1)  $S > 0$  となる確率を求めよ。

(2)  $S$  が最大となる確率を求めよ。

(3)  $S$  の期待値を求めよ。 [2014]

**7**  $n$  は自然数とし、点  $P$  は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則：

(A)  $P$  は、はじめに点  $(1, 2)$  にある。

(B) さいころを投げて 2 以下の目が出れば  $P$  は原点を中心に反時計回りに  $120^\circ$  回転し、3 以上の目が出れば時計回りに  $60^\circ$  回転する。

(C) (B) を  $n$  回繰り返す。

ただし、さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $n = 3$  のとき、出た目が 4, 1, 2 であったとする。このとき  $P$  が最後に移った点の座標を求めよ。
- (2)  $n = 3$  のとき、 $P$  が点  $(1, 2)$  にある確率を求めよ。
- (3)  $n = 6$  のとき、 $P$  が点  $(-1, -2)$  にある確率を求めよ。
- (4)  $n = 3m$  のとき、 $P$  が点  $(1, 2)$  にある確率を求めよ。ただし、 $m$  は自然数とする。

[2012]

**8**  $\triangle ABC$  の頂点は反時計回りに  $A, B, C$  の順に並んでいるとする。点  $A$  を出発した石が、次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り、裏がでたときは動かない。なお、コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}$  とする。

コインを  $n$  回投げたとき、石が点  $A, B, C$  にある確率をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n$  とする。

次の問いに答えよ。

- (1)  $a_1, b_1, c_1$  の値を求めよ。
- (2)  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  を  $a_n, b_n, c_n$  で表せ。また、 $a_2, b_2, c_2$  および  $a_3, b_3, c_3$  の値を求めよ。
- (3)  $a_n, b_n, c_n$  のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。
- (4) (3) において一致する値を  $p_n$  とする。  $p_n$  を  $n$  で表せ。

[2011]

9  $n$  は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から  $n$  までの数字が 1 つずつ書かれた  $n$  個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し、それに書かれている数を自分の得点としたのち、取り出した玉を袋に戻す。この試行を A, B, C の 3 人が順に行い、3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば、A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり、3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である。勝者が  $k$  人 ( $k=1, 2, 3$ ) である確率を  $P_n(k)$  とおくととき、次の問いに答えよ。

- (1) 勝者が 3 人である確率  $P_n(3)$  を  $n$  を用いて表せ。
- (2)  $n=3$  の場合に勝者が 2 人である確率  $P_3(2)$  を求めよ。
- (3) 勝者が 1 人である確率  $P_n(1)$  を  $n$  を用いて表せ。
- (4)  $P_n(1) \geq 0.9$  となる最小の  $n$  を求めよ。 [2010]

10 2 人のプレーヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は  $p$  であり、B が勝つ確率は  $1-p$  であるとする(ただし  $0 < p < 1$ )。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき、ゲームを終了する。ちょうど  $n$  回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を  $P_n$  とする。ただし  $n$  は自然数とする。

- (1)  $P_4$  を求めよ。
- (2)  $P_{2n-1}$  を求めよ。
- (3)  $P_{2n}$  を求めよ。
- (4)  $2n$  回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率  $S_n$  を求めよ。
- (5)  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  とする。  $p$  と  $S$  の大小関係を調べよ。 [2009]

**11** 2点 A, B と、その上を動く 1 個の石がある。この石は、時刻  $t=0$  では点 A にあり、その後、次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各  $t=0, 1, 2, \dots$  に対して、

(a) 時刻  $t$  に石が点 A にあれば、時刻  $t+1$  に石が点 A にある確率は  $c$ 、点 B にある確率は  $1-c$  である。

(b) 時刻  $t$  に石が点 B にあれば、時刻  $t+1$  に石が点 B にある確率は  $2c$ 、点 A にある確率は  $1-2c$  である。

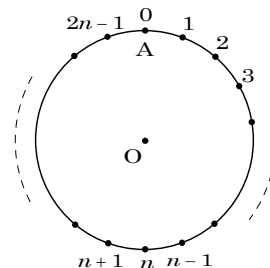
ただし、 $c$  は  $0 < c < \frac{1}{2}$  を満たす定数とする。

いま、 $n$  を自然数とし、時刻  $t=n$  において石が点 A にある確率を  $p_n$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $p_1, p_2$  を求めよ。
- (2)  $p_{n+1}$  を  $p_n$  と  $c$  を用いて表せ。
- (3)  $p_n$  を求めよ。
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  を求めよ。

[2008]

**12**  $n$  を 2 以上の整数とする。中心を  $O$  とする円の周を  $2n$  等分して、図のように 0 から  $2n-1$  までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方、袋の中に 1 から  $2n-1$  までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して、玉に書かれた数と同じ目盛りをもつ 2 点をとる。2 点のうち目盛りの大きい方を B、目盛りの小さい方を C とし、 $\triangle ABC$  を考える。次の問いに答えよ。

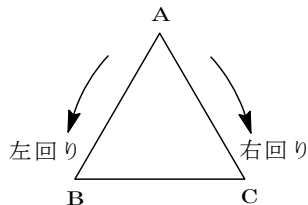


- (1) 辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。
- (2)  $\triangle ABC$  の辺上に点 O がある確率を求めよ。
- (3)  $\triangle ABC$  の内部に点 O がある確率は  $\frac{n-2}{2(2n-1)}$  であることを示せ。
- (4)  $\triangle ABC$  の辺上に点 O があるとき  $X=1$ 、 $\triangle ABC$  の内部に点 O があるとき  $X=2$ 、それ以外するとき  $X=0$  とする。X の期待値を求めよ。

[2007]

**13** 2枚のコインを同時に投げて、三角形 ABC の1つの頂点にある駒を、

- 2枚とも表が出たとき左回りで隣の頂点に移し、
- 2枚とも裏が出たとき右回りで隣の頂点に移し、
- 表と裏が出たとき動かさない

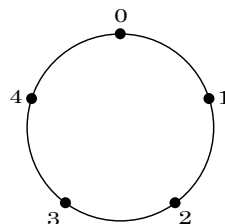


という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。この試行を  $n$  回繰り返したとき、1回目の試行後の駒の位置を  $X_1$ 、2回目の試行後の駒の位置を  $X_2$ 、 $\dots$ 、 $n$ 回目の試行後の駒の位置を  $X_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) この試行を2回繰り返したとき、 $X_2$ がAである確率  $P_2$  を求めよ。
- (2) この試行を4回繰り返したとき、最後の  $X_4$ のみがAである確率  $Q_4$  を求めよ。
- (3) この試行を  $n$ 回 ( $n \geq 2$ ) 繰り返したとき、最後の  $X_n$ のみがAである確率  $Q_n$  を求めよ。
- (4) この試行を  $n$ 回 ( $n \geq 2$ ) 繰り返したとき、 $X_n$ がAである確率  $P_n$  を求めよ。

[2005]

**14** 円周を5等分して図のように0から4の目盛りをふる。初めに点Pを目盛り0の位置に置く。硬貨を1回投げると、表が出れば、点Pを右回りに2目盛り動かし、裏が出れば、点Pを左回りに1目盛り動かすという操作をくり返し行う。硬貨を  $n$  回投げた後、点Pが目盛り  $i$  の位置にある確率を  $p_n(i)$  と表す。



- (1)  $p_2(1)$ ,  $p_3(2)$ ,  $p_3(3)$  を求めよ。
- (2) 硬貨を4回投げて、点Pが初めて目盛り2の位置で止まる確率を求めよ。
- (3)  $p_{n+1}(0) = \frac{1}{2} \{ p_n(3) + p_n(1) \}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ。
- (4)  $z$  を  $z^5 = 1$  を満たす複素数とする。すべての自然数  $n$  に対して、

$$\sum_{i=0}^4 p_n(i) z^i = \frac{(z^2 + z^{-1})^n}{2^n} \text{ が成り立つことを示せ。}$$

[2004]

**15**  $xy$  平面上を移動する点  $P$  を考える。はじめに、点  $P$  は原点にあるとする。4 枚のカードに上, 下, 左, 右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて, それらを袋に入れておく。

1 枚のカードを取り出し, カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点  $P$  を移動させて, 取り出したカードを袋に戻す, という試行をくり返す。上, 下, 左, 右と書かれたカードは, それぞれ同じ確からしきで取り出されるものとする。

- (1) 上, 上, 下, 左, 右, 右, 右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか。
- (2) この試行を 7 回くり返したときに, 点  $P$  が座標  $(2, 1)$  にある確率を求めよ。
- (3) この試行を 5 回くり返したときに, 点  $P$  が  $x$  軸上にある確率を求めよ。
- (4) この試行を 2 回くり返したときの点  $P$  の座標を  $(X, Y)$  とする。  $|X - Y|$  の期待値を求めよ。 [2002]

**16**  $A, B, C$  の 3 人が優勝決定戦を行う。まず 3 人のうち 2 人が対戦し, その勝者が残りの 1 人と対戦する。これをくり返して, 2 回続けて勝ったものを優勝者とする。 $A$  と  $B$  が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は  $\frac{1}{2}$  とし,  $C$  が  $A$  または  $B$  と対戦したときに  $C$  が勝つ確率は  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 負ける確率は  $1 - p$  であるとする。第 1 回戦は  $A$  と  $B$  の対戦として次の問いに答えよ。

- (1) 第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの  $C$  と対戦する。 $C$  が負ければ勝者は優勝者となるが,  $C$  が勝てば  $C$  は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う。第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると,  $ACC$  と  $BCC$  の 2 通りの順列が得られる。第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。
- (2) 第  $m$  回戦で優勝者が決まる確率を  $F_m$  とする。 $F_2, F_3, F_4$  をそれぞれ求めよ。
- (3) 2 以上の自然数  $n$  に対して, 確率  $F_{3n}$  を求めよ。
- (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$  を計算せよ。 [2001]

**17** 1 つのさいころを  $n$  回投げる試行において, 出た目がすべて奇数で, かつ 1 の目がちょうど  $k$  回 ( $0 \leq k \leq n$ ) 出る確率を  $p_k$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $n = 3$  のとき,  $p_1$  を求めよ。
- (2)  $p_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) を  $n$  と  $k$  の式で表せ。また, 出た目がすべて奇数で, かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率  $q$  を求めよ。
- (3)  $n = 3m + 2$  ( $m$  は自然数) とする。 $0 \leq k \leq n - 1$  のとき,  $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1$  となる  $k$  の範囲を求めよ。さらに,  $0 \leq k \leq n$  のとき,  $p_k$  が最大となる  $k$  を求めよ。 [2000]

■ 論証 |||||

1 次の問いに答えよ。

- (1)  $\log_2 3 = \frac{m}{n}$  を満たす自然数  $m, n$  は存在しないことを証明せよ。
- (2)  $p, q$  を異なる自然数とすると、 $p \log_2 3$  と  $q \log_2 3$  の小数部分は等しくないことを証明せよ。
- (3)  $\log_2 3$  の値の小数第 1 位を求めよ。 [2011]

2 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え、真の場合は証明を、偽の場合は反例を与えよ。

- (1) 微分可能な関数  $f(x)$  が  $f'(a) = 0$  を満たすならば、 $f(x)$  は  $x = a$  において極値をとる。
- (2)  $n$  が 2 以上の自然数ならば、 $1 + 2 + \dots + n$  の約数の中に 3 以上の奇数がある。 [2009]

3  $f(x) = \frac{8x + 21}{3x + 8}$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$  であることを示せ。
- (2)  $x \geq 0$  ならば  $f(x) \geq 2$  であることを示せ。
- (3)  $x \geq 2, y \geq 2$  ならば、 $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{100}$  となることを示せ。
- (4)  $x \geq 2$  ならば、 $|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$  となることを示し、これを用いて、 $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$  を満たす有理数  $r$  を 1 つ求めよ。 [2007]

■ 複素数 |||||

1  $i$  を虚数単位とし、複素数  $z$  に対して、 $w = z^2 + 2z + 1 - 2i$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $w$  の実部が 0 となる複素数  $z$  全体を複素数平面上に図示せよ。
- (2)  $w = 0$  を満たす複素数  $z$  の個数は 2 個であることを証明し、それぞれを  $a + bi$  ( $a, b$  は実数) の形に書き表せ。
- (3) (2) で求めた 2 つの複素数のうち実部の大きい方を  $\alpha$ 、実部の小さい方を  $\beta$  とし、対応する複素数平面上の点をそれぞれ A, B とする。また、線分 AB の中点を M とする。複素数  $z$  に対応する複素数平面上の点が、線分 AM 上 (両端を含む) を動くとき、複素数  $w$  の描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (4) 複素数  $z$  に対応する複素数平面上の点が、点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき、複素数  $w$  の描く図形を複素数平面上に図示せよ。 [2019]

2 複素数平面上の 4 点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$ ,  $D(\delta)$  を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし、四角形 ABCD は、すべての内角が  $180^\circ$  より小さい四角形 (凸四角形) であるとする。また、四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に、4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P を表す複素数を求めよ。
- (2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は、四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。
- (3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば、四角形 PQRS は正方形であることを示せ。 [2018]



**3** 複素数平面上を、点  $P$  が次のように移動する。

1. 時刻 0 では、 $P$  は原点にいる。時刻 1 まで、 $P$  は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の  $P$  の位置を  $Q_1(z_1)$  とすると、 $z_1 = 1$  である。
2. 時刻 1 に  $P$  は  $Q_1(z_1)$  において進行方向を  $\frac{\pi}{4}$  回転し、時刻 2 までその方向に速さ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  で移動する。移動後の  $P$  の位置を  $Q_2(z_2)$  とすると、 $z_2 = \frac{3+i}{2}$  である。
3. 以下同様に、時刻  $n$  に  $P$  は  $Q_n(z_n)$  において進行方向を  $\frac{\pi}{4}$  回転し、時刻  $n+1$  までその方向に速さ  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$  で移動する。移動後の  $P$  の位置を  $Q_{n+1}(z_{n+1})$  とする。ただし  $n$  は自然数である。

$\alpha = \frac{1+i}{2}$  として、次の問いに答えよ。

- (1)  $z_3, z_4$  を求めよ。
- (2)  $z_n$  を  $\alpha, n$  を用いて表せ。
- (3)  $P$  が  $Q_1(z_1), Q_2(z_2), \dots$  と移動するとき、 $P$  はある点  $Q(w)$  に限りなく近づく。 $w$  を求めよ。
- (4)  $z_n$  の実部が(3)で求めた  $w$  の実部より大きくなるようなすべての  $n$  を求めよ。

[2016]

**4** 正の実数  $a, b, c$  を係数とする 3 次方程式

$$(*) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が、純虚数の解をもつとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $ab - c$  の値を求めよ。
- (2) 複素数平面上で方程式  $x^3 + 8 = 0$  の 3 個の解が表す点を頂点とする三角形を考える。方程式(\*)の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき  $a, b, c$  の値を求めよ。

[2005]

**5** 複素数平面上で不等式  $2|z-2| \leq |z-5| \leq |z+1|$  を満たす点  $z$  が描く図形を  $D$  とする。

- (1)  $D$  を図示せよ。
- (2) 点  $z$  が  $D$  上を動くものとする。  $\arg z = \theta$  とするとき、 $\tan \theta$  の値のとりうる範囲を求めよ。
- (3)  $D$  の面積を求めよ。

[2004]

6  $\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  を満たす定数とし、複素数平面において  $0 \leq \arg z \leq \pi - \theta$  を満たすすべての点  $z (z \neq 0)$  と点  $0$  からなる集合を  $D$  とする。

(1) 複素数平面上に  $D$  を図示せよ。

(2)  $a$  を  $a > 0$  を満たす実数とする。このとき、 $D$  に属する点  $z$  に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。  $|z| \sin \theta \leq |z + a|$

また、等号が成り立つときの  $z$  を  $a, \theta$  を用いて表せ。 [2003]

7  $l$  を複素数平面上の直線  $z = t(1+i)$  ( $t$  は実数)、 $\alpha, \beta$  を複素数とする。ただし、点  $\alpha$  は  $l$  上にはないとする。

(1)  $\alpha = i\beta$  または  $\alpha = \bar{\beta}$  ならば、 $l$  上のすべての点  $z$  に対して  $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$  であることを示せ。

(2)  $l$  上のすべての点  $z$  に対して  $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$  ならば、 $\alpha = i\beta$  または  $\alpha = \bar{\beta}$  であることを示せ。

(3)  $l$  上に異なる 2 定点  $z_1, z_2$  があって、 $\frac{\bar{z}_1 - \beta}{z_1 - \alpha}$  と  $\frac{\bar{z}_2 - \beta}{z_2 - \alpha}$  が同じ複素数になるとする。この複素数を  $\gamma$  とおくと、 $l$  上のすべての点  $z$  に対し  $\frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} = \gamma$  となることを示せ。また  $\gamma$  の値を求めよ。 [2002]

8  $z$  は  $0^\circ < \arg z < 90^\circ$  を満たす複素数とし、複素数平面上の 3 点  $O(0), A(1), B(z)$  を頂点とする  $\triangle OAB$  を考える。また、 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  とおく。

(1)  $\alpha^2 - \alpha + 1$  の値を求めよ。

(2) 点  $P(w)$  を、直線  $OB$  に関して点  $A$  と反対側に、 $\triangle POB$  が正三角形になるようにとる。複素数  $w$  を  $z$  と  $\alpha$  を用いて表せ。

(3) 点  $Q(z + \alpha - \alpha z)$  に対し、 $\triangle ABQ$  は正三角形であることを示せ。

(4)  $\arg\left(\frac{z + \alpha - \alpha z}{w - 1}\right)$  を求めよ。ただし、偏角の範囲は、 $0^\circ$  以上  $360^\circ$  未満とする。

[2001]

9 複素数平面上に、3 点  $A(-2i)$ ,  $B(1-i)$ ,  $C(-1+3i)$  と、点  $D(1+i)$  を中心とする半径 1 の円  $K$  がある。点  $P(z)$  は  $K$  の周上にあり、点  $Q(w)$  は、三角形  $APQ$  と三角形  $ABC$  が同じ向きに相似になる点とする(すなわち、 $AP : AQ = AB : AC$  で、 $AP$  から  $AQ$  に反時計まわりに測った角が、 $AB$  から  $AC$  に反時計まわりに測った角に等しい)。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $w$  を  $z$  の式で表せ。
- (2) 点  $P$  が円  $K$  の周上を動くとき、点  $Q$  の軌跡を求めよ。 [2000]

■ 曲線 |||||

1  $0 < b < a$  を満たす定数  $a, b$  に対し、2 つの楕円  $A : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $B : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  を考える。また  $\alpha, \beta$  は、 $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  を満たす  $0$  と  $\frac{\pi}{2}$  の間の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  を示せ。
- (2) 2 つの楕円  $A, B$  の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。
- (3) 楕円  $A$  で囲まれる図形と楕円  $B$  で囲まれる図形の共通部分のうち、 $x \geq 0, y \geq 0$  の範囲にある部分の面積  $S$  を  $a, b, \beta$  を用いて表せ。 [2007]

2  $C$  を曲線  $a^2x^2 + y^2 = 1$ ,  $l$  を直線  $y = ax + 2a$  とする。ただし、 $a$  は正の定数である。

- (1)  $C$  と  $l$  とが異なる 2 点で交わるための  $a$  の範囲を求めよ。
- (2)  $C$  上の点  $(x_0, y_0)$  における接線の方程式を求めよ。
- (3) (1)における交点を  $P, Q$  とし、点  $P$  における  $C$  の接線と点  $Q$  における  $C$  の接線との交点を  $R(X, Y)$  とする。 $a$  が(1)の範囲を動くとき、 $X, Y$  の関係式と  $Y$  の範囲を求めよ。 [2002]



**3**  $a, b, p$  は  $a > 0, b > 0, p < 0$  を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線  $C_1: y = e^x, C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  を考える。ただし、 $e$  は自然対数の底である。 $C_1$  と  $C_2$  が点  $(p, e^p)$  を共有し、その点における  $C_1$  の接線と  $C_2$  の接線が一致するとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $p$  を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $\lim_{a \rightarrow \infty} (p+a)$  を求めよ。
- (3)  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a}$  を求めよ。

[2015]

**4**  $a_1 = 2, a_2 = 1$  と  $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定義される数列  $\{a_n\}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $b_n = a_{n+1} + a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とするとき、数列  $\{b_n\}$  は公比 2 の等比数列であることを示せ。
- (2)  $n \geq 2$  のとき、 $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} b_k$  を  $n$  の式で表せ。
- (3)  $a_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (4) 数列  $\left\{ \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\}$  の収束、発散を調べ、収束する場合はその極限値を求めよ。 [2006]

**5** 数列  $\{a_n\}$  は、関係式

$$a_1 = 2, (a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n), a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定まっている。

- (1)  $a_2, a_3, a_4$  を計算せよ。
- (2) 一般項  $a_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$  を求めよ。

[2001]

**6** 自然数  $n$  に対して、関数  $f_n(x) = p_n e^{nx} + q_n e^{-nx}$  が  $f_n(0) = 1, f_n'(1) = -n$  を満たすとする。

- (1)  $p_n$  と  $q_n$  を求め、 $f_n'(x) < 0$  を示せ。
- (2) 方程式  $f_n(x) = 0$  の解  $z_n$  を求めよ。
- (3) 数列  $\{z_n\}$  に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  を求めよ。

[1998]

■ 微分法 |||||

1  $a > 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(t) = t^3 - 2at + 1$  の区間  $t \geq 0$  における最小値を、 $a$  を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた最小値が  $0$  となるときの  $a$  の値を  $A$  とおく。 $A^3$  を求めよ。
- (3) 座標平面上の曲線  $y = x^4$  を  $C_1$ 、点  $(0, a)$  を中心とする半径  $a$  の円を  $C_2$  とする。  
 $C_1$  と  $C_2$  の共有点の個数を調べよ。
- (4) 座標平面において、点  $P$  が曲線  $y = x^4$  上を動くときの点  $P$  と点  $(0, a)$  の距離の最小値を考える。その最小値が  $a$  に等しくなるような  $a$  の値の範囲を求めよ。

[2017]

2 2 つの関数  $f(x) = x \sin x$ 、 $g(x) = \sqrt{3}x \cos x$  について、次の問いに答えよ。ただし、(3) と (4) において、 $a$  および  $h(x)$  は (2) で定めたものとする。

- (1) 2 曲線  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$  の共有点のうち、 $x$  座標が  $-\pi \leq x \leq \pi$  であるものをすべて求めよ。
- (2) (1) で求めた共有点のうち、 $x$  座標が正である点を  $A(a, f(a))$  とする。点  $A$  における曲線  $y = g(x)$  の接線を  $y = h(x)$  と表す。 $h(x)$  を求めよ。
- (3)  $0 \leq x \leq a$  のとき、 $h(x) \geq g(x)$  であることを示せ。
- (4)  $0 \leq x \leq a$  の範囲において、 $y$  軸、曲線  $y = g(x)$ 、および直線  $y = h(x)$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2014]

3 平面上の 3 点  $O, A, B$  は  $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 1$  かつ  $\angle AOB = \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) を満たすとする。線分  $AB$  の中点を  $M$  とする。 $t > 1$  として、点  $C$  を  $\overline{OC} = -t\overline{OM}$  となるように定める。 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $S$  を  $t$  と  $\theta$  を用いて表せ。
- (2)  $|\overline{OC}| = 1$  のとき、 $S$  を  $t$  のみを用いて表せ。
- (3)  $|\overline{OC}| = 1$  のとき、 $S$  が最大となる  $t$  の値を求めよ。

[2013]

4 関数  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  の値を求めよ。
- (2) 関数  $y = f(x)$  の増減、グラフの凹凸および変曲点を調べ、グラフの概形をかけ。
- (3)  $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  とおく。正の実数  $t$  に対して、曲線  $y = f(x)$ 、3 直線  $x = t$ ,  $x = 0$  および  $y = \alpha$  で囲まれた図形の面積  $S(t)$  を求めよ。
- (4)  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$  の値を求めよ。 [2012]

5  $p, a$  を実数の定数とする。多項式  $P(x) = x^3 - (2p+a)x^2 + (2ap+1)x - a$  を  $x-3$  で割った余りが  $10-6p$  であり、3 次方程式  $P(x) = 0$  の実数解は  $a$  のみとする。

次の問いに答えよ。

- (1) 実数の範囲で  $P(x)$  を因数分解せよ。
- (2)  $a$  の値を求めよ。
- (3) 関数  $y = P(x)$  が極値をもたないときの  $p$  の値を求めよ。 [2010]

6 関数  $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の増減と極値を調べて、 $y = f(x)$  のグラフをかけ。
- (2)  $y = f(x)$  のグラフと直線  $y = mx$  の交点が、3 個になるような  $m$  の値の範囲を求めよ。
- (3)  $m < 0$  のとき、 $y = f(x)$  のグラフと直線  $y = mx$  で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。 [2006]

7 次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$  の増減を調べて極値を求めよ。
- (2) 公式  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$  を用いて、 $k = \cos \frac{2\pi}{9}$  は方程式  $f(x) = 0$  の解であることを示せ。
- (3)  $k > \frac{3}{4}$  であることを示せ。
- (4) 方程式  $\cos x = x$  の解を  $\alpha$  とするとき、 $\frac{2\pi}{9} < \alpha < \frac{\pi}{4}$  を示せ。ここで、 $3.14 < \pi < 3.15$  を利用してもよい。 [2005]

**8**  $C_1$ を曲線  $y = e^x$ ,  $C_2$ を曲線  $y = x \log x$  ( $x > 0$ )とする。ただし,  $\log$  は自然対数を表す。また,  $x = e$  で定義される直線を  $l_1$ ,  $l_1$ と  $C_2$ との交点  $P$  を通り  $x$  軸に平行な直線を  $l_2$ ,  $l_2$ と  $C_1$ との交点  $Q$  を通り  $y$  軸に平行な直線を  $l_3$  とする。

- (1) 2点  $P, Q$  の座標を求めよ。
- (2)  $x \geq 1$  のとき,  $e^x > x \log x$  であることを示せ。
- (3) 2直線  $l_1, l_3$  と 2曲線  $C_1, C_2$  によって囲まれた図形の面積を求めよ。 [2002]

**9** 関数  $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$  ( $x \neq 0$ ) について, 次の問いに答えよ。ただし,  $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $y = f(x)$  ( $x \neq 0$ ) の増減, 極値, グラフの凹凸および変曲点を調べ, 曲線  $y = f(x)$  の概形をかけ。
- (2) 右側からの極限值  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$  を求めよ。
- (3) 極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$  は存在するか。存在するならばその値を求め, 存在しないならばその理由をいえ。 [2000]

**10**  $0 < a < 1$  とする。点  $(1, 0)$  から楕円  $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$  に引いた接線の接点の  $x$  座標を  $b$  とする。

- (1)  $b$  を  $a$  で表せ。
- (2) 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$  の  $b \leq x \leq a$  の部分と直線  $x = b$  で囲まれた図形を,  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  を  $a$  で表せ。
- (3)  $V$  の値が最大となる  $a$  の値と, そのときの  $V$  の最大値を求めよ。 [1999]

**11**  $k$  を定数とする。曲線  $y = x^3 - kx$  上の点  $P(a, a^3 - ka)$  における接線  $l$  が, 曲線上の  $P$  と異なる点  $Q(b, b^3 - kb)$  を通るものとする。

- (1)  $b$  を  $a$  で表せ。
- (2)  $Q$  における曲線  $y = x^3 - kx$  の接線が  $l$  と直交するとき,  $k, a$  の満たす関係式を求めよ。
- (3) (2) で求めた関係式を満たす  $a$  が存在するような  $k$  の値の範囲を求めよ。 [1999]



■ 積分法 |||||

1 関数  $f(x)$  は実数全体で連続で、すべての実数  $x$  に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$$

を満たすとする。ただし、 $e$  は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

- (1)  $f(0)$  の値を求めよ。また、 $f'(x) = 2(x-1)\cos x$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $f(x)$  を求めよ。
- (3) 方程式  $f(x) = 0$  は、 $0 < x < \pi$  の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。
- (4) (3) のただ 1 つの解を  $\alpha$  とする。曲線  $y = f(x)$  ( $0 \leq x \leq \alpha$ )、 $x$  軸および  $y$  軸によって囲まれる部分の面積を  $S_1$  とし、曲線  $y = f(x)$  ( $\alpha \leq x \leq \pi$ )、 $x$  軸および直線  $x = \pi$  によって囲まれる部分の面積を  $S_2$  とする。 $S_1$  と  $S_2$  の大小を判定せよ。

[2019]

2 次の問いに答えよ。

(1) すべての実数  $t$  に対し、 $1+t \leq e^t$  が成り立つことを示せ。

(2) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx$  の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。  $\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq 2 - \sqrt{2}$  [2018]

3 次の問いに答えよ。

(1)  $a, b, c$  を定数とする。関数  $f(x) = a\cos^2 x + 2b\cos x \sin x + c\sin^2 x$  が定数となるための  $a, b, c$  の条件を求めよ。

(2) 関数  $g(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2}$  ( $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ) が最大値をとる  $x$  の値を  $\theta$  とする。 $\cos 2\theta, \sin 2\theta$  の値を求めよ。

(3) (2) の関数  $g(x)$  と  $\theta$  に対して、定積分  $\int_0^{\theta} g(x) dx$  を求めよ。 [2011]

4  $t > 1$  を満たす実数  $t$  に対して、 $S(t) = \int_0^1 |xe^x - tx| dx$  とおくとき、次の問いに答えよ。

(1)  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で、方程式  $xe^x = tx$  を満たす  $x$  をすべて求めよ。

(2)  $S(t)$  を求めよ。

(3)  $S(t)$  を最小にする  $t$  の値を求めよ。 [2010]

5 次の問いに答えよ。ただし、 $n$  は自然数を表す。

(1)  $0 \leq x \leq 1$  を満たす実数  $x$  に対して、不等式  $\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$  が成り立つことを示せ。ただし、対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5$

(3) 数列  $\{a_n\}$  を、 $a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right)\left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$  で定めるとき、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。 [2008]

6 実数全体で定義された関数  $f(x) = \frac{4x+a}{x^2+1}$  は、 $x = \frac{1}{2}$  で極値をもつ。ただし、 $a$  は定数である。次の問いに答えよ。

(1)  $a$  の値を求めよ。

(2) 関数  $y = f(x)$  の最大値と最小値を求めよ。

(3) 定積分  $\int_0^1 f(x) dx$  の値を求めよ。 [2005]

7  $S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) すべての  $n = 1, 2, 3, \dots$  について、 $\frac{1}{\pi(n+1)^2} \leq S_n \leq \frac{1}{\pi n^2}$  が成り立つことを示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k}$  の値を求めよ。 [2003]

8 関数  $f(x)$  が任意の実数  $x$  に対して、 $f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t) dt$  を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1)  $f(0)$  の値を求め、さらに  $f'(x) = 2x - f(x)$  が成り立つことを示せ。

(2)  $(e^x f(x))' = 2xe^x$  を示せ。

(3)  $f(x)$  を求めよ。 [2001]

9 閉区間  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  上の関数  $f(x)$  を次の式で定義する。

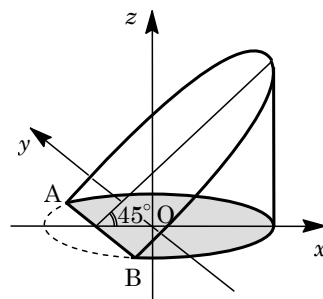
$$f(x) = \int_x^{x+1} \log\left(\left|t - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\right) dt$$

- (1)  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$   $\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$  を求めよ。
- (2)  $f(x)$  を最小にする  $x$  の値  $a$  と、そのときの最小値を求めよ。
- (3) (2) で求めた  $a$  に対して、 $\int_a^{a+1} t \log\left(\left|t - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\right) dt$  を求めよ。 [1998]

■ 積分の応用 |||||

1 座標空間内の平面  $H: z = 0$  とその上の曲線  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  を考える。  $C$  上の点を通り  $z$  軸に平行な直線の全体が作る曲面を  $K$  とする。  $C$  上の 2 点  $A\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ,  $B\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  に対し、線分  $AB$  を含み平面  $H$  と  $45^\circ$  の角をなす平面を  $T$  とする。

ただし、平面  $T$  と  $z$  軸の交点の  $z$  座標は正であるとする。平面  $H$ , 平面  $T$  および曲面  $K$  が囲む 2 つの立体のうち  $z$  軸と交わるものを  $V$  とする。次の問いに答えよ。



- (1) 立体  $V$  と平面  $H$  の共通部分 (右図で灰色で示される部分) の面積を求めよ。
- (2) 立体  $V$  を平面  $x = t$   $(-1 < t < 2)$  で切ったとき、断面の面積  $S(t)$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3) 立体  $V$  の体積を求めよ。 [2017]

2 次の問いに答えよ。

- (1)  $a$  を正の定数とする。関数  $f(x) = \frac{e^x - ae^{-x}}{2}$  の逆関数  $f^{-1}(x)$  を求めよ。
- (2) (1) で求めた  $f^{-1}(x)$  の導関数を求めよ。
- (3)  $c$  を正の定数とする。  $x$  軸,  $y$  軸, 直線  $x = c$  および曲線  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + c^2}}$  で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2016]

**3** 座標平面上の点  $P(1, 1)$  を中心とし、原点  $O$  を通る円を  $C_1$  とする。 $k$  を正の定数として、曲線  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  を  $C_2$  とする。 $C_1$  と  $C_2$  は 2 点で交わるとし、その交点を  $Q, R$  とするとき、直線  $PQ$  は  $x$  軸に平行であるとする。点  $Q$  の  $x$  座標を  $q$  とし、点  $R$  の  $x$  座標を  $r$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $k, q, r$  の値を求めよ。
- (2) 曲線  $C_2$  と線分  $OQ, OR$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。
- (3)  $x = 1 + \sqrt{2} \sin \theta$  とおくことにより、定積分  $\int_r^q \sqrt{2 - (x-1)^2} dx$  の値を求めよ。
- (4) 円  $C_1$  の原点  $O$  を含まない弧  $QR$  と曲線  $C_2$  で囲まれた図形を、 $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。 [2015]

**4** 次の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $x \geq 2$  のとき、 $x^4 e^{-3x} \leq 16e^{-6}$  を示せ。また、これを用いて  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-3x}$  を求めよ。
- (2)  $k$  を定数とする。 $x > 0$  の範囲で方程式  $x e^{-3x} = \frac{k}{x^2}$  がちょうど 2 つの解  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) をもつような  $k$  の値の範囲を求めよ。
- (3) (2) の  $\alpha, \beta$  が  $\beta = 2\alpha$  を満たすとき、曲線  $y = x e^{-3x} (x > 0)$  と曲線  $y = \frac{k}{x^2} (x > 0)$  で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2013]

**5** 曲線  $y = e^x$  上の点  $A(0, 1)$  における接線を  $l$  とし、点  $B(0, 2)$  を通り直線  $l$  に平行な直線を  $m$  とする。直線  $m$  と曲線  $y = e^x$  の 2 つの交点  $P, Q$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) とする。直線  $x = \alpha$  と直線  $l$  の交点を  $P'$ 、直線  $x = \beta$  と直線  $l$  の交点を  $Q'$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形  $PP'Q'Q$  の面積  $S$  を  $\alpha, \beta$  で表せ。
- (2) 直線  $m$  と曲線  $y = e^x$  によって囲まれる図形の面積  $T$  を  $\alpha, \beta$  の多項式で表せ。
- (3) 線分  $PQ$  の中点  $R$  は第 2 象限にあることを示せ。
- (4)  $\alpha + \beta > -1$  であることを示せ。 [2009]

〔6〕  $A$  を正の定数,  $\theta$  は  $0 \leq \theta \leq \pi$  を満たす実数とし, 2 つの曲線

$$y = A \cos x, \quad y = \sin(x - \theta) \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

によって囲まれた図形の面積を  $S$  とする。また, この 2 つの曲線の交点の  $x$  座標を  $a, b (a < b)$  とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1)  $\cos b \sin(a - \theta) = \cos a \sin(b - \theta)$  が成り立っているとき,  $\cos \theta \sin(b - a) = 0$  を示せ。
- (2)  $b - a = \pi$  を示せ。
- (3)  $S$  を  $A, a, \theta$  を用いて表せ。
- (4)  $S^2$  を  $A, \theta$  を用いて表せ。
- (5)  $S$  を最大にする  $\theta$  の値およびそのときの  $S$  の値を求めよ。 [2004]

〔7〕  $a$  を  $2 < a < 3$  を満たす定数とし,  $f(x) = \frac{1}{2} \left( e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} - \left| e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \right| \right)$

とおく。ただし,  $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $y = f(x)$  のグラフの概形をかけ。
- (2)  $y = f(x)$  のグラフの  $y \geq 0$  の部分と  $x$  軸とで囲まれる図形を直線  $x = \log 2$  のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  を求めよ。 [2003]

〔8〕  $a > 0$  とし, 極方程式  $r = 2a \sin \theta \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right)$  で表される曲線を  $C$  とする。

- (1) 曲線  $C$  は円の一部分であることを示し, その円の中心と半径を求めよ。さらに, 曲線  $C$  を図示せよ。
- (2) 曲線  $C$  と  $x$  軸および直線  $x = a$  で囲まれた図形を,  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2001]

〔9〕 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分  $\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta$  を求めよ。

(2) 媒介変数  $\theta$  を用いて,

$$x(\theta) = \int_0^\theta (1 + \tan u) du, \quad y(\theta) = \int_0^\theta (1 - \tan u) du \quad \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

で表される曲線の長さを求めよ。

[2000]

# 分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

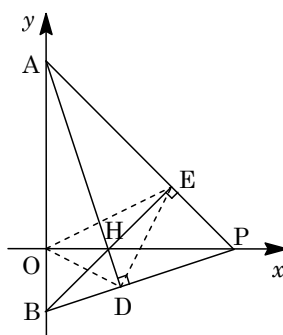
整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

**問題**

原点を  $O$  とする座標平面上において、点  $A(0, 3)$ 、 $B(0, -1)$  および  $x$  軸上の正の部分に動く点  $P(t, 0)$  があり、 $\angle APB$  は鈍角でないとする。 $\triangle ABP$  の垂心を  $H$ 、頂点  $A$  から辺  $BP$  に下ろした垂線と辺  $BP$  との交点を  $D$ 、頂点  $B$  から辺  $PA$  に下ろした垂線と辺  $PA$  との交点を  $E$  とする。次の問いに答えよ。ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを、三角形の垂心という。



- (1)  $\angle APB$  が直角となる  $t$  の値を求めよ。
- (2) 点  $H$  の座標を  $t$  を用いて表せ。  
以下では、 $t$  が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。
- (3) 点  $H$  が  $\triangle ODE$  の内心であることを証明せよ。ただし、1 組の対角の和が  $180^\circ$  である四角形は円に内接することを、証明なしに利用してもよい。
- (4)  $\triangle ODE$  の内接円の半径を  $t$  の関数  $f(t)$  として表せ。
- (5) (4)で求めた関数  $f(t)$  は最大値をもつことを示せ。ただし、最大値を与える  $t$  の値を求める必要はない。

[2019]

**解答例**

- (1)  $t > 0$  のとき、 $A(0, 3)$ 、 $B(0, -1)$ 、 $P(t, 0)$  に対し、直線  $AP$  の傾きは  $-\frac{3}{t}$ 、直線  $BP$  の傾きは  $\frac{1}{t}$  なので、 $\angle APB$  が直角の条件は、

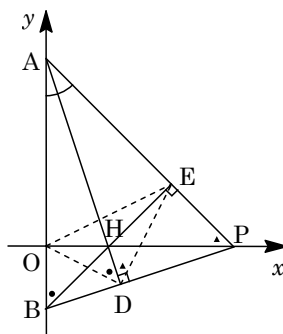
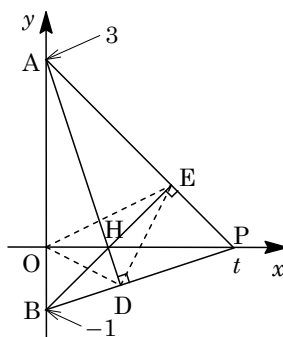
$$-\frac{3}{t} \cdot \frac{1}{t} = -1, \quad t^2 = 3$$

よって、 $t > 0$  から  $t = \sqrt{3}$  である。

- (2)  $AD \perp BP$  より、直線  $AD$  は傾き  $-t$  から、その方程式は、  
 $y = -tx + 3 \dots\dots\dots ①$

直線  $AD$  と  $OP$  の交点が  $\triangle ABP$  の垂心  $H$  なので、  
 $0 = -tx + 3$  より  $x = \frac{3}{t}$  となり、 $H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$  である。

- (3)  $t > \sqrt{3}$  のとき、 $\angle APB$  は鋭角となる。  
さて、 $\angle BOH + \angle BDH = 180^\circ$  より、四角形  $OBDH$  は円に内接するので、  
 $\angle ADO = \angle ABE \dots\dots\dots ②$



また、 $\angle PEH + \angle PDH = 180^\circ$  より、四角形 PEHD は円に内接するので、

$$\angle ADE = \angle APO \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

さらに、 $\triangle ABE$  と  $\triangle AOP$  はともに直角三角形なので、

$$\angle ABE = 90^\circ - \angle BAP = \angle APO \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

②③④より、 $\angle ADO = \angle ADE$  となり、直線 AD は  $\angle ODE$  の二等分線である。

同様にすると、直線 BE は  $\angle OED$  の二等分線である。

以上より、直線 AD と BE の交点 H は、 $\triangle ODE$  の内心になる。

(4) まず、直線 BP の方程式は、 $y = \frac{1}{t}x - 1 \dots\dots\dots \textcircled{5}$

①⑤を連立して、 $-tx + 3 = \frac{1}{t}x - 1$  より、 $\frac{t^2 + 1}{t}x = 4$  となり、

$$x = \frac{4t}{t^2 + 1}, \quad y = -\frac{4t^2}{t^2 + 1} + 3 = \frac{t^2 - 3}{t^2 + 1}$$

これより、 $D\left(\frac{4t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 3}{t^2 + 1}\right)$  となり、直線 OD の方程式は、

$$y = -\frac{t^2 - 3}{4t}x, \quad (t^2 - 3)x + 4ty = 0$$

すると、 $\triangle ODE$  の内接円の半径  $f(t)$  は、 $H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$  と直線 OD の距離になり、

$t > \sqrt{3}$  から、

$$f(t) = \frac{|(t^2 - 3) \cdot \frac{3}{t}|}{\sqrt{(t^2 - 3)^2 + 16t^2}} = \frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{(t^2 - 3)^2 + 16t^2}} = \frac{3(t^2 - 3)}{t\sqrt{t^4 + 10t^2 + 9}} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

(5) まず、 $s = t^2 - 3$  とおくと、 $t > \sqrt{3}$  より  $s > 0$  となる。

⑥より、 $f(t) = 3\sqrt{\frac{(t^2 - 3)^2}{t^2\{(t^2 - 3)^2 + 16t^2\}}}$  と変形し、 $f(t) = 3\sqrt{g(s)}$  とおくと、

$$g(s) = \frac{s^2}{(s + 3)\{s^2 + 16(s + 3)\}} = \frac{s^2}{(s + 3)(s + 4)(s + 12)}$$

すると、 $g(s)$  は  $s > 0$  で  $g(s) > 0$  である連続な関数で、しかも  $\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = 0$  かつ

$\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$  なので、 $s > 0$  において最大値をもつ。

したがって、 $t > \sqrt{3}$  において  $f(t)$  は最大値をもつ。

### コメント

三角形の垂心と内心を題材にした図形と式の問題です。(3)はいろいろな解法が考えられますが、問題文の誘導に従ったもので記述しています。なお、理系単独の(5)については、問題文の微妙な表現のため、初めに作った解答例で記述しましたが、実は、対数微分をして延々計算をし、増減表を書いたりもしたのですが……。



**問 題**

次の問いに答えよ。

- (1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u, v)$ の存在範囲を図示せよ。  
 (A) 2次式 $t^2 - ut + v$ は、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ を満たす実数 $x, y$ を用いて $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$ と因数分解される。
- (2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u, v)$ の存在範囲を図示せよ。  
 (B) 2次式 $t^2 - ut + v$ は、 $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ を満たす実数 $x, y$ を用いて $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$ と因数分解される。
- (3) 座標平面上の点 $(x, y)$ が4点 $(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき、点 $(x+y, xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。 [2018]

**解答例**

- (1) まず、 $f(t) = t^2 - ut + v = \left(x - \frac{u}{2}\right)^2 - \frac{u^2}{4} + v$ とおく。

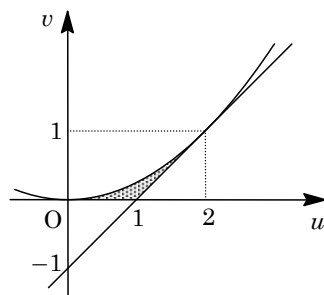
条件(A)より、 $f(t) = 0$ の2解 $t = x, y$ について、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ なので、

$$-\frac{u^2}{4} + v \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 0 \leq \frac{u}{2} \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f(0) = v \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$f(1) = 1 - u + v \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①③から $0 \leq v \leq \frac{u^2}{4}$ 、②から $0 \leq u \leq 2$ 、④から $v \geq u - 1$ となるので、点 $(u, v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。



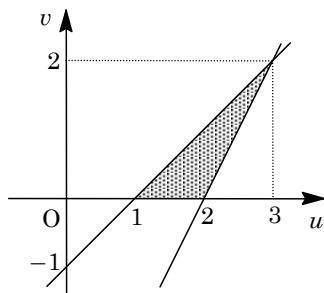
- (2) 条件(B)より、 $f(t) = 0$ の2解 $t = x, y$ について、 $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ なので、

$$f(0) = v \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$f(1) = 1 - u + v \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$f(2) = 4 - 2u + v \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑤⑥から $0 \leq v \leq u - 1$ 、⑦から $v \geq 2u - 4$ となるので、点 $(u, v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。



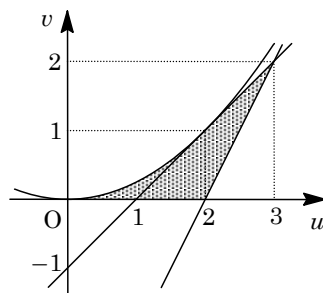
- (3) 点 $(x, y)$ が4点 $(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき、 $x, y$ の条件は $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ と表せ、これは(1), (2)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで、 $f(t) = 0$ の2解 $t = x, y$ について、解と係数の関係から、

$$x + y = u, \quad xy = v$$

これより、点  $(x + y, xy)$  の動く範囲は点  $(u, v)$  の動く範囲に対応し、(1)、(2)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして、その面積  $S$  は、

$$S = \int_0^2 \frac{1}{4}u^2 du + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{12}[u^3]_0^2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$



### コメント

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(1)と(2)の結果が(3)にストレートにつながっています。

**問題**

座標平面上で、曲線  $C: y = x^3 - 3x$  と、 $b > a^3 - 3a$  を満たすように動く点  $P(a, b)$  を考える。また、点  $P$  に対し、2つの不等式  $|x-a| \leq 1, |y-b| \leq 1$  によって表される座標平面上の領域を  $B$  とする。領域  $B$  と曲線  $C$  に対して、 $B$  と  $C$  が共有点  $Q$  をもち、さらに  $B$  と  $C$  の共有点が  $B$  の境界線上にしかないとき、 $B$  と  $C$  は点  $Q$  で接するということにする。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  の概形をかき、さらに点  $P$  の座標が  $(-2, 3)$  のときの領域  $B$  を図示せよ。
- (2)  $B$  と  $C$  が  $x < -1$  の範囲にある点で接するように、点  $P$  は動くとする。このときの点  $P$  の軌跡を求めよ。
- (3)  $B$  と  $C$  がある点で接するように点  $P$  は動くとする。このときの点  $P$  の軌跡を求めよ。
- (4) (3)の点  $P$  の軌跡は、ある関数  $y = f(x)$  のグラフで表すことができる。この  $f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能であることを示せ。 [2018]

**解答例**

- (1) 曲線  $C: y = x^3 - 3x$  に対して、

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

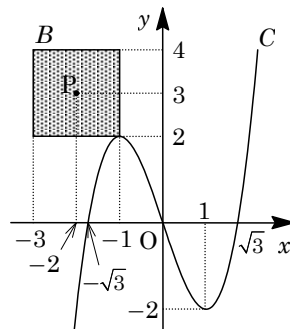
すると、 $C$  の増減は右表および  $C$  の概形は右図のようになる。

|      |     |    |     |    |     |
|------|-----|----|-----|----|-----|
| $x$  | ... | -1 | ... | 1  | ... |
| $y'$ | +   | 0  | -   | 0  | +   |
| $y$  | ↗   | 2  | ↘   | -2 | ↗   |

さらに、 $P(-2, 3)$  のとき、領域  $B$  は、

$$|x+2| \leq 1, |y-3| \leq 1$$

図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含まれる。



- (2)  $b > a^3 - 3a$  を満たす  $P(a, b)$  に対して、

$$B: |x-a| \leq 1, |y-b| \leq 1$$

さて、 $B$  と  $C$  の接点を  $Q(t, t^3 - 3t)$  とし、 $t < -1$  のとき、

$$a = t - 1, b = t^3 - 3t + 1$$

すると、 $t = a + 1 < -1$  ( $a < -2$ ) となり、

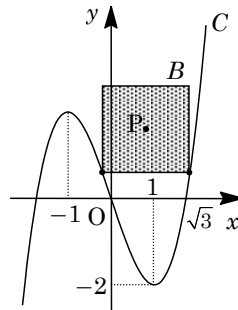
$$b = (a+1)^3 - 3(a+1) + 1 = a^3 + 3a^2 - 1$$

よって、点  $P$  の軌跡は曲線  $y = x^3 + 3x^2 - 1$  ( $x < -2$ ) である。

- (3) まず、 $B$  と  $C$  が右図の位置にあるとき、 $P(a, b)$  について、2点  $(a-1, b-1)$ 、 $(a+1, b-1)$  はともに  $C$  上にあり、

$$b-1 = (a-1)^3 - 3(a-1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b-1 = (a+1)^3 - 3(a+1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$



①②より  $6a^2 + 2 - 6 = 0$  となり,  $a > 0$  から  $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$  であり, このとき接点

$Q(t, t^3 - 3t)$  は,  $t = \frac{\sqrt{6}}{3} \pm 1$  となる。

以下,  $P(a, b)$ ,  $Q(t, t^3 - 3t)$  の位置関係をもとに場合分けをする。

(i)  $t < -1$  ( $a < -2$ ) のとき

(2)より, 点 P の軌跡は, 曲線  $y = x^3 + 3x^2 - 1$  ( $x < -2$ ) である。

(ii)  $t = -1$  ( $-2 \leq a \leq 0$ ) のとき

このとき  $b = 2 + 1 = 3$  となり, 点 P の軌跡は, 線分  $y = 3$  ( $-2 \leq x \leq 0$ ) である。

(iii)  $-1 < t \leq \frac{\sqrt{6}}{3} - 1$  ( $0 < a \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ ) のとき

このとき  $a = t + 1$ ,  $b = t^3 - 3t + 1$  となり,

$$b = (a - 1)^3 - 3(a - 1) + 1 = a^3 - 3a^2 + 3$$

よって, 点 P の軌跡は, 曲線  $y = x^3 - 3x^2 + 3$  ( $0 < x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ ) である。

(iv)  $t > \frac{\sqrt{6}}{3} + 1$  ( $a > \frac{\sqrt{6}}{3}$ ) のとき

このとき  $a = t - 1$ ,  $b = t^3 - 3t + 1$  となり,

$$b = (a + 1)^3 - 3(a + 1) + 1 = a^3 + 3a^2 - 1$$

よって, 点 P の軌跡は, 曲線  $y = x^3 + 3x^2 - 1$  ( $x > \frac{\sqrt{6}}{3}$ ) である。

(4) 点 P の軌跡の方程式を  $y = f(x)$  とすると, (3)から,

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 \quad (x < -2), \quad f(x) = 3 \quad (-2 \leq x \leq 0)$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \quad (0 < x \leq \frac{\sqrt{6}}{3}), \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 \quad (x > \frac{\sqrt{6}}{3})$$

ここで,  $f(x)$  の  $x = 0$  における微分可能性について調べると,

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{3 - 3}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^3 - 3x^2 + 3 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 - 3x) = 0$$

これより,  $f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能である。

## コメント

微分の応用と軌跡の融合問題です。3次曲線のいわば「上に乗っている」正方形の中心の軌跡を求めるものですが, 図をもとにした直感的な解答例になっています。誘導は細かいのですが作業量は多く, 時間はかなりかかります。

**問 題**

座標平面上の 2 点  $A(0, 1)$   $B(t, 0)$  を考える。ただし、 $t \geq 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分  $AB$  を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について、2 点  $A, B$  以外の頂点の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた 2 点のうち  $x$  座標が小さい方を  $C$  とする。 $t$  を動かすとき、点  $C$  の軌跡を図示せよ。
- (3)  $k$  を定数とする。点  $B$  と直線  $y = kx$  上の点  $P$  をそれぞれうまく選ぶことで 3 点  $A, B, P$  を頂点とする正三角形ができるとき、 $k$  の値の範囲を求めよ。 [2013]

**解答例**

- (1) 線分  $AB$  の中点  $M$  は  $M(\frac{t}{2}, \frac{1}{2})$  となる。

また、 $\overrightarrow{AB} = (t, -1)$  に垂直な単位ベクトル  $\vec{e}$  は、

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, t)$$

さて、線分  $AB$  を 1 辺とする正三角形のもう 1 つの頂点を

$X$  とおくと、 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+t^2}$ 、 $|\overrightarrow{MX}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}$  から、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{OM} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\vec{e} = \left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1, t) \\ &= \left(\frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

よって、 $X(\frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t)$  または  $X(\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t)$

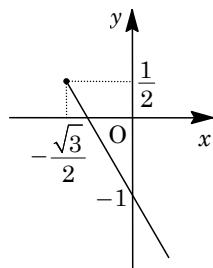
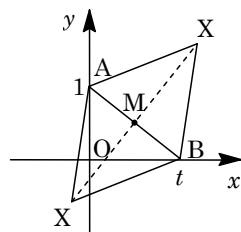
- (2) 条件より、 $C(\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t)$  となり、 $C(x, y)$  とおくと、

$$x = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots ①, \quad y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t \dots\dots\dots ②$$

①より、 $t = 2x + \sqrt{3}$  となり、②に代入すると、

$$y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(2x + \sqrt{3}) = -\sqrt{3}x - 1$$

$t \geq 0$  から  $x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  となり、点  $C$  の軌跡は右図のようになる。



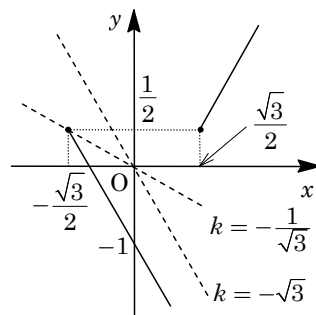
- (3) 点  $C$  以外のもう 1 つの頂点  $D(\frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t)$  についても同様にすると、

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(2x - \sqrt{3}) = \sqrt{3}x - 1 \quad (x \geq \frac{\sqrt{3}}{2})$$

よって、点 C と点 D の軌跡は右図の実線となる。

さて、直線  $y = kx$  上の点 P に対して、3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるのは、点 C, D の軌跡と直線  $y = kx$  が共有点をもつことなので、

$$k < -\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq k$$



### コメント

とらえにくい(3)の設問への誘導が、うまくつけられている問題です。なお、(1)の解答例では単位ベクトルを利用しましたが、回転を利用する方法もあります。

**問題**

座標平面上の3点  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(x, y)$  を考える。ただし  $y > 0$  とする。  
次の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle ABC$  が二等辺三角形であるとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。
- (2)  $\triangle ABC$  が鋭角三角形であるとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。
- (3) 3つの角  $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$  をそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とし、不等式  $\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$  を満たすとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。
- (4)  $x, y$  が(3)の条件を満たすとき、 $\gamma$  がとりうる値の範囲を求めよ。 [2009]

**解答例**

(1)  $\triangle ABC$  が二等辺三角形であるとき、点  $C(x, y)$  の存在範囲は、 $y > 0$  において、

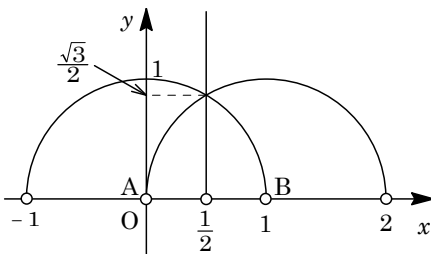
(i)  $AC = BC$  のとき 点  $C$  は線分  $AB$  の垂直二等分線  $x = \frac{1}{2}$  上にある。

(ii)  $AB = AC$  のとき

点  $C$  は点  $A$  を中心とする半径 1 の円  $x^2 + y^2 = 1$  上にある。

(iii)  $BC = BA$  のとき

点  $C$  は点  $B$  を中心とする半径 1 の円  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  上にある。



(i)(ii)(iii)より、点  $C$  は右上図の円または直線上にある。

(2)  $\triangle ABC$  が鋭角三角形である条件は、

$$\angle CAB < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots ①, \quad \angle ABC < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots ②, \quad \angle BCA < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots ③$$

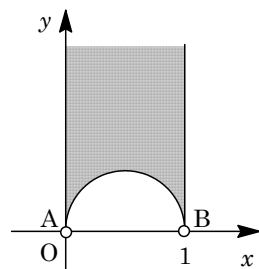
$y > 0$  において、①②③がすべて成立する点  $C(x, y)$  の存在範囲を求める。

①より、点  $C$  は  $y$  軸の右側、すなわち領域  $x > 0$  にある。

②より、点  $C$  は直線  $x = 1$  の左側、すなわち領域  $x < 1$  にある。

③より、点  $C$  は  $AB$  を直径とする円の外部、すなわち領域  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4}$  にある。

①②③より、点  $C$  は右図の網点部に存在する。ただし、境界は領域に含まない。



(3) まず、 $\alpha = \angle CAB < \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \angle ABC < \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma = \angle BCA < \frac{\pi}{2}$  より、点 C は(2)の領域内に存在する。

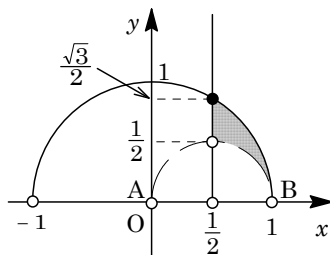
ここで、条件から、 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  なので、三角形の角と辺の大小関係を用いると、

$$BC \leq AC \leq AB$$

すると、 $BC \leq AC$  から、(1)の結果を利用すると、点 C は領域  $x \geq \frac{1}{2}$  にある。

また、 $AC \leq AB$  から、(1)の結果を利用すると、点 C は領域  $x^2 + y^2 \leq 1$  にある。

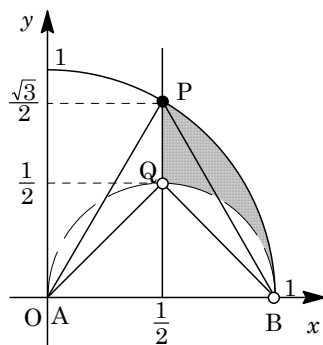
以上より、点 C は右図の網点部に存在する。ただし、破線の境界は領域に含まない。



(4) まず、点  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  とおくと、 $\triangle ABP$  は正三角形となるので、 $\angle APB = \frac{\pi}{3}$  である。

また、 $AB$  を直径とする円周上に点  $Q$  をとると、 $\angle AQB = \frac{\pi}{2}$  である。

すると、点 C が右図の網点部に存在するとき、線分  $AB$  を弦とする円弧を考え、 $\gamma = \angle BCA$  のとりうる値を求めると、右図より、 $\frac{\pi}{3} \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$  である。



### コメント

巧みな誘導がついている平面図形と領域の総合問題です。式だけで攻めるのではなく、図形的に解くと、スッキリした解になります。



**問題**

次の問いに答えよ。

(1) 点(3, 3)における円  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  の接線の方程式を求めよ。

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} y, \log_2(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) \leq \log_2 5$$

(3)  $a$  を正の数とする。点  $(x, y)$  が(2)で求めた領域を動くとき、 $ax + y$  の最大値が4になるように  $a$  の値を定めよ。 [2004]

**解答例**

(1)  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  より、 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

点(3, 3)における接線の方程式は、

$$(3 - 2)(x - 2) + (3 - 1)(y - 1) = 5, \quad x + 2y = 9$$

(2)  $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} y \cdots \cdots \textcircled{1}, \log_2(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) \leq \log_2 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$

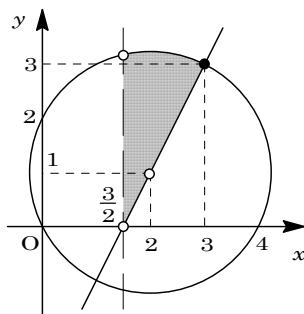
①より、 $x > \frac{3}{2}$  かつ  $y > 0$  として、 $2x - 3 \leq y$

②より、 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 > 0$  として、 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 \leq 5$  から、

$$(x, y) \neq (2, 1), \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 5$$

以上をまとめて、連立不等式の表す領域を図示すると、右図の網点部のようになる。

なお、実線の境界線と黒丸の点は含み、破線の境界線と白丸の点は含まない。



(3)  $ax + y = k$  とおくと、 $y = -ax + k$  となり、(1)から、点(3, 3)における接線の傾きが  $-\frac{1}{2}$  より、

(i)  $-a \leq -\frac{1}{2}$  ( $a \geq \frac{1}{2}$ ) のとき

$k$  は点(3, 3)で最大となり、最大値は  $k = 3a + 3$

条件より  $3a + 3 = 4$  とすると、 $a = \frac{1}{3}$  となるが、 $a \geq \frac{1}{2}$  を満たさない。

(ii)  $-a > -\frac{1}{2}$  ( $0 < a < \frac{1}{2}$ ) のとき

直線  $ax + y - k = 0$  と円  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$  が接する場合に  $k$  は最大となり、

$$\frac{|2a + 1 - k|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{5}, \quad |2a + 1 - k| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$$

条件より、このとき  $k = 4$  なので、 $|2a - 3| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + 1}$

$$(2a - 3)^2 = 5(a^2 + 1), \quad a^2 + 12a - 4 = 0$$

$$0 < a < \frac{1}{2} \text{ より, } a = -6 + 2\sqrt{10}$$

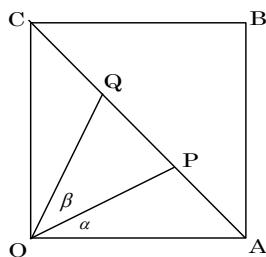
$$(i)(ii) \text{ より, } a = -6 + 2\sqrt{10}$$

### コメント

対数不等式を用いて条件づけられた最大・最小問題です。解き終えても、あまり疲労を感じません。

**問題**

正方形  $OABC$  の対角線  $AC$  を 3 等分し、図のように、 $A$  に近い点を  $P$ 、 $C$  に近い点を  $Q$  とする。また、 $\angle AOP = \alpha$ 、 $\angle POQ = \beta$  とする。次の問いに答えよ。



- (1)  $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$  の値を求めよ。
- (2)  $\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$  を示せ。
- (3) 線分  $PQ$  上に点  $R$  を  $\angle POR = \alpha$  となるようにとる。このとき、比  $AR : RC$  を求めよ。 [2006]

**解答例**

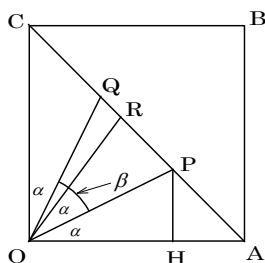
- (1) まず、一般性を失うことなく、 $OA = OC = 1$  とすることができる。

ここで、 $P$  から  $OA$  に下ろした垂線の足を  $H$  とすると、 $OH : HA = CP : PA = 2 : 1$  から、

$$OP = \sqrt{OH^2 + PH^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

これより、 $\cos \alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

$$\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$



- (2) まず、 $4 > \sqrt{15}$  より  $\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $5\sqrt{3} > 8$  より  $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5}$  となるので、

$$\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha > \cos \frac{\pi}{6} > \cos \beta$$

$f(x) = \cos x$  は  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  で単調減少するので、 $\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$  となる。

- (3) (1)から  $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$  なので、 $\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

さて、 $\angle ORA = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = \frac{3}{4}\pi - 2\alpha$  から、 $\triangle OAR$  に正弦定理を適用すると、

$$\frac{AR}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)}, \quad AR = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \frac{3}{4}\pi \cos 2\alpha - \cos \frac{3}{4}\pi \sin 2\alpha}$$

よって、 $AR = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{8}{7\sqrt{2}} = \frac{4}{7}\sqrt{2}$

これより、 $RC = \sqrt{2} - \frac{4}{7}\sqrt{2} = \frac{3}{7}\sqrt{2}$  となり、 $AR : RC = 4 : 3$  である。

**コメント**

誘導がないため、かえって発想が制約されず、魅力的な問題になっています。

**問題**

座標空間に4点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(s, s, s)$ ,  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(0, 0, 1)$  がある。ただし,  $s > 0$  とする。 $t, u, v$  を実数とし,  $\vec{d} = \vec{OB} - t\vec{OA}$ ,  $\vec{e} = \vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$  のとき,  $t$  を  $s$  を用いて表せ。
- (2)  $\vec{OA} \perp \vec{d}$ ,  $\vec{OA} \perp \vec{e}$ ,  $\vec{d} \perp \vec{e}$  のとき,  $u, v$  を  $s$  を用いて表せ。
- (3) (2) のとき, 2点  $D, E$  を,  $\vec{OD} = \vec{d}$ ,  $\vec{OE} = \vec{e}$  となる点とする。四面体  $OADE$  の体積が 2 であるとき,  $s$  の値を求めよ。 [2016]

**解答例**

(1)  $s > 0$  で,  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(s, s, s)$ ,  $B(-1, 1, 1)$ ,  $C(0, 0, 1)$  に対して,

$$|\vec{OA}| = \sqrt{s^2 + s^2 + s^2} = \sqrt{3}s, \quad |\vec{OB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \quad |\vec{OC}| = 1$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -s + s + s = s, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OC} = s, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 1$$

さて,  $\vec{OA} \perp \vec{d}$  より,  $\vec{OA} \cdot \vec{d} = \vec{OA} \cdot (\vec{OB} - t\vec{OA}) = 0$  となり,

$$s - 3s^2t = 0, \quad t = \frac{1}{3s} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(2) まず,  $\vec{OA} \perp \vec{e}$  より,  $\vec{OA} \cdot \vec{e} = \vec{OA} \cdot (\vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}) = 0$  となり,

$$s - 3s^2u - sv = 0, \quad 1 - 3su - v = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

また,  $\vec{d} \perp \vec{e}$  より,  $\vec{d} \cdot \vec{e} = (\vec{OB} - t\vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}) = 0$  となり,

$$1 - su - 3v - st + 3s^2tu + stv = 0 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{3} \text{より}, \quad 1 - su - 3v - \frac{1}{3} + su + \frac{1}{3}v = 0, \quad \frac{2}{3} - \frac{8}{3}v = 0, \quad v = \frac{1}{4} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{4} \text{より}, \quad \frac{3}{4} - 3su = 0, \quad u = \frac{1}{4s} \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

(3)  $\textcircled{1}$ より,  $\vec{OD} = \vec{d} = (-1, 1, 1) - \frac{1}{3s}(s, s, s) = \frac{2}{3}(-2, 1, 1)$

$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{より}, \quad \vec{OE} = \vec{e} = (0, 0, 1) - \frac{1}{4s}(s, s, s) - \frac{1}{4}(-1, 1, 1) = \frac{1}{2}(0, -1, 1)$$

ここで,  $\vec{OD} \perp \vec{OE}$  より  $\triangle ODE$  は直角三角形となり, また  $\vec{OA} \perp \vec{OD}$ ,  $\vec{OA} \perp \vec{OE}$  より  $OA$  は  $\triangle ODE$  に垂直である。これより, 四面体  $OADE$  の体積  $V$  は,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OD \cdot OE \cdot OA = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{4+1+1} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{3}s = \frac{s}{3}$$

よって, 条件から  $V = 2$  なので,  $\frac{s}{3} = 2$  すなわち  $s = 6$  である。

**コメント**

空間ベクトルの基本的な問題です。成分表示して計算していくと, スムーズに結論まで導けます。

**問題**

座標空間内に 5 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 0, \frac{3}{4})$ ,  $B(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ ,  $C(s, t, 0)$ ,  $D(0, u, 0)$  がある。ただし,  $s, t, u$  は実数で,  $s > 0$ ,  $t > 0$ ,  $s + t = 1$  を満たすとする。3 点  $A, B, C$  の定める平面が  $y$  軸と点  $D$  で交わっているとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $AB$  と  $x$  軸との交点の  $x$  座標を求めよ。
  - (2)  $u$  を  $t$  を用いて表せ。また,  $0 < u < 1$  であることを示せ。
  - (3) 点  $(0, 1, 0)$  を  $E$  とする。点  $D$  が線分  $OE$  を  $12:1$  に内分するとき,  $t$  の値を求めよ。
- [2015]

**解答例**

- (1) 点  $A(0, 0, \frac{3}{4})$ ,  $B(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$  に対して, 直線  $AB$  と  $x$  軸との交点を  $P(v, 0, 0)$  とおくと,  $k$  を実数として,  $\overline{AP} = k\overline{AB}$  となり,

$$(v, 0, -\frac{3}{4}) = k(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4})$$

すると,  $-\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}k$  より  $k = 3$  となり,  $v = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  である。

- (2) 3 点  $A, B, C$  の定める平面と, 3 点  $A, P, C$  の定める平面は一致し, この平面と  $y$  軸との交点  $D$  は,  $l$  を実数として,  $\overline{PD} = l\overline{PC}$  と表せる。

そこで, (1) から  $P(\frac{3}{2}, 0, 0)$ , また  $s = 1 - t > 0$  として  $C(1 - t, t, 0)$  となるので,

$$(-\frac{3}{2}, u, 0) = l(-\frac{1}{2} - t, t, 0)$$

すると,  $-\frac{3}{2} = l(-\frac{1}{2} - t)$  より  $l = \frac{3}{2t + 1}$  となり,  $u = \frac{3t}{2t + 1} \dots\dots(*)$

そこで,  $(*)$  より  $u = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{2t + 1})$  となり,  $0 < t < 1$  のとき,

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2t + 1} < 1, \quad 0 < 1 - \frac{1}{2t + 1} < \frac{2}{3}$$

これより,  $0 < u < 1$  である。

- (3) 点  $E(0, 1, 0)$  に対し, 点  $D$  が線分  $OE$  を  $12:1$  に内分するとき  $u = \frac{12}{13}$  であり,

$$\frac{3t}{2t + 1} = \frac{12}{13}, \quad 39t = 24t + 12$$

よって,  $t = \frac{4}{5}$  となる。

**コメント**

空間座標についての計算問題です。ただ, それだけです。

**問題**

四面体  $OABC$  において  $OA = OB = OC = AB = AC = 1$  とする。 $\triangle OAB$  の重心を  $F$ ,  $\triangle OAC$  の重心を  $G$  とし, 辺  $OA$  の中点を  $M$  とする。また,  $\angle BOC = 2\theta$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{OF}$  を  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{BC}$  であることを示せ。
- (3)  $\triangle MBC$  の面積を  $\theta$  を用いて表せ。

[2014]

**解答例**

(1)  $F$  は  $\triangle OAB$  の重心より,  $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

(2)  $G$  は  $\triangle OAC$  の重心より,  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

よって,  $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{BC}$  である。

- (3)  $OA = OB = OC = AB = AC = 1$  より,  $\triangle OAB$ ,  $\triangle OAC$  は正三角形であり,

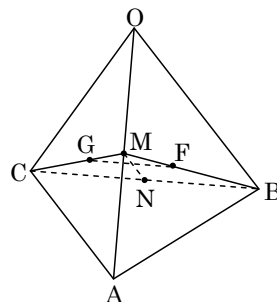
$$MB = MC = 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると,  $\triangle MBC$  は二等辺三角形となり, 辺  $BC$  の中点を  $N$  とおくと,  $MN \perp BC$  である。さらに,  $ON \perp BC$ ,  $\angle BOC = 2\theta$  から,  $\angle BON = \theta$  となり,

$$BC = 2BN = 2 \cdot 1 \cdot \sin \theta = 2 \sin \theta, \quad MN = \sqrt{MB^2 - NB^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2 \theta}$$

よって,  $\triangle MBC$  の面積  $S$  は,

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \sin \theta \sqrt{3 - 4 \sin^2 \theta}$$



**コメント**

空間ベクトルの基本の確認です。(3)は二等辺三角形に着目すると, 利用するのは三平方の定理だけです。

**問題**

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。原点  $O$  を中心とする単位円周上の異なる 3 点  $A, B, C$  が条件  $(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$  を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) 2つのベクトル  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  は垂直であることを証明せよ。
- (2)  $|\overrightarrow{CA}|, |\overrightarrow{CB}|$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (3) 三角形  $ABC$  の周の長さ  $AB + BC + CA$  を最大にする  $\theta$  を求めよ。 [2012]

**解答例**

(1)  $(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$  より、 $\overrightarrow{OC} = -(\cos \theta)\overrightarrow{OA} - (\sin \theta)\overrightarrow{OB}$  となり、  
 $|\overrightarrow{OC}|^2 = \cos^2 \theta |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\cos \theta \sin \theta \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \sin^2 \theta |\overrightarrow{OB}|^2$   
 ここで、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$  から、 $\cos \theta \sin \theta \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$   
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より  $\cos \theta \sin \theta > 0$  なので、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  から  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  は垂直である。

(2) まず、 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (\cos \theta + 1)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB}$  から、  
 $|\overrightarrow{CA}|^2 = (\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta = 2 + 2\cos \theta, |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2 + 2\cos \theta}$   
 また、 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta + 1)\overrightarrow{OB}$  から、  
 $|\overrightarrow{CB}|^2 = \cos^2 \theta + (\sin \theta + 1)^2 = 2 + 2\sin \theta, |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{2 + 2\sin \theta}$

(3)  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  より、 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$  となり、  
 $AB + BC + CA = \sqrt{2} + \sqrt{2 + 2\sin \theta} + \sqrt{2 + 2\cos \theta}$   
 $f(\theta) = \sqrt{1 + \sin \theta} + \sqrt{1 + \cos \theta}$  とおくと、 $AB + BC + CA = \sqrt{2}\{1 + f(\theta)\}$   
 $f'(\theta) = \frac{\cos \theta}{2\sqrt{1 + \sin \theta}} - \frac{\sin \theta}{2\sqrt{1 + \cos \theta}} = \frac{\cos \theta \sqrt{1 + \cos \theta} - \sin \theta \sqrt{1 + \sin \theta}}{2\sqrt{1 + \sin \theta} \sqrt{1 + \cos \theta}}$   
 $= \frac{\cos^2 \theta (1 + \cos \theta) - \sin^2 \theta (1 + \sin \theta)}{2\sqrt{1 + \sin \theta} \sqrt{1 + \cos \theta} \{ \cos \theta \sqrt{1 + \cos \theta} + \sin \theta \sqrt{1 + \sin \theta} \}}$

さらに、 $g(\theta) = \cos^2 \theta (1 + \cos \theta) - \sin^2 \theta (1 + \sin \theta)$  とおくと、

$$g(\theta) = \cos^3 \theta + \cos^2 \theta - \sin^3 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= (\cos \theta - \sin \theta)(1 + \cos \theta \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta)$$

すると、 $g(\theta)$  と  $f'(\theta)$  の符号は一致するので、  
 $f(\theta)$  の増減は右表のようになる。

|              |   |     |                 |     |                 |
|--------------|---|-----|-----------------|-----|-----------------|
| $\theta$     | 0 | ... | $\frac{\pi}{4}$ | ... | $\frac{\pi}{2}$ |
| $f'(\theta)$ |   | +   | 0               | -   |                 |
| $f(\theta)$  |   | ↗   |                 | ↘   |                 |

したがって、 $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき  $f(\theta)$  は最大となる。

すなわち、 $AB + BC + CA$  は、 $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき最大

である。

## コメント

(3)の計算は、半角の公式を利用した方が簡単だろうと思いつつ、そのまま微分して増減を調べました。



**問題**

平面上で、線分 AB を 1:2 に内分する点を O とし、O を中心とする半径 OB の円を S、円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり、線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ 、 $\angle APB = \theta$  とおくと、次の問いに答えよ。

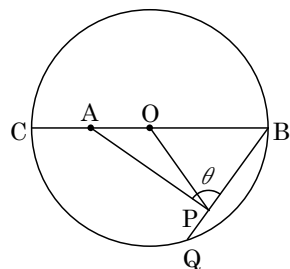
- (1)  $\overrightarrow{PO}$ 、 $\overrightarrow{PC}$ 、 $\overrightarrow{OB}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  で表せ。
- (2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて、 $\cos \theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$  を証明せよ。
- (3) PQ の長さを  $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 、 $\theta$  で表せ。
- (4)  $PA = 3$ 、 $PB = 2$  とする。 $\triangle QAB = 3 \triangle POB$  を満たすとき、 $\triangle PAB$  の面積を求めよ。 [2011]

**解答例**

- (1) 線分 AB を 1:2 に内分する点が O、1:4 に外分する点が C より、 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$  とおくと、

$$\overrightarrow{PO} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}, \quad \overrightarrow{PC} = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}$$

また、 $\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{-2\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$



- (2) 点 P は円 S の内部にあるので、 $\angle BPC > 90^\circ$  となり、

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{b} \cdot \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3} < 0, \quad 4\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{b}|^2$$

よって、 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} < \frac{|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$

- (3)  $\overrightarrow{QP} = k\vec{b}$  ( $k > 0$ ) とおくと、 $\overrightarrow{QB} = (1+k)\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{QC} = k\vec{b} + \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3} = \frac{4\vec{a} + (3k-1)\vec{b}}{3}$

点 Q は円 S 上の点より、 $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} = (1+k)\vec{b} \cdot \frac{4\vec{a} + (3k-1)\vec{b}}{3} = 0$  となり、

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} + (3k-1)|\vec{b}|^2 = 0, \quad 4|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta + (3k-1)|\vec{b}|^2 = 0$$

よって、 $3k|\vec{b}| = |\vec{b}| - 4|\vec{a}| \cos \theta$  から、 $PQ = k|\vec{b}| = \frac{|\vec{b}| - 4|\vec{a}| \cos \theta}{3}$  となる。

- (4)  $PA = 3$ 、 $PB = 2$  から、(2)の結果を用いると、 $PQ = \frac{2-12\cos \theta}{3}$  となり、

$$BQ = 2 + \frac{2-12\cos \theta}{3} = \frac{8-12\cos \theta}{3} = \frac{8-12\cos \theta}{3} \cdot \frac{BP}{2} = \frac{4-6\cos \theta}{3} BP$$

また、 $BA = \frac{3}{2}BO$  から、 $\triangle QAB = \frac{4-6\cos \theta}{3} \cdot \frac{3}{2} \triangle POB = (2-3\cos \theta) \triangle POB$

条件より,  $\triangle QAB = 3 \triangle POB$  なので,  $2 - 3\cos\theta = 3$  となり,

$$\cos\theta = -\frac{1}{3}, \quad \sin\theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

以上より,  $\triangle PAB = \frac{1}{2} PA \cdot PB \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$

### コメント

平面ベクトルの標準題です。計算量も適切なものです。

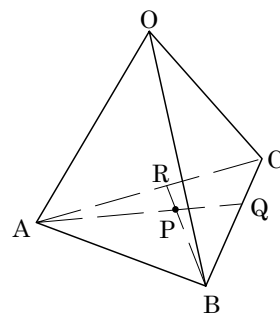
**問 題**

四面体 OABC において  $\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle BOC = \frac{\pi}{3}$ ,  $OA = OB = 2$ ,  $OC = 1$  とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え、 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$  とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とするとき、 $\vec{p}$  は実数  $s, t$  を用いて  $\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$  と表される。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積  $\vec{p} \cdot \vec{a}$ ,  $\vec{p} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{p} \cdot \vec{c}$  を  $s, t$  を用いて表せ。
- (2) 点 P が  $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$  を満たすとき、 $s, t$  の値を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P について、直線 AP と直線 BC の交点を Q, 直線 BP と直線 AC の交点を R とする。BQ : QC および AR : RC を求めよ。
- (4) (2) の条件を満たす点 P について、3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ。 [2009]

**解答例**

- (1) 条件より、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{c}| = 1$  であり、  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1$   
 すると、 $\vec{p} \cdot \vec{a} = ((1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{a} = 4(1-s-t)$   
 $\vec{p} \cdot \vec{b} = ((1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{b} = 4s + t$   
 $\vec{p} \cdot \vec{c} = ((1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} = s + t$



- (2) 条件より、 $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$  から、  
 $\cos \angle AOP = \cos \angle BOP = \cos \angle COP$   
 $\frac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{|\vec{p}| |\vec{a}|} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{b}}{|\vec{p}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{c}}{|\vec{p}| |\vec{c}|}$   
 (1) の結果を用いると、 $\frac{4(1-s-t)}{2} = \frac{4s+t}{2} = s+t$  から、  
 $4(1-s-t) = 4s+t \dots\dots\dots \textcircled{1}$ ,  $4s+t = 2(s+t) \dots\dots\dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  より、 $s = \frac{2}{9}$ ,  $t = \frac{4}{9}$

- (3)  $\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$  より、 $\vec{p} - \vec{a} = s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$  となり、(2) から、  
 $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots \textcircled{3}$

さて、 $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$  とおくと、 $\textcircled{3}$  から、 $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{9}k\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}k\overrightarrow{AC}$

Q は直線 BC 上にあるので、 $\frac{2}{9}k + \frac{4}{9}k = 1$  から  $k = \frac{3}{2}$  となり、

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \quad BQ : QC = 2 : 1$$

同様にして、 $\overrightarrow{AR} = (1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AP}$  とおくと、③から、 $\overrightarrow{AR} = (1-\frac{7}{9}l)\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}l\overrightarrow{AC}$

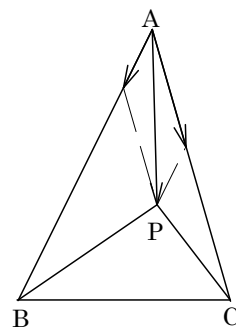
R は直線 AC 上にあるので、 $1-\frac{7}{9}l=0$  から  $l=\frac{9}{7}$  となり、

$$\overrightarrow{AR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}, \quad AR : RC = 4 : 3$$

(4)  $\triangle ABP$ ,  $\triangle BCP$ ,  $\triangle CAP$  の面積比は、③より、

$$\frac{4}{9} : (1 - \frac{4}{9} - \frac{2}{9}) : \frac{2}{9} = 4 : 3 : 2$$

これより、3つの四面体  $OABP$ ,  $OBCP$ ,  $OCAP$  の体積比は、 $4 : 3 : 2$  である。



### コメント

空間ベクトルの有名問題です。なお、③式の係数に $\triangle ABC$ との面積比が明示されていますので、(4)では、(3)の結果を利用しない方がストレートです。

**問題**

座標空間の2点  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, -1, 0)$ , および  $\vec{u} = (-1, 2, 5)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{w} = (-1, 3, 1)$  と成分表示される3つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{AP}$  と  $\vec{u}$  が平行かつ  $\overrightarrow{BP}$  と  $\vec{v}$  が平行となるような点  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 上で求めた点  $P$  に対し,  $\overrightarrow{CP}$  と  $\vec{w}$  が直交するような点  $C(0, 0, c)$  を求めよ。
- (3) 上で求めた点  $P$  と  $C$  に対し,  $P$  は3点  $A, B, C$  の定める平面上にあることを示せ。

[2007]

**解答例**

- (1)  $P(x, y, z)$  とおくと,  $\overrightarrow{AP} = (x-2, y, z)$ ,  $\overrightarrow{BP} = (x, y+1, z)$  となる。

さて,  $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{u}$  より,  $s$  を実数として,  $\overrightarrow{AP} = s\vec{u}$ ,  $(x-2, y, z) = s(-1, 2, 5)$

$$x = -s + 2, \quad y = 2s, \quad z = 5s \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また,  $\overrightarrow{BP} \parallel \vec{v}$  より,  $t$  を実数として,  $\overrightarrow{BP} = t\vec{v}$ ,  $(x, y+1, z) = t(1, 1, 1)$

$$x = t, \quad y = t - 1, \quad z = t \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } -s + 2 = t \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad 2s = t - 1 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad 5s = t \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より,  $t = \frac{5}{3}$ ,  $s = \frac{1}{3}$  となり, この値は $\textcircled{6}$ を満たす。

よって,  $\textcircled{1}$ より  $x = \frac{5}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ ,  $z = \frac{5}{3}$  となり,  $P\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$  である。

- (2)  $\overrightarrow{CP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} - c\right)$  となり,  $\overrightarrow{CP} \perp \vec{w}$  から,  $\overrightarrow{CP} \cdot \vec{w} = 0$

$$-\frac{5}{3} + 3 \times \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - c = 0, \quad c = 2$$

よって,  $C(0, 0, 2)$  となる。

- (3)  $\overrightarrow{CP} = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $\overrightarrow{CA} = (2, 0, -2)$ ,  $\overrightarrow{CB} = (0, -1, -2)$  より,

$$\overrightarrow{CP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

よって,  $P$  は3点  $A, B, C$  の定める平面上にある。

**コメント**

(3)では,  $x$ 成分,  $y$ 成分より,  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ の係数をそれぞれ定め, その後,  $z$ 成分を確認しました。連立方程式を立てるほどでもありません。

**問 題**

OA = OB を満たす二等辺三角形 OAB において、頂点 A, B からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を G, 辺 AB の中点を H とする。  
 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\angle AOB = \theta$  とおく。

- (1)  $\vec{OG} = s\vec{a} + t\vec{b}$  を満たす  $s, t$  を  $\theta$  を用いて表せ。
- (2) 点 G が三角形 OAB の外部または周上にあるときの  $\theta$  の値の範囲を求めよ。
- (3)  $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$  のとき,  $\frac{|\vec{GH}|}{|\vec{OH}|}$  の値の範囲を求めよ。 [1999]

**解答例**

(1)  $\vec{AG} = \vec{OG} - \vec{OA} = (s-1)\vec{a} + t\vec{b}$ ,  $\vec{BG} = \vec{OG} - \vec{OB} = s\vec{a} + (t-1)\vec{b}$

$\vec{AG} \cdot \vec{b} = 0$  より,  $(s-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$

$s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$

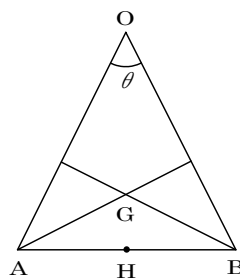
$|\vec{a}| = |\vec{b}|$  より,  $s \cos \theta + t = \cos \theta \dots\dots\dots \textcircled{1}$

$\vec{BG} \cdot \vec{a} = 0$  より,  $s|\vec{a}|^2 + (t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$  より,  $s + t \cos \theta = \cos \theta \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,  $\cos \theta \neq \pm 1$  なので,  $s = t = \frac{\cos \theta}{\cos \theta + 1}$



(2) 点 G が三角形 OAB の外部または周上にある条件は,  $s \leq 0$  または  $t \leq 0$  または  $s + t \geq 1$  である。

(1)から,  $\frac{\cos \theta}{\cos \theta + 1} \leq 0 \dots\dots\dots \textcircled{3}$ , または  $\frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + 1} \geq 1 \dots\dots\dots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$ より  $\cos \theta \leq 0$  となり,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$

$\textcircled{4}$ より  $2 \cos \theta \geq \cos \theta + 1$  となり,  $\cos \theta \geq 1$  から不成立。

以上より,  $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$

(3)  $\vec{GH} = \vec{OH} - \vec{OG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{\cos \theta}{\cos \theta + 1}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1 - \cos \theta}{2(\cos \theta + 1)}(\vec{a} + \vec{b})$  より,

$|\vec{GH}| = \left| \frac{1 - \cos \theta}{2(\cos \theta + 1)} \right| |\vec{a} + \vec{b}|$ ,  $|\vec{OH}| = \frac{1}{2} |\vec{a} + \vec{b}|$

よって,  $\frac{|\vec{GH}|}{|\vec{OH}|} = \left| \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta + 1} \right| = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = -1 + \frac{2}{1 + \cos \theta}$

ここで  $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$  より,  $-\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  なので,  $\frac{1}{2} \leq 1 + \cos \theta \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

$$7 - 4\sqrt{3} \leq -1 + \frac{2}{1 + \cos \theta} \leq 3$$

以上より,  $7 - 4\sqrt{3} \leq \frac{|\overrightarrow{GH}|}{|\overrightarrow{OH}|} \leq 3$

### コメント

(3)では(2)の結果を用いて, 点  $G$  が  $\triangle OAB$  の内部にあるときと外部または周上にあるときに場合分けをしてもよいのですが, 解が長くなるだけです。もっとも, 最初はそうしたのですが。

**問題**

空間に4点  $P_1\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ ,  $P_2\left(0, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ ,  $P_3\left(1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ,  $P_4\left(-1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$  を定め、線分  $P_1P_2$  の中点を  $Q$  とする。

- (1) 内積  $\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{QP_3}$  と  $\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{QP_4}$  を求めよ。
- (2)  $\overrightarrow{QP_3}$  と  $\overrightarrow{QP_4}$  のなす角を  $\theta$  とするとき、 $\sin \theta$  の値を求めよ。
- (3) 四面体  $P_1P_2P_3P_4$  の体積を求めよ。

[1998]

**解答例**

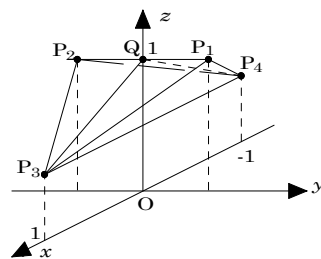
(1)  $\overrightarrow{P_2P_1} = (0, \sqrt{5}-1, 0)$ ,  $\overrightarrow{QP_3} = \left(1, 0, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$  より、 $\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{QP_3} = 0$

また、 $\overrightarrow{QP_4} = \left(-1, 0, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$  より、 $\overrightarrow{P_2P_1} \cdot \overrightarrow{QP_4} = 0$

(2)  $l = QP_3 = QP_4$  とおくと、

$$l^2 = 1 + \frac{(\sqrt{5}-3)^2}{4} = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{l} \\ &= 2 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{9-3\sqrt{5}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



(3) (1)より、 $P_1P_2$  は平面  $QP_3P_4$  に垂直である。

また(2)より、 $\triangle QP_3P_4 = \frac{1}{2} l^2 \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

四面体  $P_1P_2P_3P_4$  の体積を  $V$  とすると、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle QP_3P_4 \cdot P_1P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot (\sqrt{5}-1) = \frac{1}{3} (2\sqrt{5}-4)$$

**コメント**

一見、複雑そうですが、図形に対称性があるので、見かけほどではありません。(2)では、内積を利用して  $\cos \theta$ 、さらに  $\sin \theta$  を求める解もありますが、少々計算が複雑です。



**問 題**

$a > 0, r > 0$  とし、数列  $\{a_n\}$  を初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列とする。また、数列  $\{b_n\}$  は次のように定義される。

$$b_1 = a_1, b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1)  $b_n$  を  $a, r$  および  $n$  を用いて表せ。
  - (2) 一般項が  $c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$  である数列  $\{c_n\}$  は等差数列であることを証明せよ。
  - (3) (2) で与えられた数列  $\{c_n\}$  の初項から第  $n$  項までの平均を  $M_n$  とする。すなわち、 $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$  とする。このとき、一般項が  $d_n = 2^{M_n}$  である数列  $\{d_n\}$  は等比数列であることを証明せよ。
- [2019]

**解答例**

- (1) 数列  $\{a_n\}$  は初項  $a > 0$ 、公比  $r > 0$  の等比数列より、 $a_n = ar^{n-1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$

さて、数列  $\{b_n\}$  に対し、 $b_1 = a_1, b_{n+1} = b_n a_{n+1}$  より、 $n \geq 2$  で  $\textcircled{1}$  を用いて、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 a_2 a_3 \cdots a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdots ar^{n-1} = a^n r^{1+2+\cdots+(n-1)} \\ &= a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)} \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

なお、 $n = 1$  のとき、 $\textcircled{2}$  は  $b_1 = a^1 r^0 = a$  となり成立している。

- (2) 条件より、 $c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$  に対して、 $\textcircled{2}$  から、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n} \log_2 a^n r^{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{1}{n} \log_2 a^n + \frac{1}{n} \log_2 r^{\frac{1}{2}n(n-1)} \\ &= \log_2 a + \frac{1}{2}(n-1) \log_2 r \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

これより、 $c_{n+1} - c_n = \left( \log_2 a + \frac{1}{2}(n) \log_2 r \right) - \left( \log_2 a + \frac{1}{2}(n-1) \log_2 r \right) = \frac{1}{2} \log_2 r$

となり、数列  $\{c_n\}$  は公差  $\frac{1}{2} \log_2 r$  の等差数列である。

- (3)  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$  なので、 $\textcircled{3}$  から  $M_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{c_1 + c_n}{2} \cdot n = \frac{c_1 + c_n}{2}$  となり、

$$M_n = \frac{1}{2} \left\{ \log_2 a + \log_2 a + \frac{1}{2}(n-1) \log_2 r \right\} = \log_2 a + \frac{1}{4}(n-1) \log_2 r \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

すると、 $d_n = 2^{M_n}$  に対して、 $\textcircled{4}$  より、

$$d_n = 2^{\log_2 a + \frac{1}{4}(n-1) \log_2 r} = 2^{\log_2 a} \cdot 2^{\log_2 r^{\frac{1}{4}(n-1)}} = ar^{\frac{1}{4}(n-1)}$$

これより、 $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{ar^{\frac{1}{4}n}}{ar^{\frac{1}{4}(n-1)}} = r^{\frac{1}{4}}$  となり、数列  $\{d_n\}$  は公比  $r^{\frac{1}{4}}$  の等比数列である。

## コメント

漸化式と等差数列・等比数列の融合問題です。完答へのネックになるのは、(1)の漸化式の解法ですが、ここは「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

**問 題**

$x$  座標,  $y$  座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点  $O(0, 0)$  および  $A(50, 14)$  を考える。次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$  を満たす格子点  $P$  を 1 つ求めよ。
- (2)  $m$  を自然数とする。  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$  を満たす格子点  $P$  のうち、長さ  $OP$  が  $m$  番目に小さい点を  $P_m$  とする。  $P_1$  および  $P_2$  を求めよ。
- (3)  $P_m$  を (2) で定めた格子点とする。自然数  $k$  に対し、ベクトル  $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$  および  $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}}$  を成分表示せよ。
- (4)  $P_m$  を (2) で定めた格子点とする。  $Q$  を  $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_6}$  を満たす点とする。四角形  $OQP_6P_{14}$  の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。 [2017]

**解答例**

- (1)  $\overrightarrow{OA} = (50, 14)$  に対して、  $\overrightarrow{OP} = (x, y)$  とおくと、  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$  より、

$$50x + 14y = 6, \quad 25x + 7y = 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

すると、 $\textcircled{1}$  を満たす解の 1 つとして  $(x, y) = (-1, 4)$  から、  $P(-1, 4)$  となる。

- (2) (1) より、  $25 \cdot (-1) + 7 \cdot 4 = 3 \cdots \cdots \textcircled{2}$  となり、  $\textcircled{1} - \textcircled{2}$  から、

$$25(x+1) + 7(y-4) = 0, \quad 25(x+1) = -7(y-4)$$

すると、 $25$  と  $7$  は互いに素なので  $l$  を整数として、  $x+1 = -7l$ 、  $y-4 = 25l$

$$(x, y) = (-7l-1, 25l+4) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、  $OP$  が  $m$  番目に小さい点を  $P_m$  とすると、  $\textcircled{3}$  から、

$$\begin{aligned} OP^2 &= (-7l-1)^2 + (25l+4)^2 = 674l^2 + 214l + 17 \\ &= 674\left(l + \frac{107}{674}\right)^2 - \frac{107^2}{674} + 17 \end{aligned}$$

これより、  $-\frac{1}{2} < -\frac{107}{674} < 0$  から、  $OP$  が一番小さい ( $m=1$ ) のは  $l=0$  のときより

$P_1(-1, 4)$ 、次に小さい ( $m=2$ ) のは  $l=-1$  のときより  $P_2(6, -21)$  である。

- (3) (2) と同様に考えて、  $m=1$  のとき  $l=0$ 、  $m=2$  のとき  $l=-1$ 、  $m=3$  のとき  $l=1$ 、  $m=4$  のとき  $l=-2$ 、  $m=5$  のとき  $l=2$ 、 $\cdots$ より、自然数  $k$  に対して帰納的に、  $m=2k+1$  のとき  $l=k$ 、  $m=2k$  のとき  $l=-k$  となり、  $\textcircled{3}$  から、

$$\overrightarrow{OP_{2k+1}} = (-7k-1, 25k+4), \quad \overrightarrow{OP_{2k}} = (7k-1, -25k+4)$$

よって、  $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}} = (-7k-1-(7k-1), 25k+4-(-25k+4)) = (-14k, 50k)$

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}} = (7k+6-(7k-1), -25k-21-(-25k+4)) = (7, -25)$$

(4) (3)より,  $\overrightarrow{OP_{14}} = (7 \cdot 7 - 1, -25 \cdot 7 + 4) = (48, -171)$

$\overrightarrow{OP_{16}} = (7 \cdot 8 - 1, -25 \cdot 8 + 4) = (55, -196)$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}} = (7, -25)$

すると, 右図のように四角形  $OQP_{16}P_{14}$  は平行四辺形となり, この周および内部に含まれる格子点を調べる。

まず, 頂点  $O, Q, P_{16}, P_{14}$  はすべて格子点である。

次に, 辺  $OQ$  の方程式は,  $y = -\frac{25}{7}x$  から, 両端点以外に格子点はない。また, 辺  $P_{14}P_{16}$  も同様である。

また, 辺  $OP_{14}$  の方程式は,  $y = -\frac{171}{48}x = -\frac{57}{16}x$  から, 両端点以外に格子点  $R_1(16, -57), R_2(32, -114)$  が存在する。また, 辺  $QP_{16}$  も同様で, 両端点以外に格子点  $S_1(23, -82), S_2(39, -139)$  が存在する。

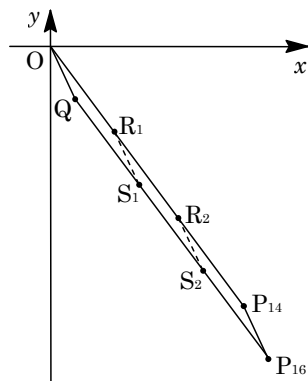
さらに, 四角形  $OQP_{16}P_{14}$  の内部に格子点  $(a, b)$  が存在すると仮定すると,

$$-\frac{57}{16}(a-7) - 25 < b < -\frac{57}{16}a, \quad -\frac{57a+1}{16} < b < -\frac{57}{16}a \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

④より,  $-57a - 1 < 16b < -57a, \quad -1 < 57a + 16b < 0$  となり,  $a, b$  は整数より成立しない。すなわち, 四角形  $OQP_{16}P_{14}$  の内部に格子点は存在しない。

以上より,  $OQP_{16}P_{14}$  の周および内部に含まれる格子点の座標は,

- $(0, 0), (7, -25), (23, -82), (39, -139), (55, -196), (48, -171)$   
 $(16, -57), (32, -114)$



**コメント**

格子点と整数についての問題です。(3)までは標準的ですが, 最後の設問の(4)は数値が大きく, さらに図が描きにくいために, かなり面倒です。

**問 題**

数列  $x_n = 2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を考える。この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,  $\dots$  であるが、各項の下 1 桁をみると、1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6,  $\dots$  となっており、2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

- (1) 数列  $\{x_n\}$  の各項の下 2 桁は、あるところから循環する。循環が始まるところと、循環の周期を求めよ。ここで、1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすとする。たとえば、2 の下 2 桁は 02 とする。
- (2) 4 の倍数で、25 で割って 1 余る 2 桁の自然数  $A$  を求めよ。
- (3) 8 の倍数で、125 で割って 1 余る 3 桁の自然数  $B$  を求めよ。
- (4) 数列  $\{x_n\}$  の各項の下 3 桁は、あるところから循環する。循環が始まるところと、循環の周期を求めよ。ここで、 $2^m$  を 125 で割って 1 余るような最小の自然数  $m$  が 100 であることを用いてもよい。 [2016]

**解答例**

(1) 数列  $\{x_n\}$  の各項の下 2 桁、すなわち 100 で割った余りについて、循環が始まるところを  $x_l$ 、循環の周期を  $p$  とおく。

すると、 $x_0$  のみ奇数なので  $l \geq 1$  となり、 $k$  を自然数として、

$$x_{l+p} - x_l = 100k, \quad 2^l(2^p - 1) = 2^2 \cdot 5^2 k \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①より、 $2^l$  は偶数、 $2^p - 1$  は奇数なので、 $l \geq 2$  で  $2^p - 1$  は  $5^2 = 25$  の倍数となり、  
 $2^p \equiv 1 \pmod{25} \dots\dots\dots \textcircled{2}$

②を満たす最小の自然数  $p$  を求めるために、以下、mod25 で記すと、

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 8, \quad 2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 7, \quad 2^6 \equiv 14, \quad 2^7 \equiv 3, \quad 2^8 \equiv 6, \\ 2^9 \equiv 12, \quad 2^{10} \equiv 24 \equiv -1$$

すると、 $2^{20} \equiv (-1)^2 = 1$  となり、②を満たす最小の自然数  $p$  は 20 である。

よって、①は  $l = 2, p = 20$  で成立するので、 $\{x_n\}$  の各項の下 2 桁は、 $x_2 = 4$  から周期 20 の循環が始まる。

- (2) 25 で割って 1 余る 2 桁の自然数は、26, 51, 76 である。この中で、4 の倍数であるのは 76 より、 $A = 76$  である。
- (3) 125 で割って 1 余る 3 桁の自然数は、126, 251, 376, 501, 626, 751, 876 である。この中で、8 の倍数であるのは 376 より、 $B = 376$  である。
- (4) (1)と同様に設定し、数列  $\{x_n\}$  の各項の下 3 桁、すなわち 1000 で割った余りについて、循環が始まるところを  $x_l$  ( $l \geq 1$ )、循環の周期を  $p$  とおき、 $k$  を自然数として、  
 $x_{l+p} - x_l = 1000k, \quad 2^l(2^p - 1) = 2^3 \cdot 5^3 k \dots\dots\dots \textcircled{3}$

③より、 $l \geq 3$  で、 $2^p - 1$  は125の倍数となり、

$$2^p \equiv 1 \pmod{125} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、 $2^m$  を125で割って1余るような最小の自然数  $m$  が100であることより、  
 ④を満たす最小の自然数  $p$  は100である。

よって、③は  $l = 3$ 、 $p = 100$  で成立するので、 $\{x_n\}$  の各項の下3桁は、 $x_3 = 8$  から周期100の循環が始まる。

### コメント

数列の周期性についての問題です。(1)は、はじめ下2桁の数値を列挙して求めようと思ったのですが、なかなか同じものが現れず、途中で止めて方針転換をしました。ただ、後続の設問をみると、出題意図は放棄した方法だったかもしれません。

**問題**

$\alpha > 1$  とする。数列  $\{a_n\}$  を,  $a_1 = \alpha$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

- (1)  $a_n > 1$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )
- (2)  $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x-1)$  (ただし,  $x \geq 0$  とする。)
- (3)  $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) [2014]

**解答例**

(1) 漸化式  $a_1 = \alpha > 1$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}$  で定められる数列  $\{a_n\}$  に対して,  $a_n > 1$  であることを, 数学的帰納法を用いて証明する。

- (i)  $n=1$  のとき  $a_1 = \alpha > 1$  より成立する。
- (ii)  $n=k$  のとき  $a_k > 1$  と仮定する。

$$a_{k+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_k}{a_k+1}} - 1 = \frac{\sqrt{2a_k} - \sqrt{a_k+1}}{\sqrt{a_k+1}} = \frac{a_k - 1}{\sqrt{a_k+1}(\sqrt{2a_k} + \sqrt{a_k+1})} > 0$$

(i)(ii)より, すべての自然数  $n$  に対して,  $a_n > 1$  である

(2)  $x \geq 0$  のとき,  $x - 1 - 2(\sqrt{x} - 1) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$  より,

$$x - 1 \geq 2(\sqrt{x} - 1), \quad \sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1) \dots\dots\dots (*)$$

(3) (1)より  $a_n > 1$  なので,  $\frac{2a_n}{a_n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} > 0$  となり, (\*)を適用すると,

$$a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} - 1 \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2a_n}{a_n+1} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 1} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 1}{2} = \frac{1}{4}(a_n - 1)$$

これより,  $n \geq 2$  のとき,  $a_n - 1 < \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1 - 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$

また,  $n=1$  のときは,  $a_1 - 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-1}(\alpha - 1)$  となるので,

$$a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

**コメント**

漸化式と不等式の問題です。(1)(2)を誘導として(3)につなげるという意図と思えますので, その通りにしました。ただ, (1)の証明を上記のように行くと, (2)の不等式は不可欠ではありません。

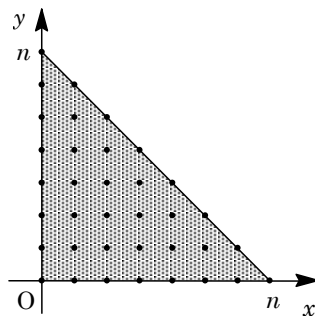
**問 題**

座標平面上の点で、 $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点という。 $n$  を 3 以上の自然数とし、連立不等式  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq n$  の表す領域を  $D$  とする。格子点  $A(a, b)$  に対して、領域  $D$  内の格子点  $B(c, d)$  が  $|a - c| + |b - d| = 1$  を満たすとき、点  $B$  を点  $A$  の隣接点という。次の問いに答えよ。

- (1) 領域  $D$  内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。
- (2) 領域  $D$  から格子点を 1 つ選ぶとき、隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような  $n$  の範囲を求めよ。ただし、格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。
- (3) 領域  $D$  から異なる格子点を 2 つ選ぶとき、互いに隣接点である確率を求めよ。ただし、異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。 [2013]

**解答例**

(1) まず、連立不等式  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq n$  で表される領域  $D$  は、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含まれる。



さて、 $a, b, c, d$  が整数で、 $|a - c| + |b - d| = 1$  のとき、

$$(a - c, b - d) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

これより、格子点  $A(a, b)$  に対して、その隣接点  $B(c, d)$  は、領域  $D$  内にあり、

$$(c, d) = (a - 1, b), (a + 1, b), (a, b - 1), (a, b + 1)$$

すると、領域  $D$  内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものは、連立不等式  $x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq n - 1$  で表される領域内の格子点である。その個数は、

$$1 + 2 + \dots + (n - 2) = \frac{1}{2}(n - 2)(n - 1)$$

- (2) 領域  $D$  の境界線上の格子点  $P$  について、隣接点の個数は、
  - (i)  $P(0, 0)$  のとき 隣接点は点  $(1, 0)$  と点  $(0, 1)$  となり、個数は 2 である。
  - (ii)  $P(n, 0)$  のとき 隣接点は点  $(n - 1, 0)$  となり、個数は 1 である。
  - (iii)  $P(0, n)$  のとき 隣接点は点  $(0, n - 1)$  となり、個数は 1 である。
  - (iv)  $P(k, 0)$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) のとき  
隣接点は、点  $(k - 1, 0)$ 、点  $(k, 1)$ 、点  $(k + 1, 0)$  となり、個数は 3 である。
  - (v)  $P(0, k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) のとき  
隣接点は、点  $(0, k - 1)$ 、点  $(1, k)$ 、点  $(0, k + 1)$  となり、個数は 3 である。
  - (vi)  $P(k, n - k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) のとき  
隣接点は、点  $(k - 1, n - k)$  および点  $(k, n - k - 1)$  となり、個数は 2 である。



さて、領域  $D$  内の格子点の総数  $N$  は、 $N = 1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(a) 隣接点の個数が 1 のとき

(ii)(iii)より 2 通りの場合があり、その確率は  $\frac{2}{N}$  となる。

(b) 隣接点の個数が 2 のとき

(i)(vi)より  $1 + (n-1) = n$  通りの場合があり、その確率は  $\frac{n}{N}$  となる。

(c) 隣接点の個数が 3 のとき

(iv)(v)より  $2(n-1)$  通りの場合があり、その確率は  $\frac{2(n-2)}{N}$  となる。

(d) 隣接点の個数が 4 のとき

(1)より  $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$  通りの場合があり、その確率は  $\frac{(n-2)(n-1)}{2N}$  となる。

(a)~(d)より、隣接点の個数の期待値  $E$  は、

$$E = \frac{1}{N} \left\{ 1 \cdot 2 + 2 \cdot n + 3 \cdot 2(n-1) + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-2)(n-1) \right\}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)} 2n(n+1) = \frac{4n}{n+2}$$

すると、 $E = \frac{4n}{n+2} \geq 3$  となるのは、 $4n \geq 3n + 6$  から、 $n \geq 6$  である。

(3) 領域  $D$  から異なる格子点を 2 つ選ぶとき、 ${}_N C_2$  通りの場合があり、

$${}_N C_2 = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)\{(n+1)(n+2)-2\}$$

$$= \frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

2 つの格子点が隣接点のとき、その方向が上下または左右の 2 パターンあり、

$$(1+2+\dots+n) \times 2 = n(n+1)$$

よって、その確率は、 $\frac{8n(n+1)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{8}{(n+2)(n+3)}$  である。

### コメント

格子点の個数と確率の融合問題です。領域  $D$  の図を見ながら、個数を数えています。

**問題**

$a$  を実数とし、 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$  とおく。数列  $\{x_n\}$  を

$$x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数  $n$  について  $x_n = a$  となるとき、 $a$  を求めよ。
- (2)  $a < 1$  のとき、 $x_n < 1$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを証明せよ。
- (3)  $0 < a < 1$  のとき、 $x_n < x_{n+1}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを証明せよ。

[2012]

**解答例**

- (1) 条件は、 $x_n = x_{n+1} = a$  と同値なので、 $a^3 - 3a^2 + 3a = a$

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0, a(a-1)(a-2) = 0$$

よって、 $a = 0, 1, 2$

- (2)  $a < 1$  のとき、 $x_n < 1$  であることを数学的帰納法で証明する。

(i)  $n=1$  のとき  $x_1 = a < 1$  より成り立つ。

(ii)  $n=k$  のとき  $x_k < 1$  と仮定する。

$$x_{k+1} - 1 = x_k^3 - 3x_k^2 + 3x_k - 1 = (x_k - 1)^3 < 0$$

よって、 $x_{k+1} < 1$  が成り立つ。

(i)(ii)より、 $a < 1$  のとき、すべての自然数  $n$  について  $x_n < 1$  である。

- (3) まず、 $0 < a < 1$  のとき、 $x_n > 0$  であることを数学的帰納法で証明する。

(i)  $n=1$  のとき  $x_1 = a > 0$  より成り立つ。

(ii)  $n=k$  のとき  $x_k > 0$  と仮定する。

$$x_{k+1} = x_k^3 - 3x_k^2 + 3x_k = x_k \left\{ \left( x_k - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\} > 0$$

よって、 $x_{k+1} > 0$  が成り立つ。

(i)(ii)より、 $0 < a < 1$  のとき、すべての自然数  $n$  について  $x_n > 0$  である。

すると、(2)と合わせて、 $0 < x_n < 1$  となり、

$$x_{n+1} - x_n = x_n^3 - 3x_n^2 + 2x_n = x_n(x_n - 1)(x_n - 2) > 0$$

よって、すべての自然数  $n$  について  $x_n < x_{n+1}$  が成り立つ。

**コメント**

上の解答例では省いていますが、解き始める前に、 $y = f(x)$  と  $y = x$  のグラフをかいて、(1)~(3)の結論を図でチェックしています。

**問 題**

4で割ると余りが1である自然数全体の集合を  $A$  とする。すなわち、

$$A = \{4k+1 \mid k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $x$  および  $y$  が  $A$  に属するならば、その積  $xy$  も  $A$  に属することを証明せよ。
- (2) 0以上の偶数  $m$  に対して、 $3^m$  は  $A$  に属することを証明せよ。
- (3)  $m, n$  を 0 以上の整数とする。 $m+n$  が偶数ならば  $3^m 7^n$  は  $A$  に属し、 $m+n$  が奇数ならば  $3^m 7^n$  は  $A$  に属さないことを証明せよ。
- (4)  $m, n$  を 0 以上の整数とする。 $3^{2m+1} 7^{2n+1}$  の正の約数のうち  $A$  に属する数全体の和を  $m$  と  $n$  を用いて表せ。 [2010]

**解答例**

- (1) 条件より、 $k, l$  を 0 以上の整数として、 $x = 4k+1, y = 4l+1$  と表すと、

$$xy = (4k+1)(4l+1) = 4(4kl+k+l)+1$$

よって、積  $xy$  は 4 で割ると 1 余り、集合  $A$  に属する。

- (2) 条件より、 $m = 2k$  とおくと、 $k \geq 1$  のとき、二項定理より、

$$3^m = 3^{2k} = 9^k = (8+1)^k = 8^k + {}_k C_1 8^{k-1} + {}_k C_2 8^{k-2} + \cdots + {}_k C_{k-1} 8 + 1$$

$8^k + {}_k C_1 8^{k-1} + {}_k C_2 8^{k-2} + \cdots + {}_k C_{k-1} 8$  は 4 の倍数より、 $3^m$  は 4 で割ると 1 余る。

なお、 $m = 0$  のときは  $3^m = 1$  から、このときも 4 で割ると 1 余る。

以上より、 $3^m$  は  $A$  に属する。

- (3) まず、(2) と同様に考え、 $m+n$  が偶数の場合は、 $M, N$  を整数として、

- (i)  $m = 2k, n = 2l$  のとき

$$3^m 7^n = 3^{2k} 7^{2l} = 9^k 49^l = (8+1)^k (48+1)^l = (4M+1)(4N+1)$$

すると、(1) の結果から、 $3^m 7^n$  は  $A$  に属する。

- (ii)  $m = 2k+1, n = 2l+1$  のとき

$$3^m 7^n = 3^{2k+1} 7^{2l+1} = 3(4M+1) \cdot 7(4N+1) = (20+1)(4M+1)(4N+1)$$

すると、(1) の結果から、 $3^m 7^n$  は  $A$  に属する。

次に、 $m+n$  が奇数の場合は、

- (iii)  $m = 2k, n = 2l+1$  のとき

$$3^m 7^n = 3^{2k} 7^{2l+1} = (4M+1) \cdot 7(4N+1) = (4+3)(16MN+4M+4N+1)$$

すると、 $3^m 7^n$  は 4 で割った余りが 3 となり、 $A$  には属さない。

- (iv)  $m = 2k+1, n = 2l$  のとき

$$3^m 7^n = 3^{2k+1} 7^{2l} = 3(4M+1)(4N+1) = 3(16MN+4M+4N+1)$$

すると、 $3^m 7^n$  は 4 で割った余りが 3 となり、 $A$  には属さない。

- (4)  $3^{2m+1}7^{2n+1}$  の正の約数は、 $0 \leq k \leq 2m+1$ ,  $0 \leq l \leq 2n+1$  として  $3^k 7^l$  と表せ、この中で  $A$  に属する数は、(3)の結果から  $k+l$  が偶数の場合である。この数全体の和を  $S$  とすると、

$$\begin{aligned} S &= (1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})+(3+3^3+\cdots+3^{2m+1})(7+7^3+\cdots+7^{2n+1}) \\ &= (1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})+21(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n}) \\ &= 22 \cdot \frac{9^{m+1}-1}{9-1} \cdot \frac{49^{n+1}-1}{49-1} = \frac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1) \end{aligned}$$

### コメント

整数についての問題です。(1)と(2)が(3)の、そして(3)が(4)の誘導になっています。

**問題**

平面上のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は、その大きさがともに  $\sqrt{2}$  であり、なす角が  $120^\circ$  である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  を求めよ。
- (2)  $k, l$  を整数とすると、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は偶数であることを示せ。
- (3) (2) で、 $k$  または  $l$  が奇数のとき、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は 4 の倍数ではないことを示せ。
- (4)  $m, n$  が整数であり、 $m = n = 0$  ではないならば、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$  は整数ではないことを示せ。

[2008]

**解答例**

- (1)  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos 120^\circ = -1$  より、  
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2$
- (2)  $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = k^2|\vec{a}|^2 + 2kl\vec{a} \cdot \vec{b} + l^2|\vec{b}|^2 = 2(k^2 - kl + l^2)$   
 よって、 $k, l$  は整数より、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は偶数である。
- (3) (i)  $k$  が奇数、 $l$  が奇数のとき  
 $k^2, kl, l^2$  はすべて奇数より、 $k^2 - kl + l^2$  は奇数となるので、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は 4 の倍数ではない。  
 (ii)  $k$  が奇数、 $l$  が偶数のとき  
 $k^2$  は奇数、 $kl, l^2$  は偶数より、 $k^2 - kl + l^2$  は奇数となるので、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は 4 の倍数ではない。  
 (iii)  $k$  が偶数、 $l$  が奇数のとき  
 $k^2, kl$  は偶数、 $l^2$  は奇数より、 $k^2 - kl + l^2$  は奇数となるので、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は 4 の倍数ではない。  
 (i)~(iii)より、 $k$  または  $l$  が奇数のとき、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$  は 4 の倍数ではない。
- (4) まず、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$  が整数ならば、 $m = n = 0$  を証明する。  
 $|m\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{2(m^2 - mn + n^2)}$  が整数となるためには、(3)より、 $m^2 - mn + n^2$  が偶数、すなわち  $m, n$  がともに偶数であることが必要である。  
 そこで、 $m = 2m_1, n = 2n_1$  ( $m_1, n_1$  は整数) とおくと、  
 $|m\vec{a} + n\vec{b}| = 2\sqrt{2(m_1^2 - m_1n_1 + n_1^2)}$   
 すると、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$  が整数となるためには、 $m_1, n_1$  がともに偶数であることが必要であり、 $k = 1, 2, \dots$  として、 $m_k = 2m_{k+1}, n_k = 2n_{k+1}$  ( $m_k, n_k$  は整数) とおくと、  
 $|m\vec{a} + n\vec{b}| = 2^k \sqrt{2(m_k^2 - m_k n_k + n_k^2)}$

これより,  $m_k, n_k$  がともに偶数であるのは,  $m = n = 0$  の場合しかありえない。  
 よって,  $|m\vec{a} + n\vec{b}|$  が整数ならば,  $m = n = 0$  である。

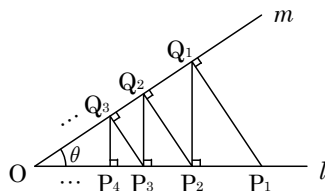
この命題の対偶をとると,  $m = n = 0$  ではないならば,  $|m\vec{a} + n\vec{b}|$  は整数ではない。

### コメント

(4)は, 0 以外の整数を 2 でドンドン割っていくと, いつかは奇数になるということを利用してあります。もっと詳しく記述した方がよかったかもしれませんが。

**問題**

右図のように、点  $O$  から出る 2 本の半直線  $l, m$  があり、 $l$  と  $m$  のなす角を  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。 $l$  上に  $OP_1 = 1$  となるように点  $P_1$  を定め、 $P_1$  から  $m$  に垂線  $P_1Q_1$  を下ろし、 $Q_1$  から  $l$  に垂線  $Q_1P_2$  を下ろし、 $P_2$  から  $m$  に垂線  $P_2Q_2$  を下ろし、 $Q_2$  から  $l$  に垂線  $Q_2P_3$  を下ろす。同様にくりかえして、点  $P_n, Q_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) を定め、三角形  $P_nQ_nP_{n+1}$  の面積を  $S_n$  とする。次の問いに答えよ。



- (1)  $\frac{P_2Q_2}{P_1Q_1}$  を求めよ。
  - (2)  $\frac{S_2}{S_1}$  を求めよ。
  - (3)  $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$  を求め、 $\sin 2\theta$  と  $\cos 2\theta$  を用いて表せ。
  - (4) (3) で求めた  $S$  を  $\theta$  の関数と考えて、 $S$  の最大値を求めよ。ただし、その最大値を与える  $\theta$  の値は求めなくてよい。
- [2008]

**解答例**

- (1)  $Q_1P_2 = P_1Q_1 \cos \theta$ ,  $P_2Q_2 = Q_1P_2 \cos \theta$  より、

$$P_2Q_2 = P_1Q_1 \cos^2 \theta, \quad \frac{P_2Q_2}{P_1Q_1} = \cos^2 \theta$$

- (2)  $\triangle P_1Q_1P_2$  と  $\triangle P_2Q_2P_3$  は相似なので、(1) より、

$$\frac{S_2}{S_1} = \cos^4 \theta$$

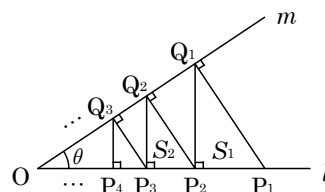
- (3)  $P_1Q_1 = OP_1 \sin \theta = \sin \theta$  より、

$$S_1 = \frac{1}{2} P_1Q_1 \cdot Q_1P_2 \sin \theta = \frac{1}{2} \sin^3 \theta \cos \theta$$

(2) と同様にして、 $S_{n+1} = S_n \cos^4 \theta$  となり、 $0 < \cos^4 \theta < 1$  から、

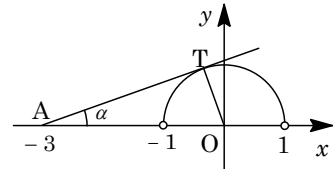
$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \cos^4 \theta} = \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta}{2\left(1 + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)} = \frac{\sin 2\theta}{2(3 + \cos 2\theta)} \end{aligned}$$

- (4)  $m = \frac{\sin 2\theta}{3 + \cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - (-3)}$  とおくと、 $0 < 2\theta < \pi$  より、 $m$  は点  $A(-3, 0)$  と半円  $x^2 + y^2 = 1$  ( $y > 0$ ) 上の点を結ぶ直線の傾きになる。



ここで、 $m$  の値が最大となるのは、この直線が円に接するときであり、接点を  $T$  とし、 $x$  軸の正の部分となす角を  $\alpha$  とおくと、

$$\tan \alpha = \frac{OT}{AT} = \frac{1}{\sqrt{3^2 - 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



よって、(3)より  $S = \frac{1}{2}m$  なので、 $S$  の最大値は、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$  である。

### コメント

有名な構図の頻出問題です。(4)では、微分法の利用が一般的ですが、ここでは分数関数を直線の傾きとしてみる解法を採用しました。



**問 題**

条件  $a_1 = -30$ ,  $9a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定義される数列  $\{a_n\}$  がある。

- (1)  $b_n = 3^n a_n$  とおくととき、数列  $\{b_n\}$  の漸化式を求めよ。
- (2) 一般項  $a_n$  を求めよ。
- (3)  $a_n$  を最大にする  $n$  の値を求めよ。

[2002]

**解答例**

(1) 条件より,  $a_1 = -30$ ,  $9a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$  ……………①

$b_n = 3^n a_n$  より,  $b_{n+1} = 3^{n+1} a_{n+1}$  となり, ①に代入して,

$$9 \frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{b_n}{3^n} + \frac{4}{3^n}, \quad 3b_{n+1} = b_n + 4, \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{4}{3} \dots\dots\dots②$$

(2) ②を変形して,  $b_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(b_n - 2)$

$$b_n - 2 = (b_1 - 2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = (3a_1 - 2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって,  $b_n = 2 - 92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2 - 276\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$a_n = \frac{b_n}{3^n} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 276\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

(3) (2)より,  $a_{n+1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 276\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$  なので,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 276\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 276\left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= -4\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 276 \times 8 \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} = 4\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}(-3^{n+1} + 552) \\ &= 12\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}(-3^n + 184) \end{aligned}$$

$n \leq 4$  のとき  $-3^n + 184 > 0$  より,  $a_{n+1} - a_n > 0$ ,  $a_n < a_{n+1}$

$n \geq 5$  のとき  $-3^n + 184 < 0$  より,  $a_{n+1} - a_n < 0$ ,  $a_n > a_{n+1}$

以上より,  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 > a_6 > a_7 > \dots\dots$  となり,  $n = 5$  のとき  $a_n$  は最大である。

**コメント**

前半は誘導つきの漸化式の解法, 後半は数列の最大・最小という頻出問題です。

**問題**

1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと、1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある。100 のカードをまず 1 番の箱に入れ、次に 99, 98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ、さらに、97, 96, 95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる。以下、この操作を続けて、 $k$  番目の箱に  $k$  枚のカードを数の大きい方から順に入れていく。ただし、1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする。したがって、1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある。1 のカードが入っている箱の番号を  $N$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $N$  の値を求めよ。また、 $N$  番の箱には何枚のカードが入っているか。
- (2)  $k$  番 ( $1 \leq k \leq N$ ) の箱において、その箱の中のカードに書かれている最大の数を  $k$  の式で表せ。
- (3)  $k$  番 ( $1 \leq k \leq N$ ) の箱の中のカードに書かれている数の合計を  $S_k$  とする。 $1 \leq k \leq N-1$  のとき、 $S_k$  を  $k$  の式で表せ。また、 $1 \leq k \leq N$  のとき、 $S_k$  の最大値を求めよ。

[2000]

**解答例**

- (1)  $k$  番の箱までに入っているカードの枚数の和は、 $1+2+3+\dots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$

さて、1 のカードが  $N$  番の箱に入っているとすると、

$$\frac{1}{2}(N-1)N < 100 \leq \frac{1}{2}N(N+1), \quad (N-1)N < 200 \leq N(N+1)$$

すると、 $13 \cdot 14 = 182$ 、 $14 \cdot 15 = 210$  より、 $N = 14$

また、13 番までの箱に入っているカードの枚数の和は  $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91$  より、14 番

の箱に入っているカードは、 $100 - 91 = 9$  枚である。

- (2)  $k$  番の箱に入っているカードは、100, 99, 98, 97, … と数えて、 $\frac{1}{2}(k-1)k+1$  枚目

から  $\frac{1}{2}k(k+1)$  枚目までなので、最大数は  $\frac{1}{2}(k-1)k+1$  枚目となり、

$$100 + \left\{ \frac{1}{2}(k-1)k+1-1 \right\} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 100$$

- (3)  $k$  番の箱に入っているカードの最小数は  $\frac{1}{2}k(k+1)$  枚目で、

$$100 + \left\{ \frac{1}{2}k(k+1)-1 \right\} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 101$$

すると、 $1 \leq k \leq 13$  のとき、

$$S_k = \frac{\left(-\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 101\right) + \left(-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 100\right)}{2} \cdot k = -\frac{1}{2}k^3 + \frac{201}{2}k$$

ここで、 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{201}{2}x$  ( $1 \leq x \leq 13$ ) とおくと、

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{201}{2} = -\frac{3}{2}(x^2 - 67)$$

|         |   |   |             |   |    |
|---------|---|---|-------------|---|----|
| $x$     | 0 | ⋯ | $\sqrt{67}$ | ⋯ | 13 |
| $f'(x)$ |   | + | 0           | - |    |
| $f(x)$  |   | ↗ |             | ↘ |    |

右表より、 $f(x)$  は  $x = \sqrt{67}$  のとき最大値をとる。

よって、 $8 < \sqrt{67} < 9$  で、 $f(8) = 548$ 、 $f(9) = 540$  となるので、 $1 \leq k \leq 13$  のとき、 $S_k$  は  $k = 8$  のとき最大となる。

なお  $k = 14$  のとき、 $S_k = 9 + 8 + \dots + 1 = 45$  となるので、 $1 \leq k \leq 14$  において、 $S_k$  の最大値は  $S_8 = 548$  である。

## コメント

長い問題文ですが、要は、初項 100、公差 -1 の等差数列をグループ分けした群数列の問題です。各群の項数に注目するのがポイントです。

**問題**

$n$  が自然数のとき、次の不等式を証明せよ。ただし、 $a > 0$  とする。

(1)  $(a+1)^n \geq a^n + na^{n-1}$

(2)  $(n+1)^n \geq 2n^n$

(3)  $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$

[1999]

**解答例**

(1) 二項定理より、 $a > 0$  なので、

$$(a+1)^n \geq a^n + {}_n C_1 a^{n-1} = a^n + na^{n-1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(2) ①において、 $a = n$  とおくと、

$$(n+1)^n \geq n^n + n \cdot n^{n-1} = 2n^n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

(3)  $n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n \dots\dots \textcircled{3}$  が成立することを数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n = 1$  のとき

③の左辺 =  $1! = 1$ 、③の右辺 =  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  となり、 $n = 1$  のとき③は成り立つ。

(ii)  $n = k$  のとき

$k! \leq 2\left(\frac{k}{2}\right)^k \dots\dots \textcircled{4}$  が成り立つと仮定する。

④の両辺に  $(k+1)$  をかけて

$$(k+1)! \leq 2(k+1)\left(\frac{k}{2}\right)^k = \frac{2(k+1)}{2^k} \cdot k^k$$

$$\textcircled{2} \text{より, } \frac{2(k+1)}{2^k} \cdot k^k \leq \frac{2(k+1)}{2^k} \cdot \frac{(k+1)^k}{2} = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

よって、 $(k+1)! \leq 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$  となり、 $n = k+1$  のときも成り立つ。

(i)(ii)より、自然数  $n$  に対して、③が成り立つ。

**コメント**

②式は、誘導を細かくするために後から入れたような不等式です。それとも、いきなり②式では難しいので、①式を②式の誘導として追加したのでしょうか。

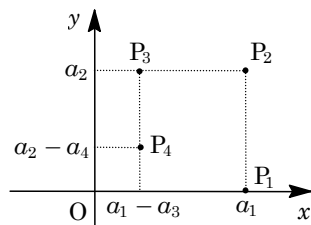
**問題**

箱の中に 1 から  $N$  までの数が 1 つずつ書かれた  $N$  枚のカードが入っている。ただし、 $N$  を 2 以上の自然数とする。「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し、そのカードに書かれた数を読み取り、そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す。1 回目、2 回目、3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を、それぞれ  $a_1, a_2, a_3, a_4$  とする。また、座標平面上に 4 点  $P_1(a_1, 0), P_2(a_1, a_2), P_3(a_1 - a_3, a_2), P_4(a_1 - a_3, a_2 - a_4)$  を定める。次の問いに答えよ。

- (1)  $P_4$  が原点  $O(0, 0)$  に一致する確率を  $N$  を用いて表せ。
- (2)  $P_4$  が連立不等式  $x \geq 0, y \leq 0$  の表す領域にある確率を  $N$  を用いて表せ。
- (3)  $P_4$  が直線  $y = x$  上にある確率を  $N$  を用いて表せ。
- (4)  $N = 2^m$  とする。ただし、 $m$  を自然数とする。 $P_4$  が原点  $O$  に一致し、かつ、四角形  $P_1P_2P_3P_4$  の面積が  $2^m$  となる確率を  $m$  を用いて表せ。 [2019]

**解答例**

- (1) 1 から  $N$  までの数が 1 つずつ書かれた  $N$  枚のカードから、もとに戻しながら 1 枚ずつ 4 回取り出し、取り出したカードの数を  $a_1, a_2, a_3, a_4$  とする。そして、座標平面上に 4 点  $P_1(a_1, 0), P_2(a_1, a_2), P_3(a_1 - a_3, a_2), P_4(a_1 - a_3, a_2 - a_4)$  を定める。



さて、 $P_4$  が原点  $O$  に一致するのは、 $(a_1 - a_3, a_2 - a_4) = (0, 0)$  より、

$$a_3 = a_1, a_4 = a_2$$

このとき、 $(a_1, a_3), (a_2, a_4)$  の組合せは、それぞれ  $N$  通りずつなので、求める確率は、 $\frac{N^2}{N^4} = \frac{1}{N^2}$  である。

- (2)  $P_4$  が  $x \geq 0, y \leq 0$  の表す領域にあるのは、 $a_1 - a_3 \geq 0, a_2 - a_4 \leq 0$  より、

$$a_3 \leq a_1, a_2 \leq a_4$$

ここで、 $a_1 = k (1 \leq k \leq N)$  のとき  $a_3$  は  $k$  通りあるので、 $(a_1, a_3)$  の組合せは、

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{1}{2}N(N+1) \text{ (通り)}$$

同様に、 $(a_4, a_2)$  の組合せも  $\frac{1}{2}N(N+1)$  通りなので、求める確率は、

$$\frac{\left\{ \frac{1}{2}N(N+1) \right\}^2}{N^4} = \frac{(N+1)^2}{4N^2}$$

- (3)  $P_4$  が  $y = x$  上にあるのは,  $a_2 - a_4 = a_1 - a_3$  より,  $a_2 - a_4 = a_1 - a_3 = k$  とおくと,  $0 \leq k \leq N-1$  のもとで,

$$(a_1, a_3) = (k+1, 1), (k+2, 2), \dots, (N, N-k)$$

$$(a_2, a_4) = (k+1, 1), (k+2, 2), \dots, (N, N-k)$$

これより,  $N-k$  通りずつとなり,  $(a_1, a_3, a_2, a_4)$  の組合せは,

$$\sum_{k=0}^N (N-k)^2 = \sum_{l=0}^N l^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \quad (\text{通り})$$

また,  $1-N \leq k \leq -1$  のもとでは,

$$(a_1, a_3) = (1, 1-k), (2, 2-k), \dots, (N+k, N)$$

$$(a_2, a_4) = (1, 1-k), (2, 2-k), \dots, (N+k, N)$$

これより,  $N+k$  通りずつとなり,  $(a_1, a_3, a_2, a_4)$  の組合せは,

$$\sum_{k=1-N}^{-1} (N+k)^2 = \sum_{l=1}^{N-1} l^2 = \frac{1}{6}(N-1)N(2N-1) \quad (\text{通り})$$

すると,  $1-N \leq k \leq N-1$  における  $(a_1, a_3, a_2, a_4)$  の組合せは,

$$\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) + \frac{1}{6}(N-1)N(2N-1) = \frac{1}{3}N(2N^2+1) \quad (\text{通り})$$

よって, 求める確率は,  $\frac{\frac{1}{3}N(2N^2+1)}{N^4} = \frac{2N^2+1}{3N^3}$  である。

- (4)  $N = 2^m$  のとき,  $P_4$  が原点  $O$  に一致することより,

$$(a_1, a_3) = (1, 1), (2, 2), \dots, (2^m, 2^m)$$

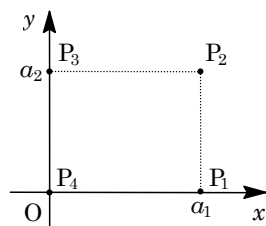
$$(a_2, a_4) = (1, 1), (2, 2), \dots, (2^m, 2^m)$$

このとき, 四角形  $P_1P_2P_3P_4$  は長方形となり, その面積が  $2^m$  から,  $a_1a_2 = 2^m$  が成り立つので,

$$(a_1, a_2) = (1, 2^m), (2, 2^{m-1}), (2^2, 2^{m-2}) \dots, (2^m, 1)$$

すると,  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  の組合せは  $m+1$  通りとなり, 求める確率は,

$$\frac{m+1}{(2^m)^4} = \frac{m+1}{2^{4m}}$$



### コメント

確率の標準的な問題です。丁寧に数え上げることがポイントになります。なお, (3) については,  $k < 0$  のときも場合分けをしましたが, 対称性から  $k > 0$  と同様としても構わないでしょう。  $k = 0$  の場合は(1)で求めているわけですし。

**問 題**

0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し、書かれた数字を見て元に戻す。この操作を  $N$  回繰り返す、カードに書かれた数字を順に  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  とする。ここで、 $N$  は 3 以上の自然数である。さらに、複素数  $\alpha = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$  を用いて、項数  $N$  の数列  $\{X_n\}$  を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, X_{n+1} = X_n \alpha^{Z_{n+1}} \quad (n=1, 2, \dots, N-1)$$

により定める。 $n=1, 2, \dots, N$  に対し、 $X_n = \alpha$  となる確率を  $P_n$  とし、 $X_n = \alpha^2$  となる確率を  $Q_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $P_1$  を求めよ。
- (2)  $n=1, 2, \dots, N-1$  とする。 $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$  となる確率を求めよ。
- (3)  $n=1, 2, \dots, N$  とする。 $X_n = 1$  となる確率を、 $P_n$  と  $Q_n$  を用いて表せ。
- (4)  $n=1, 2, \dots, N-1$  に対し、 $P_n$  を用いて  $P_{n+1}$  を表せ。
- (5)  $n=1, 2, \dots, N$  に対し、 $P_n$  を求めよ。 [2018]

**解答例**

- (1)  $\alpha = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$  に対し、 $\alpha^2 = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$ ,  $\alpha^0 = \alpha^3 = 1$  である。

さて、0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードから 1 枚を取り出し、書かれた数字を見て元に戻すという操作を  $N$  回繰り返す、カードに書かれた数字を順に  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  とする。

そして、 $X_1 = \alpha^{Z_1}$  であるとき、 $X_1 = \alpha$  となるのは  $Z_1 = 1$  のときより、その確率  $P_1$  は  $P_1 = \frac{1}{4}$  となる。

- (2)  $n=1, 2, \dots, N-1$  のとき、 $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$  となるのは  $Z_{n+1} = 0, 3$  のときより、その確率は  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  である。

- (3)  $n=1, 2, \dots, N$  のとき、 $X_n$  は 1,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$  のいずれかである。

すると、 $X_n = \alpha$ ,  $X_n = \alpha^2$  となる確率がそれぞれ  $P_n$ ,  $Q_n$  より、 $X_n = 1$  となる確率は、 $1 - P_n - Q_n$  と表せる。

- (4)  $n=1, 2, \dots, N-1$  のとき、 $X_{n+1} = \alpha$  となるのは、 $X_{n+1} = X_n \alpha^{Z_{n+1}}$  より、

- (i)  $X_n = 1$  のとき  $\alpha^{Z_{n+1}} = \alpha$  すなわち  $Z_{n+1} = 1$  のときである。
- (ii)  $X_n = \alpha$  のとき  $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$  すなわち  $Z_{n+1} = 0, 3$  のときである。
- (iii)  $X_n = \alpha^2$  のとき  $\alpha^{Z_{n+1}} = \alpha^2$  すなわち  $Z_{n+1} = 2$  のときである。

(i)~(iii)より、 $X_{n+1} = \alpha$  となる確率  $P_{n+1}$  は、

$$P_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - P_n - Q_n) + \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}Q_n = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{4}$$

(5) (1)から  $P_1 = \frac{1}{4}$  であり, また(4)の結果を,  $P_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}(P_n - \frac{1}{3})$  と変形すると,

$$P_n - \frac{1}{3} = (P_1 - \frac{1}{3})\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって,  $P_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$  となる。

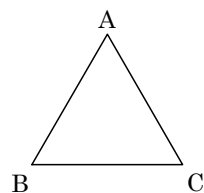
### コメント

複素数で味付けされた確率と漸化式の問題です。ただ, 最も要求されるのは, 問題文の読解力です。



**問題**

表が出る確率が  $p$ , 裏が出る確率が  $1-p$  であるようなコインがある。ただし,  $0 < p < 1$  である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点  $A, B, C$  を次の規則で移動する動点  $R$  を考える。



コインを投げて表が出れば  $R$  は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば  $R$  は時計まわりに隣の頂点に移動する。

$R$  は最初  $A$  にあり, 全部で  $(2N+3)$  回移動する。ここで,  $N$  は自然数である。移動回数がちょうど  $k$  に達したときに  $R$  が  $A$  に初めて戻る確率を  $P_k$  ( $k=2, 3, \dots, 2N+3$ ) とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $P_2, P_3$  を求めよ。
- (2)  $P_{2m}, P_{2m+1}$  ( $2 \leq m \leq N+1$ ) を求めよ。
- (3)  $p = \frac{1}{2}$  とする。移動回数がちょうど  $2N+3$  に達したときに  $R$  が  $A$  に 2 度目に戻る確率  $Q$  を求めよ。

[2017]

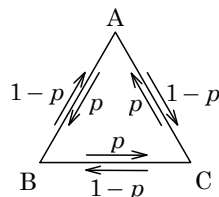
**解答例**

- (1) まず,  $R$  が 2 回目に  $A$  に初めて戻るのは,  $A \rightarrow B \rightarrow A$  または  $A \rightarrow C \rightarrow A$  から, その確率  $P_2$  は,

$$P_2 = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

また,  $R$  が 3 回目に  $A$  に初めて戻るのは,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  または  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  から, その確率  $P_3$  は,

$$P_3 = p^3 + (1-p)^3 = 1 - 3p + 3p^2$$



- (2)  $R$  が  $2m$  回目に  $A$  に初めて戻るのは,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  または  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  から, その確率  $P_{2m}$  は,

$$P_{2m} = p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p = 2p^m(1-p)^m$$

また,  $R$  が  $2m+1$  回目に  $A$  に初めて戻るのは,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  または  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  から, その確率  $P_{2m+1}$  は,

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= p^3\{p(1-p)\}^{m-1} + (1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1} \\ &= (1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

- (3)  $p = \frac{1}{2}$  のとき, (2)より,  $P_{2m} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1} = \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて、R が  $2N+3$  回目に A に 2 度目に戻るのは、

(i) R が A に初めて戻るのが  $2m$  回目 ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) のとき

$$\text{その確率は, } P_{2m}P_{2N+3-2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-2m+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}$$

(ii) R が A に初めて戻るのが  $2m+1$  回目 ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) のとき

$$\text{その確率は, } P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-2m+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}$$

(i)(ii)より、R が  $2N+3$  回目に A に 2 度目に戻る確率  $Q$  は、

$$Q = \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} + \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = 2N \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = \frac{N}{2^{2N}}$$

### コメント

確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

**問 題**

$xy$  平面上に原点を出発点として動く点  $Q$  があり、次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ、表が出たら  $Q$  は  $x$  軸の正の方向に 1、裏が出たら  $y$  軸の正の方向に 1 動く。ただし、点  $(3, 1)$  に到達したら  $Q$  は原点に戻る。

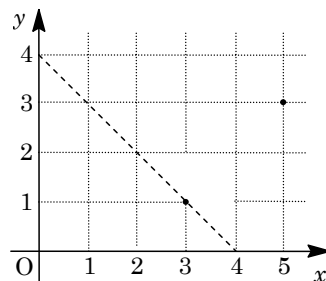
この試行を  $n$  回繰り返した後の  $Q$  の座標を  $(x_n, y_n)$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $(x_4, y_4) = (0, 0)$  となる確率を求めよ。
- (2)  $(x_8, y_8) = (5, 3)$  となる確率を求めよ。
- (3)  $x_8 + y_8 \leq 4$  となる確率を求めよ。
- (4)  $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$  となる確率を  $n$  と  $k$  で表せ。ここで  $k$  は  $n$  以下の自然数とする。

[2016]

**解答例**

- (1) 原点から出発した点  $Q$  は、表が出たら  $x$  軸の正の方向に 1、裏が出たら  $y$  軸の正の方向に 1 動く。そして、この試行を  $n$  回繰り返したとき、その到達点  $(x_n, y_n)$  は、点  $(3, 1)$  を通らないときは線分  $x + y = n$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) 上の点、また点  $(3, 1)$  を通るといったん原点に戻り、続けて残りの試行を繰り返す。



さて、 $(x_4, y_4) = (0, 0)$  となるのは、4 回目の試行で

点  $(3, 1)$  に到達したときより、その確率は、 ${}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$  である。

- (2)  $(x_8, y_8) = (5, 3)$  となるのは、8 回目の試行で点  $(5, 3)$  に到達し、しかも 4 回目の試行では点  $(3, 1)$  を通らないときより、その確率は、(1)を利用すると、

$${}_8C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4} \cdot {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 56 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

- (3) 試行を 8 回行い、4 回目の試行で点  $(3, 1)$  を通らないときは  $x_8 + y_8 = 8$  となる。

また、4 回目の試行で点  $(3, 1)$  を到達し原点に戻った後、8 回目の試行で点  $(3, 1)$  に到達しないときは  $x_8 + y_8 = 4$  となり、8 回目の試行で点  $(3, 1)$  に到達するときは  $(x_8, y_8) = (0, 0)$  である。

したがって、 $x_8 + y_8 \leq 4$  となるのは 4 回目の試行で点  $(3, 1)$  に到達するときであり、その確率は、(1)から  $\frac{1}{4}$  である。

- (4) 試行を  $4n$  回行うとき、到達点  $(x_{4n}, y_{4n})$  を考える。

まず、4 回目の試行で点  $(3, 1)$  を通らないときは、つねに  $x_{4n} + y_{4n} = 4n$  となる。

次に、4 回目の試行で点 (3, 1) に到達し原点に戻った後、試行を続けるときは  $x_{4n} + y_{4n} \leq 4(n-1)$  となり、その確率は  $\frac{1}{4}$  である。

さらに、4 回目と 8 回目に点 (3, 1) に到達し原点に 2 回戻った後、試行を続けるときは  $x_{4n} + y_{4n} \leq 4(n-2)$  となり、その確率は  $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$  である。

同様に考えて、 $l$  を整数 ( $0 \leq l \leq n-1$ ) とし、4 回目、8 回目、 $\dots$ 、 $4l$  回目に点 (3, 1) に到達し原点に  $l$  回戻った後、試行を続けるときは  $x_{4n} + y_{4n} \leq 4(n-l)$  となり、その確率は  $\left(\frac{1}{4}\right)^l$  である。そこで、 $k = n-l$  とおくと  $1 \leq k \leq n$  となり、 $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$  となる確率は  $\left(\frac{1}{4}\right)^l = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$  である。

### コメント

確率の頻出問題ですが、振り出しに戻るといふひねりが加えられています。

**問 題**

$m, n$  を自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $m \geq 2, n \geq 2$  とする。異なる  $m$  種類の文字から重複を許して  $n$  個を選び、1 列に並べる。このとき、ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。
- (2)  $n \geq 3$  とする。3 種類の文字  $a, b, c$  から重複を許して  $n$  個を選び、1 列に並べる。このとき  $a, b, c$  すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。
- (3)  $n \geq 3$  とする。 $n$  人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率  $p_n$  を求めよ。ただし、どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば、 $n = 3$  のとき、A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は、  
 $\{(A, B, C)\}, \{(A, B), (C)\}, \{(A, C), (B)\},$   
 $\{(B, C), (A)\}, \{(A), (B), (C)\}$   
 の 5 通りであるので、 $p_3 = \frac{3}{5}$  である。
- (4) (3)の確率  $p_n$  が  $\frac{1}{3}$  以下となるような  $n$  の値の範囲を求めよ。 [2015]

**解答例**

- (1) 異なる  $m$  種類の文字から 2 種類の文字を選ぶ方法は、 ${}_m C_2 = \frac{m(m-1)}{2}$  通り。  
 そして、この文字から重複を許して  $n$  個を選び 1 列に並べるのは、 $2^n$  通り。この中で、2 種類の文字を含むのは、1 種類が 2 通りあるので、 $2^n - 2$  通りである。  
 よって、求める場合は、 $\frac{m(m-1)}{2}(2^n - 2) = m(m-1)(2^{n-1} - 1)$  通りである。
- (2) 3 種類の文字から重複を許して  $n$  個を選び 1 列に並べるのは、 $3^n$  通り。  
 この中で、1 種類となるのは 3 通り、2 種類となるのは  ${}_3 C_2 (2^n - 2) = 3(2^n - 2)$  通りなので、3 種類の文字を含む方法は、  
 $3^n - 3 - 3(2^n - 2) = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$  (通り)
- (3) (i)  $n$  人を 1 組にグループ分けするとき 明らかに 1 通り。  
 (ii)  $n$  人を 2 組にグループ分けするとき  
 2 組のグループを区別したとき、その分け方は、2 種類の文字を 1 列に並べ、2 種類とも含む場合に一致するので、(1)から  $2^n - 2$  通りとなる。これより、グループを区別しないときは、 $\frac{2^n - 2}{2!} = 2^{n-1} - 1$  通りである。

(iii)  $n$  人を 3 組にグループ分けするとき

3 組のグループを区別したとき、その分け方は、3 種類の文字を 1 列に並べ、3 種類とも含む場合に一致するので、(2)から  $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$  通りとなる。そして、グループを区別しないときは、 $\frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$  通りである。

(i)~(iii)より、 $n$  人を最大 3 組までグループ分けする方法は、

$$1 + (2^{n-1} - 1) + \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2} = \frac{3^{n-1} + 1}{2} \quad (\text{通り})$$

すると、このときグループ数が 2 である確率  $p_n$  は、 $p_n = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{3^{n-1} + 1} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1}$

(4)  $p_n \leq \frac{1}{3}$  のとき、 $\frac{2^n - 2}{3^{n-1} + 1} \leq \frac{1}{3}$  となり、 $3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7 \geq 0 \dots\dots\dots(*)$

ここで、 $f(n) = 3^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 7 = 3^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-1} + 7$  とおくと、

$$f(3) = -8 < 0, \quad f(4) = -14 < 0, \quad f(5) = -8 < 0, \quad f(6) = 58 > 0$$

さて、 $n \geq 6$  において、 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32} > 6$  より、 $f(n) > 7 > 0$  である。

よって、(\*)が成り立つ  $n$  の値の範囲は、 $n \geq 6$  である。

**コメント**

ポイントは、(1)(2)が(3)の誘導となっていることです。樹形図で要確認です。

**問 題**

1 辺の長さが 1 の正六角形において、頂点を反時計回りに  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  とする。1 個のさいころを 2 回投げて、出た目を順に  $j, k$  とする。 $P_1, P_j, P_k$  が異なる 3 点となるとき、この 3 点を頂点とする三角形の面積を  $S$  とする。 $P_1, P_j, P_k$  が異なる 3 点とならないときは、 $S = 0$  と定める。次の問いに答えよ。

- (1)  $S > 0$  となる確率を求めよ。
- (2)  $S$  が最大となる確率を求めよ。
- (3)  $S$  の期待値を求めよ。

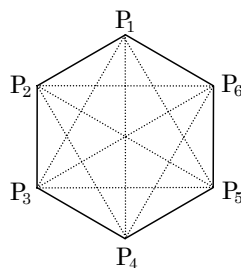
[2014]

**解答例**

- (1)  $P_1, P_j, P_k$  を頂点とする三角形の面積  $S$  について、 $S > 0$  となる場合は、 $P_1, P_j, P_k$  が異なる 3 点のときである。

すなわち、 $(i, j)$  が  $i \neq 1$  かつ  $j \neq 1$  かつ  $i \neq j$  を満たすときより、その場合の数は  ${}_5P_2 = 20$  通りある。

よって、その確率は  $\frac{20}{6^2} = \frac{5}{9}$  となる。



- (2)  $P_1, P_j, P_k$  を頂点とする三角形は、次の 3 種類となる。

(i)  $\triangle P_1P_2P_3$  と合同な二等辺三角形  $S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(ii)  $\triangle P_1P_2P_4$  と合同な直角三角形  $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) 正三角形  $P_1P_3P_5$   $S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi \times 3 = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

(i)~(iii)より、面積が最大となるのは、正三角形  $P_1P_3P_5$  の場合である。

このとき、 $(i, j) = (3, 5), (5, 3)$  より、その確率は  $\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$  である。

- (3) (i)  $\triangle P_1P_2P_3$  と合同な二等辺三角形のとき

$(i, j) = (2, 3), (3, 2), (2, 6), (6, 2), (5, 6), (6, 5)$  より 6 通りとなり、その確率は  $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$  である。

- (ii)  $\triangle P_1P_2P_4$  と合同な直角三角形のとき

(1)(2)の結果より、その確率は、 $\frac{5}{9} - \frac{1}{18} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$  である。

以上より、 $S$  の期待値  $E$  は、

$$E = 0 \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\sqrt{3} \times \frac{1}{18} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

**コメント**

確率の基本題です。なお、(3)の(ii)の場合は、斜辺の位置で場合分けをして直接的に求めても構いません。