２０２０ 入試対策
過去問ライブラリー

北海道大学
文系数学22か年

１９９８－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された北海道大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された問題は，その解答例の映像解説を YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}(x,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-3,\ 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$\tan\theta$ を x で表せ。

(2)　$x>0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。　[2019]

2　a と b は実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を m とする。

(1)　m を a と b で表せ。

(2)　$a+2b\leqq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ。また，このときの m の値を求めよ。　[2018]

3　$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10\quad(-2\leqq x\leqq 4)$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ の値も求めよ。

(2)　(1)の α，β に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2016]

4　$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$ とする。

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ。

(2)　t の取りうる値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。　[2013]

5　実数 x に対して $k\leqq x<k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1)　$n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2)　$[x]^2-5[x]+5<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3)　x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-5[x]+5=0$ を満たす x をすべて求めよ。　[2011]

6　$\gamma=1+\sqrt{3}i$ とする。ただし，i は虚数単位である。実数 a，b に対して多項式 $P(x)$ を，$P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8(\sqrt{3}+1)x+16$ で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$P(\gamma)=0$ となるように a と b を定めよ。

(2)　(1)で定めた a と b に対して，$P(x)=0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ。　[2009]

7　b は実数とし，c は 0 でない実数とする。2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解を α，β とおく。

(1)　α，β はともに 0 でないことを示せ。

(2)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数 r に等しいとき，b^2 を c と r を用いて表せ。　[2006]

8　正の実数 a に対し，$x=a+\dfrac{1}{a}$，$y=a-\dfrac{1}{a}$ とおく。このとき x^8-y^8 が最小となる a の値と，その最小値を求めよ。　[2004]

9　関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x+c$
ただし, a, b, c は定数とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ となるための a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2)　(1)の条件のもとで，$0\leqq x\leqq 1$ における 2 つの関数のグラフの共有点の個数を求めよ。　[2002]

10　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフを書け。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，x の関数 $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x を求めよ。　[2001]

11 正の数 a に対し，関数 $y = x^2 - ax$ $\left(\dfrac{a}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5a}{6}\right)$ のグラフを C とする。長方形 T で，一辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 長方形 T の周の長さの最大値を，a を用いて表せ。ただし，長方形の周の長さとは, 4 辺の長さの和のことをいう。

(2) 長方形 T の面積の最大値を, a を用いて表せ。 [1998]

■ 微分と積分

1 実数 a, b, c に対し，関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$ を満たしているとする。

(1) b と c を a で表せ。

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

[2019]

2 p を実数とする。関数 $y = x^3 + px^2 + x$ のグラフ C_1 と関数 $y = x^2$ のグラフ C_2 は，$x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつとする。

(1) このような p の値の範囲を求めよ。

(2) C_1 と C_2 の $x > 0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α, β $(\alpha < \beta)$ とし，$0 \leqq x \leqq \alpha$ と $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする。$S_1 = S_2$ となるような p の値を求めよ。また，このときの S_1 の値を求めよ。

[2018]

3 a, b を実数とし，関数 $f(x)$ が，$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値をもつとする。このような a, b が満たす条件を求めよ。また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。 [2017]

4　$a,\ b,\ c$ を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある。

(1)　P における C の接線の方程式を求めよ。

(2)　P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式として求めよ。

(3)　(2)の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。　[2016]

5　2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=-(x-1)^2$ がある。a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を l とする。

(1)　l の方程式を a で表せ。

(2)　C_2 と l が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3)　C_2 と l が異なる 2 つの共有点 R, S をもつとする。線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ。　[2015]

6　2 つの放物線 $C_1: y=-x^2+\dfrac{3}{2}$，$C_2: y=(x-a)^2+a\quad(a>0)$ がある。点 $\mathrm{P}_1\left(p,\ -p^2+\dfrac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線を l_1 とする。

(1)　C_1 と C_2 が共有点をもたないための a に関する条件を求めよ。

(2)　l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と，l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を $a,\ p$ を用いて表せ。

(3)　C_1 と C_2 が共有点をもたないとする。(2)で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき，p を求めよ。　[2014]

7　実数 t が $0\leqq t<8$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ を考える。

(1)　点 P から放物線 $y=x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ。

(2)　(1)での 2 本の接線の接点を Q および R とする。線分 PQ, PR と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。　[2013]

8　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x=\sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。　[2012]

9　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$，$\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ がある。不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D，不等式 $y \leqq x^2$ の表す領域を E とする。

(1)　点 C が領域 D に含まれ，点 A と点 B が領域 E に含まれるような a，b の条件を連立不等式で表せ。

(2)　(1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域 F を ab 平面上に図示せよ。

(3)　(2)で求めた領域 F の面積を求めよ。　[2012]

10　a を正の実数，b と c を実数とし，2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$，$\mathrm{Q}(1,\ 4)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C とおく。C 上の 2 点 P, Q における C の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1)　b の値を求め，c を a で表せ。

(2)　l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3)　放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。　[2011]

11　a を正の実数とし，2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

12　xy 平面において，放物線 $y = -x^2 + 6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ，$(a,\ 0)$ と $(a,\ -a^2 + 6a)$ を結ぶ線分を 1 辺とする長方形を考える。ただし，$0 < a < 3$ とする。このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を a の式で表せ。

(2)　$S(a)$ の値が最大となる a の値を求め，関数 $S(a)$ のグラフをかけ。　[2008]

13　$a > 0$, $b \geqq 0$, $0 < p < 1$ とし，関数 $y = ax - bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通るとする。このグラフの $0 \leqq x \leqq p$ に対応する部分を C で表す。

(1)　b を a と p を用いて表せ。

(2)　a が範囲 $p \leqq a \leqq 1$ を動くとき，C 上の点 $(x,\ y)$ の動く領域を D とする。

　(i)　x を固定して y の動く範囲を求めよ。

　(ii)　D を図示せよ。

(3)　D の面積 S を p で表し，$\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ。

[2007]

14 実数 p に対して 3 次方程式 $4x^3-12x^2+9x-p=0$ ……①を考える。

(1) 関数 $f(x)=4x^3-12x^2+9x$ の極値を求めて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 方程式①の実数解の中で，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つであるための p の条件を求めよ。 [2006]

15 次の問いに答えよ。

(1) x についての 2 次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)\,dx$ の最小値と最大値を求めよ。 [2005]

16 a を正の実数とし，関数 $F(x)=\int_x^{x+a}\left|\,|t|-1\,\right|dt$ を考える。

(1) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに，$F'(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2) $0<a<2$ のとき，$F(x)$ の極大値および極小値と，それらを与える x の値を求めよ。

(3) $a>2$ のとき，$F(x)$ の極小値と，それを与える x の値を求めよ。 [2004]

17 実数 $a,\ b,\ c$ に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。このとき次の 2 つの等式

$$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx=\frac{1}{2},\quad \int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx=0$$

を満たす実数 $p,\ q$ が存在するための $a,\ b,\ c$ の条件と，そのときの $p,\ q$ を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。 [2003]

18 3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ がある。$x=a$ における曲線 $y=f(x)$ の接線が接点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 以外の点 Q で $y=f(x)$ のグラフと交わっているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の x 座標 b を a と p で表せ。

(2) $x=c$ における $y=f(x)$ の接線が点 P を通るような実数 c のうち $c\neq a$ なるものを a と p で表せ。

(3) $\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}$ の値を求めよ。 [2000]

19　$0<a<1$ とする。曲線 $y=1-x^2$ と $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ の第 1 象限内での交点を A とし, A から x 軸に下ろした垂線の足を B とする。また, 原点を O とし, 線分 OB と線分 AB と曲線 $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ とで囲まれた図形の面積を S とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　点 B の座標を求めよ。

(2)　面積 S を, a を用いて表せ。

(3)　面積 S を最大にする a の値を求めよ。 [1999]

■ 図形と式

1　$a,\ b$ を実数とし, xy 平面上の 3 直線を

$$l: x+y=0\,,\ \ l_1: ax+y=2a+2\,,\ \ l_2: bx+y=2b+2$$

で定める。

(1)　直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。

(2)　$l,\ l_1,\ l_2$ によって三角形がつくられるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(3)　$a,\ b$ は(2)で求めた条件を満たすものとする。点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にあるような $a,\ b$ の範囲を求め, それを ab 平面上に図示せよ。 [2011]

2　実数 $t>0$ に対して, 座標平面上に点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$, 点 $\mathrm{Q}(2t,\ 1-4t^2)$, 点 $\mathrm{R}(-t,\ 1-t^2)$ をとる。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた値を t_0 とする。$0<t<t_0$ のとき, 三角形△PQR の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。 [2009]

3　a を定数とする。xy 平面上の点の集合 $X(a)$, L を次のように定める。

$$X(a)=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ (x-a)^2+y^2\leqq\frac{(a+1)^2}{4}\right\}$$

$$L=\{(x,\ y)\mid y=x-1\}$$

(1)　$X(a)\cap L=\phi$ となるような a の値の範囲を求めよ。(ただし ϕ は空集合を表す)

(2)　いかなる実数 a に対しても $\mathrm{P}\notin X(a)$ となるような点 P の集合を求め, xy 平面上に図示せよ。 [2008]

4　$a,\ b$ を実数とする。方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，すべての解の絶対値が 1 以下であるとする。

(1)　この条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a+2b$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

5　xy 平面上の放物線 $A : y=x^2$，$B : y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする。

(1)　$x_1-x_2=2$ が成り立つとき，b を a で表せ。

(2)　$x_1-x_2=2$ を満たしながら $a,\ b$ が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ。　[2003]

6　a, b を $2b<3a<6b$ を満たす正の定数とする。

(1)　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x+3y\leqq 12,\ 3x+y\leqq 12,\ a(x-3)+b(y-2)\leqq 0,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

(2)　実数 x, y が(1)の連立不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値を a, b を用いて表せ。

[2002]

7　(1)　次の不等式の表す領域 D を図示せよ。$|x|\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$

(2)　点 A を $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3)　領域 D の点 $(x,\ y)$ について，$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。　[2000]

8　次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$$x-y<0,\ x+y<2,\ ax+(2a+3)y<1$$

[1998]

■ 図形と計量

1　$t>1$ とする。△ABC において $\mathrm{AB}=\sqrt{t^2+1}$，$\mathrm{BC}=t-1$，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$ とし，点 O を△ABC の外心とする。

(1)　∠ACB の大きさを求めよ。

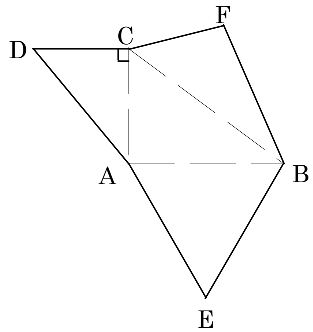
(2)　直線 CO と直線 AB が垂直に交わるときの t の値を求めよ。　[2018]

2　直角三角形 ABC において，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{AB}=1$ であるとする。$\angle\mathrm{B}=\theta$ とおく。点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし，点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす。AE と CD の交点を F とする。

(1)　$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}}$ を θ で表せ。

(2)　△FEC の面積を θ で表せ。　[2010]

3　図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ で，△ABE は正三角形である。このとき，V の体積を求めよ。　[2009]



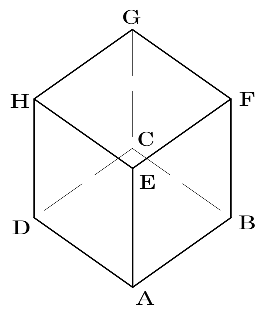
4　方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1)　点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である 2 つの円は，どちらも円 C に接することを示せ。

(2)　点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

5　半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。　[2005]

6　1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある。3 点 A, C, F を含む平面と直線 BH の交点を P, P から面 ABCD に下ろした垂線の足を Q とする。



(1)　長方形 DBFH を描き，三角形 ACF との交線と点 P を図示せよ。さらに，線分 BP, PQ の長さを求めよ。

(2)　四面体 ABCF に内接する球の中心を O とする。点 O は線分 BP 上にあることを示せ。

(3)　四面体 ABCF に内接する球の半径を求めよ。　[2004]

7　1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC を底面とする四面体 PABC を考える。$PA = PB = PC = 2$とする。

(1)　四面体 PABC の体積を求めよ。

(2)　辺 AB 上の点 E と辺 AC 上の点 F が $AE = AF$，$\cos\angle EPF = \dfrac{4}{5}$を満たすとき，長さ AE を求めよ。　[2003]

8　面積 1 の三角形 ABC の各辺の長さをそれぞれ$AB = 2$，$BC = a$，$CA = b$とする。さらに，C から直線 AB へ下ろした垂線の足 D が線分 AB 上にあるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$AD = x$とするとき，$a^2 + (2\sqrt{3} - 1)b^2$を，xを用いて表せ。

(2)　$a^2 + (2\sqrt{3} - 1)b^2$を最小にする x を求めよ。また，そのときの$\angle BAC$の大きさを求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1　p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点$A(-1,\ 2,\ 0)$，$B(2,\ -2,\ 1)$，$P(p,\ -1,\ 2)$があり，3 点 O, A, B が定める平面をαとする。また，点 P から平面αに垂線を下ろし，αとの交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ となる実数 a, b を p を用いて表せ。

(2)　点 Q が$\triangle OAB$の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。　[2019]

2　平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。円 C の内部に点 A がある。円 C の周上を 2 点 P, Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く。線分 PQ の中点を R とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$|\vec{a}| = r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}$ とする。ただし，$0 < r < 1$ とする。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ。

(2)　直線 OA 上の点 B で，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ。また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ。　[2017]

3　$\triangle$ABC が，AB $= 2$，AC $= 1+\sqrt{3}$，$\angle$ACB $= 45°$ を満たすとする。

(1)　$\beta = \angle$ABC とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2)　(1)の β の値をすべて求めよ。

(3)　$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。$\triangle$ABC が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s, t を求めよ。　[2016]

4　平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。ただし，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi - \alpha$ であることを示せ。

(3)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|} = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。　[2015]

5　$\triangle$ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して，BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし，線分 AD と $\triangle$ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。　[2014]

6 空間ベクトル$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を考える。$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$で，$\vec{b}$は xy 平面上にあり，その y 成分は正とする。また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$とおく。

(1) $|p|<1$であることを示せ。また，pを用いて$\vec{b}$の成分表示をかけ。

(2) $\vec{c}$と$\vec{d}$は相異なり，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=p$を満たすとする。$\vec{c}$の z 成分が正のとき，pを用いて$\vec{c}$と$\vec{d}$の成分表示をかけ。

(3) 上の条件に加えて$\vec{c}\cdot\vec{d}=p$であるとき p の値を求めよ。 [2013]

7 $m>0$, $n>0$, $0<x<1$ とする。△OAB の辺 OA を$m:n$に内分する点を P, 辺 OB を$n:m$に内分する点を Q とする。また，線分 AQ を$1:x$に外分する点を S, 線分 BP を$1:x$に外分する点を T とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$, m, n, x で表せ。

(2) 3 点 O, S, T が一直線上にあるとき，x を m, n で表せ。 [2012]

8 空間の 2 点 P, Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-\sin 3t,\ \cos 3t,\ -1)$$

によって与えられている。ただし，$-180°\leqq t\leqq 180°$とする。

(1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$のなす角が$0°$以上$90°$以下となる t の範囲を求めよ。 [2006]

9 正の数 a に対し，空間内の 4 点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$を考える。$\angle\mathrm{OPQ}=60°$が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) aの値を求めよ。

(2) A から 3 点 O, P, Q を通る平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列

1 n を自然数とする。数列2, 1, 2, 1, 1のように各項が 1 または 2 の有限数列（項の個数が有限である数列）を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。例えば，$n=1$ のときは，1 項からなる数列 1 のみである。したがって，$s_1=1$ となる。$n=2$ のときは，1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列1, 1の 2 つである。したがって，$s_2=2$ となる。

(1) s_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ。

(3) 3 以上のすべての n に対して $s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α，β の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 1 組求めよ。

(4) s_n を求めよ。 [2019]

2 自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 $a,\ n,\ k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。 [2017]

3 x, y を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。 [2016]

4 p は 0 でない実数とし，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n=p^n a_n$ とする。b_{n+1} を b_n, n, p で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。 [2015]

5 次の条件で定められる数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 以下が成立するように，実数 $s,\ t\ (s>t)$ を定めよ。

$$\begin{cases}a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)\\ a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n)\end{cases}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 一般項a_nを求めよ。 [2014]

6 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ を第 n 項とする数列を，次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\underset{\text{第1群}}{\{a_1\}},\ \underset{\text{第2群}}{\{a_2,\ a_3,\ a_4\}},\ \underset{\text{第3群}}{\{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\}},\ \cdots\cdots$$

k を自然数として，以下の問いに答えよ。

(1) 第 k 群の最初の項を求めよ。

(2) 第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k を求めよ。

(3) $(k^2+1)S_k\leqq\dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 k を求めよ。 [2010]

7 座標平面上の点$(a,\ b)$で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ。$y=3x^2-6x$ で表される放物線を C とする。n を自然数とし，C 上の点 $\mathrm{P}(n,\ 3n^2-6n)$ をとる。原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。C と線分 OP で囲まれる図形を D とする。ただし，D は境界を含むとする。$0\leqq k\leqq n$ を満たす整数 k に対して，直線 $x=k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f(k)$を求めよ。

(2) D に含まれる格子点の総数を求めよ。

(3) $f(k)$が最大になるような k を求めよ。 [2009]

8 k を実数とし，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で数列$\{a_n\}$を定める。

(1) $k=2$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) すべての n について，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$を満たす α，β に対して，$\alpha+\beta=k$，$\alpha\beta=1$ が成り立つことを示せ。

(3) (2)において，異なる実数 α と β が存在するための k の条件を求め，そのときの α と β の値を求めよ。 [2008]

9　2 次の整式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。すべての自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。 [2005]

10　xy 平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える。ただし，$a,\ b,\ c$ は定数で $a\neq 0$ とする。この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ での接線が x 軸と交点をもつとき，その交点を $(f(p),\ 0)$ とする。

(1)　$f(p)$ が p の 1 次関数になるための $a,\ b,\ c$ に対する必要十分条件を求めよ。

(2)　$x_1=p,\ x_2=f(x_1),\ x_3=f(x_2),\ \cdots,\ x_n=f(x_{n-1})$ とおくとき，(1)で求めた条件の下で $x_n\ (n\geqq 2)$ を求めよ。 [2001]

11　$\dfrac{1}{x}$ の小数部分が $\dfrac{x}{2}$ に等しくなるような正の数 x をすべて求めよ。ただし，正の数 a の小数部分とは，a をこえない最大の整数 n との差 $a-n$ のことをいう。たとえば，3 の小数部分は 0 であり，3.14 の小数部分は 0.14 である。 [1998]

■ 確率

1　赤色，青色，黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色，青色，黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ $R,\ B,\ Y$ とし，自然数 $s,\ t,\ u$ を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める。

(1)　$s,\ t,\ u$ のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2)　$s>t>u$ となる確率を求めよ。 [2018]

2　正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は，1 秒ごとに，隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする。

(1)　数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2)　確率 p_n を求めよ。 [2017]

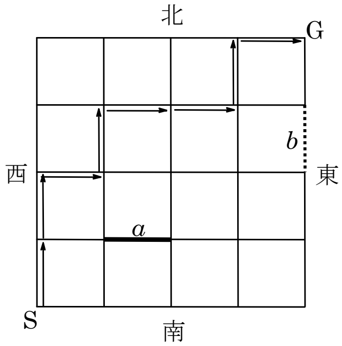
3 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える。

(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率を求めよ。

[2015]

4 図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1) a を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2) a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3) すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。 [2014]

5 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i) X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1) 2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2) 2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(0,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3) 2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。 [2013]

6　A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする。A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

(1)　P_2 を p と q で表せ。

(2)　P_3 を p と q で表せ。

(3)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_3<P_2$ であることを示せ。　[2012]

7　n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　s_2 を求めよ。

(2)　s_3 と a_3 を求めよ。

(3)　s_4 と a_4 を求めよ。　[2011]

8　1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

(1)　出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。

(2)　出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 である確率を求めよ。　[2008]

9　数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1，a_2，…，a_n を考える。

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし，$j=1,\ 2,\ 3$ とする。

　(i)　$A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ。

　(ii)　$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ で表し，$A_n(3)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。　[2007]

10　1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

(1)　ちょうど 3 回目に終了する確率を求めよ。

(2)　3 回目以内（3 回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(3)　ちょうど r 回目に終了する確率を求めよ。ただし $r \geqq 2$ とする。　[2006]

11　袋の中に赤，青，黄，緑の 4 色の球が 1 個ずつ合計 4 個入っている。袋から球を 1 個取り出してその色を記録し袋に戻す試行を，くり返し 4 回行う。こうして記録された相異なる色の数を X とし，X の値が k である確率を P_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とする。

(1)　確率 P_3 と P_4 を求めよ。

(2)　X の期待値 E を求めよ。　[2005]

12　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果，部屋 A, B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ。　[2004]

13　点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

[2003]

14 (1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち，1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。 [2002]

15 A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが 2 連勝するか，または 4 回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々 $\dfrac{1}{2}$ である。

(1)　A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率を求めよ。

(2)　A が 2 連勝して終了する確率を求めよ。 [2001]

16 1 から 4 までの番号を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す。これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の積が 3 の倍数である確率を a_n，4 の倍数である確率を b_n とおく。

(1)　a_n と b_n を求めよ。

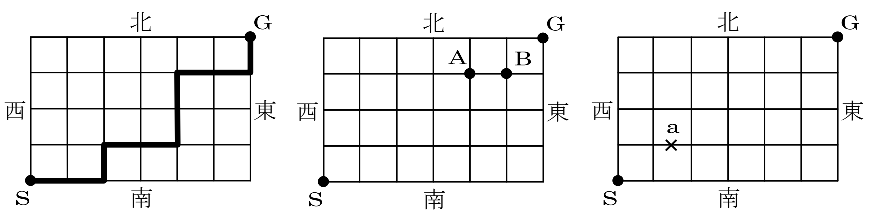
(2)　$n \geqq 2$ のとき，$b_n > a_n$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。 [2000]

17 図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の一例である。）

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。

(3)　図 3 の a の部分が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



（図1）　（図2）　（図3）

[1999]

■ 論証

1　次の命題の真偽を述べ，その理由を説明せよ。ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

(2)　x が実数であるとき，x^2+x が有理数ならば，x は有理数である。

(3)　x，y がともに無理数ならば，$x+y$，x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である。　[1999]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

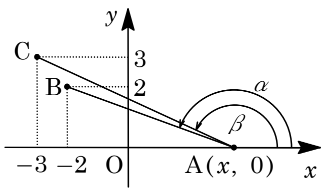
x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 $A(x,\ 0)$，$B(-2,\ 2)$，$C(-3,\ 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$\tan\theta$ を x で表せ。

(2)　$x>0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。　[2019]

解答例＋映像解説

(1)　$x>0$ のとき，3 点 $A(x,\ 0)$，$B(-2,\ 2)$，$C(-3,\ 3)$ に対し，直線 AB, 直線 AC と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とおくと，



$$\tan\alpha=\frac{-2}{x+2},\ \tan\beta=\frac{-3}{x+3}$$

さて，直線 AB と直線 AC のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\theta=\alpha-\beta$ から，

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{-2}{x+2}-\dfrac{-3}{x+3}}{1+\dfrac{-2}{x+2}\cdot\dfrac{-3}{x+3}}$$

$$=\frac{-2(x+3)+3(x+2)}{(x+2)(x+3)+6}=\frac{x}{x^2+5x+12}$$

(2)　(1)から $\tan\theta=\dfrac{1}{x+5+\dfrac{12}{x}}$ となり，$x>0$ なので相加平均と相乗平均の関係から，

$$x+\frac{12}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}}=4\sqrt{3}$$

等号は $x=\dfrac{12}{x}$ すなわち $x=2\sqrt{3}$ のときに成立し，

$$\frac{1}{x+5+\dfrac{12}{x}}\leqq\frac{1}{5+4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}-5}{23}$$

よって，$\tan\theta$ は $x=2\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$ をとる。

コメント

2 直線のなす角を題材にした三角関数の応用題ですが，位置関係が明確なので場合分けの必要はありません。そして，相加平均と相乗平均の関係を利用した最大・最小が絡んだ構図となっています。いずれも基本的な内容です。

問　題

a と b は実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を m とする。

(1) m を a と b で表せ。

(2) $a+2b \leqq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ。また，このときの m の値を求めよ。 [2018]

解答例＋映像解説

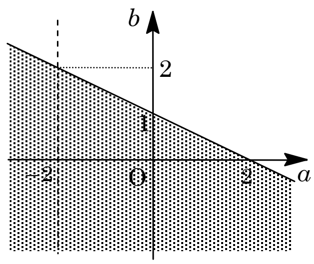
(1) 関数 $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ に対して，$0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を m とおくと，

(i) $-\dfrac{a}{2}<0\ (a>0)$ のとき　$m=f(0)=b$

(ii) $0 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1\ (-2 \leqq a \leqq 0)$ のとき　$m=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+b$

(iii) $-\dfrac{a}{2}>1\ (a<-2)$ のとき　$m=f(1)=1+a+b$

(2) $a+2b \leqq 2$ を ab 平面上の図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。



(i) $a>0$ のとき

(1)から $m=b$ となるので，直線 $b=m$ が網点部の $a>0$ の領域と共有点をもつ条件は，図より $m<1$ である。

(ii) $-2 \leqq a \leqq 0$ のとき

(1)から $m=-\dfrac{a^2}{4}+b$ となるので，放物線 $b=\dfrac{a^2}{4}+m$ ……①が網点部の $-2 \leqq a \leqq 0$ の領域と共有点をもつ条件を求める。

まず，①と境界線 $a+2b=2$ ……②が接する場合，①②を連立して，

$$a+\frac{a^2}{2}+2m=2\,,\ a^2+2a+4m-4=0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，$D/4=1-(4m-4)=0$ から $m=\dfrac{5}{4}$ となる。このとき③から $a=-1$ であり，この値は $-2 \leqq a \leqq 0$ を満たしている。

よって，①が網点部の領域と共有点をもつ条件は，図より $m \leqq \dfrac{5}{4}$ である。等号は $a=-1$，②から $b=\dfrac{1}{2}(2+1)=\dfrac{3}{2}$ のときに成立する。

(iii) $a<-2$ のとき

$m=1+a+b$ となるので，直線 $b=-a+m-1$ が網点部の $a<-2$ の領域と共有点をもつ条件は，$(a,\ b)=(-2,\ 2)$ を通る場合を考え，図より $m<1$ である。

(i)～(iii)より, m は $(a,\ b)=\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

コメント

(1)は 2 次関数の最大・最小に関する定型的な問題です。(2)では 1 文字を消去してもよいですが, 解答例では領域と最大・最小の考え方を採用しています。

問　題

$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10\quad(-2\leqq x\leqq 4)$ とおく。

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α, β $(\alpha<\beta)$ の値も求めよ。

(2) (1)の α, β に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1) $-2\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10$ に対して，

(i) $-2\leqq x<0$ のとき

$$f(x)=x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=2x^2-4x-6=2(x-1)^2-8$$

(ii) $0\leqq x<1$ のとき

$$f(x)=-x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=-6$$

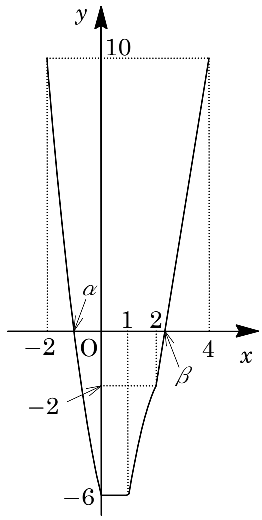
(iii) $1\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=-x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10$$
$$=-2x^2+10x-14=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

(iv) $2\leqq x<4$ のとき

$$f(x)=x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10=6x-14$$

(i)～(iv)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



また，$-2\leqq x<0$ における x 軸との交点 $x=\alpha$ は，$2x^2-4x-6=0$ から $\alpha=-1$ となり，$2\leqq x<4$ における x 軸との交点 $x=\beta$ は，$6x-14=0$ から $\beta=\dfrac{7}{3}$ である。

(2) $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ とおくと，I は $y=f(x)$ のグラフと x 軸ではさまれた領域の面積の符号を変えた数値となり，

$$I=\int_{-1}^{0}(2x^2-4x-6)\,dx-1\cdot 6+\int_1^2(-2x^2+10x-14)\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot 2$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{-1}^{0}-6+\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-14x\right]_1^2-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}+2-6-6-\frac{2}{3}\cdot 7+5\cdot 3-14-\frac{1}{3}=-\frac{40}{3}$$

コメント

場合分けをして，絶対値つきの関数のグラフをかく問題です。なお，(2)については，計算を少し簡単にするために，長方形や三角形は符号付きの面積を対応させています。

問　題

$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$ とする。

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ。

(2)　t の取りうる値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおくと，$t^2=1+2\sin x\cos x$ から $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)$ となり，

$$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}(t^2-1)+t=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　$f(x)=g(t)$ とおくと，(1)より，$g(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$

すると，$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は最小値 $-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ をとる。

このとき，$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$ となり，

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\quad x=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$$

また，$t=\sqrt{2}$ のとき，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ をとる。

このとき，$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ から，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ となり，

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{4}$$

コメント

三角関数の基本の確認です。

問　題

実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1) $n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2) $[x]^2-5[x]+5<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-5[x]+5=0$ を満たす x をすべて求めよ。　[2011]

解答例

(1) $n^2-5n+5<0$ ……①より，$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<n<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ となり，$2<\sqrt{5}<3$ から，

$$1<\frac{5-\sqrt{5}}{2}<\frac{3}{2},\ \ \frac{7}{2}<\frac{5+\sqrt{5}}{2}<4$$

よって，①を満たす整数 n は，$n=2,\ 3$

(2) $[x]=n$ とおくと，$[x]^2-5[x]+5<0$ は①と一致するので，(1)より，$[x]=2,\ 3$

よって，$2 \leqq x < 4$

(3) $2 \leqq x < 4$ のとき，$x^2-5[x]+5=0$ ……②に対して，

(i) $[x]=2\ (2 \leqq x < 3)$ のとき

②より，$x^2-10+5=0$ となり，$2 \leqq x < 3$ から，$x=\sqrt{5}$

(ii) $[x]=3\ (3 \leqq x < 4)$ のとき

②より，$x^2-15+5=0$ となり，$3 \leqq x < 4$ から，$x=\sqrt{10}$

(i)(ii)より，$x=\sqrt{5},\ \sqrt{10}$

コメント

ガウス記号を題材としていますが，内容は与えられた定義の理解を問うものです。

問　題

$\gamma = 1+\sqrt{3}i$ とする。ただし, i は虚数単位である。実数 a, b に対して多項式 $P(x)$ を, $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8(\sqrt{3}+1)x + 16$ で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　$P(\gamma) = 0$ となるように a と b を定めよ。

(2)　(1)で定めた a と b に対して, $P(x) = 0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ。　[2009]

解答例

(1)　実数係数の方程式 $P(x) = 0$ の解の 1 つが $\gamma = 1+\sqrt{3}i$ より, $\overline{\gamma} = 1-\sqrt{3}i$ も解となり

$$\gamma + \overline{\gamma} = 2,\quad \gamma\overline{\gamma} = 4$$

これより, $P(x)$ を $x^2 - 2x + 4$ で割ると,

$$P(x) = (x^2 - 2x + 4)\{x^2 + (a+2)x + 2a + b\} + (2b - 8\sqrt{3} - 16)x - 8a - 4b + 16$$

すると, 余りが 0 になることより,

$$2b - 8\sqrt{3} - 16 = 0 \cdots\cdots\cdots①,\quad -8a - 4b + 16 = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

①より, $b = 8 + 4\sqrt{3}$

②に代入して, $a = \dfrac{1}{2}(4-b) = -2 - 2\sqrt{3}$

(2)　(1)より, $P(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4)$ となり, $P(x) = 0$ の $x \neq \gamma$ の解は,

$$x = 1 - \sqrt{3}i,\quad x = \sqrt{3} \pm i$$

コメント

複素数と方程式の基本問題ですので, 計算ミスが致命傷になります。

問　題

b は実数とし，c は 0 でない実数とする。2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解を α，β とおく。

(1) α，β はともに 0 でないことを示せ。

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数 r に等しいとき，b^2 を c と r を用いて表せ。 [2006]

解答例

(1) 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ に対し，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-b\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta=c\cdots\cdots\cdots②$$

$c\neq 0$ なので，②から α，β はともに 0 ではない。

(2) (i) $\dfrac{\alpha}{\beta}=r$ のとき

$\alpha=\beta r$ より，①，②に代入して，

$$\beta(r+1)=-b\cdots\cdots\cdots③,\quad \beta^2r=c\cdots\cdots\cdots④$$

$r\neq-1$ のとき，③より $\beta=\dfrac{-b}{r+1}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{b^2}{(r+1)^2}r=c,\quad b^2=\frac{(r+1)^2}{r}c\cdots\cdots\cdots⑤$$

$r=-1$ のとき，③より $b=0$ となるが，この場合は⑤に含まれる。

(ii) $\dfrac{\beta}{\alpha}=r$ のとき

(i)と同様にすると，α，β に関する対称性より，⑤を導くことができる。

(i)(ii)より，$b^2=\dfrac{(r+1)^2}{r}c$

コメント

2 次方程式の解と係数の関係についての問題です。式変形がやや煩雑です。

問　題

正の実数 a に対し，$x=a+\dfrac{1}{a}$，$y=a-\dfrac{1}{a}$ とおく。このとき x^8-y^8 が最小となる a の値と，その最小値を求めよ。　[2004]

解答例

$x=a+\dfrac{1}{a}$，$y=a-\dfrac{1}{a}$ より，$x+y=2a$，$x-y=\dfrac{2}{a}$，$xy=a^2-\dfrac{1}{a^2}$ となり，

$$x^2-y^2=2a\cdot\frac{2}{a}=4,\quad x^2+y^2=(2a)^2-2\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)=2a^2+\frac{2}{a^2}$$

さて，$x^8-y^8=(x^4-y^4)(x^4+y^4)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$ なので，

$$x^4+y^4=(x^2-y^2)^2+2x^2y^2=4^2+2\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2=2a^4+\frac{2}{a^4}+12$$

よって，
$$x^8-y^8=4\left(2a^2+\frac{2}{a^2}\right)\left(2a^4+\frac{2}{a^4}+12\right)=16\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}+6\right)$$
$$=16\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left\{\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2+4\right\}$$

ここで，$t=a^2+\dfrac{1}{a^2}$ とおくと，$t\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{1}{a^2}}=2$ となり，等号は $a^2=\dfrac{1}{a^2}$ すなわち $a^4=1$，$a>0$ から $a=1$ のときに成立する。

そこで，$f(t)=16t(t^2+4)=16(t^3+4t)$ とおくと，$f'(t)=16(3t^2+4)>0$ なので，

$$f(t)\geqq f(2)=256\quad(t\geqq 2)$$

以上より，x^8-y^8 は $a=1$ のとき最小値 256 をとる。

コメント

$a^2+\dfrac{1}{a^2}$ を 1 つの文字として置き換えればよいことは，計算を進めていくうちにわかってきます。そうすると，相加平均・相乗平均の出番です。

問　題

関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x+c$

ただし, a, b, c は定数とする。

(1) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ となるための a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2) (1)の条件のもとで, $0\leqq x\leqq 1$ における 2 つの関数のグラフの共有点の個数を求めよ。 [2002]

解答例

(1) $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x+c$ に対して，$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ より，

$$\int_0^1 (x^2+ax+b)\,dx=\int_0^1 (x+c)\,dx\,,\ \left[\frac{x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}+bx\right]_0^1=\left[\frac{x^2}{2}+cx\right]_0^1$$

よって，$\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=\frac{1}{2}+c$ より，$c=\frac{a}{2}+b-\frac{1}{6}$

(2) $f(x)=g(x)$ とすると，$x^2+(a-1)x+b-c=0$

(1)より，$x^2+(a-1)x-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=0$ ………(＊)

さて, 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ のグラフの共有点の個数は, (＊)の実数解の個数に一致する。よって，$h(x)=x^2+(a-1)x-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}$ とおき，$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)=0$ の実数解の個数を求める。

ここで，$h(0)=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)$，$h(1)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)$ であり，さらに，$h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}<0$ に注目すると,

(i) $a>\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)<0$，$h(1)>0$ より, $0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 1 個の実数解をもつ。

よって，$f(x)$，$g(x)$ のグラフは 1 個の共有点をもつ。

(ii) $-\frac{1}{3}\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)\geqq 0$，$h(1)\geqq 0$ より, $0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 2 個の実数解をもつ。

よって，$f(x)$，$g(x)$ のグラフは 2 個の共有点をもつ。

(iii) $a<-\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)>0$，$h(1)<0$ より, $0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 1 個の実数解をもつ。

よって，$f(x)$，$g(x)$ のグラフは 1 個の共有点をもつ。

コメント

$h\left(\frac{1}{2}\right)<0$ であることが発見できれば, 場合分けの繁雑さが軽減できます。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフを書け。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，x の関数 $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x を求めよ。 [2001]

解答例

(1)　$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ に対して，

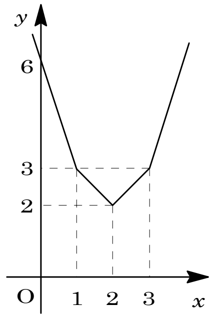
(i)　$x<1$ のとき　$y=-(x-1)-(x-2)-(x-3)=-3x+6$

(ii)　$1\leqq x<2$ のとき　$y=(x-1)-(x-2)-(x-3)=-x+4$

(iii)　$2\leqq x<3$ のとき　$y=(x-1)+(x-2)-(x-3)=x$

(iv)　$x\geqq 3$ のとき　$y=(x-1)+(x-2)+(x-3)=3x-6$

以上まとめると，関数 $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフは右図の折れ線のようになる。



(2)　(1)と同様に考えると，関数 $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ のグラフは，連続な折れ線となり，$n\leqq x<n+1$ のとき傾き -1，$n+1\leqq x<n+2$ のとき傾き 1 なので，この折れ線の傾きが負から正に変わるのは，$x=n+1$ の前後である。

よって，最小値を与える x は $x=n+1$ であり，その値は，

$$\sum_{k=1}^{2n+1}|n+1-k|=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)+0+\sum_{k=n+2}^{2n+1}(k-n-1)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\times 2=n(n+1)$$

コメント

有名問題です。(2)の解は，(1)から類推するものでしょうが，どの程度まで書けばよいのか迷います。

問　題

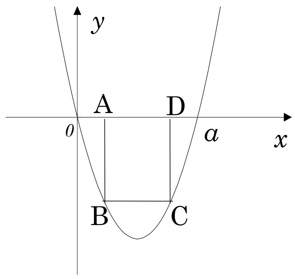
正の数 a に対し，関数 $y=x^2-ax\ \left(\dfrac{a}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5a}{6}\right)$ のグラフを C とする。長方形 T で，一辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 長方形 T の周の長さの最大値を，a を用いて表せ。ただし，長方形の周の長さとは, 4 辺の長さの和のことをいう。

(2) 長方形 T の面積の最大値を, a を用いて表せ。 [1998]

解答例

(1) 放物線 C の軸が $x=\dfrac{a}{2}$ から，$0<t\leqq\dfrac{a}{3}$ として，長方形の左側の辺を $x=\dfrac{a}{2}-t$，右側の辺を $x=\dfrac{a}{2}+t$ と表すと，



$$\mathrm{AD}=2t$$
$$\mathrm{AB}=-\left\{\left(\frac{a}{2}-t\right)^2-a\left(\frac{a}{2}-t\right)\right\}=-t^2+\frac{a^2}{4}$$

周の長さ l は,

$$l=2\cdot 2t+2\left(-t^2+\frac{a^2}{4}\right)=-2t^2+4t+\frac{a^2}{2}=-2(t-1)^2+2+\frac{a^2}{2}$$

(i) $1\leqq\dfrac{a}{3}\ (a\geqq 3)$ のとき　$t=1$ のとき l は最大で，最大値は $2+\dfrac{a^2}{2}$

(ii) $\dfrac{a}{3}<1\ (0<a<3)$ のとき　$t=\dfrac{a}{3}$ のとき l は最大で，最大値は $\dfrac{5}{18}a^2+\dfrac{4}{3}a$

(2) 長方形の面積を S とすると,

$$S=2t\left(-t^2+\frac{a^2}{4}\right)=-2t^3+\frac{a^2}{2}t$$
$$S'=-6t^2+\frac{a^2}{2}=-6\left(t-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{6}a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ のとき S は最大で，最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3$

コメント

放物線の軸に関する対称性を利用して変数を設定するところが，本問の唯一のポイントです。これによって(2)の計算量はぐっと減ります。

問　題

実数 $a,\ b,\ c$ に対し，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x)=f'(x)g(x)-6x$ を満たしているとする。

(1)　b と c を a で表せ。

(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

[2019]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ に対し，$f'(x)=3x^2-6ax+b$

条件より，$g(x)$ を 1 次関数として，$f(x)=f'(x)g(x)-6x$ ………①

$$f(x)+6x=f'(x)g(x)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$f(x)+6x=x^3-3ax^2+(b+6)x+c$ を $f'(x)$ で割ると，

$$f(x)+6x=f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{a}{3}\right)+\left(-2a^2+\frac{2}{3}b+6\right)x+\left(\frac{ab}{3}+c\right)$$

すると，②から，$g(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{a}{3}$ となり，

$$-2a^2+\frac{2}{3}b+6=0\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad \frac{ab}{3}+c=0\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③から $b=3a^2-9$ となり，④に代入すると，$c=-a^3+3a$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-9)x-a^3+3a$

$$f'(x)=3x^2-6ax+3a^2-9$$
$$=3\{(x-a)^2-3\}$$

$f'(x)=0$ の解は $x=a\pm\sqrt{3}$ となることより，$f(x)$ の増減を調べると，右表のようになる。

x	$\cdots$	$a-\sqrt{3}$	$\cdots$	$a+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつ条件は，$f(a-\sqrt{3})>0$ かつ $f(a+\sqrt{3})<0$ であり，①から，

$$f(a-\sqrt{3})=-6(a-\sqrt{3})>0,\quad f(a+\sqrt{3})=-6(a+\sqrt{3})<0$$

よって，$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ である。

コメント

微分の応用題です。与えられた①式が(2)の極値を求める誘導になっています。

問　題

p を実数とする。関数 $y=x^3+px^2+x$ のグラフ C_1 と関数 $y=x^2$ のグラフ C_2 は，$x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつとする。

(1)　このような p の値の範囲を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 の $x>0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とし，$0\leqq x\leqq\alpha$ と $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする。$S_1=S_2$ となるような p の値を求めよ。また，このときの S_1 の値を求めよ。

[2018]

解答例＋映像解説

(1)　$C_1 : y=x^3+px^2+x$ ……①，$C_2 : y=x^2$ ……②を連立して，

$$x^3+px^2+x=x^2,\ x\{x^2+(p-1)x+1\}=0$$

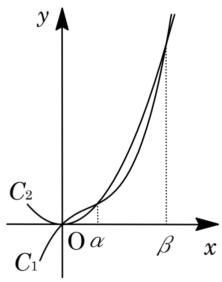
すると，$x=0$ または $x^2+(p-1)x+1=0$ ……③となり，条件から C_1 と C_2 は $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつことより，③は異なる正の解をもつことになる。

そこで，定数項が $1>0$ であることに着目すると，その条件は，

$$D=(p-1)^2-4>0\ \cdots\cdots④,\ -(p-1)>0\ \cdots\cdots⑤$$

すると，④より $(p-1+2)(p-1-2)>0$ から $p<-1$，$3<p$，⑤より $p<1$ なので，求める p の値の範囲は $p<-1$ である。

(2)　$0\leqq x\leqq\alpha$ と $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，



$$S_1=\int_0^\alpha\{(x^3+px^2+x)-x^2\}dx$$
$$=\int_0^\alpha\{x^3+(p-1)x^2+x\}dx$$
$$S_2=\int_\alpha^\beta-\{(x^3+px^2+x)-x^2\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta\{x^3+(p-1)x^2+x\}dx$$

ここで，$S_1=S_2$ から $S_1-S_2=0$ となり，

$$\int_0^\alpha\{x^3+(p-1)x^2+x\}dx+\int_\alpha^\beta\{x^3+(p-1)x^2+x\}dx=0$$

よって，$\displaystyle\int_0^\beta\{x^3+(p-1)x^2+x\}dx=0$ ……⑥

⑥から，$\displaystyle\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{p-1}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\Big]_0^\beta=0$ となり，$\displaystyle\frac{\beta^4}{4}+\frac{p-1}{3}\beta^3+\frac{\beta^2}{2}=0$ で $\beta>0$ から，

$$3\beta^2+4(p-1)\beta+6=0\ \cdots\cdots⑦$$

また，③から，$\beta^2+(p-1)\beta+1=0$ ………⑧

⑦⑧より，$\beta^2-2=0$ から $\beta=\sqrt{2}$ となり，$2+\sqrt{2}(p-1)+1=0$ より，

$$p-1=-\frac{3}{\sqrt{2}},\ \ p=1-\frac{3}{\sqrt{2}}\ \ (p<-1\text{を満たす})$$

このとき，$\alpha\beta=1$ から $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので，

$$S_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^3-\frac{3}{\sqrt{2}}x^2+x\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

コメント

定積分と面積についての超頻出の問題です。もっとも(2)の⑥式だけですが。

問　題

a, b を実数とし，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1)　$f(0)$ の値を a を用いて表せ。

(2)　関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値をもつとする。このような a, b が満たす条件を求めよ。また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ に対して，$f(0)=c$ とおくと，

$$c=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt\cdots\cdots\cdots①,\quad f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+c\cdots\cdots\cdots②$$

①②から，

$$c=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{3}t^3-at^2+(a^2-b)t+c\right\}dt=2\int_{0}^{1}(-at^2+c)\,dt=-\frac{2}{3}a+2c$$

よって，$c=\frac{2}{3}a$ となり，$f(0)=\frac{2}{3}a$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\frac{2}{3}a$ となり，

$$f'(x)=x^2-2ax+(a^2-b)=(x-a)^2-b$$

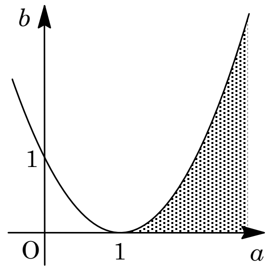
ここで，$f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもち，これを $x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$ とおくと，右表より $1<\alpha<\beta$ である。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

これより，求める条件は，$a>1$ かつ $-b<0$ かつ $f'(1)=1-2a+a^2-b>0$ となり，

$$a>1,\ 0<b<(a-1)^2$$

そして，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



コメント

(1)はおきかえ型の積分方程式，(2)は極値の条件を求めるもので，ともに基本的で頻出の題材です。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある。

(1) P における C の接線の方程式を求めよ。

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式として求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ となり，$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$ における接線の方程式は,

$$y-(s^3+as^2+bs+c)=(3s^2+2as+b)(x-s)$$

$$y=(3s^2+2as+b)x-2s^3-as^2+c$$

(2) P における C の接線と $\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ における C の接線が平行より，$f'(s)=f'(t)$

$$3s^2+2as+b=3t^2+2at+b\ ,\ \ 3(s^2-t^2)+2a(s-t)=0$$

$s\neq t$ から，$3(s+t)+2a=0\cdots\cdots\cdots(*)$

(3) 線分 PQ の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とおくと，$(*)$から，$u=\dfrac{1}{2}(s+t)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{a}{3}$

$$v=\frac{1}{2}\{(s^3+as^2+bs+c)+(t^3+at^2+bt+c)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(s+t)^3-3st(s+t)+a(s+t)^2-2ast+b(s+t)+2c\}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(-\frac{8}{27}a^3+3st\cdot\frac{2}{3}a+a\cdot\frac{4}{9}a^2-2ast-b\cdot\frac{2}{3}a+2c\Big)=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$$

また，$f(u)=u^3+au^2+bu+c=-\dfrac{a^3}{27}+a\cdot\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{1}{3}ab+c=\dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{1}{3}ab+c$

よって，$v=f(u)$ より，線分 PQ の中点 $\mathrm{M}(u,\ v)$ は C 上にある。

コメント

3 次曲線の接線について，基本を確認する問題です。

問　題

2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -(x-1)^2$ がある。a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を l とする。

(1) l の方程式を a で表せ。

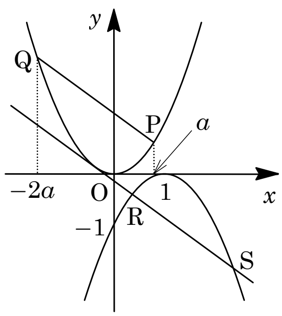
(2) C_2 と l が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) C_2 と l が異なる 2 つの共有点 R, S をもつとする。線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1) $C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = -(x-1)^2$ ……②に対し，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線の傾きは，

$$\frac{a^2 - 4a^2}{a + 2a} = -a$$



①から $y' = 2x$ なので，C_1 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の傾きは $2t$ となり，接線 l について，

$$2t = -a,\ t = -\frac{a}{2}$$

これより，接線 l との方程式は，$y - \dfrac{a^2}{4} = -a\left(x + \dfrac{a}{2}\right)$，$y = -ax - \dfrac{a^2}{4}$ ………③

(2) ②③を連立すると，$-(x-1)^2 = -ax - \dfrac{a^2}{4}$ となり，

$$x^2 - (a+2)x - \frac{a^2}{4} + 1 = 0 \text{ ………④}$$

C_2 と l は異なる 2 つの共有点をもつので，$D = (a+2)^2 - 4\left(-\dfrac{a^2}{4} + 1\right) > 0$ から，

$$2a^2 + 4a > 0,\ a(a+2) > 0$$

よって，$a < -2$，$0 < a$ となる。

(3) ④の 2 つの解 $x = \dfrac{a + 2 \pm \sqrt{2a^2 + 4a}}{2}$ を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，これは，それぞれ交点 R, S の x 座標である。

条件より，線分 PQ と線分 RS は平行であり，さらに $\mathrm{PQ} = \mathrm{RS}$ なので，

$$|a - (-2a)| = \beta - \alpha,\ 3|a| = \sqrt{2a^2 + 4a},\ 9a^2 = 2a^2 + 4a$$

よって，$a \neq 0$ から，$a = \dfrac{4}{7}$ である。

コメント

頻出タイプの微分の問題です。(3)では x 座標の差だけ考えればよいので，計算量が少なくてすみました。

問　題

2 つの放物線　$C_1: y=-x^2+\dfrac{3}{2}$，　$C_2: y=(x-a)^2+a$　$(a>0)$ がある。点 $\mathrm{P}_1\left(p,\ -p^2+\dfrac{3}{2}\right)$における C_1 の接線を l_1 とする。

(1)　C_1 と C_2 が共有点をもたないための a に関する条件を求めよ。

(2)　l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と，l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a, p を用いて表せ。

(3)　C_1 と C_2 が共有点をもたないとする。(2)で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき，p を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

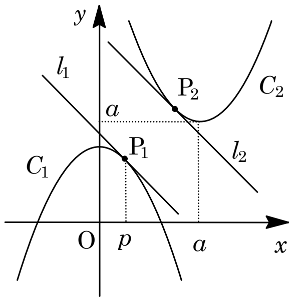
(1)　$C_1: y=-x^2+\dfrac{3}{2}$……①，$C_2: y=(x-a)^2+a$……②を連立すると，

$$-x^2+\frac{3}{2}=(x-a)^2+a,\quad 4x^2-4ax+2a^2+2a-3=0$$

C_1 と C_2 が共有点をもたないことより，$D/4=4a^2-4(2a^2+2a-3)<0$

$$a^2+2a-3>0,\ (a+3)(a-1)>0$$

$a>0$ より，$a>1$ である。



(2)　①より $y'=-2x$ となり，点 $\mathrm{P}_1\left(p,\ -p^2+\dfrac{3}{2}\right)$における C_1 の接線 l_1 の傾きは $-2p$ である。そこで，l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式を $y=-2px+k$……③とおく。

②③を連立すると，$(x-a)^2+a=-2px+k$ となり，

$$x^2-2(a-p)x+a^2+a-k=0 \cdots\cdots④$$

④が重解をもつことより，$D/4=(a-p)^2-(a^2+a-k)=0$

$$-2ap+p^2-a+k=0,\ k=-p^2+2ap+a$$

よって，$l_2: y=-2px-p^2+2ap+a$ である。

また，l_2 と C_2 の接点 P_2 の x 座標は，④の重解なので，

$$x=a-p,\ y=(a-p-a)^2+a=p^2+a$$

これより，$\mathrm{P}_2(a-p,\ a+p^2)$ となる。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=\left(a-p-p,\ a+p^2+p^2-\dfrac{3}{2}\right)=\left(a-2p,\ a+2p^2-\dfrac{3}{2}\right)$

また，l_1 の方向ベクトルを $\vec{u}=(1,\ -2p)$ とすると，条件より $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\vec{u}=0$ となり，

$$a-2p-2p\left(a+2p^2-\frac{3}{2}\right)=0,\ a+p-4p^3-2ap=0$$

すると，$(1-2p)a+p(1-2p)(1+2p)=0$，$(1-2p)(2p^2+p+a)=0$………⑤

ここで，(1)から $a>1$ のとき，$2p^2+p+a=0$ の判別式 $D=1-8a<0$ となるので，$2p^2+p+a=0$ は実数解をもたない。

よって，⑤より，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

放物線と接線を題材にした基本問題です。(2)では重解条件を利用しましたが，まず接点 P_2 を設定する方法でも構いません。

問　題

実数 t が $0 \leqq t < 8$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ を考える。

(1) 点 P から放物線 $y=x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ。

(2) (1)での 2 本の接線の接点を Q および R とする。線分 PQ, PR と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。 [2013]

解答例＋映像解説

(1) $y=x^2$ に対して $y'=2x$ となるので，接点を $(u,\ u^2)$ とすると，接線の方程式は，

$$y-u^2=2u(x-u),\ \ y=2ux-u^2$$

ここで，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ を通ることより，

$$t^3-8t^2+15t-56=2ut-u^2,\ \ u^2-2tu+t^3-8t^2+15t-56=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

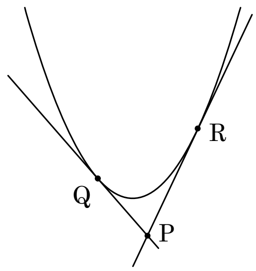
$(*)$の判別式を D とすると，

$$D/4=t^2-(t^3-8t^2+15t-56)=-t^3+9t^2-15t+56=-(t-8)(t^2-t+7)$$

ここで，$0\leqq t<8$ で，$t^2-t+7=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}>0$ から，$D>0$ となり，$(*)$は異なる 2 実数解をもつ。

すなわち，点 P から放物線 $y=x^2$ に 2 本の異なる接線が引ける。

(2) $(*)$の解は，$u=t\pm\sqrt{-(t-8)(t^2-t+7)}$ となり，これを $u=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$ とおく。



すると，接線の方程式は，

$$y=2\alpha x-\alpha^2,\ \ y=2\beta x-\beta^2$$

この交点は，$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$ から，

$$x=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

よって，線分 PQ, PR と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x^2-2\beta x+\beta^2)dx$$

$$=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{-(t-8)(t^2-t+7)}\right)^3=\frac{2}{3}\left\{-(t-8)(t^2-t+7)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

コメント

センター試験でも出題されている超頻出の問題です。ただ，点 P の座標の設定が $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ となって訳あり風ですが，この意味は不明です。なお，$D/4$ の因数分解は，与えられた条件から推測して行っています。

問　題

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x = \sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　条件より，$f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$ なので，

$$f(\theta) = 4(1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta + 3\sqrt{2}(1 - 2\sin^2\theta) - 4\sin\theta$$
$$= -8\sin^3\theta - 6\sqrt{2}\sin^2\theta + 3\sqrt{2}$$

ここで，$x = \sin\theta$ とおくと，$f(\theta) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$

(2)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $-1 \leqq x \leqq 1$ となり，$f(\theta) = g(x)$ とおくと，

$$g'(x) = -24x^2 - 12\sqrt{2}x$$
$$= -12x(2x + \sqrt{2})$$

すると，$g(x)$ の値の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	

ここで，$g(-1) = 8 - 3\sqrt{2}$ であり，$8 - 3\sqrt{2} < 3\sqrt{2}$ から $f(\theta) = g(x)$ の最大値は $3\sqrt{2}$ である。このとき，$x = \sin\theta = 0$ から $\theta = 0$ となる。

また，$g(1) = -8 - 3\sqrt{2}$ であり，$f(\theta) = g(x)$ の最小値は $-8 - 3\sqrt{2}$ である。このとき，$x = \sin\theta = 1$ から $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ となる。

コメント

微分の応用の基本問題です。計算ミスをすると致命傷になります。

問　題

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$，$\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ がある。不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D, 不等式 $y \leqq x^2$ の表す領域を E とする。

(1) 点 C が領域 D に含まれ, 点 A と点 B が領域 E に含まれるような a, b の条件を連立不等式で表せ。

(2) (1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域 F を ab 平面上に図示せよ。

(3) (2)で求めた領域 F の面積を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ が領域 $D: y \geqq x^2$ に含まれることより,

$$b+2 \geqq (a+1)^2,\ \ b \geqq (a+1)^2-2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$ が領域 $E: y \leqq x^2$ に含まれることより,

$$b \leqq a^2 \cdots\cdots\cdots ②,\ \ b \leqq (a+3)^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

したがって, 求める a, b の条件は, ①②③である。

(2) ①②の境界線の交点は,

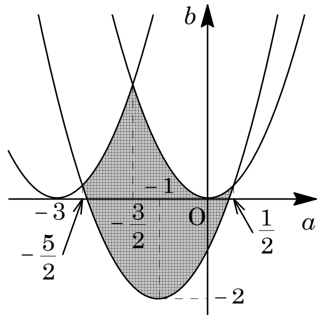
$$(a+1)^2-2=a^2,\ \ 2a-1=0$$

よって, $a=\dfrac{1}{2}$ から, 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

また, ①③の境界線の交点は,

$$(a+1)^2-2=(a+3)^2,\ \ 4a+10=0$$

よって, $a=-\dfrac{5}{2}$ から, 点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$



以上より, ①②③で表される領域 F は右図の網点部となる。ただし, 境界線は領域に含む。

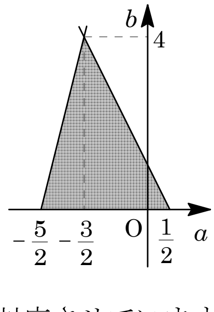
(3) 領域 F の面積を S とすると,

$$S=\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}}\left\{(a+3)^2-(a+1)^2+2\right\}da+\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{a^2-(a+1)^2+2\right\}da$$

$$=\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}}(4a+10)\,da+\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}(-2a+1)\,da$$

すると, S は右図の網点部の面積となり,

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot 4=6$$



コメント

積分と面積の基本問題です。積分値の計算は, 三角形の面積を対応させていますが, 普通に計算しても構いません。

問　題

a を正の実数, b と c を実数とし, 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ 4)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C とおく。C 上の 2 点 P, Q における C の接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。

(1) b の値を求め, c を a で表せ。

(2) l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3) 放物線 C と接線 l_1, l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。 [2011]

解答例

(1) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が, 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ 4)$ を通るので,

$$a-b+c=3\ \cdots\cdots\cdots①,\quad a+b+c=4\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $b=\dfrac{1}{2}$ となり, また $a+c=\dfrac{7}{2}$ から, $c=\dfrac{7}{2}-a$

(2) (1)より, $y=ax^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}-a$ となり, $y'=2ax+\dfrac{1}{2}$

点 P における C の接線 l_1 は,

$$y-3=\left(-2a+\frac{1}{2}\right)(x+1),\quad y=\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

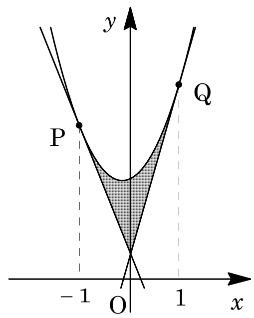
点 Q における C の接線 l_2 は,

$$y-4=\left(2a+\frac{1}{2}\right)(x-1),\quad y=\left(2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より, $x=0$, $y=-2a+\dfrac{7}{2}$

よって, l_1 と l_2 の交点の座標は, $\left(0,\ -2a+\dfrac{7}{2}\right)$ である。

(3) 放物線 C と接線 l_1 は $x=-1$ で接し, C と l_2 は $x=1$ で接していることに留意すると, 放物線 C と接線 l_1, l_2 で囲まれる図形の面積 S は,



$$S=\int_{-1}^{0}a(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}a(x-1)^2dx$$

$$=\frac{a}{3}\Big[\,(x+1)^3\,\Big]_{-1}^{0}+\frac{a}{3}\Big[\,(x-1)^3\,\Big]_{0}^{1}$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{a}{3}=\frac{2}{3}a$$

すると, 条件から $\dfrac{2}{3}a=1$ より, $a=\dfrac{3}{2}$ である。

コメント

放物線と接線に関する典型題の 1 つです。計算も複雑ではありません。

問　題

a を正の実数とし, 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

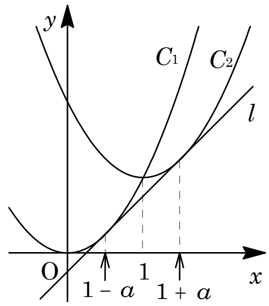
(2)　2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　放物線 $C_1 : y = x^2$ ……①, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ ……②に対して,

①より, $y' = 2x$ となり, 接点 $(t,\ t^2)$ とおくと, 接線の方程式は,

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 \cdots\cdots③$$



②③を連立して, $x^2 - 4ax + 4a = 2tx - t^2$

$$x^2 - 2(2a + t)x + 4a + t^2 = 0 \cdots\cdots④$$

放物線②と接線③が接することより, ④は重解をもち,

$$D/4 = (2a + t)^2 - (4a + t^2) = 0,\quad a^2 + at - a = 0$$

$a>0$ から, $a + t - 1 = 0$, $t = 1 - a$ ………⑤

③に代入すると, 接線 l の方程式は,

$$y = 2(1 - a)x - (1 - a)^2$$

(2)　④の重解は, ⑤より, $x = 2a + t = 2a + 1 - a = 1 + a$

また, ①と②の交点は, $x^2 = x^2 - 4ax + 4a$ より, $x = 1$

よって, C_1, C_2 と l で囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \int_{1-a}^{1}\{x - (1 - a)\}^2 dx + \int_{1}^{1+a}\{x - (1 + a)\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 - a)\}^3\Big]_{1-a}^{1} + \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 + a)\}^3\Big]_{1}^{1+a}$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$$

コメント

よく見かける構図で, 過去に多数の大学で出題されてきた頻出問題です。

問　題

xy 平面において，放物線 $y=-x^2+6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ，$(a,\ 0)$ と $(a,\ -a^2+6a)$ を結ぶ線分を 1 辺とする長方形を考える。ただし，$0<a<3$ とする。このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を a の式で表せ。

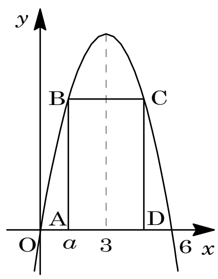
(2)　$S(a)$ の値が最大となる a の値を求め，関数 $S(a)$ のグラフをかけ。　[2008]

解答例

(1)　$0<a<3$ のとき，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と $\mathrm{B}(a,\ -a^2+6a)$ とおくと，題意を満たす長方形 ABCD の面積が最大となる場合を考える。

すると，放物線 $y=-x^2+6x$ の軸の方程式が $x=3$ より，$\mathrm{C}(6-a,\ -(6-a)^2+6(6-a))$，$\mathrm{D}(6-a,\ 0)$ のときであり，長方形 ABCD の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=2(3-a)(-a^2+6a)=2a^3-18a^2+36a$$



(2)　(1)より，$S'(a)=6(a^2-6a+6)$

$S'(a)=0$ とすると，$0<a<3$ から，

$$a=3-\sqrt{3}$$

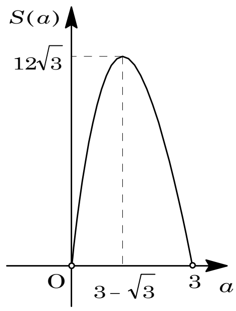
よって，$0<a<3$ における $S(a)$ の増減は，右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$a=3-\sqrt{3}$ のとき，$S(a)$ の値は最大となり，最大値は，

$$S(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=12\sqrt{3}$$

以上より，関数 $S(a)$ のグラフを描くと，右図のようになる。ただし，白丸は除く。



コメント

教科書の例題に採用されているような問題です。ただ，冒頭の記述は，やや雑すぎるかもしれません。

問　題

$a>0$, $b\geqq 0$, $0<p<1$ とし，関数 $y=ax-bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通るとする。このグラフの $0\leqq x\leqq p$ に対応する部分を C で表す。

(1) b を a と p を用いて表せ。

(2) a が範囲 $p\leqq a\leqq 1$ を動くとき, C 上の点 $(x,\ y)$ の動く領域を D とする。

(i) x を固定して y の動く範囲を求めよ。

(ii) D を図示せよ。

(3) D の面積 S を p で表し，$\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ。

[2007]

解答例

(1) 関数 $y=ax-bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通ることより，$p^2=ap-bp^2$

$0<p<1$ から，$p=a-bp$ となり，$b=\dfrac{a}{p}-1$ である。

(2) (1)より，$y=ax-\left(\dfrac{a}{p}-1\right)x^2=a\left(x-\dfrac{x^2}{p}\right)+x^2$ ………(＊)

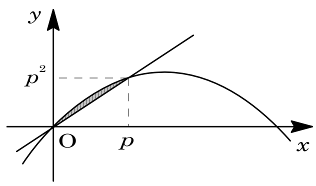
(i) $0<p<1$, $0\leqq x\leqq p$ から，$x-\dfrac{x^2}{p}=\dfrac{x(p-x)}{p}\geqq 0$ となり，(＊)は a について増加関数であるので, $p\leqq a\leqq 1$ のとき,

$$p\left(x-\frac{x^2}{p}\right)+x^2\leqq y\leqq\left(x-\frac{x^2}{p}\right)+x^2,\quad px\leqq y\leqq\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x$$

(ii) D の境界線 $y=px$，$y=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)x^2+x$ の交点は,

$$px=\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x,\quad \frac{p-1}{p}x^2+(1-p)x=0$$

よって，$x=0,\ p$ となり，領域 D は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(3) D の面積 S は,

$$S=\int_0^p\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x-px\right\}dx=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^p x(x-p)\,dx$$

$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)p^3=\frac{1}{6}(p^2-p^3)$$

$$S'=\frac{1}{6}(2p-3p^2)=\frac{1}{6}p(2-3p)$$

$\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3}{4}$ において, S の増減は右表のようになり, S の最大値は $\dfrac{2}{81}$，最小値は $\dfrac{1}{48}$ である。

p	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
S'		＋	0	－	
S	$\frac{1}{48}$	↗	$\frac{2}{81}$	↘	$\frac{3}{128}$

コメント

微積分についての標準的な問題で，題意に従って計算を進めれば，結論に至ります。

問　題

実数 p に対して 3 次方程式 $4x^3-12x^2+9x-p=0$ ……①を考える。

(1)　関数 $f(x)=4x^3-12x^2+9x$ の極値を求めて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　方程式①の実数解の中で，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つであるための p の条件を求めよ。　[2006]

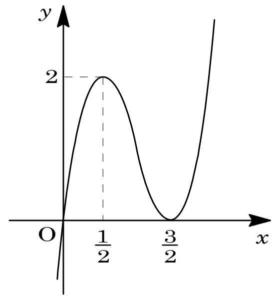
解答例

(1)　$f(x)=4x^3-12x^2+9x$ に対して，

$$f'(x)=12x^2-24x+9=3(2x-1)(2x-3)$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗

増減表より，極大値 2 $\left(x=\frac{1}{2}\right)$，極小値 0 $\left(x=\frac{3}{2}\right)$となり，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　3 次方程式 $4x^3-12x^2+9x-p=0$ ……①は，$f(x)=p$ と表せる。

すると，方程式①の実数解は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=p$ との共有点の x 座標となる。

ここで，(1)のグラフを利用すると，$f(1)=1$ から，方程式①の実数解の中で，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つである p の条件は，$0\leqq p<1$ となる。ただし，重解は解の個数が 2 であるとする。

コメント

方程式の解の個数を数えるとき，重解は一般的に 1 つとは数えません。上の解はこの立場で記しました。もし，重解を 1 つとして数えるならば，$p=2$ も答に加える必要があります。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　x についての 2 次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)\,dx$ の最小値と最大値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　2 次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつことから,

$$D/4=k^2-(-3k^2+1)=4k^2-1<0$$

よって，$(2k-1)(2k+1)<0$ から，$-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$

(2)　$F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)\,dx=\left[\dfrac{x^3}{3}-kx^2-3k^2x+x\right]_0^k=-\dfrac{11}{3}k^3+k$ より,

$$F'(k)=-11k^2+1$$

$-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$ における $F(k)$ の増減は右表のようになり，最小値は $-\dfrac{2}{33}\sqrt{11}$ $\left(x=-\dfrac{1}{\sqrt{11}}\right)$，最大値は $\dfrac{2}{33}\sqrt{11}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt{11}}\right)$ である。

k	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$F'(k)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(k)$	$-\frac{1}{24}$	$\searrow$	$-\frac{2}{33}\sqrt{11}$	$\nearrow$	$\frac{2}{33}\sqrt{11}$	$\searrow$	$\frac{1}{24}$

コメント

ミスが致命傷の計算問題です。

問　題

a を正の実数とし，関数 $F(x)=\int_x^{x+a}\left|\,|t|-1\,\right|dt$ を考える。

(1)　$F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに，$F'(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2)　$0<a<2$ のとき，$F(x)$ の極大値および極小値と，それらを与える x の値を求めよ。

(3)　$a>2$ のとき，$F(x)$ の極小値と，それを与える x の値を求めよ。　　　　[2004]

解答例

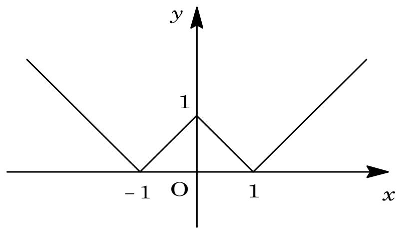
(1)　$f(x)=\left|\,|x|-1\,\right|$ とおき，$f(-x)=f(x)$ に注意して場合分けをすると，

(i)　$x\leqq -1$ のとき　$f(x)=-x-1$

(ii)　$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　$f(x)=x+1$

(iii)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$f(x)=-x+1$

(iv)　$x\geqq 1$ のとき　$f(x)=x-1$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

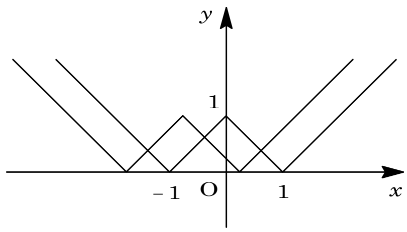
$$F(x)=\int_x^{x+a}\left|\,|t|-1\,\right|dt=\int_x^{x+a}f(t)\,dt \text{ より，}$$

$$F'(x)=f(x+a)-f(x)=\left|\,|x+a|-1\,\right|-\left|\,|x|-1\,\right|$$

また，$F'(x)=0$ とおくと，$f(x+a)=f(a)$ となり，$y=f(x+a)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-a$ だけ平行移動すると得られるので，

(i)　$0<a<2$ のとき

$F'(x)=0$ となる x は，右図の 2 つのグラフの交点より，



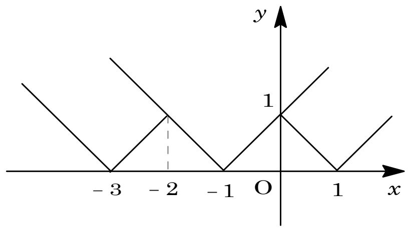
$$-x+1=(x+a)-1,\ \ x=\frac{-a+2}{2}$$

$$x+1=-(x+a)+1,\ \ x=-\frac{a}{2}$$

$$-x-1=(x+a)+1,\ \ x=-\frac{a+2}{2}$$

(ii)　$a=2$ のとき

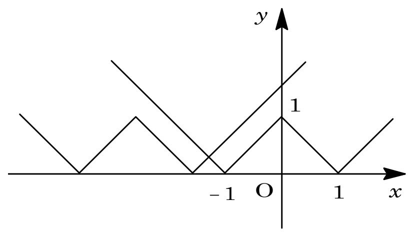
$F'(x)=0$ となる x は，右図の 2 つのグラフの共有点より，$-2\leqq x\leqq 0$ を満たすすべての実数である。



(iii) $a>2$ のとき

$F'(x)=0$ となる x は，右図 2 つのグラフの交点より，

$$-x-1=(x+a)-1,\ x=-\frac{a}{2}$$

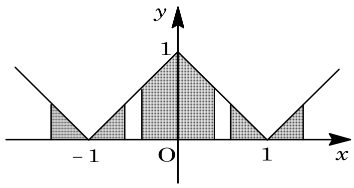


(2) $0<a<2$ のとき，(1)より $F(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{a+2}{2}$	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$\frac{-a+2}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘		↗		↘		↗

すると，$x=-\frac{a}{2}$ のとき極大値をとり，$x=-\frac{a+2}{2}$，$\frac{-a+2}{2}$ のとき極小値をとる。

極大値と極小値は，右図において，$y=f(x)$ のグラフと x 軸にはさまれた網点部の面積を計算することから，



$$F\left(-\frac{a+2}{2}\right)=\int_{-\frac{a+2}{2}}^{\frac{a-2}{2}}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\times2=\frac{a^2}{4}$$

$$F\left(-\frac{a}{2}\right)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)\,dt=\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)^2\right\}\times2=a-\frac{a^2}{4}$$

$$F\left(\frac{-a+2}{2}\right)=\int_{\frac{-a+2}{2}}^{\frac{a+2}{2}}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\times2=\frac{a^2}{4}$$

よって，極大値 $a-\frac{a^2}{4}$ $\left(x=-\frac{a}{2}\right)$，極小値 $\frac{a^2}{4}$ $\left(x=-\frac{a+2}{2},\ \frac{-a+2}{2}\right)$ である。

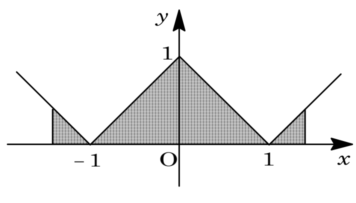
(3) $a>2$ のとき，(1)より，$F(x)$ の増減は右表のようになり，$x=-\frac{a}{2}$ のとき極小値をとる。

x	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘		↗

(2)と同様に，極小値は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸にはさまれた網点部の面積を計算することから，

$$F\left(-\frac{a}{2}\right)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)\,dt$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)^2\right\}\times2=\frac{a^2}{4}-a+2$$



よって，極小値 $\frac{a^2}{4}-a+2$ $\left(x=-\frac{a}{2}\right)$ である。

コメント

時間のかかる繁雑な問題です。しかし，方針決定に迷うような難問ではありません。

問　題

実数 a, b, c に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。このとき次の 2 つの等式

$$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx=\frac{1}{2},\quad \int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx=0$$

を満たす実数 $p,\ q$ が存在するための $a,\ b,\ c$ の条件と，そのときの $p,\ q$ を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。　[2003]

解答例

$f'(x)(px+q)=(2ax+b)(px+q)=2apx^2+(2aq+bp)x+bq$ なので，

$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx=\frac{1}{2}$ より，$\int_0^1\{2apx^2+(2aq+bp)x+bq\}dx=\frac{1}{2}$ ………①

$\int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx=0$ より，$\int_{-1}^1\{2apx^2+(2aq+bp)x+bq\}dx=0$ となり，

$$\int_0^1(2apx^2+bq)\,dx=0 \text{ ………②}$$

①②より，$\int_0^1(2aq+bp)x\,dx=\frac{1}{2}$ ………③

②より，$\frac{2}{3}ap+bq=0$，$2ap+3bq=0$ ………④

③より，$\frac{1}{2}(2aq+bp)=\frac{1}{2}$，$bp+2aq=1$ ………⑤

④⑤より，$(3b^2-4a^2)p=3b$ ……⑥，$(4a^2-3b^2)q=2a$ ……⑦

(i)　$4a^2-3b^2=0$ のとき

⑥⑦より，$a=b=0$ となるが，これは⑤を満たさない。

(ii)　$4a^2-3b^2\neq 0$ のとき

⑥より $p=\dfrac{3b}{3b^2-4a^2}$，⑦より $q=\dfrac{2a}{4a^2-3b^2}$ となる。

(i)(ii)より，実数 p, q が存在するための条件は，$4a^2-3b^2\neq 0$ であり，

$$p=\frac{3b}{3b^2-4a^2},\quad q=\frac{2a}{4a^2-3b^2}$$

コメント

定積分の計算問題の様相を示していますが，実質的には，連立方程式の処理技術がポイントとなっています。

問　題

3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ がある。$x=a$ における曲線 $y=f(x)$ の接線が接点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 以外の点 Q で $y=f(x)$ のグラフと交わっているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の x 座標 b を a と p で表せ。

(2) $x=c$ における $y=f(x)$ の接線が点 P を通るような実数 c のうち $c\neq a$ なるものを a と p で表せ。

(3) $\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}$ の値を求めよ。 [2000]

解答例

(1) 点 P における接線を $y=mx+n$ とおくと，条件より，

$$f(x)-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)$$

$$x^3+px^2+(q-m)x-n=(x-a)^2(x-b)$$

x^2 の係数を比べて，$p=-b-2a$，$b=-2a-p$

(2) $x=c$ における $y=f(x)$ の接線を $y=kx+l$ とおくと，(1)と同様にして，

$$f(x)-(kx+l)=(x-c)^2(x-a)$$

x^2 の係数を比べて，$p=-a-2c$，$c=-\dfrac{a+p}{2}$

(3) $f'(x)=3x^2+2px+q$ なので，

$$\begin{aligned}f'(b)-f'(a)&=(3b^2+2pb+q)-(3a^2+2pa+q)\\&=3(-2a-p)^2+2p(-2a-p)-3a^2-2pa\\&=9a^2+6ap+p^2=(3a+p)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(a)-f'(c)&=(3a^2+2pa+q)-(3c^2+2pc+q)\\&=3a^2+2pa-3\Big(-\frac{a+p}{2}\Big)^2-2p\Big(-\frac{a+p}{2}\Big)\\&=\frac{1}{4}(9a^2+6ap+p^2)=\frac{1}{4}(3a+p)^2\end{aligned}$$

以上より，$\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}=4$

コメント

接線の方程式が不要なときは，上記の(1)(2)のように解いたほうが，省エネですみます。

問　題

$0<a<1$ とする。曲線 $y=1-x^2$ と $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ の第 1 象限内での交点を A とし，A から x 軸に下ろした垂線の足を B とする。また，原点を O とし，線分 OB と線分 AB と曲線 $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ とで囲まれた図形の面積を S とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を求めよ。

(2) 面積 S を, a を用いて表せ。

(3) 面積 S を最大にする a の値を求めよ。 [1999]

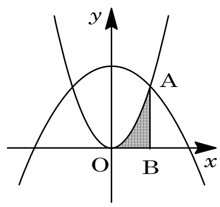
解答例

(1) $y=1-x^2$ ………①，$y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ ………②

①②より，$1-x^2=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$

$\dfrac{1}{a^2}x^2=1$ となるので，$x=\pm a$

$a>0$ より，B$(a,\ 0)$



(2) $S=\displaystyle\int_0^a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2dx=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{1}{3}(a-a^3)$

(3) $S'=\dfrac{1}{3}(1-3a^2)$

右の増減表より，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，

S は最大値をとる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

コメント

センター試験のレベルよりも基本的です。注意するのは計算ミスだけです。

問　題

$a,\ b$ を実数とし，xy 平面上の 3 直線を

$$l : x+y=0\ ,\ \ l_1 : ax+y=2a+2\ ,\ \ l_2 : bx+y=2b+2$$

で定める。

(1) 直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。

(2) l ，l_1 ，l_2 によって三角形がつくられるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(3) $a,\ b$ は(2)で求めた条件を満たすものとする。点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にあるような $a,\ b$ の範囲を求め，それを ab 平面上に図示せよ。　[2011]

解答例

(1) 直線 $l_1 : ax+y=2a+2$ は，$y=-a(x-2)+2$ より，どんな a の値に対しても，点 $(2,\ 2)$ を通る。よって，$\mathrm{P}(2,\ 2)$ である。

(2) 直線 $l_2 : bx+y=2b+2$ は，$y=-b(x-2)+2$ より，どんな b の値に対しても，点 $\mathrm{P}(2,\ 2)$ を通るので，l_1 ，l_2 の交点は $\mathrm{P}(2,\ 2)$ である。すると，直線 $l : x+y=0$ は点 P を通らないことから，3 直線 l ，l_1 ，l_2 が同一点で交わる場合はない。

　そこで，3 直線 l ，l_1 ，l_2 によって三角形がつくられるための条件は，

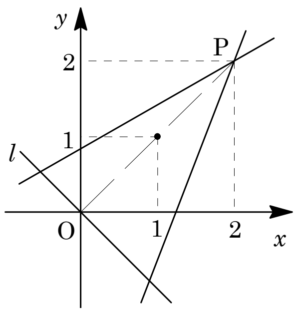
(i) l と l_1 が平行でないとき　$-a\neq-1$ より，$a\neq1$

(ii) l と l_2 が平行でないとき　$-b\neq-1$ より，$b\neq1$

(iii) l_1 と l_2 が平行でないとき　$-a\neq-b$ より，$a\neq b$

(i)～(iii)より，求める $a,\ b$ の条件は，

$$a\neq1,\ \ b\neq1,\ \ a\neq b$$



(3) (2)のとき，点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にある条件は，図より，l と l_1 の交点，l と l_2 の交点が，一方は第 2 象限，もう一方は第 4 象限に位置することである。

　l と l_1 の交点は，$ax-x=2a+2$ から，$x=\dfrac{2a+2}{a-1}$

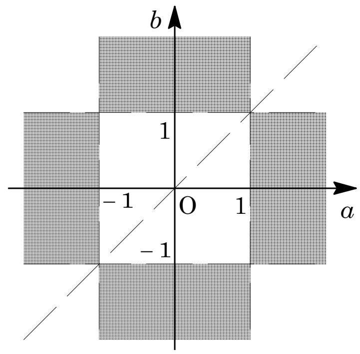
　l と l_2 の交点は，$bx-x=2b+2$ から，$x=\dfrac{2b+2}{b-1}$

　よって，求める条件は，$\dfrac{2a+2}{a-1}\cdot\dfrac{2b+2}{b-1}<0$

　両辺に $(a-1)^2(b-1)^2$ をかけると，

$$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)<0$$

　この領域を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

定点を通過する直線についての基本的な問題です。なお，(3)において，分数不等式を変形するときに，分母を 2 乗した式を両辺にかけるという技法は必須です。

問　題

実数 $t>0$ に対して，座標平面上に点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$，点 $\mathrm{Q}(2t,\ 1-4t^2)$，点 $\mathrm{R}(-t,\ 1-t^2)$ をとる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ。

(2) (1)で求めた値を t_0 とする。$0<t<t_0$ のとき，三角形△PQR の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。　[2009]

解答例

(1) 3 点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(2t,\ 1-4t^2)$，$\mathrm{R}(-t,\ 1-t^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t,\ 1-4t^2),\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-2t,\ 1-t^2)$$

P, Q, R が一直線上にある条件は, k を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$$(-2t,\ 1-t^2)=k(t,\ 1-4t^2)$$

よって，$-2t=kt$ ……①，$1-t^2=k(1-4t^2)$ ……②

①より, $t>0$ なので，$k=-2$

②に代入して，$1-t^2=-2(1-4t^2)$ となり, $t>0$ から $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(2) $0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，△PQR の面積 $S(t)$ は, (1)より，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left|t(1-t^2)-(1-4t^2)(-2t)\right|=\frac{1}{2}\left|-9t^3+3t\right|$$

ここで，$f(t)=-9t^3+3t$ とおくと，

$$f'(t)=-27t^2+3=-3(3t+1)(3t-1)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$S(t)=\dfrac{1}{2}|f(t)|$ から，$S(t)$ は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

コメント

図形と式の基本問題です。なお，三角形の面積 $S(t)$ は，公式を用いて立式しています。