2020 入試対策
過去問ライブラリー

金沢大学
文系数学22か年

1998－2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された金沢大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　次

分野別問題一覧 …… 3

分野別問題と解答例 …… 21

関　数 …… 22

微分と積分 …… 32

図形と式 …… 56

図形と計量 …… 67

ベクトル …… 72

整数と数列 …… 79

確　率 …… 90

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

■ 関数

1　a,b を 1 と異なる正の数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2=\dfrac{1}{2}$ を満たす a を求めよ。

(2)　$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たす a の範囲を求めよ。

(3)　$a>1$ かつ $b>1$ とする。$\log_b\sqrt{a}-\log_a b\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たすとき，a と b^2 の大小関係を調べよ。

(4)　$a+b\leqq 8$ かつ $\log_b\sqrt{a}-\log_a b\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

[2018]

2　座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ を θ で表せ。

(2)　$\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ を用いて，$\sin\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ における $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，最大値，最小値を与える θ の値を求めよ。

[2013]

3　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\geqq\dfrac{1}{10}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす最大の自然数 m,n を求めよ。

(3)　連立不等式 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\geqq\dfrac{1}{10}$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の表す領域を座標平面に図示せよ。

(4)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 m と n の組$(m,\ n)$をすべて求めよ。

[2012]

4　次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$，$x\neq 1$ とする。方程式 $\log_2 x+2\log_x 2=3$ を解け。

(2)　$x>0$，$x\neq 2$，$y>0$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\log_{\frac{x}{2}}y=2,\quad xy=16$$

(3)　$x>0$，$x\neq 2$，$y>0$ とする。次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{x}{2}}y<2,\quad xy<16$$

[2010]

5　実数 t と $0 \leqq \theta < 2\pi$ に対して, 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t^2$$

$$g(x) = x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \frac{1}{16}$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\frac{1}{2}$, $2\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ の大小を比べよ。また, この 3 つの値が等しくなる θ をすべて求めよ。

(2)　θ は(1)で求めた値とは異なる定数とする。

(i)　2 次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を $D(t)$ とするとき, 2 次方程式 $D(t) = 0$ の解 α, β $(\alpha < \beta)$ を求め, $\int_\alpha^\beta D(t)\,dt = -\frac{\cos^6 2\theta}{6}$ となることを示せ。

(ii)　2 つの 2 次方程式 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち, 他方が虚数解をもつための t の範囲を求めよ。　[2009]

6　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で定義された関数 $f(\theta) = a\sin\theta\cos\theta + b(\sin\theta - \cos\theta) - 1$ を考える。ただし, a, b は正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$t = \sin\theta - \cos\theta$ として, $f(\theta)$ を a, b, t を用いて表せ。また, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　等式 $f(\theta) = 0$ を満たす θ が存在するような点 $(a,\ b)$ 全体からなる領域を座標平面上に図示せよ。　[2008]

7　実数 α, β について, x, y は 2 つの等式

$$x + y = \alpha\beta + \alpha + \beta - 1,\quad 2x + 3y = 3\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta - 3$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ を x, y で表せ。

(2)　t の 2 次方程式 $t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta = 0$ が実数解をもつ条件を x, y で表せ。

(3)　α, β が条件 $-1 \leqq \alpha \leqq 1$, $-1 \leqq \beta \leqq 1$ を満たすとき, 点 $(x,\ y)$ の存在範囲を座標平面に図示せよ。　[2005]

8　正の定数 $a\,(a \neq 1)$ に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a^{2x} + a^{-2x} - 2(a + a^{-1})(a^x + a^{-x}) + 2(a + a^{-1})^2$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a^x + a^{-x} = t$ とおくとき, t の最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。　[2000]

■ 微分と積分

1　k を 0 以上の定数とし，3 次関数

$$f(x)=x^3-(2k+1)x^2-(k^3-8k)x+(k^3-6k)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f(1)$ を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3)　k が 0 以上の実数全体を動くとき，$f(0)$ のとり得る値の最小値は $-4\sqrt{2}$ であることを示せ。また，$f(0)=-4\sqrt{2}$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数を求めよ。　[2019]

2　関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=|x-1|+\displaystyle\int_0^2 xf(t)\,dt$ を満たすとし，$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=a$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(2)$ を a を用いて表せ。

(2)　a の値を求めよ。

(3)　k は定数とする。$y=xf(x)-k$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフの共有点の個数を求めよ。　[2018]

3　$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

(2)　接線 l は，原点 O$(0,\ 0)$ を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。　[2017]

4　平面上の 2 つの曲線 $C_1: x^2+(y-5)^2=16$，$C_2: y=\dfrac{1}{4}x^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 を同一平面上に図示せよ。

(3)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2016]

5　$a,\ b$ は定数で，$ab>0$ とする。放物線 $C_1: y=ax^2+b$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$ における接線を l とし，放物線 $C_2: y=ax^2$ と l で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　l と C_2 のすべての交点の x 座標を求めよ。

(3)　点 P が C_1 上を動くとき，S は点 P の位置によらず一定であることを示せ。

[2015]

6　放物線 $C: y=x^2+2x$ 上の 2 点 $(a,\ a^2+2a)$，$(b,\ b^2+2b)$ における接線をそれぞれ l_a，l_b とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　2 直線 l_a，l_b の方程式を求めよ。また，l_a と l_b の交点の x 座標を求めよ。

(2)　放物線 C と 2 直線 l_a，l_b とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3)　2 直線 l_a，l_b が垂直に交わるように $a,\ b$ が動くとき，$a,\ b$ が満たす関係式を求めよ。また，そのときの面積 S の最小値とそれを与える a, b の値を求めよ。　[2014]

7　実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=|x^2-6x+5|-x^2+4x+5$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$0\leqq x\leqq 6$ において，$f(x)$ は $x=a$ で最大値 $f(a)$ を，$x=b$ で最小値 $f(b)$ をとる。a, b および $f(a)$，$f(b)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた a, b について，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を求めよ。　[2013]

8　曲線 $C: y=|x^2-2x|$ と傾きが m の直線 $l: y=mx$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=-x^2+2x$ と l が接する m の値を求めよ。

(2)　C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲を求めよ。また，そのときの 2 つの交点の座標を m を用いて表せ。

(3)　m は(2)で求めた範囲にあるとする。$x\geqq 2$，$y\leqq mx$，$y\geqq |x^2-2x|$ で定まる部分の面積 S を m を用いて表せ。　[2012]

9　実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^2|t-x|dt$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ を求め，そのグラフをかけ。

(2)　$y=f(x)$ の接線で傾きが 1 のものを l とする。l の方程式を求めよ。

(3)　直線 $x=-1$，接線 l，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2011]

10　a を正の定数とする。2 つの放物線 $C_1: y=x^2$ と $C_2: y=(x-2)^2+4a$ の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C_1 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における接線の方程式を求めよ。さらに，その接線のうち C_2 に接するものを l とする。l の方程式を求めよ。

(2)　点 P を通り y 軸に平行な直線を m とする。l と m の交点を R とするとき，線分 PR の長さを求めよ。

(3)　直線 l, m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

11　実数 a に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を，$f(x)=-(a+1)x-1$，$g(x)=2x+\frac{a}{3}$ とし，$m(a)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m(a)>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた a の値の範囲において，関数 $h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\int_0^1 f(x)h(x)dx=0$ となる a の値を求めよ。　[2008]

12　関数 $f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有するような a の値の範囲を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\frac{3}{5}x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2007]

13　座標平面上の曲線 $C: y=|x^2-1|$ と傾き a の直線 $l: y=a(x+1)$ が異なる 3 点で交わっているとする。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　C と l で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S を a を用いて表せ。

(3)　S が最小になる a の値を求めよ。　[2004]

14　定積分$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(ax+b)^2dx$を$I(a,\ b)$とおく。

(1)　$I(a,\ b)$をa, bの多項式で表せ。

(2)　$b=a+1$のとき，$I(a,\ b)$が最小となるようなaおよびそのときの$I(a,\ b)$の値を求めよ。

(3)　$I(a,\ b)=1$かつ$b=ma+n$となる$(a,\ b)$がちょうど 1 組のとき，実数$m,\ n$の満たす条件を求めよ。　[2003]

15　xの 3 次関数$f(x)=x^3-kx^2+4k$について以下の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq 0$のときつねに$f(x)\geqq 0$となるような定数kの値の範囲を求めよ。

(2)　$y=f(x)$のグラフがkの値によらず通る 2 つの点$\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$を求めよ。さらに$a<x<b$のときつねに$y=f(x)$のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数kの値の範囲を求めよ。　[2003]

16　関数$f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+2|x|-\dfrac{15}{16}$に対して，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)\leqq 0$を満たすxの値の範囲を求めよ。

(2)　関数$f(x)$の最大値を求めよ。

(3)　$a>0$とするとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx>0$を満たす$a$の値の範囲を求めよ。　[2002]

17　2 つの 2 次関数$y=-x^2+1$と$y=qx^2+px+2$が$0<x<1$の範囲で共有点をもち，かつその点で共通の接線をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たすような点$(p,\ q)$をpq平面上に図示せよ。

(2)　共有点のx座標を$\alpha\,(0<\alpha<1)$とし，

$$f(x)=\begin{cases} qx^2+px+2 & (0\leqq x<\alpha) \\ -x^2+1 & (\alpha\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

とおく。このとき積分$\displaystyle\int_{0}^{1}f(x)dx$を$p$で表せ。　[2001]

18　次の問いに答えよ。

(1)　実数$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$に対して，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$が成り立つことを示せ。

(2)　aは実数で，$a\geqq 0$とする。座標平面上で，不等式$x^2\leqq y\leqq|x-a|$の表す領域の面積$S(a)$を求めよ。　[2000]

19　関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ について，次の問いにそれぞれ答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ が $x=0$ で極小になるとき，定数 $a,\ b$ の満たす条件を求めよ。

(2)　実数 $s,\ t$ が $s\neq 0$，$t<s^3+1$ を満たすならば，関数 $f(x)$ が $x=s$ で極小値 t をとるように定数 $a,\ b$ を，s と t を用いて定めることができることを示せ。　[1999]

20　3 次関数 $f(x)=x^3+k(x^2+x+1)$ について，次の問いに答えよ。

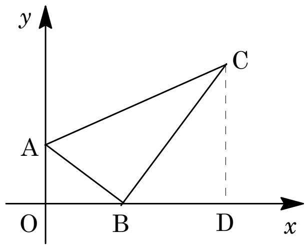
(1)　$f(x)$ が極値をもつための定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が極値をとる x の値を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。このとき，4 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\alpha,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{D}(\beta,\ f(\alpha))$ を頂点とする長方形 ABCD が正方形となる k の値を求めよ。

(3)　(2)で得られた正方形の 1 辺の長さを求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　O を原点とする座標平面に点 $\mathrm{A}(0,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ 0)$ がある。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。また，点 C を $\mathrm{AC}=2$，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす第 1 象限の点とする。さらに，点 C から x 軸に垂線 CD を下ろす。次の問いに答えよ。

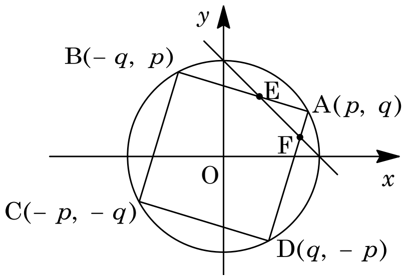


(1)　AB，BC を求めよ。また，$\angle\mathrm{OBA}$ と $\angle\mathrm{CBD}$ および点 C の座標を θ を用いて表せ。

(2)　台形 AODC の面積を S とするとき，$S\leqq 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。

(3)　$\mathrm{AO}+\mathrm{CD}\leqq 2$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。　[2012]

2 座標平面上に $\mathrm{A}(p,\ q)$，$\mathrm{B}(-q,\ p)$，$\mathrm{C}(-p,\ -q)$，$\mathrm{D}(q,\ -p)$ を頂点とする正方形がある。ただし，$p>0$，$q>0$，$p^2+q^2=1$ とする。また，直線 AB, AD が直線 $x+y=1$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{E}(r,\ s)$，$\mathrm{F}(t,\ u)$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　直線 AB, AD の方程式を p, q を用いて表せ。

(2)　r, s, t, u を p, q を用いて表せ。

(3)　$k=p+q$ とおくとき，pq を k の式で表せ。また，$k \leqq \sqrt{2}$ を示せ。

(4)　$st-ru$ を k の式で表せ。また，$st-ru$ の最小値を求めよ。　[2011]

3 O を原点とする座標平面上の円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち，x 座標の小さい方を P，他方を Q とする。点 P，Q における円 C の接線をそれぞれ l，m とする。次の問いに答えよ。

(1)　P, Q の座標を求めよ。また，l と m の交点 R の座標を求めよ。

(2)　線分 OR と C の交点を S とする。S の座標を求めよ。また，△QRS の面積を求めよ。

(3)　∠PQS＝∠RQS であることを示せ。　[2010]

4 xy 平面において，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし，$0<r \leqq a$ とする。円 C の周上に，y 座標が正である点 P と，点 $\mathrm{E}(a+r,\ 0)$ をとる。さらに，点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q，2 点 E, P を通る直線と y 軸との交点を R，∠AEP を θ とする。このとき，3 点 P，Q，R を頂点とする△PQR について，次の問いに答えよ。

(1)　△PQR は辺 PR を底辺とする二等辺三角形であることを示せ。次に，これが正三角形となる場合の，θ の値を求めよ。

(2)　△PQR が正三角形となり，さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の，a と r の関係式を求めよ。

(3)　△PQR が正三角形となり，さらにその外接円の半径が円 C の半径 r と等しくなる場合の，a と r の関係式を求めよ。　[2009]

5　点 O を原点とする xy 平面上に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{R}(\sin\theta,\ -\cos\theta)$をとる。角$\theta$は$15^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$の範囲にあるとし，△OPQ と△OPR の面積をそれぞれ S と T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\theta < \alpha < \theta + 90^\circ$を満たす角$\alpha$に対して点$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$をとる。△OPA の面積と線分 QR の長さの積が$S+T$に等しくなるとき，αをθを用いて表せ。

(2)　θが$15^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$を満たしながら変化するとき，$T-S$のとりうる値の範囲を求め，$T-S$が最大値をとるときの$\theta$の値を求めよ。

(3)　θを(2)で求めた値とする。このときの S と T の値を求めよ。また，点 $\mathrm{Q}'(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$に対して，$\triangle \mathrm{PQQ}'$の面積を求めよ。　[2007]

6　放物線 $y=-x^2+2x$ を H_1，また放物線 $y=x^2$ を H_2 で表す。H_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$におけるH_1の接線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　接線 l の方程式を求めよ。また, a の値に関係なく, l は H_2 と異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　接線 l と放物線 H_2 の異なる 2 つの交点を結ぶ線分の中点を Q とする。点 P が H_1 上を動くとき，点 Q の軌跡 C の方程式を求めよ。

(3)　(2)の軌跡 C と放物線 H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2006]

7　不等式$y \leqq -(x-1)^2$の表す領域をA_1，不等式$y \leqq -(x+1)^2$の表す領域をA_2とする。A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また，不等式$y \geqq (x-a)^2+b$の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=0$，$b=-1$ とするとき, A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(2)　A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を a, b で表せ。

(3)　A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき点$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。　[2005]

■ 図形と計量

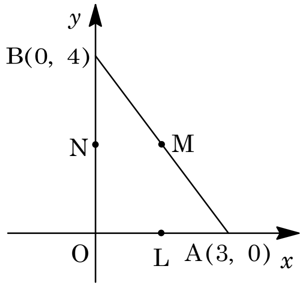
1　△ABC において，∠A は直角で，∠B＜∠C とし，BC＝2 とする。∠B＝θとおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　辺 AB, AC の長さ，および△ABC の面積 S をθを用いて表せ。

(2)　△ABC の内接円 O の半径 r をθを用いて表せ。

(3)　辺 BC の垂直二等分線が，内接円 O と接するとき，θと r の値を求めよ。　[2017]

2　座標平面上に点 A(3, 0)，B(0, 4) をとる。また，原点 O と A の中点を L，A と B の中点を M，B と O の中点を N とする。さらに，△OAB の内接円を C_1，△LMN の外接円を C_2 とする。次の問いに答えよ。



(1)　円 C_1 の半径 r_1 と中心 P_1 の座標を求めよ。

(2)　円 C_2 の半径 r_2 と中心 P_2 の座標を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 が接することを示せ。　[2011]

3　平面上に，同一直線上にない 3 定点 O, A, B があり，線分 OA, OB の長さはそれぞれ 9, 4 である。動点 P, Q は同時に O を出発し，P は線分 OA 上を秒速 3 で，Q は線分 OB 上を秒速 2 でそれぞれ往復運動をくり返しているとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　出発してから初めて P, Q が O で出会うのは何秒後か。

(2)　出発してから 5 秒後の PQ の長さは 4 であった。∠AOB の余弦と正弦の値を求めよ。

(3)　出発してから t 秒後の OP，OQ の長さをそれぞれ x，y とする。点 $(x,\ y)$ の軌跡を $0\leqq t\leqq 6$ の範囲で xy 平面上に図示せよ。　[2001]

4　平地を東西にのびる直線道路 l と，その北側に 3 地点 A，B，C があり，それぞれの地点には目じるしが置かれている。

l 上の地点 P で A, B, C を見ると，直線 AP は l に垂直で，B, C は直線 AP の東側にあり，$\angle\mathrm{APB}=30^\circ$，$\angle\mathrm{APC}=60^\circ$ であった。P から東へ $100\sqrt{3}$ 移動した l 上の地点 Q では，Q, B, A が一直線上にあり，$\angle\mathrm{BQP}=30^\circ$ であった。Q からさらに東へ移動した l 上の地点 R では，R, C, A が一直線上にあり，$\angle\mathrm{CRQ}=15^\circ$ であった。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を示せ。

(2)　2 地点 A, C 間の距離 AC を求めよ。

(3)　2 地点 B, C 間の距離の 2 乗 BC^2 を求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1　$\triangle$ABC の外心を O，重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$ ならば，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\angle\mathrm{A}\neq\dfrac{\pi}{2}$ ならば，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とする。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ である。このとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|^2$ の最大値，最小値を求めよ。　[2018]

2　座標空間内に 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 3,\ 0)$，B$(0,\ 6,\ 0)$ をとり，さらに $1<a<3$ を満たす定数 a に対して点 P$(t,\ ta,\ ta)$ をとる。ただし，t は $t>0$ の範囲を動くものとする。次の問いに答えよ。

(1)　点 P から xy 平面に垂線 PH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

(2)　点 H が線分 AB 上にあるときの t の値を求め，そのときの点 H の座標を a を用いて表せ。

以下，点 H は線分 AB 上にあるとする。

(3)　点 M を線分 AB の中点とする。AH : HM の比の値 $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HM}}$ を求めよ。

(4)　四面体 OPMH の体積が 2 となるような a の値を求めよ。　[2016]

3　平面上の三角形 ABC で，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=7$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=6$ となるものを考える。また，三角形 ABC の内部の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+s\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$　$(s>0)$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を s を用いて表せ。

(2)　2 直線 AP, BC の交点を D とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|}$ と $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}$ を s を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC の面積を求めよ。

(4)　三角形 APC の面積が $2\sqrt{6}$ となるような s の値を求めよ。　[2015]

4　xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$，および S 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。S 上の A と異なる点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A, P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$t$ は実数）とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ。

(3)　球面 S と平面 $y = \dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき，xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。　[2008]

5　O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ -1)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　t が $0 \leqq t \leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + t\vec{b}$ で定められる点 P の動く範囲を図示せよ。

(3)　s，t が $1 \leqq s \leqq 3$，$0 \leqq t \leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ で定められる点 Q の動く範囲の面積を求めよ。　[2006]

6　座標平面上で，原点 O を基準とする点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\vec{p}$ であるとき，点 P を $\mathrm{P}(\vec{p})$ で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}(\vec{a})$ を原点 O と異なる点とする。

　(i)　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{a}$ に垂直な直線上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とするとき，$\vec{a} \cdot \vec{p} = |\vec{a}|^2$ が成り立つことを示せ。

　(ii)　ベクトル方程式 $|\vec{p}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ で表される図形を図示せよ。

(2)　ベクトル $\vec{b} = (1,\ 1)$ に対して，不等式 $|\vec{p} - \vec{b}| \leqq |\vec{p} + 3\vec{b}| \leqq 3|\vec{p} - \vec{b}|$ を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ 全体が表す領域を図示せよ。　[2000]

7　O を頂点とする空間に，点 $\mathrm{A}(5,\ 1,\ -1)$ を通り，$\vec{a} = (1,\ 2,\ 1)$ を方向ベクトルとする直線 g と，点 $\mathrm{B}(6,\ -4,\ 0)$ を通り，$\vec{b} = (1,\ -1,\ -1)$ を方向ベクトルとする直線 h がある。いま，点 P, Q がそれぞれ g, h 上にあり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は，g と h の両方に垂直となっている。次の問いに答えよ。

(1)　P, Q の座標を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1 次の問いに答えよ。

(1) 方程式$13x+9y=1$の整数解をすべて求めよ。

(2) 不等式$|t(t+300)|\leqq 20000$を満たす実数tの値の範囲を求めよ。

(3) (2)で求めた範囲に含まれる整数の個数を求めよ。ただし，必要ならば$4.12<\sqrt{17}<4.13$を用いてよい。

(4) 13で割ると11余り，9で割ると7余るような整数で，(2)で求めた範囲に含まれるものは何個あるか。また，そのうち最小となるものを求めよ。 [2019]

2 自然数$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して，座標が$(\cos\theta_n,\ \sin\theta_n)$である単位円上の点$\mathrm{P}_n$が次の規則(i), (ii)で定められている。

(i) $\theta_1=0$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$とし，各nについて，$\theta_n<\theta_{n+1}<\theta_{n+2}<\theta_n+2\pi$が成り立つ。

(ii) 各nについて，P_{n+2}は，P_n，P_{n+1}を両端とする2つの弧のうち，P_{n+2}を含む弧を二等分する点である。

このように定めるとき，$\theta_3=\dfrac{7}{6}\pi$であることがわかる。次の問いに答えよ。

(1) θ_4，θ_5を求めよ。

(2) $\theta_{n+1}-\theta_n=\beta_n$とおくとき，$\beta_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\beta_n+\pi$を示し，数列$\{\beta_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{\theta_n\}$の一般項を求めよ。 [2019]

3 次の問いに答えよ。ただし，${}_m\mathrm{C}_k$はm個からk個取る組合せの総数を表す。

(1) $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$に対して，${}_7\mathrm{C}_k$は7の倍数であることを示せ。

(2) pは素数とし，kは$1\leqq k\leqq p-1$を満たす自然数とする。${}_p\mathrm{C}_k$はpの倍数であることを示せ。

(3) すべての自然数nに対して，n^7-nは7の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。 [2017]

4 数列$\{a_n\}$が，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしている。次の問いに答えよ。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$とおくとき，$S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$となることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) 和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$を求めよ。　[2014]

5 次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，不等式$\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$を示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) 数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{{a_n}^2}\right)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。

(i) $n\geqq 1$のとき，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$を示せ。

(ii) $n\geqq 2$のとき，$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}<\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$を示せ。

(iii) $n\geqq 1$のとき，$0<a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$を示せ。　[2009]

6 数列$\{a_n\}$が$a_1=-4$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot 2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定められているとする。

(1) $b_n=\frac{a_n}{2^n}$とおくときb_nとb_{n+1}の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $a_n>a_{n+1}$となるようなnの値をすべて求めよ。

(3) a_nが最小となるようなnの値をすべて求めよ。　[2003]

7 以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=x^3-6x^2-96x-80$とする。$x\geqq 14$ならば$f(x)>0$となることを示せ。

(2) 自然数 a に対して，$b=\frac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$とおく。$b$ も自然数となるような a と b の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。　[2002]

■ 確率

1　A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 個ずつのサイコロを同時に投げ，出た目の大きさの順に $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ とする。$x_1 = x_2 = x_3$ のときは，もう一度 3 人でサイコロ投げを行う。$x_1 \leqq x_2 < x_3$ のときは，x_3 を出した者が勝者となり，サイコロ投げを終了する。$x_1 < x_2 = x_3$ のときは，x_1 を出した者は去り，残りの 2 人で異なる目が出るまでサイコロ投げを続け，大きい目を出した者が勝者となり，サイコロ投げを終了する。次の問いに答えよ。

(1)　1 回目のサイコロ投げで A が 3 を出して勝者となる場合の数を求めよ。

(2)　1 回目のサイコロ投げで A が勝者となる場合の数を求めよ。

(3)　1 回目のサイコロ投げで勝者が決まる場合の数を求めよ。

(4)　2 回目のサイコロ投げで勝者が決まる場合の数を求めよ。　[2016]

2　座標平面上で，x 座標と y 座標がともに 0 以上の整数である点を，ここでは格子点とよぶ。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へ，両端点がともに格子点であり長さが 1 の線分を用いて，格子点 $(0,\ 0)$ から順に最も少ない本数でつなぐ方法を数える。たとえば，格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(3,\ 1)$ へつなぐ方法の数は 4 である。次の問いに答えよ。

(1)　格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(4,\ 0)$ へつなぐ方法の数と，格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(2,\ 2)$ へつなぐ方法の数を，それぞれ求めよ。

(2)　条件 $k+l=5$ を満たす格子点 $(k,\ l)$ を考える。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を求めよ。

(3)　条件 $k+l=n$ $(n \geqq 1)$ を満たす格子点 $(k,\ l)$ を考える。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。

(4)　条件 $k+l=n$ (k と l はともに偶数で，$n \geqq 2$) を満たす格子点 $(k,\ l)$ を考える。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。　[2015]

3　1 から 4 までの番号を書いた玉が 2 個ずつ，合計 8 個の玉が入った袋があり，この袋から玉を 1 個取り出すという操作を続けて行う。ただし，取り出した玉は袋に戻さず，また，すでに取り出した玉と同じ番号の玉が出てきた時点で一連の操作を終了するものとする。

玉をちょうど n 個取り出した時点で操作が終わる確率を $P(n)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$P(2)$，$P(3)$ を求めよ。

(2)　6 以上の k に対し，$P(k)=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　一連の操作が終了するまでに取り出された玉の個数の期待値を求めよ。　[2014]

4　座標平面上の点 P は，硬貨を 1 回投げて表が出れば x 軸の正の方向に 2，裏が出れば y 軸の正の方向に 1 だけ進むことにする。最初，P は原点にある。硬貨を 5 回投げた後の P の到達点について，次の問いに答えよ。

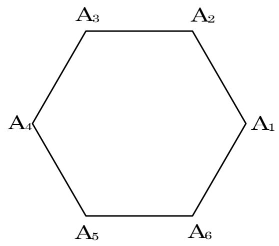
(1)　P の到達点が $(10,\ 0)$ となる確率を求めよ。また，$(6,\ 2)$ となる確率を求めよ。

(2)　2 点 $(10,\ 0)$，$(6,\ 2)$ を通る直線 l の方程式を求めよ。また，P の到達点はすべて直線 l 上にあることを示せ。

(3)　(2)で求めた直線 l と原点との距離を求めよ。

(4)　P の到達点と原点との距離 d が，$2\sqrt{5}<d\leqq 5$ となる確率を求めよ。　[2013]

5　図のように頂点が A_1 から A_6 である 1 辺の長さが 2 の正六角形がある。さいころを投げて出た目 k と頂点 A_k を対応させる。さいころを 3 回投げて出た目がすべて異なるときには，対応する頂点を結んで三角形ができ，それ以外の場合には線分か点ができる。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_5$ の面積をそれぞれ求めよ。

(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができない確率を求めよ。

(3)　さいころを 3 回投げたとき，$\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形ができる確率を求めよ。

(4)　さいころを 3 回投げたときにできる図形の面積の期待値を求めよ。ただし，線分と点の面積は 0 とする。　[2006]

6　座標平面上で動点 P が，x 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し，y 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し，停留することを文字 c で表す。a，b，c からなる文字列が与えられたとき，点 P は原点を出発し，その文字列に従って移動する。たとえば，長さ 4 の文字列 acab に対しては，点 P は原点$(0,\ 0)$から出発して，$(1,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$と移動し，点$(2,\ 1)$が到達点となる。

(1)　n を自然数とする。長さ n の文字列のなかで，点 P の到達点の x 座標と y 座標の和が n となる文字列は何個あるか。また，その理由を説明せよ。

(2)　k，n を自然数とし，$1 \leqq k \leqq n$ とする。長さ n の文字列のなかで，点 P の到達点の x 座標と y 座標の和が k となる文字列の個数を $F_n(k)$ とする。$F_n(k)$ を k と n を用いて表せ。

(3)　自然数 n が与えられたとき，$F_n(k)$ が最大になる自然数 k の値を求めよ。

[2004]

7　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は座標平面上のベクトルで，$\vec{a}=(0,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$，$\vec{c}=(1,\ -1)$ とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ とし，各 k についてベクトル $\overrightarrow{p_k}$ はベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のいずれかとする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=2$ とする。$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$ がとり得るベクトルのうち，異なるものをすべて成分で表せ。

(2)　$n=4$ とする。内積 $\vec{a}\cdot(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4})$ がとり得る値のうち，異なるものはいくつあるか。

(3)　$n=5$ とする。順序をつけて並べた列 $\overrightarrow{p_1}$，$\overrightarrow{p_2}$，$\overrightarrow{p_3}$，$\overrightarrow{p_4}$，$\overrightarrow{p_5}$ で，条件 $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}+\overrightarrow{p_5}=(4,\ 1)$ を満たすものはいくつあるか。　[1999]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

問　題

a, b を 1 と異なる正の数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2=\dfrac{1}{2}$ を満たす a を求めよ。

(2)　$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たす a の範囲を求めよ。

(3)　$a>1$ かつ $b>1$ とする。$\log_b\sqrt{a}-\log_a b\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たすとき，a と b^2 の大小関係を調べよ。

(4)　$a+b\leqq 8$ かつ $\log_b\sqrt{a}-\log_a b\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

[2018]

解答例

(1)　$a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき，$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2=\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{2}\log_2 a-\dfrac{1}{\log_2 a}=\dfrac{1}{2}$ となり，

$$(\log_2 a)^2-2=\log_2 a\ ,\ (\log_2 a-2)(\log_2 a+1)=0$$

よって，$\log_2 a=2,\ -1$ から，$a=4,\ \dfrac{1}{2}$ である。

(2)　(1)と同様に，$\log_2\sqrt{a}-\log_a 2\geqq\dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{1}{2}\log_2 a-\dfrac{1}{\log_2 a}\geqq\dfrac{1}{2}$ となり，

$$(\log_2 a)^3-2\log_2 a\geqq(\log_2 a)^2,\ (\log_2 a)(\log_2 a-2)(\log_2 a+1)\geqq 0$$

ここで，$\log_2 a\neq 0$ に注意すると，$-1\leqq\log_2 a<0$，$2\leqq\log_2 a$ となり，すなわち $\dfrac{1}{2}\leqq a<1$，$4\leqq a$ である。

(3)　まず，$a>1$ かつ $b>1$ のとき，$\log_b a>0$ である。

$\log_b\sqrt{a}-\log_a b\geqq\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{2}\log_b a-\dfrac{1}{\log_b a}\geqq\dfrac{1}{2}$ となり，$\log_b a>0$ から，

$$(\log_b a)^2-2\geqq\log_b a\ ,\ (\log_b a-2)(\log_b a+1)\geqq 0$$

$\log_b a+1>0$ なので，$\log_b a\geqq 2$ すなわち $a\geqq b^2$ である。

(4)　a, b は自然数より $a>1$ かつ $b>1$ となり，(3)の結果を利用すると，条件は，

$$a+b\leqq 8\cdots\cdots\cdots①,\ a\geqq b^2\cdots\cdots\cdots②$$

(i)　$b=2$ のとき　①から $a\leqq 6$，②より $a\geqq 4$ となり，$a=4,\ 5,\ 6$

(ii)　$b\geqq 3$ のとき　②から $a\geqq 9$ となり，①を満たす a は存在しない。

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(4,\ 2),\ (5,\ 2),\ (6,\ 2)$

コメント

対数方程式，対数不等式についての問題です。(2)では分数不等式が現れるので，場合分けをする代わりに，両辺に分母の 2 乗をかけた後に因数分解という流れで処理をしています。なお，(3)では分母はプラスなので，この処理は必要ありません。

問　題

座標平面上に 2 点 $P(\sqrt{3},\ 0)$，$Q(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{PQ}|^2$ を θ で表せ。

(2)　$\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ を用いて，$\sin\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ における $|\overrightarrow{PQ}|^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，最大値，最小値を与える θ の値を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$P(\sqrt{3},\ 0)$，$Q(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ に対して，$\overrightarrow{PQ}=(\cos\theta-\sqrt{3},\ 1-\sin\theta)$ より，

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=(\cos\theta-\sqrt{3})^2+(1-\sin\theta)^2=5-2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta$$

(2)　$\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3)　(1)より，$|\overrightarrow{PQ}|^2=5-4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ となり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ から $\dfrac{7\pi}{12}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4\pi}{3}$

よって，$|\overrightarrow{PQ}|^2$ は，$\theta=\pi$ のとき最大値 $5-4\sin\dfrac{4\pi}{3}=5+2\sqrt{3}$ をとり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $5-4\sin\dfrac{7\pi}{12}=5-\sqrt{6}-\sqrt{2}$ をとる。

コメント

三角関数の計算だけの問題です。

問　題

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m \geqq \dfrac{1}{10}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqq \dfrac{1}{10}$ を満たす最大の自然数 $m,\ n$ を求めよ。

(3)　連立不等式 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y \geqq \dfrac{1}{10}$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の表す領域を座標平面に図示せよ。

(4)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqq \dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 m と n の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)=\log_{10}2-\log_{10}3=0.3010-0.4771=-0.1761$

$$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\log_{10}2=-0.3010$$

(2)　まず，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m \geqq \dfrac{1}{10}$ ……①より，$m\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)\geqq -1$ となり，(1)から，

$$m\leqq \frac{1}{0.1761}\fallingdotseq 5.68$$

よって，①を満たす最大の自然数 m は，$m=5$ である。

また，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqq \dfrac{1}{10}$ ……②より，$n\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq -1$ となり，(1)から，

$$m\leqq \frac{1}{0.3010}\fallingdotseq 3.32$$

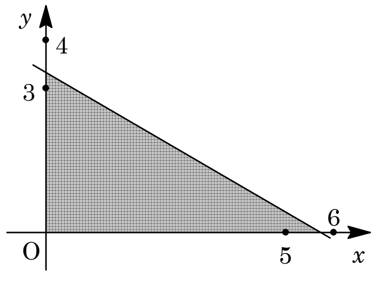
よって，②を満たす最大の自然数 n は，$n=3$ である。

(3)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y \geqq \dfrac{1}{10}$ から，$x\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)+y\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq -1$ となり，

$$-0.1761x-0.3010y\geqq -1$$

$$0.1761x+0.3010y\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ と合わせると，求める領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(4)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqq \dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 $(m,\ n)$ について，右図より，$n=1,\ 2,\ 3$ の場合を考える。

(i)　$n=3$ のとき

$(x,\ y)=(1,\ 3)$ は③を満たさない。この場合は満たす $(m,\ n)$ はない。

(ii)　$n=2$ のとき

$(x,\ y)=(2,\ 2)$ は③を満たすが，$(x,\ y)=(3,\ 2)$ は満たさない

よって，$(m,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 2)$

(iii)　$n=1$ のとき

　$(x,\ y)=(3,\ 1)$ は③を満たすが，$(x,\ y)=(4,\ 1)$ は満たさない

　よって，$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1)$

(i)～(iii)より，$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)$

コメント

対数計算の基本知識を確認する問題です。数値計算は煩雑です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$, $x\neq 1$ とする。方程式 $\log_2 x+2\log_x 2=3$ を解け。

(2)　$x>0$, $x\neq 2$，$y>0$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\log_{\frac{x}{2}} y=2，\ xy=16$$

(3)　$x>0$, $x\neq 2$，$y>0$ とする。次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{x}{2}} y<2，\ xy<16$$

[2010]

解答例

(1)　$x>0$, $x\neq 1$ のとき，$\log_2 x+2\log_x 2=3$ に対して，$\log_2 x+\dfrac{2}{\log_2 x}=3$ となり，

$$(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0，\ (\log_2 x-1)(\log_2 x-2)=0$$

よって，$\log_2 x=1,\ 2$ より，$x=2,\ 4$

(2)　$x>0$, $x\neq 2$，$y>0$ のとき，$\log_{\frac{x}{2}} y=2$ ……①，$xy=16$ ……②に対して，

①より，$y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}x^2$ となり，②に代入すると，

$$\frac{1}{4}x^3=16，\ x^3=64$$

すると，$x=4$ となり，②から，$y=4$

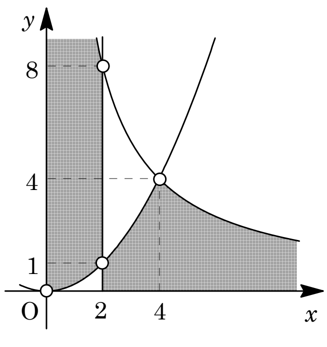
(3)　$x>0$, $x\neq 2$，$y>0$ のとき，$\log_{\frac{x}{2}} y<2$ ……③，$xy<16$ ……④に対して，③より，

(i)　$\dfrac{x}{2}>1$ $(x>2)$ のとき　$y<\dfrac{1}{4}x^2$

(ii)　$0<\dfrac{x}{2}<1$ $(0<x<2)$ のとき　$y>\dfrac{1}{4}x^2$

④より，$y<\dfrac{16}{x}$

よって，連立不等式③④の表す領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

対数方程式・不等式の基本問題です。

問　題

実数 t と $0\leqq\theta<2\pi$ に対して, 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}t^2$$

$$g(x)=x^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+\frac{1}{16}$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{2}$, $2\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ の大小を比べよ。また, この 3 つの値が等しくなる θ をすべて求めよ。

(2) θ は(1)で求めた値とは異なる定数とする。

(i) 2 次方程式 $g(x)=0$ の判別式を $D(t)$ とするとき, 2 次方程式 $D(t)=0$ の解 α, β $(\alpha<\beta)$ を求め, $\displaystyle\int_\alpha^\beta D(t)\,dt=-\frac{\cos^6 2\theta}{6}$ となることを示せ。

(ii) 2 つの 2 次方程式 $f(x)=0$, $g(x)=0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち, 他方が虚数解をもつための t の範囲を求めよ。　[2009]

解答例

(1) まず, $\frac{1}{2}-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1-\sin^2 2\theta)\geqq 0$ であり,

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta-\frac{1}{2}=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1-\sin^2 2\theta)\geqq 0$$

よって, $\sin^4\theta+\cos^4\theta\geqq\frac{1}{2}\geqq 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

等号は $\sin^2 2\theta=1$, すなわち $\sin 2\theta=\pm1$ のときであり, $0\leqq\theta<2\pi$ から,

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

(2) (i) $g(x)=x^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+\frac{1}{16}$ に対し, $g(x)=0$ の判別式を $D(t)$ は,

$$D(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-\frac{1}{4}$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)-\frac{1}{4}$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(1-\sin^2 2\theta)^2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cos^2 2\theta\right)^2$$

$D(t)=0$ の解が, $t=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$ より,

$$\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta),\ \beta=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)$$

すると, $\displaystyle\int_\alpha^\beta D(t)\,dt=\int_\alpha^\beta(t-\alpha)(t-\beta)\,dt=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=-\frac{\cos^6 2\theta}{6}$

(ii)　$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}t^2$ に対し，$f(x)=0$ の判別式を $D_1(t)$ とおくと，

$$D_1(t)=\frac{1}{4}-t^2=-\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

さて，2 次方程式 $f(x)=0$，$g(x)=0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち，他方が虚数解をもつ条件は，

$$D(t)\cdot D_1(t)=-(t-\alpha)(t-\beta)\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)<0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，θ が $\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$ のいずれとも異なるとき，$0<\cos^2 2\theta\leqq 1$ から，

$$-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}<\beta$$

よって,(*)の解は，$t<-\frac{1}{2}$，$\alpha<t<\frac{1}{2}$，$\beta<t$ となるので,

$$t<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)<t<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)<t$$

コメント

ボリュームのある問題です。(*)のように 4 次不等式まで出てきます。

問　題

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で定義された関数 $f(\theta) = a\sin\theta\cos\theta + b(\sin\theta - \cos\theta) - 1$ を考える。ただし, a, b は正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $t = \sin\theta - \cos\theta$ として，$f(\theta)$ を a, b, t を用いて表せ。また, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 等式 $f(\theta) = 0$ を満たす θ が存在するような点 $(a,\ b)$ 全体からなる領域を座標平面上に図示せよ。 [2008]

解答例

(1) $t = \sin\theta - \cos\theta$ とおくと，$t^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ より，$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{2}$ となり，

$$f(\theta) = \frac{a(1-t^2)}{2} + bt - 1 = -\frac{a}{2}t^2 + bt + \frac{a}{2} - 1$$

また，$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ となり，

$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

(2) $g(t) = -\dfrac{a}{2}t^2 + bt + \dfrac{a}{2} - 1$ とおくとき，$f(\theta) = 0$ を満たす θ が存在する条件は，$g(t) = 0$ が $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件に等しい。

ここで, $a > 0$, $b > 0$ において，$g(t) = -\dfrac{a}{2}\left(t - \dfrac{b}{a}\right)^2 + \dfrac{b^2}{2a} + \dfrac{a}{2} - 1$ となり，

$$g(\sqrt{2}) = -\frac{a}{2} + \sqrt{2}b - 1,\quad g(-1) = -b - 1 < 0$$

(i) $0 < \dfrac{b}{a} \leqq \sqrt{2}$ $(0 < b \leqq \sqrt{2}a)$ のとき

$g(-1) < 0$ より，求める条件は，$\dfrac{b^2}{2a} + \dfrac{a}{2} - 1 \geqq 0$ となり，

$$a^2 + b^2 - 2a \geqq 0,\quad (a-1)^2 + b^2 \geqq 1$$

(ii) $\dfrac{b}{a} > \sqrt{2}$ $(b > \sqrt{2}a)$ のとき

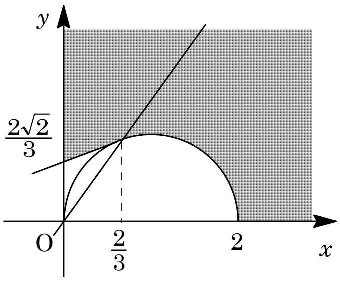
$g(-1) < 0$ より，求める条件は，$g(\sqrt{2}) = -\dfrac{a}{2} + \sqrt{2}b - 1 \geqq 0$ となり，

$$\sqrt{2}b \geqq \frac{a}{2} + 1,\quad b \geqq \frac{\sqrt{2}}{4}a + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i)(ii)より，点 $(a,\ b)$ の全体からなる領域は，

$0 < y \leqq \sqrt{2}x$ のとき $(x-1)^2 + y^2 \geqq 1$

$y > \sqrt{2}x$ のとき $y \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



よって，図示すると，右図の網点部となる。ただし，x 軸, y 軸以外の境界は領域に含む。

コメント

(2)では，$g(-1) < 0$ であることに着目するのがポイントです。

問　題

実数α，βについて, x, yは2つの等式

$$x+y=\alpha\beta+\alpha+\beta-1,\quad 2x+3y=3\alpha\beta+2\alpha+2\beta-3$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha+\beta$と$\alpha\beta$をx, yで表せ。

(2) tの2次方程式$t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$が実数解をもつ条件を$x, y$で表せ。

(3) α，βが条件$-1\leqq\alpha\leqq1$，$-1\leqq\beta\leqq1$を満たすとき，点$(x,\ y)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。 [2005]

解答例

(1) 条件から，$x+y=\alpha\beta+\alpha+\beta-1$，$2x+3y=3\alpha\beta+2\alpha+2\beta-3$なので,

$$\alpha\beta+(\alpha+\beta)=x+y+1\cdots\cdots\cdots①,\quad 3\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=2x+3y+3\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\alpha\beta=2x+3y+3-2(x+y+1)=y+1$

$$\alpha+\beta=x+y+1-(y+1)=x$$

(2) 2次方程式$t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0\cdots\cdots③$が実数解をもつ条件は,

$$D=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\geqq0$$

(1)より，$x^2-4y-4\geqq0$，$y\leqq\dfrac{1}{4}x^2-1\cdots\cdots\cdots④$

(3) ③は$(t-\alpha)(t-\beta)=0$と変形でき，その解は$t=\alpha$，βである。

すると，条件$-1\leqq\alpha\leqq1$，$-1\leqq\beta\leqq1$は，③の2つの解がともに$-1\leqq t\leqq1$にあることに等しい。

ここで，$f(t)=t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=t^2-xt+y+1$とおくと，④の条件のもとで,

$$-1\leqq\frac{x}{2}\leqq1,\quad f(1)=2-x+y\geqq0,\quad f(-1)=2+x+y\geqq0$$

よって，$-2\leqq x\leqq2$，$y\geqq x-2$，$y\geqq-x-2$

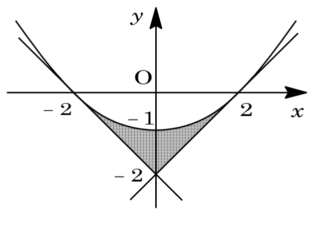
さて，④の境界線$y=\dfrac{1}{4}x^2-1$と$y=x-2$の共有点は,

$$\frac{1}{4}x^2-1=x-2,\quad \frac{1}{4}(x-2)^2=0$$

よって，放物線$y=\dfrac{1}{4}x^2-1$と直線$y=x-2$は，点$(2,\ 0)$で接する。

同様に，放物線$y=\dfrac{1}{4}x^2-1$と直線$y=-x-2$は，点$(-2,\ 0)$で接する。

以上より，求める点$(x,\ y)$の存在範囲は，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



コメント

2次方程式の解の配置の問題です。基本に従って，計算を進めることが重要です。

問　題

正の定数 $a\,(a \neq 1)$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a^{2x} + a^{-2x} - 2(a + a^{-1})(a^{x} + a^{-x}) + 2(a + a^{-1})^{2}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a^{x} + a^{-x} = t$ とおくとき，t の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　相加平均と相乗平均の関係より，$t = a^{x} + a^{-x} \geqq 2\sqrt{a^{x} \cdot a^{-x}} = 2$

等号成立は $a^{x} = a^{-x}$，すなわち $x = 0$ のときである。

したがって，$x = 0$ のとき t は最小値 2 をとる。

(2)　$a^{2x} + a^{-2x} = (a^{x} + a^{-x})^{2} - 2 = t^{2} - 2$ より，

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^{2} - 2) - 2(a + a^{-1})t + 2(a + a^{-1})^{2} \\ &= t^{2} - 2(a + a^{-1})t + 2(a + a^{-1})^{2} - 2 \\ &= \left\{ t - (a + a^{-1}) \right\}^{2} + a^{2} + a^{-2} \end{aligned}$$

(1)より $t \geqq 2$ で，$a + a^{-1} > 2$ なので，$t = a + a^{-1}$ のとき $f(x)$ は最小値 $a^{2} + a^{-2}$ をとる。このときの x の値は，$a^{x} + a^{-x} = a + a^{-1}$ から，$a^{2x} - (a + a^{-1})a^{x} + 1 = 0$

$$(a^{x} - a)(a^{x} - a^{-1}) = 0,\quad x = \pm 1$$

コメント

置き換えると 2 次関数が現れ，それを利用して最小値を求めるというセンターレベルの問題です。

問　題

kを0以上の定数とし，3次関数

$$f(x)=x^3-(2k+1)x^2-(k^3-8k)x+(k^3-6k)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f(1)$を求めよ。

(2)　方程式$f(x)=0$が虚数解をもつようなkの値の範囲を求めよ。

(3)　kが0以上の実数全体を動くとき，$f(0)$のとり得る値の最小値は$-4\sqrt{2}$であることを示せ。また，$f(0)=-4\sqrt{2}$のとき，方程式$f(x)=0$の実数解の個数を求めよ。 [2019]

解答例

(1)　$k\geqq 0$のとき，$f(x)=x^3-(2k+1)x^2-(k^3-8k)x+(k^3-6k)$に対して，

$$f(1)=1-(2k+1)-(k^3-8k)+(k^3-6k)=0$$

(2)　(1)より，$f(x)$は$x-1$で割り切れ，$f(x)=(x-1)(x^2-2kx-k^3+6k)$

さて，$f(x)=0$が虚数解をもつ条件は，$x^2-2kx-k^3+6k=0$の判別式Dが，

$$D/4=k^2-(-k^3+6k)=k^3+k^2-6k=k(k+3)(k-2)<0$$

すると，$k\geqq 0$より，$0<k<2$……(＊)である。

(3)　$g(k)=f(0)=k^3-6k$とおくと，

$$g'(k)=3k^2-6=3(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})$$

すると，$k\geqq 0$における$g(k)$の増減は右表のようになる。

k	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(k)$		$-$	0	$+$
$g(k)$		↘	$-4\sqrt{2}$	↗

これより，$g(k)$すなわち$f(0)$の最小値は$-4\sqrt{2}$である。

また，$f(0)=-4\sqrt{2}$のときは$k=\sqrt{2}$となり，この値は(＊)を満たす。これより，方程式$f(x)=0$の実数解は$x=1$のみとなり，その個数は1個である。

コメント

3次方程式および微分と増減についての超基本題です。

問　題

関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt$ を満たすとし，$\int_0^2 f(t)dt=a$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(2)$ を a を用いて表せ。

(2) a の値を求めよ。

(3) k は定数とする。$y=xf(x)-k$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフの共有点の個数を求めよ。 [2018]

解答例

(1) 条件より，$f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt=|x-1|+x\int_0^2 f(t)dt$

ここで，$\int_0^2 f(t)dt=a$ ……①とおくと，$f(x)=|x-1|+ax$ ……②となり，

$f(2)=|2-1|+2a=1+2a$

(2) ②より，$f(x)=x-1+ax=(a+1)x-1\ \ (x\geqq 1)$

$f(x)=-x+1+ax=(a-1)x+1\ \ (x<1)$

①に代入すると，

$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1\{(a-1)t+1\}dt+\int_1^2\{(a+1)t-1\}dt$$

$$=\Big[\frac{1}{2}(a-1)t^2+t\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{2}(a+1)t^2-t\Big]_1^2=\frac{1}{2}(a-1)+1+\frac{1}{2}(a+1)\cdot 3-1$$

$$=2a+1$$

よって，$a=-1$ となる。

(3) (2)より，$f(x)=-1\ (x\geqq 1)$，$f(x)=-2x+1\ (x<1)$

ここで，$y=xf(x)-k$ ……③と $y=-x^2$ ……④を連立すると，

$xf(x)-k=-x^2$，$xf(x)+x^2=k$

すると，$y=xf(x)+x^2$ ……⑤のグラフと $y=k$ ……⑥のグラフの共有点の個数は，③のグラフと④のグラフの共有点の個数に一致し，⑤より，

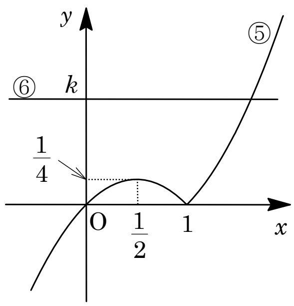
(i) $x\geqq 1$ のとき

$$xf(x)+x^2=-x+x^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

(ii) $x<1$ のとき

$$xf(x)+x^2=x(-2x+1)+x^2=-x^2+x$$

$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



(i)(ii)より，③と④のグラフの共有点の個数は，図より，

$$1\text{ 個}\left(k<0,\ \frac{1}{4}<k\right),\ 2\text{ 個}\left(k=0,\ \frac{1}{4}\right),\ 3\text{ 個}\left(0<k<\frac{1}{4}\right)$$

コメント

置換え型の積分方程式と 2 次関数と方程式の融合問題です。誘導が詳しいので，方針は明快です。

問　題

$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

(2) 接線 l は，原点 O(0, 0) を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。　[2017]

解答例

(1) $C: y=a(x-1)^2+1\ (a>0)$ に対して，$\mathrm{P}(s,\ a(s-1)^2+1)$ における接線 l の方程式は，$y'=2a(x-1)$ から，$y-\{a(s-1)^2+1\}=2a(s-1)(x-s)$ となり，

$$y=2a(s-1)x-as^2+a+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$ が $y=Ax+B$ に一致するので，

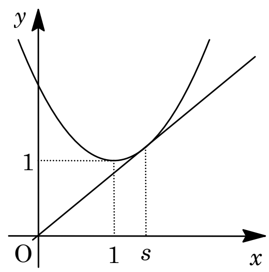
$$A=2a(s-1),\quad B=-as^2+a+1$$

(2) 条件より，$A=2a(s-1)>0$ から $s>1$ となり，また $B=-as^2+a+1=0$ より，

$$s^2=\frac{a+1}{a},\quad s=\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

すると，$A=2a\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}-1\right)=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)$ から，

$$l: y=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)x$$



(3) l と C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^s\{a(x-1)^2+1-2a(s-1)x\}dx$$

$$=\int_0^s(ax^2-2asx+a+1)dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3-asx^2+(a+1)x\right]_0^s=\frac{a}{3}s^3-as^3+(a+1)s$$

$$=\left(-\frac{2}{3}a\cdot\frac{a+1}{a}+a+1\right)\sqrt{\frac{a+1}{a}}=\frac{1}{3}(a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{(a+1)^6}{a^3}}$ となり，

$$\frac{(a+1)^6}{a^3}=\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)^6=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^6\geqq\left(2\sqrt{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^6=2^6$$

ここで，等号は $\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，すなわち $a=1$ のときに成立する。

したがって，$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ は $a=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{2^6}=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

コメント

微積分の総合問題です。(3)で被積分関数が $a(x-s)^2$ となることに気付けば，計算が少し簡単になります。また，(4)では求めた式を 4 乗根の中に入れてしまうと，相加平均と相乗平均の出番になります。

問　題

平面上の 2 つの曲線 $C_1 : x^2+(y-5)^2=16$，$C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 を同一平面上に図示せよ。

(3)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2016]

解答例

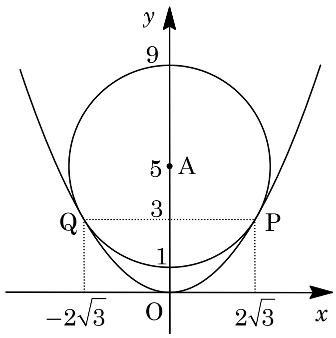
(1)　$C_1 : x^2+(y-5)^2=16$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2$ ……②に対し，①②を連立すると，

$$4y+(y-5)^2=16,\ \ y^2-6y+9=0$$

すると，$(y-3)^2=0$ から $y=3$ となり，②より $x=\pm2\sqrt{3}$

よって，C_1 と C_2 の共有点の座標は，$(2\sqrt{3},\ 3)$，$(-2\sqrt{3},\ 3)$ である。

(2)　C_1 の中心を $\mathrm{A}(0,\ 5)$，C_1 と C_2 の共有点を P，Q とおき C_1，C_2 を図示すると，右図のようになる。



(3)　(2)から，線分 AP の傾きが $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，

$$\angle \mathrm{OAP}=\frac{\pi}{3}$$

ここで，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると，y 軸に関する対称性より，

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}(3+5)\cdot2\sqrt{3}-\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4}x^2dx-\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=8\sqrt{3}-\frac{1}{12}\Big[x^3\Big]_0^{2\sqrt{3}}-\frac{8}{3}\pi=8\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi=6\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi$$

よって，$S=12\sqrt{3}-\dfrac{16}{3}\pi$ である。

コメント

円と放物線の関係を題材とした基本題です。また，(3)の面積は，台形を利用すると，簡単な計算で求まります。

問　題

a, b は定数で, $ab>0$ とする。放物線 $C_1: y=ax^2+b$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$ における接線を l とし, 放物線 $C_2: y=ax^2$ と l で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C_2 のすべての交点の x 座標を求めよ。

(3) 点 P が C_1 上を動くとき, S は点 P の位置によらず一定であることを示せ。

[2015]

解答例

(1) $C_1: y=ax^2+b\quad(ab>0)$ に対して, $y'=2ax$ となる。

そこで, 点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$ における接線 l は,

$$y-(at^2+b)=2at(x-t),\ \ y=2atx-at^2+b\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) $(*)$と $C_2: y=ax^2$ を連立すると, $ax^2=2atx-at^2+b$ となり,

$$ax^2-2atx+at^2-b=0$$

すると, l と C_2 の交点の x 座標は, $x=\dfrac{at\pm\sqrt{a^2t^2-a(at^2-b)}}{a}=\dfrac{at\pm\sqrt{ab}}{a}$

(3) (2)より, $\alpha=\dfrac{at-\sqrt{ab}}{a}$, $\beta=\dfrac{at+\sqrt{ab}}{a}$ とおくと, $x=\alpha$ と $x=\beta$ の間で, l と C_2 の上下関係は変わらないので, l と C_2 によって囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\left|\int_\alpha^\beta(2atx-at^2+b-ax^2)\,dx\right|=\left|\int_\alpha^\beta -a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|$$

$$=\left|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|=\left|\frac{a}{6}\Big(\frac{2\sqrt{ab}}{a}\Big)^3\right|=\left|\frac{a}{6}\cdot\frac{8ab\sqrt{ab}}{a^3}\right|=\frac{4b}{3a}\sqrt{ab}$$

よって, 点 P が C_1 上を動くとき, S は点 P の位置によらず一定である。

コメント

定積分と面積に関する基本問題です。a の符号で場合分けをしても構いませんが, 記述量は多くなります。

問　題

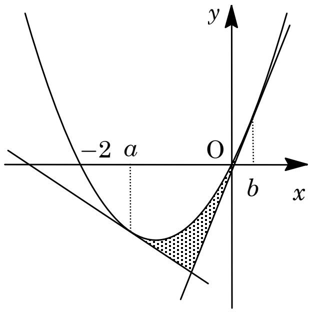
放物線 $C: y = x^2 + 2x$ 上の 2 点 $(a,\ a^2+2a)$，$(b,\ b^2+2b)$ における接線をそれぞれ l_a，l_b とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$a<b$ とする。

(1) 2 直線 l_a，l_b の方程式を求めよ。また，l_a と l_b の交点の x 座標を求めよ。

(2) 放物線 C と 2 直線 l_a，l_b とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3) 2 直線 l_a，l_b が垂直に交わるように a，b が動くとき，a，b が満たす関係式を求めよ。また，そのときの面積 S の最小値とそれを与える a, b の値を求めよ。　[2014]

解答例



(1) $C: y = x^2 + 2x$ に対し，$y' = 2x + 2$

点 $(a,\ a^2+2a)$ における接線 l_a の方程式は，

$$y - (a^2+2a) = (2a+2)(x-a)$$

$$y = (2a+2)x - a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に接線 l_b の方程式は，$y = (2b+2)x - b^2 \cdots\cdots\cdots ②$

①②を連立して，$(2a+2)x - a^2 = (2b+2)x - b^2$

$$2(a-b)x = a^2 - b^2,\ x = \frac{a+b}{2}$$

(2) $$S = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \{x^2+2x-(2a+2)x+a^2\}dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \{x^2+2x-(2b+2)x+b^2\}dx$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x-b)^2\,dx = \Big[\frac{(x-a)^3}{3}\Big]_a^{\frac{a+b}{2}} + \Big[\frac{(x-b)^3}{3}\Big]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^3 - \frac{1}{3}\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^3 = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

(3) l_a と l_b が垂直に交わることより，$(2a+2)(2b+2) = -1$ となり，

$$(a+1)(b+1) = -\frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，$a<b$ なので，③より $a+1<0<b+1$ となり，相加・相乗平均の関係より，

$$b-a = (b+1)-(a+1) = b+1+\frac{1}{4(b+1)} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

等号は，$b+1 = \dfrac{1}{4(b+1)}$ すなわち $b+1 = \dfrac{1}{2}$ のときに成立する。

以上より，S の最小値は $\dfrac{1}{12}\cdot 1^3 = \dfrac{1}{12}$ となり，このとき $b = -\dfrac{1}{2}$，さらに③から $a+1 = -\dfrac{1}{4}\cdot 2 = -\dfrac{1}{2}$ すなわち $a = -\dfrac{3}{2}$ である。

コメント

(3)の設問まで含めて，センターレベルの超頻出問題です。

問　題

実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=|x^2-6x+5|-x^2+4x+5$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$0\leqq x\leqq 6$ において，$f(x)$ は $x=a$ で最大値 $f(a)$ を，$x=b$ で最小値 $f(b)$ をとる。$a,\ b$ および $f(a)$，$f(b)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた $a,\ b$ について，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$f(x)=|x^2-6x+5|-x^2+4x+5$ に対して，

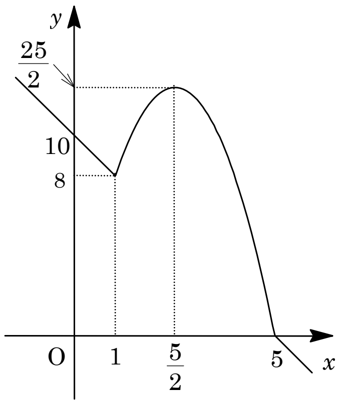
(i)　$x^2-6x+5\geqq 0$ $(x\leqq 1,\ 5\leqq x)$ のとき

$$f(x)=x^2-6x+5-x^2+4x+5=-2x+10$$

(ii)　$x^2-6x+5<0$ $(1<x<5)$ のとき

$$f(x)=-x^2+6x-5-x^2+4x+5$$
$$=-2x^2+10x=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

(i)(ii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のとおり。



(2)　(1)より，$0\leqq x\leqq 6$ において，$f(x)$ は $x=\frac{5}{2}$ で最大値 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{2}$ をとり，$x=6$ で最小値 $f(6)=-2$ をとる。

(3)　$a=\frac{5}{2}$，$b=6$ より，面積を対応させると，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{5}{2}}^5(-2x^2+10x)dx+\int_5^6(-2x+10)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^5-2x(x-5)dx+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-2)=\frac{1}{6}\cdot 5^3-1=\frac{119}{6}$$

コメント

絶対値の処理と定積分の計算問題です。ともに基本です。

問　題

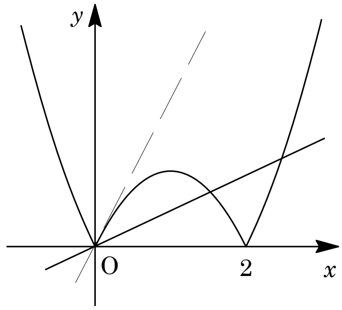
曲線 $C: y=\left|x^2-2x\right|$ と傾きが m の直線 $l: y=mx$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=-x^2+2x$ と l が接する m の値を求めよ。

(2)　C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲を求めよ。また，そのときの 2 つの交点の座標を m を用いて表せ。

(3)　m は(2)で求めた範囲にあるとする。$x\geqq 2$，$y\leqq mx$，$y\geqq\left|x^2-2x\right|$ で定まる部分の面積 S を m を用いて表せ。　[2012]

解答例



(1)　曲線 $y=-x^2+2x$ に対して，$y'=-2x+2$ となり，$x=0$ のとき $y'=2$ である。

よって，曲線 $y=-x^2+2x$ と直線 $l: y=mx$ が接するのは，$m=2$ のときである。

(2)　C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲は，右図より，$0<m<2$ である。

また，$y=-x^2+2x$ と $y=mx$ を連立して，

$$-x^2+2x=mx\,,\ \ x^2-(2-m)x=0$$

$x\neq 0$ の解は $x=2-m$ から，交点の座標は，$(2-m,\ 2m-m^2)$ となる。

さらに，$y=x^2-2x$ と $y=mx$ を連立して，

$$x^2-2x=mx\,,\ \ x^2-(2+m)x=0$$

$x\neq 0$ の解は $x=2+m$ から，交点の座標は，$(2+m,\ 2m+m^2)$ となる。

(3)　$x\geqq 2$，$y\leqq mx$，$y\geqq\left|x^2-2x\right|$ で定まる部分の面積 S は，

$$S=\int_2^{2+m}(mx-x^2+2x)dx=\int_2^{2+m}\left\{-x^2+(2+m)x\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2+m}{2}x^2\right]_2^{2+m}=-\frac{1}{3}\left\{(2+m)^3-8\right\}+\frac{2+m}{2}\left\{(2+m)^2-4\right\}$$
$$=-\frac{1}{3}(12m+6m^2+m^3)+\frac{2+m}{2}(4m+m^2)=\frac{1}{6}m^3+m^2$$

コメント

微分と積分の基本知識を確認する問題です。(2)は(1)を誘導としてみると，図から判断してもよいと解釈しました。

問　題

実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^2 |t-x|\,dt$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ を求め，そのグラフをかけ。

(2)　$y=f(x)$ の接線で傾きが 1 のものを l とする。l の方程式を求めよ。

(3)　直線 $x=-1$，接線 l，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　　　[2011]

解答例

(1)　$f(x)=\int_0^2 |t-x|\,dt$ に対して，

(i)　$x<0$ のとき　$f(x)=\int_0^2 (t-x)\,dt=\left[\dfrac{t^2}{2}-xt\right]_0^2=2-2x$

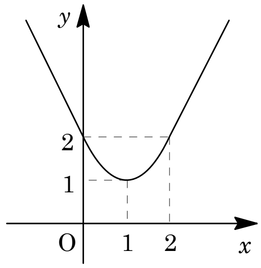
(ii)　$0\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=\int_0^x -(t-x)\,dt+\int_x^2 (t-x)\,dt=\left[-\frac{t^2}{2}+xt\right]_0^x+\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_x^2$$

$$=-\frac{x^2}{2}+x^2+\frac{1}{2}(4-x^2)-x(2-x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

(iii)　$x\geqq 2$ のとき　$f(x)=\int_0^2 -(t-x)\,dt=-2+2x$

(i)〜(iii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$0\leqq x<2$ において，$f'(x)=1$ とおくと，

$2x-2=1$，$x=\dfrac{3}{2}$

これより，接点は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$ となり，接線 l の方程式は，

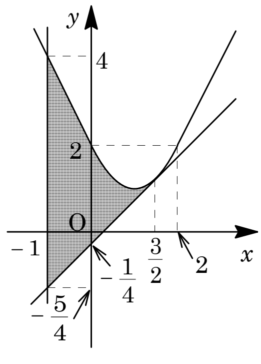
$y-\dfrac{5}{4}=x-\dfrac{3}{2}$，$y=x-\dfrac{1}{4}$

(3)　直線 $x=-1$，接線 l，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{21}{4}\right)\cdot 1+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x^2-2x+2-x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\frac{15}{4}+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\frac{15}{4}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{15}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}=\frac{39}{8}$$



コメント

絶対値のついた関数の定積分です。基本的ですが，出来不出来がはげしい問題です。なお，(3)の設問で，y 軸の左側の部分は台形の面積公式を利用しています。

問　題

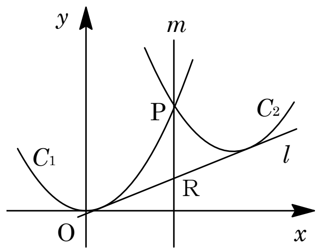
a を正の定数とする。2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = (x-2)^2 + 4a$ の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における接線の方程式を求めよ。さらに，その接線のうち C_2 に接するものを l とする。l の方程式を求めよ。

(2) 点 P を通り y 軸に平行な直線を m とする。l と m の交点を R とするとき，線分 PR の長さを求めよ。

(3) 直線 l, m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

解答例



(1) $C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = (x-2)^2 + 4a$ ……②に対して，①上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，

$y' = 2x$ より，

$$y - t^2 = 2t(x-t),\quad y = 2tx - t^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，②と③を連立すると，$2tx - t^2 = (x-2)^2 + 4a$

$$x^2 - 2(t+2)x + t^2 + 4a + 4 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

④が重解をもつことより，

$$D/4 = (t+2)^2 - (t^2 + 4a + 4) = 0$$

これより，$t = a$ となり，③から，直線 $l : y = 2ax - a^2$ ………⑤

(2) ①②を連立して，$x^2 = (x-2)^2 + 4a$ より，$x = a+1$

これより，$\mathrm{P}(a+1,\ (a+1)^2)$ となり，直線 $m : x = a+1$ ………⑥

⑤⑥の交点は，$y = 2a(a+1) - a^2 = a^2 + 2a$ から，$\mathrm{R}(a+1,\ a^2+2a)$ となり，

$$\mathrm{PR} = (a+1)^2 - (a^2 + 2a) = 1$$

(3) 直線 l, m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S = \int_a^{a+1} (x^2 - 2ax + a^2)\,dx = \int_a^{a+1} (x-a)^2\,dx = \frac{1}{3}\Big[(x-a)^3\Big]_a^{a+1} = \frac{1}{3}$$

コメント

センター試験にそのまま出題されても不思議のない内容の微積分の総合問題です。

問　題

実数 a に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を，$f(x)=-(a+1)x-1$，$g(x)=2x+\dfrac{a}{3}$ とし，$m(a)=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m(a)>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた a の値の範囲において，関数 $h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=0$ となる a の値を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$m(a)=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx=\int_0^1 -\{(a+1)x+1\}\left(2x+\frac{a}{3}\right)dx$ より，

$$m(a)=-\int_0^1\left\{2(a+1)x^2+\frac{a^2+a+6}{3}x+\frac{a}{3}\right\}dx$$
$$=-\frac{2(a+1)}{3}-\frac{a^2+a+6}{6}-\frac{a}{3}=\frac{-a^2-7a-10}{6}$$

ここで，$m(a)>0$ より，$a^2+7a+10<0$，$(a+2)(a+5)<0$ となり，

$-5<a<-2$

(2)　$h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ より，

$$\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=\int_0^1\left[f(x)g(x)-m(a)\{f(x)\}^2\right]dx$$
$$=m(a)-m(a)\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

さて，$m(a)>0$ より，$\displaystyle\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=0$ は，$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2dx=1$ と同値であり，

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1\{(a+1)^2x^2+2(a+1)x+1\}dx=\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1$$

よって，$\dfrac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1=1$ から，$a+1=-3,\ 0$ となる。

すると,(1)より，$-5<a<-2$ なので，$a=-4$ である。

コメント

(2)は(1)と関連し，クリアーに解ける設問になっています。

問　題

関数 $f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有するような a の値の範囲を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ に対して，

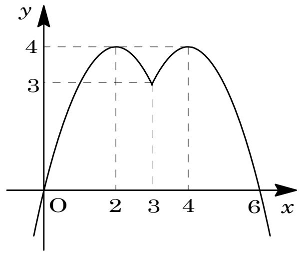
(i)　$x \geqq 3$ のとき　$f(x)=-x^2+6x+2(x-3)-6$

$$=-x^2+8x-12$$

$$=-(x-4)^2+4$$

(ii)　$x<3$ のとき　$f(x)=-x^2+6x-2(x-3)-6$

$$=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$$



(i)(ii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

(2)　曲線 $y=-x^2+8x-12$ と直線 $y=ax$ が接するとき，

$$-x^2+8x-12=ax\,,\quad x^2-(a-8)x+12=0$$

この方程式が重解をもつことより，$D=(a-8)^2-48=0$，$a=8\pm4\sqrt{3}$

右図より，曲線 $y=f(x)$ に接するのは，$a=8-4\sqrt{3}$ のときである。

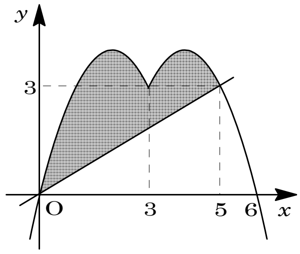
また，直線 $y=ax$ が点 $(3,\ 3)$ を通るとき $a=1$ なので，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有する a の値の範囲は，右上図から，

$$1<a<8-4\sqrt{3}$$

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ の交点は，

$$-x^2+8x-12=\frac{3}{5}x\,,\quad 5x^2-37x+60=0$$

$$(5x-12)(x-5)=0$$



$x \geqq 3$ から $x=5$ となり，交点の座標は $(5,\ 3)$ である。

また，曲線 $y=f(x)$ は，直線 $x=3$ に関して対称であることを利用すると，求める部分の面積 S は，

$$S=2\int_0^3(-x^2+4x)\,dx-\frac{1}{2}\cdot5\cdot3-\int_5^6(-x^2+8x-12)\,dx$$

$$=2\Big[-\frac{x^3}{3}+2x^2\Big]_0^3-\frac{15}{2}-\Big[-\frac{x^3}{3}+4x^2-12x\Big]_5^6$$

$$=18-\frac{15}{2}+\frac{91}{3}-44+12=\frac{53}{6}$$

コメント

絶対値つきの関数のグラフを題材にした標準的な問題です。

問　題

座標平面上の曲線$C: y=|x^2-1|$と傾き a の直線$l: y=a(x+1)$が異なる 3 点で交わっているとする。

(1) aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) Cとlで囲まれた2つの図形の面積の和Sをaを用いて表せ。

(3) Sが最小になるaの値を求めよ。 [2004]

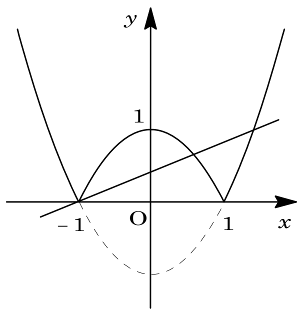
解答例

(1) 曲線$C: y=|x^2-1|$に対して,

$$y=x^2-1\ (|x|\geqq 1)\cdots\cdots\text{①},\quad y=-x^2+1\ (|x|\leqq 1)\cdots\cdots\text{②}$$

また, $l: y=a(x+1)\cdots\cdots$③は, 点$(-1,\ 0)$を通り, 傾きaの直線である。

ここで, ②に対して$y'=-2x$より, $x=-1$のとき$y'=2$である。



すると, Cとlが異なる3点で交わる条件は, 右図より, $0<a<2$である。

(2) ①と③の交点は, $x^2-1=a(x+1)$より,

$$(x+1)(x-1-a)=0,\ x=-1,\ 1+a$$

また, ②と③の交点は, $-x^2+1=a(x+1)$より,

$$(x+1)(x-1+a)=0,\ x=-1,\ 1-a$$

さて, C と l で囲まれた 2 つの図形のうち, $-1\leqq x\leqq 1-a$の部分の面積をS_1, $1-a\leqq x\leqq 1+a$の部分の面積をS_2とする。

$$S_1=\int_{-1}^{1-a}\{-x^2+1-a(x+1)\}dx=\int_{-1}^{1-a}-(x+1)(x-1+a)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-a+1)^3=\frac{1}{6}(2-a)^3$$

$$S_2=S_1+\int_{-1}^{1+a}\{a(x+1)-(x^2-1)\}dx-2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=S_1+\int_{-1}^{1+a}-(x+1)(x-1-a)dx-2\int_{-1}^{1}-(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3-\left(-\frac{1}{6}\right)(1+a+1)^3+2\left(-\frac{1}{6}\right)(1+1)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3+\frac{1}{6}(2+a)^3-\frac{8}{3}$$

よって, $S=S_1+S_2=\dfrac{1}{6}(2-a)^3\times 2+\dfrac{1}{6}(2+a)^3-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{1}{6}a^3+3a^2-2a+\dfrac{4}{3}$

(3)　(2)より，$S' = -\dfrac{1}{2}a^2 + 6a - 2 = -\dfrac{1}{2}(a^2 - 12a + 4)$

$S' = 0$ の解は，$a = 6 \pm 4\sqrt{2}$ となる。

右の増減表より，S が最小になるのは，$a = 6 - 4\sqrt{2}$ のときである。

a	0	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	2
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

コメント

超有名頻出問題を超有名解法で解いています。

問　題

定積分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(ax+b)^2dx$を$I(a,\ b)$とおく。

(1)　$I(a,\ b)$をa, bの多項式で表せ。

(2)　$b=a+1$のとき，$I(a,\ b)$が最小となるようなaおよびそのときの$I(a,\ b)$の値を求めよ。

(3)　$I(a,\ b)=1$かつ$b=ma+n$となる$(a,\ b)$がちょうど 1 組のとき，実数$m,\ n$の満たす条件を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$I(a,\ b)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(ax+b)^2dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(a^2x^2+2abx+b^2)dx=\int_{0}^{1}(a^2x^2+b^2)dx$

$$=\Big[\frac{1}{3}a^2x^3+b^2x\Big]_0^1=\frac{1}{3}a^2+b^2$$

(2)　$b=a+1$のとき, (1)より,

$$I(a,\ b)=\frac{1}{3}a^2+(a+1)^2=\frac{4}{3}a^2+2a+1=\frac{4}{3}\Big(a+\frac{3}{4}\Big)^2+\frac{1}{4}$$

よって，$a=-\frac{3}{4}$のとき，最小値$\frac{1}{4}$をとる。

(3)　$I(a,\ b)=1$より，$\frac{1}{3}a^2+b^2=1$ ………①

条件より，$b=ma+n$ ………②

②を①に代入して，$\frac{1}{3}a^2+(ma+n)^2=1$

$$\Big(m^2+\frac{1}{3}\Big)a^2+2mna+n^2-1=0 \text{ ………③}$$

$(a,\ b)$がちょうど 1 組存在する条件は，③が重解をもつことなので,

$$D/4=m^2n^2-\Big(m^2+\frac{1}{3}\Big)(n^2-1)=0,\ \ m^2-\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{3}=0$$

よって，$3m^2-n^2=-1$

コメント

基本的な計算問題です。

問　題

x の 3 次関数 $f(x)=x^3-kx^2+4k$ について以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のときつねに $f(x) \geqq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが k の値によらず通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ を求めよ。さらに $a<x<b$ のときつねに $y=f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-kx^2+4k$ に対して，$f'(x)=3x^2-2kx=x(3x-2k)$

(i)　$k \leqq 0$ のとき

$x \geqq 0$ のとき $f'(x) \geqq 0$ より，$f(x) \geqq f(0)=4k$ である。

これより，$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ である条件は $k \geqq 0$ となり，$k \leqq 0$ と合わせると $k=0$ となる。

(ii)　$k>0$ のとき

右表より，$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ となる条件は $f\left(\dfrac{2}{3}k\right) \geqq 0$ なので，

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\frac{8}{27}k^3-\frac{4}{9}k^3+4k \geqq 0,\quad -\frac{4}{27}k(k^2-27) \geqq 0$$

$k>0$ より，$0<k \leqq 3\sqrt{3}$ となる。

(i)(ii)より，求める k の値の範囲は $0 \leqq k \leqq 3\sqrt{3}$ である。

(2)　$y=f(x)$ すなわち $y=x^3-kx^2+4k$ を k についてまとめて，

$$(x^2-4)k+y-x^3=0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$が k の値によらず成立する $(x,\ y)$ の条件は，

$$x^2-4=0,\quad y-x^3=0$$

$x=2$ のとき $y=8$，$x=-2$ のとき $y=-8$ より，$\mathrm{A}(-2,\ -8)$，$\mathrm{B}(2,\ 8)$ となり，直線 AB の方程式は，$y-8=4(x-2)$，$y=4x$ である。

すると，$y=f(x)$ のグラフが直線 $y=4x$ の上にある条件は，

$$x^3-kx^2+4k>4x,\quad x^3-kx^2-4x+4k>0,\quad (x-2)(x+2)(x-k)>0$$

$-2<x<2$ から $(x-2)(x+2)<0$ となるので，$x-k<0$

そこで，$g(x)=x-k$ とおくと，$-2<x<2$ で $g(x)<0$ となる条件から，

$$g(2)=2-k \leqq 0,\ k \geqq 2$$

コメント

微分法を中心とした基本問題です。(3)の結論を，あわてて $k>2$ としない注意力が必要です。

問　題

関数 $f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+2|x|-\dfrac{15}{16}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)\leqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3)　$a>0$ とするとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+2|x|-\dfrac{15}{16}$ に対して，

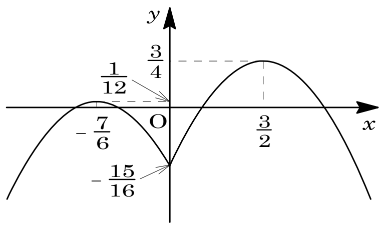
(i)　$x\geqq 0$ のとき

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

(ii)　$x<0$ のとき

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-2x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

これより，$y=f(x)$ のグラフは右図の通り。



$x\geqq 0$ のとき, x 軸との交点は,

$$-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{15}{16}=0,\quad 4x^2-12x+5=0$$

$$x=\frac{1}{2},\quad x=\frac{5}{2}$$

$x<0$ のとき, x 軸との交点は,

$$-\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{15}{16}=0,\quad 12x^2+28x+15=0,\quad x=-\frac{3}{2},\quad x=-\frac{5}{6}$$

よって，$f(x)\leqq 0$ の解は，図より $x\leqq -\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{5}{6}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{5}{2}\leqq x$ となる。

(2)　$f(x)$ の最大値は，図より $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2|x|-\frac{15}{16}\right)dx=2\int_{0}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+2|x|-\frac{15}{16}\right)dx$$

$$=2\int_{0}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+2x-\frac{15}{16}\right)dx=2\left[-\frac{1}{4}x^3+x^2-\frac{15}{16}x\right]_0^a$$

$$=-\frac{1}{2}a^3+2a^2-\frac{15}{8}a$$

条件より，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx>0$ なので，$-\dfrac{1}{2}a^3+2a^2-\dfrac{15}{8}a>0$

$$4a^3-16a^2+15a<0,\quad a(2a-5)(2a-3)<0$$

$a>0$ より，求める a の値の範囲は $\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{5}{2}$ である。

コメント

少し時間はかかりますが，グラフを書いた方が明快です。

問　題

2 つの 2 次関数 $y=-x^2+1$ と $y=qx^2+px+2$ が $0<x<1$ の範囲で共有点をもち，かつその点で共通の接線をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 上の条件を満たすような点$(p,\ q)$を pq 平面上に図示せよ。

(2) 共有点の x 座標を $\alpha(0<\alpha<1)$ とし，

$$f(x)=\begin{cases} qx^2+px+2 & (0\leqq x<\alpha) \\ -x^2+1 & (\alpha\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$

とおく。このとき積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を p で表せ。　[2001]

解答例

(1) $y=-x^2+1$ ……①，$y=qx^2+px+2$ ……②として，$x=\alpha$ $(0<\alpha<1)$ で①と②が接するとすると，

$$-\alpha^2+1=q\alpha^2+p\alpha+2\ \cdots\cdots③$$

①より $y'=-2x$，②より $y'=2qx+p$ なので，$-2\alpha=2q\alpha+p$ ………④

④より $(2q+2)\alpha+p=0$ となり，$q\neq-1$ のとき $\alpha=\dfrac{-p}{2q+2}$ ………⑤

⑤を③に代入して，$(q+1)\left(\dfrac{-p}{2q+2}\right)^2+p\cdot\dfrac{-p}{2q+2}+1=0$

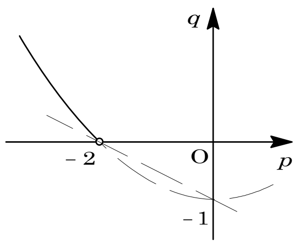
$$-\frac{p^2}{4(q+1)}+1=0,\ \ p^2=4q+4,\ \ q=\frac{1}{4}p^2-1\ (q\neq-1)\ \cdots\cdots⑥$$

ここで $0<\alpha<1$ なので，⑤より $0<\dfrac{-p}{2q+2}<1$

$q>-1$ より，$0<-p<2q+2$ となり，$p<0$ かつ $q>-\dfrac{1}{2}p-1$

なお，$q=-1$ のときは，④より $p=0$ となるが，③は $-\alpha^2+1=-\alpha^2+2$ となり，成立しない。

よって，条件を満たす点$(p,\ q)$を図示すると，右図の放物線の実線部分となる。



(2) ⑤⑥より，$\alpha=\dfrac{-p}{2(q+1)}=\dfrac{-p}{2\cdot\frac{1}{4}p^2}=-\dfrac{2}{p}$ なので，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx&=\int_0^\alpha (qx^2+px+2)\,dx+\int_\alpha^1(-x^2+1)\,dx\\&=\left[\frac{q}{3}x^3+\frac{p}{2}x^2+2x\right]_0^\alpha+\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_\alpha^1\\&=\frac{q}{3}\alpha^3+\frac{p}{2}\alpha^2+2\alpha-\frac{1}{3}(1-\alpha^3)+(1-\alpha)\\&=\frac{1}{12}p^2\alpha^3+\frac{1}{2}p\alpha^2+\alpha+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

そこで，α を消去すると，

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}p^2\left(-\frac{2}{p}\right)^3 + \frac{1}{2}p\left(-\frac{2}{p}\right)^2 - \frac{2}{p} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{2}{3p} + \frac{2}{3} = \frac{2p-2}{3p}$$

コメント

共通接線をもつ条件である③と④をていねいに式変形していけば，正解に到達できます。