２０２０ 入試対策
過去問ライブラリー

神戸大学
文系数学22か年

１９９８－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された神戸大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された問題は，その解答例の映像解説を YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　次の 2 つの条件を満たす x の 2 次式 $f(x)$ を考える。

(i)　$y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る

(ii)　$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx=15$

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α と β の満たす関係式を求めよ。

(3)　(2)における α，β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ。[2017]

2　a を正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの a の値を求めよ。また，そのときの $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(3)　$a=2$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を求めよ。[2016]

3　実数 $a,\ b$ に対して，$f(x)=a(x-b)^2$ とおく。ただし，a は正とする。放物線 $y=f(x)$ が直線 $y=-4x+4$ に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　$0\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ の最大値 $M(a)$ と，最小値 $m(a)$ を求めよ。

(3)　a が正の実数を動くとき，$M(a)$ の最小値を求めよ。[2010]

4　a を正の実数とし，$f(x)=-a^2x^2+4ax$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　2 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ を端点とする線分を l とする。曲線 $y=f(x)$ と線分 l (端点を含む)が共有点をもつような a の値の範囲を求め，数直線上に図示せよ。

[2009]

5　x の 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の問いに答えよ。ただし, a, b, c は定数で $a\neq 0$ とする。

(1)　実数 α ，β について，$f(\alpha)=f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ であることを示せ。

(2)　実数 α ，β について，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha)=f(\beta)$ であることを示せ。

[2008]

6　$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ （p, q は実数）を求めよ。

(2)　整数 a, b, c を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2006]

7　a を正の実数とする。関数 $f(x)=ax^2+(1-2a)x$ が次の 2 つの条件

(i)　$-3\leqq x<0$ のとき，$f(x)\geqq -1$

(ii)　$x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq 0$

をともに満たすような a の値の範囲を求めよ。　[2005]

8　次の問いに答えよ。

(1)　点 $(1,\ 0)$ を通って傾きが -4 の直線と，関数 $y=x^2-4x$ のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2)　2 つの関数 $y=x^2-4x$ ，$y=k(x-a)$ のグラフが，どんな k の値に対しても $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

[2000]

■ 微分と積分

1　$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+bx+c$ で定める。曲線 $y=f(x)$ は点 $\left(2,\ 2-\dfrac{c}{2}\right)$ を通り，$\displaystyle\int_0^3 f(x)dx=\frac{9}{2}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ を a を用いて表せ。

(2)　点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線を l とする。直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3)　$0<a<\dfrac{1}{2}$ とする。(2)で求めた直線 l の $y \geqq 0$ の部分と曲線 $y=f(x)$ の $x \geqq 0$ の部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

[2019]

2　t を正の実数とする。$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ。

(2)　$f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ。

(3)　$-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。　[2017]

3　a を正の実数とする。2 つの放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ が異なる 2 点で交わるとし，2 つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　$S(a)$ を a を用いて表せ。

(3)　$S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。　[2012]

4　実数 $x,\ y$ に対して，等式 $x^2+y^2=x+y$ ……①を考える。$t=x+y$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　①の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2)　x と y が①の等式を満たすとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　x と y が①の等式を満たすとする。$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$ を t を用いた式で表せ。また，F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。　[2011]

5　xy 平面における曲線 $C: y = x^2$ と直線 $l: y = ax$ （a は正の定数）について，次の問いに答えよ。

(1)　l と平行な, C の接線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　原点 O と m の距離を a を用いて表せ。

(3)　l と C の交点のうち O 以外のものを P とする。線分 OP を 1 辺とする四角形 OPQR が長方形となるように, m 上に 2 点 Q, R をとる。この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ。　[2007]

6　a を正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$y = \left|x^2 - a|x|\right|$ のグラフをかけ。

(2)　$F(a) = \int_{-1}^{1} \left|x^2 - a|x|\right| dx$ を求めよ。

(3)　$F(a)$ の最小値を求めよ。　[2005]

7　a を正の実数とする。関数 $f(x) = -x^2 + ax$ について次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ を通る接線の方程式を a, t を用いて表せ。

(2)　点 $\mathrm{A}(-a,\ 4a^2 - 5a + 2)$ から曲線 $y = f(x)$ へ接線が 2 本引けることを示せ。

(3)　その 2 本の接線のうち接点の x 座標が大きい方の接線を l, 接点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ とする。このとき, $0 < t < a$ を満たすための a の範囲を求めよ。

(4)　$a = 1$ のとき，直線 $x = -1$，接線 l と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2004]

8　a は 1 より大きい定数とする。関数 $f(x) = (x+a)(x+1)(x-a)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x = \alpha$ と $x = \beta$ $(\alpha < \beta)$ で極値をとるとする。2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きと等しいとき, a の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。a が(1)で求めた値をとるとき，曲線 $y = f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2003]

9　a を正の定数として，関数 $f(x)=(x-1)\{4x^2-(6a-4)x+12a-11\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f'(x)\geqq 0$ が区間 $0\leqq x\leqq 2$ で成り立つとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(2)のとき，区間 $0\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ。　[2001]

10　$a,\ b,\ c,\ d$ は実数として, x の整式 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たしているとする。

$$f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d$$

$$\int_a^x\{f(t)-g(t)\}dt=x^3-ax^2+ax-2$$

このとき $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。　[1999]

11　$a>0$ とする。関数 $f(x)=|x^3-3a^2x|$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　$M(a)$ を最小にする a の値を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　$s,\ t$ を $s<t$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする。以下の問いに答えよ。

(1)　s と t の間の関係式を求めよ。

(2)　線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とする。u と v の間の関係式を求めよ。

(3)　s, t が変化するとき，v の最小値と，そのときの u, s, t の値を求めよ。　[2015]

2　$a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1)　a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2)　$b-a\geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3)　斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

[2013]

3　座標平面上に 2 点 A(1, 0), B(−1, 0) と直線 l があり, A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1)　l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2)　l は線分 AB と交わるとき, l の傾きを求めよ。

(3)　l が線分 AB と交わらないとき, l と原点との距離を求めよ。　[2012]

4　実数 t に対して, xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき, 直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。[2006]

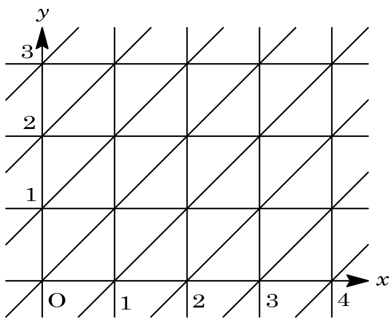
5　実数 t に対して, xy 平面上の直線 $(1-t^2)x - 2ty = 1 + t^2$ は, t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1)　円 C の方程式を求めよ。また, 接点の座標を求めよ。

(2)　t が $t \geqq 1$ の範囲を動くとき, 直線の通過する範囲を図示せよ。　[2002]

6　xy 平面全体が右図のような直線の配列で埋められているとする。

このとき, 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ について, A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし, m, n は負でない整数であるとする。　[2000]



■ 図形と計量

1　xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1, 2) で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している。$\angle\mathrm{AOD}=\theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2)　S を a と θ を用いた式で表せ。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，$20\leqq S\leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ。　[2011]

■ ベクトル

1　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ。

(3)　点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$ とする。　[2019]

2　t を $0<t<1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ。

(3)　t が(2)で求めた値をとるとき，△PQR の面積を求めよ。　[2018]

3 四面体 OABC において，P を辺 OA の中点，Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点，R を辺 BC の中点とする。P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ。

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ。[2016]

4 空間において，原点 O を通らない平面 α 上に 1 辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が，平面 α と垂直であることを示せ。 [2014]

5 空間において，2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を l 上に，点 Q を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 R を l 上に，点 S を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。

(3) R, S を(2)で求めた点とする。点 T を l 上に，点 U を z 軸上にとる。また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする。$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。 [2013]

6 空間内に 4 点 O, A, B, C があり，

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=4,\ \angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$$

であるとする。3 点 A, B, C を通る平面に垂線 OH を下ろす。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すとき，r, s, t を求めよ。

(2) 直線 CH と直線 AB の交点を D とするとき，長さの比 $\mathrm{CH}:\mathrm{HD}$，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}$ をそれぞれ求めよ。 [2010]

7　以下の問いに答えよ。

(1)　xy 平面において，O(0，0)，A$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$とする。このとき，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1$$

を満たす点 P 全体のなす図形の面積を求めよ。

(2)　xyz 空間において，O(0，0，0)，A$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$とする。このとき，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1$$

を満たす点 P 全体のなす図形の体積を求めよ。　[2009]

8　平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり，$\angle\mathrm{XOY}<180°$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 C が $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$と表されることを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle\mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおく。$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{AB}=4$ のとき，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2006]

9　三角形 OAB において，辺 OA, 辺 OB の長さをそれぞれ a, b とする。また，角 AOB は直角でないとする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を k とおく。次の問いに答えよ。

(1)　直線 OA 上に点 C を，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と垂直になるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を a, k, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=1$ とする。直線 BC 上に点 H を，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と垂直になるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，u と v をそれぞれ k で表せ。　[2005]

10　平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を $2:3$ に内分する点を M, 辺 AB を $2:3$ に内分する点を N, 辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を L とし，AL と CN の交点を P とする。次の問いに答えよ。

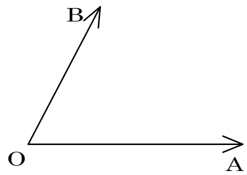
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$, t を用いて表せ。

(2)　3 点 P, M, D が一直線上にあるとき, t の値を求めよ。　[2004]

11　3 点 O, A, B は，一直線上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P を $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$（$t$ は実数）を満たす点とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t で表せ。

(2)　点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$s$ は実数）を満たす点とする。P と Q の中点を M とする。t, s が $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$ を満たしながら変化するとき，点 M の存在する範囲を図示せよ。



[2001]

12　三角形 ABC において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　実数 s, t が $0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，次の各条件を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

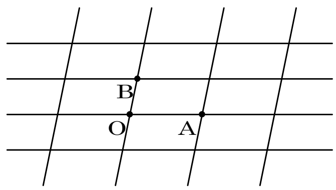
(b)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

(2)　(1)の各場合に，点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か。

[2000]

13　合同な平行四辺形を平面にしきつめて，図のように 2 組の平行線からなる格子を作り，その各交点を格子点と呼ぶ。

図のような 3 つの格子点 O, A, B について $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ はすべて整数であるとする。このとき，どの 2 つの格子点 P, Q に対しても $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は整数となることを示せ。



[1999]

14　座標空間内の 8 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 1), Q(2, 0, 1), R(2, 2, 1), S(0, 2, 1) を頂点とする直方体を考える。次の各問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{D}=(x,\ y,\ 1)$ を面 PQRS 上の点とするときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を x, y およびベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と直交するための条件を x, y を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ である D の中で $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ が最小となるような D を与える x, y の値を求めよ。

[1998]

■ 整数と数列

1 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を$\{a_n\}$とする。

1，3，4，1，3，4，1，3，4，…

すなわち，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=4$で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$とする。この数列の初項から第 n 項までの和をS_nとする。以下の問いに答えよ。

(1) S_nを求めよ。

(2) $S_n=2019$となる自然数 n は存在しないことを示せ。

(3) どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数 n が存在することを示せ。

[2019]

2 $f(x)=(2x-1)^3$とする。数列$\{x_n\}$を次のように定める。

$x_1=2$であり，x_{n+1} $(n\geqq 1)$は点$(x_n,\ f(x_n))$における曲線$y=f(x)$の接線と x 軸の交点の x 座標とする。

以下の問いに答えよ。

(1) 点$(t,\ f(t))$における曲線$y=f(x)$の接線の方程式を求めよ。また$t\neq\dfrac{1}{2}$のときに，その接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ。

(2) $x_n>\dfrac{1}{2}$を示せ。またx_nを n の式で表せ。

(3) $|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{3}{4}\times 10^{-5}$を満たす最小の n を求めよ。ただし$0.301<\log_{10}2<0.302$，$0.477<\log_{10}3<0.478$は用いてよい。

[2018]

3 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が$a_1=5$，$b_1=7$を満たし，さらにすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)\,dt$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $c_n=3^{n-1}$のとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $c_n=n$のとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

[2015]

4　a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする。次の条件(＊)を考える。

(＊)　3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(2)　$a>b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(3)　条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。　[2015]

5　2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を α，β とし，

$$c_n=\alpha^n+\beta^n,\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$ となることを示せ。

(2)　曲線 $y=c_1x^3-c_3x^2-c_2x+c_4$ の極値を求めよ。

(3)　曲線 $y=c_1x^2-c_3x+c_2$ と，x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2014]

6　$m,\ n\,(m<n)$ を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ とおく。3 辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a^2+b^2=c^2$ を示せ。

(2)　r を m, n を用いて表せ。

(3)　r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4)　r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。　[2014]

7　a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　ab が 3 の倍数であるとき，a または b は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　$a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき，a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

(3)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるとき，a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。　[2010]

8　1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ の和を S とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば，S が偶数であることを示せ。

(2)　S が偶数ならば，n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3)　n を 8 で割った余りが 3 または 4 ならば，S が 4 の倍数でないことを示せ。

[2008]

9　次の問いに答えよ。

(1)　漸化式 $x_{n+1}-a=-2x_n+2a$（a は定数）で定まる数列 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$ の一般項 x_n を $x_1,\ a$ を用いて表せ。

(2)　xy 平面において曲線 $C: y=f(x)=x^3-3ax^2$（a は定数）を考える。C 上に点 $\mathrm{P}_1(t_1,\ f(t_1))$ をとる。ただし，$t_1 \neq a$ とする。P_1 における C の接線と C の交点のうち，P_1 と異なるものを $\mathrm{P}_2(t_2,\ f(t_2))$ とする。t_2 を $t_1,\ a$ を用いて表せ。

(3)　さらに，P_2 における C の接線と C の交点のうち，P_2 と異なるものを P_3 とする。以下，同様に $\mathrm{P}_4,\ \mathrm{P}_5,\ \mathrm{P}_6,\ \cdots$ を定める。$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots$ はすべて相異なることを示せ。

[2007]

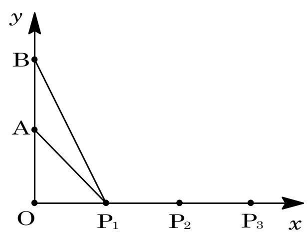
10　初項が 1 で公差が自然数 d である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$n \geqq 3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S_n=94$ となる n と d がちょうど 1 組ある。その n と d を求めよ。

(2)　$S_n=98$ となる n と d の組はない。その理由を述べよ。

[2004]

11　座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ をとる。自然数 k に対し点 P_k の座標を $(k,\ 0)$ とする。自然数 n に対し，$2n$ 本の線分 $\mathrm{AP}_1,\ \mathrm{AP}_2,\ \cdots,\ \mathrm{AP}_n,\ \mathrm{BP}_1,\ \mathrm{BP}_2,\ \cdots,\ \mathrm{BP}_n$ により分けられる第 1 象限の部分の個数を a_n とする。たとえば $n=1$ のとき，図のように第 1 象限が 3 つの部分に分けられるので $a_1=3$ である。次の問いに答えよ。



(1)　$a_2,\ a_3$ の値を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n と n を用いて表し，その理由を述べよ。

(3)　a_n を n を用いて表せ。

[2003]

12　数列 $\{a_n\}$ は，初項 a および公差 d が整数であるような等差数列であり，$8 \leqq a_2 \leqq 10$，$14 \leqq a_4 \leqq 16$，$19 \leqq a_5 \leqq 21$ を満たしている。このような数列 $\{a_n\}$ をすべて求めよ。

[2002]

13　2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べてできる数列を a_1，a_2，a_3，……，a_n，……とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1)　1003 は数列$\{a_n\}$の第何項か。

(2)　a_{2000}の値を求めよ。

(3)　m を自然数とするとき，数列$\{a_n\}$の初項から第 $2m$ 項までの和を求めよ。

[1999]

■ 確率

1　さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$……(＊)を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　(＊)が $x=1$ を解にもつ確率を求めよ。

(2)　(＊)が整数を解にもつとする。このとき(＊)の解はともに正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。

(3)　(＊)が整数を解にもつ確率を求めよ。　[2018]

2　$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$ とする。座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ（1，2，3，4 の目がそれぞれ確率$\dfrac{1}{4}$で出る）をふるごとに，出た目が $k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$のときは$\overrightarrow{v_k}$だけ移動する。すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置をP_nとして，サイコロを$(n+1)$回目にふって出た目が k ならば，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$ である。ただし，$\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　点P_2が x 軸上にある確率を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ。

(3)　4 点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある確率を求めよ。　[2017]

3　さいころを 4 回振って出た目を順に $a,\ b,\ c,\ d$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$ab\geqq cd+25$ となる確率を求めよ。

(2)　$ab=cd$ となる確率を求めよ。　[2016]

4　赤色，緑色，青色のさいころが各 2 個ずつ，計 6 個ある。これらを同時にふるとき，

赤色 2 個のさいころの出た目の数 r_1，r_2 に対し $R=|r_1-r_2|$

緑色 2 個のさいころの出た目の数 g_1，g_2 に対し $G=|g_1-g_2|$

青色 2 個のさいころの出た目の数 b_1，b_2 に対し $B=|b_1-b_2|$

とする。次の問いに答えよ。

(1)　R がとりうる値と，R がそれらの各値をとる確率をそれぞれ求めよ。

(2)　$R \geqq 4$，$G \geqq 4$，$B \geqq 4$ が同時に成り立つ確率を求めよ。

(3)　$RGB \geqq 80$ となる確率を求めよ。　[2013]

5　袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている。4 つの数 0, 3, 6, 9 をマジックナンバーと呼ぶことにする。次のようなルールをもつ, 1 人で行うゲームを考える。

[ルール]　袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく。ただし，一度取り出したカードは袋に戻さないものとする。取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき，その時点で負けとし，それ以降はカードを取り出さない。途中で負けとなることなく，すべてのカードを取り出せたとき，勝ちとする。

以下の問いに答えよ。

(1)　2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(3)　このゲームで勝つ確率を求めよ。　[2011]

6　以下の問いに答えよ。

(1)　A, B の 2 人がそれぞれ,「石」,「はさみ」,「紙」の 3 種類の「手」から無作為に 1 つを選んで, 双方の「手」によって勝敗を決める。「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け,「はさみ」は「紙」に勝ち「石」に負け,「紙」は「石」に勝ち「はさみ」に負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする。A が B に勝つ確率と引き分ける確率を求めよ。

(2)　上の 3 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加えて, 4 種類目の「手」として「水」を加える。「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする。A, B がともに 4 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとするとき, A が勝つ確率と引き分けの確率を求めよ。

(3)　上の 4 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加え, さらに第 5 の「手」として「土」を加える。B が 5 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとき, A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには,「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をそれぞれどのように定めればよいか。ただし, 同じ「手」どうしの場合, しかもその場合のみ引き分けとする。　[2009]

7　次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面において, 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=2c^2$ と直線 $y=x$ が共有点をもたないための a, b, c の条件を求めよ。ただし, a, b, c は定数で $c\neq 0$ とする。

(2)　1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数を, 順に a, b, c とする。a, b, c が(1)で求めた条件を満たす確率を求めよ。　[2008]

8　次の問いに答えよ。

(1)　1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2)　1 の数字を書いたカードを 3 枚, 2 の数字を書いたカードを 3 枚, 3 の数字を書いたカードを 3 枚, 計 9 枚用意する。この中から無作為に, 一度に 3 枚のカードを選んだとき, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。　[2007]

9　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $x^2+y^2+ax+by+3c=0$ が円を表すための a, b, c の条件を求めよ。

(2)　1 つのサイコロを 2 回振って出た目の数を, 順に a, b とする。$c=1$ とするとき, a, b の組が(1)の条件を満たす場合は何通りあるか。

(3)　1 つのサイコロを 3 回振って出た目の数を, 順に a, b, c とする。a, b, c が(1)の条件を満たす確率を求めよ。　[2002]

■ 論証

1　以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 $x,\ y$ に対して，$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqq 2$ が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。

(2)　n を自然数とする。n 個の正の実数 a_1，…，a_n に対して

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。　[2012]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

次の 2 つの条件を満たす x の 2 次式 $f(x)$ を考える。

(i)　$y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る

(ii)　$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx=15$

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α と β の満たす関係式を求めよ。

(3)　(2)における α，β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ。[2017]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ とおくと，条件(i)から，$f(1)=4$ なので，

$$a+b+c=4\cdots\cdots\cdots①$$

また，条件(ii)から，$\displaystyle\int_{-1}^{2}(ax^2+bx+c)dx=15$ なので，

$$\frac{a}{3}(8+1)+\frac{b}{2}(4-1)+c(2+1)=15,\ a+\frac{b}{2}+c=5\cdots\cdots\cdots②$$

①②より $\dfrac{b}{2}=-1$ となり，$b=-2\cdots\cdots③$から $f(x)$ の 1 次の項の係数は -2 である。

(2)　①③より $a+c=6$ となり，$f(x)=ax^2-2x+6-a$

ここで，$f(x)=0$ の 2 つの解が α，β より，

$$\alpha+\beta=\frac{2}{a}\cdots\cdots\cdots④,\ \alpha\beta=\frac{6-a}{a}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)-1$，$\alpha\beta-3\alpha-3\beta=-1\cdots\cdots\cdots⑥$

(3)　⑥を変形して，$(\alpha-3)(\beta-3)=8\cdots\cdots\cdots⑦$

ここで，α，β はともに正の整数なので，$\alpha-3\geqq-2$，$\beta-3\geqq-2$ となり，

$$(\alpha-3,\ \beta-3)=(1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (8,\ 1)$$

よって，$(\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (5,\ 7),\ (7,\ 5),\ (11,\ 4)$

(i)　$(\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (11,\ 4)$ のとき

④より，$a=\dfrac{2}{\alpha+\beta}=\dfrac{2}{15}$ となり，$f(x)=\dfrac{2}{15}x^2-2x+\dfrac{88}{15}$

(ii)　$(\alpha,\ \beta)=(5,\ 7),\ (7,\ 5)$ のとき

④より，$a=\dfrac{2}{\alpha+\beta}=\dfrac{1}{6}$ となり，$f(x)=\dfrac{1}{6}x^2-2x+\dfrac{35}{6}$

コメント

解と係数の関係を媒介にして作られた不定方程式を解く頻出問題です。

問　題

aを正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

(2)　$y=f(x)$のグラフが点$(-1,\ 2)$を通るときのaの値を求めよ。また，そのときの$y=f(x)$のグラフとx軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(3)　$a=2$とする。すべての実数xに対して$f(x)\geqq 2x+b$が成り立つような実数bのとり得る値の範囲を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　$a>0$のとき，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|=\left|(x+a)^2-a^2+a\right|$に対して，

(i)　$-a^2+a<0\ (a>1)$のとき

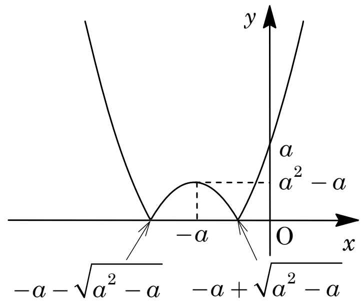
$-a-\sqrt{a^2-a}<x<-a+\sqrt{a^2-a}$において，

$$f(x)=-x^2-2ax-a=-(x+a)^2+a^2-a$$

$x\leqq -a-\sqrt{a^2-a}$，$-a+\sqrt{a^2-a}\leqq x$において，

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

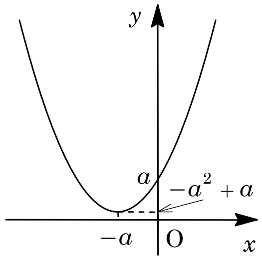
よって，$y=f(x)$のグラフは右図のようになる。



(ii)　$-a^2+a\geqq 0\ (0<a\leqq 1)$のとき

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

よって，$y=f(x)$のグラフは右図のようになる。



(2)　$y=f(x)$のグラフが点$(-1,\ 2)$を通ることより，

$$2=\left|1-2a+a\right|,\ \left|1-a\right|=2,\ 1-a=\pm 2$$

$a>0$から$1-a=-2$となり，$a=3$

このとき，(1)の(i)の場合に対応し，$f(x)=\left|x^2+6x+3\right|$

そこで，$\alpha=-3-\sqrt{6}$，$\beta=-3+\sqrt{6}$とおくと，$y=f(x)$のグラフとx軸で囲まれる図形の面積Sは,

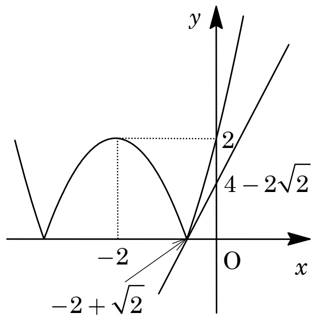
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2-6x-3)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{6}\right)^3=8\sqrt{6}$$

(3)　$a=2$のとき，$f(x)=\left|x^2+4x+2\right|$となる。

さて，$y=x^2+4x+2$のグラフ上の$x=t$における接線の傾きが2とすると，$y'=2x+4$から,

$$2t+4=2,\ t=-1$$



すると，$-1<-2+\sqrt{2}$ から，$y=f(x)$ のグラフがつねに直線 $y=2x+b$ の上側にあり，しかも b の値が最大になるのは，上図の位置関係の場合である。

すなわち，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b のとり得る値は，$b\leqq 4-2\sqrt{2}$ である。

コメント

絶対値つきの関数のグラフについての基本問題です。(3)では，図だけで処理をするには微妙な感じでしたので，まず数式を用いて確認をしています。

問　題

実数 a, b に対して，$f(x)=a(x-b)^2$ とおく。ただし，a は正とする。放物線 $y=f(x)$ が直線 $y=-4x+4$ に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ の最大値 $M(a)$ と，最小値 $m(a)$ を求めよ。

(3) a が正の実数を動くとき，$M(a)$ の最小値を求めよ。 [2010]

解答例

(1) $f(x)=a(x-b)^2$ に対して，$y=f(x)$ と $y=-4x+4$ を連立して，

$$a(x-b)^2=-4x+4\,,\ \ ax^2-2(ab-2)x+ab^2-4=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より, $(*)$が重解をもつので,

$$D/4=(ab-2)^2-a(ab^2-4)=0\,,\ \ ab-a-1=0$$

$a>0$ より，$b=\dfrac{a+1}{a}$

(2) (1)より，$f(x)=a\left(x-\dfrac{a+1}{a}\right)^2$ となり, $a>0$ から，$\dfrac{a+1}{a}=1+\dfrac{1}{a}>1$ である。

すると, $0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$，最小値 $m(a)$ は,

(i) $1+\dfrac{1}{a}\leqq 2$ $(a\geqq 1)$ のとき

$$M(a)=f(0)=\frac{(a+1)^2}{a}\,,\ \ m(a)=f\left(\frac{a+1}{a}\right)=0$$

(ii) $1+\dfrac{1}{a}>2$ $(0<a<1)$ のとき

$$M(a)=f(0)=\frac{(a+1)^2}{a}\,,\ \ m(a)=f(2)=a\left(2-\frac{a+1}{a}\right)^2=\frac{(a-1)^2}{a}$$

(3) (2)より，$M(a)=\dfrac{(a+1)^2}{a}=a+\dfrac{1}{a}+2\geqq 2+2=4$

等号が成立するのは，$a=\dfrac{1}{a}$ すなわち $a=1$ のときである。

したがって，$M(a)$ の最小値は 4 である。

コメント

2 次関数の最大・最小に関する基本問題です。

問　題

a を正の実数とし，$f(x)=-a^2x^2+4ax$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　2 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ を端点とする線分を l とする。曲線 $y=f(x)$ と線分 l (端点を含む)が共有点をもつような a の値の範囲を求め，数直線上に図示せよ。

[2009]

解答例

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)=-a^2x^2+4ax=-a^2\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2+4$ ……(＊)より，

(i)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 3\ \left(a\geqq\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$f(x)$ は $x=\dfrac{2}{a}$ のとき，最大値 4 をとる。

(ii)　$\dfrac{2}{a}>3\ \left(0<a<\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$f(x)$ は $x=3$ のとき，最大値 $-9a^2+12a$ をとる。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=3$ との共有点は, (＊)より，

$$-a^2\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+4=3\,,\quad \left(x-\frac{2}{a}\right)^2=\frac{1}{a^2}$$

よって，$x=\dfrac{2}{a}\pm\dfrac{1}{a}$ から，$x=\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{3}{a}$ となる。

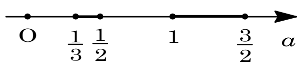
この共有点が線分 $l:\ y=3\ (2\leqq x\leqq 3)$ 上にある条件は,

(i)　$2\leqq\dfrac{1}{a}\leqq 3$ のとき　$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

(ii)　$2\leqq\dfrac{3}{a}\leqq 3$ のとき　$1\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$，$1\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$

数直線上に図示すると，右図の太線部となる。



コメント

(2)では，予測に反して，解が簡単な式となります。なお，最後の数直線上での図示は何を意味するのでしょうか。

問　題

x の 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の問いに答えよ。ただし, a, b, c は定数で $a\neq 0$ とする。

(1)　実数 α，β について，$f(\alpha)=f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ であることを示せ。

(2)　実数 α，β について，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha)=f(\beta)$ であることを示せ。

[2008]

解答例

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f'(x)=2ax+b$

$f(\alpha)=f(\beta)$ のとき，$a\alpha^2+b\alpha+c=a\beta^2+b\beta+c$ より，

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0\text{，}(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$\alpha=\beta$ のとき

明らかに，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ は成立する。

(ii)　$\alpha\neq\beta$ のとき

$(*)$ より，$b=-a(\alpha+\beta)$ となり，$f'(x)=2ax-a(\alpha+\beta)$ から，

$$f'(\alpha)=2a\alpha-a(\alpha+\beta)=a(\alpha-\beta)\text{，}f'(\beta)=2a\beta-a(\alpha+\beta)=-a(\alpha-\beta)$$

よって，$f'(\alpha)=-f'(\beta)$ より，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ が成立する。

(2)　$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ のとき，$f'(\alpha)=\pm f'(\beta)$

(i)　$f'(\alpha)=f'(\beta)$ のとき

$2a\alpha+b=2a\beta+b$ より，$a(\alpha-\beta)=0$

$a\neq 0$ から $\alpha=\beta$ となり，$f(\alpha)=f(\beta)$ が成立する。

(ii)　$f'(\alpha)=-f'(\beta)$ のとき

$2a\alpha+b=-2a\beta-b$ より，$b=-a(\alpha+\beta)$ となり，

$$f(\alpha)-f(\beta)=a\alpha^2+b\alpha+c-(a\beta^2+b\beta+c)=(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$$

よって，$f(\alpha)=f(\beta)$ が成立する。

コメント

2 次関数とその導関数についての性質を証明する基本問題です。

問　題

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ （$p,\ q$ は実数）を求めよ。

(2)　整数 $a,\ b,\ c$ を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2006]

解答例

(1)　実数係数の 2 次方程式の 1 つの解が $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ であるとき，もう 1 つの解は $\overline{\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{2}$ であるので，

$$\alpha+\overline{\alpha}=3,\quad \alpha\overline{\alpha}=\frac{9+7}{4}=4$$

よって，α，$\overline{\alpha}$ を解とする 2 次方程式は，解と係数の関係より，

$$x^2-3x+4=0$$

(2)　まず，x^3+ax^2+bx+c を x^2-3x+4 で割ると，

$$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-3x+4)(x+a+3)+(3a+b+5)x+(-4a+c-12)$$

ここで，3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は，解として α，$\overline{\alpha}$ をもつので，

$$3a+b+5=0\cdots\cdots\cdots①,\quad -4a+c-12=0\cdots\cdots\cdots②$$

このとき，もう 1 つの解は，$x=-a-3$ となり，条件より，

$$0\leqq -a-3\leqq 1,\quad -4\leqq a\leqq -3$$

すると，a は整数より，$a=-4,\ -3$

$a=-4$ のとき，①より $b=7$，②より $c=-4$ となり，また $a=-3$ のとき，①より $b=4$，②より $c=0$ となり，$b,\ c$ も整数である。

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-4,\ 7,\ -4)$，$(-3,\ 4,\ 0)$

コメント

複素数と方程式の基本題です。(2)では，3 次方程式の解と係数の関係を利用するという手もあります。

問　題

a を正の実数とする。関数 $f(x)=ax^2+(1-2a)x$ が次の 2 つの条件

(i)　$-3\leqq x<0$ のとき，$f(x)\geqq -1$

(ii)　$x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq 0$

をともに満たすような a の値の範囲を求めよ。　[2005]

解答例

$f(x)=ax^2+(1-2a)x=a\left(x-\dfrac{2a-1}{2a}\right)^2-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}$ より，

(i)　$\dfrac{2a-1}{2a}<0\ \left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

まず，$f(0)=0$ より，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ という条件は成立している。

(i-i)　$\dfrac{2a-1}{2a}\geqq -3\ \left(\dfrac{1}{8}\leqq a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$-3\leqq x<0$ のとき $f(x)\geqq -1$ なので，$f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)=-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}\geqq -1$

$(2a-1)^2\leqq 4a$，$4a^2-8a+1\leqq 0$，$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

すると，$\dfrac{1}{8}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ と合わせて，$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a<\dfrac{1}{2}$

(i-ii)　$\dfrac{2a-1}{2a}<-3\ \left(0<a<\dfrac{1}{8}\right)$ のとき

$-3\leqq x<0$ のとき $f(x)\geqq -1$ なので，$f(-3)=15a-3\geqq -1$

すると，$a\geqq\dfrac{2}{15}$ となるが，$0<a<\dfrac{1}{8}$ と合わせると, a は存在しない。

(ii)　$\dfrac{2a-1}{2a}=0\ \left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ より，条件に適する。

(iii)　$\dfrac{2a-1}{2a}>0\ \left(a>\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)=-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}<0$ より，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ という条件に反する。

(i)～(iii)より，$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

コメント

場合分けの練習問題です。グラフを念頭において，論理を進めていくことがポイントです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線と，関数$y=x^2-4x$のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2)　2 つの関数$y=x^2-4x$，$y=k(x-a)$のグラフが，どんな k の値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつようなaの値の範囲を求めよ。

[2000]

解答例

(1)　点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線は，$y=-4(x-1)$ ………①

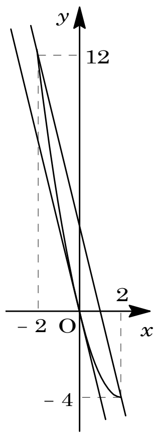
①と$y=x^2-4x$ ……②の共有点は，

$$-4(x-1)=x^2-4x\ ,\ x^2-4=0\ ,\ x=\pm 2$$

$x=2$のとき，①より$y=-4$なので，共有点$(2,\ -4)$

$x=-2$のとき，①より$y=12$なので，共有点$(-2,\ 12)$

(2)　②より，$y=(x-2)^2-4$となり，$-2\leqq x\leqq 2$の範囲でグラフを書くと，右図の曲線のようになる。



また，$y=k(x-a)$は点$(a,\ 0)$を通って傾きがkの直線を表し，$k=-4$，$a=1$のとき，(1)より②と$(2,\ -4)$，$(-2,\ 12)$で交わる。

よって，$a=1$のときは，右図より，どんな k の値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつ。

また，②より$y'=2x-4$なので，$x=0$で$y'=-4$から原点における②の接線は$y=-4x$となる。そして，$a=0$のときは，どんなkの値に対しても原点が共有点となる。

さて，$a<0$, $1<a$のときは，$k=-4$とすると$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で共有点をもたない。

さらに，$0<a<1$のとき，$k\leqq -4$では$a<x<2$で，$k\geqq -4$では$-2<x<a$で少なくとも 1 つの共有点をもつ。

以上より，どんな k の値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつ条件は，$0\leqq a\leqq 1$である。

コメント

(2)は最初，y を消去して方程式の解の配置で考えました。しかし，かなり複雑なので，方針を変更してグラフを書くと，(1)が大きなヒントとなっていることがわかりました。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a\neq 0$ とする。2 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+bx+c$ で定める。曲線 $y=f(x)$ は点 $\left(2,\ 2-\dfrac{c}{2}\right)$ を通り，$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=\frac{9}{2}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を a を用いて表せ。

(2) 点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線を l とする。直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3) $0<a<\dfrac{1}{2}$ とする。(2)で求めた直線 l の $y\geqq 0$ の部分と曲線 $y=f(x)$ の $x\geqq 0$ の部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

[2019]

解答例＋映像解説

(1) 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，曲線 $y=f(x)$ が点 $\left(2,\ 2-\dfrac{c}{2}\right)$ を通ることより，

$$2-\frac{c}{2}=4a+2b+c,\quad 8a+4b+3c=4\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 (ax^2+bx+c)\,dx=\frac{9}{2}$ より，

$$\frac{a}{3}\cdot 27+\frac{b}{2}\cdot 9+c\cdot 3=\frac{9}{2},\quad 6a+3b+2c=3\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$2a+b=1$ となり $b=-2a+1$，$c=\dfrac{1}{2}(3-6a+6a-3)=0$

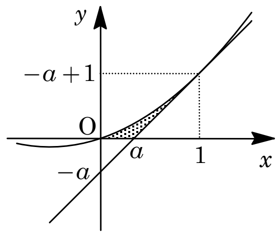
よって，$f(x)=ax^2-(2a-1)x$ である。

(2) (1)より，$f'(x)=2ax-(2a-1)$ となり，$f'(1)=1$

すると，点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線 l の方程式は，

$$y-(-a+1)=1\cdot(x-1),\quad y=x-a$$

(3) $0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 l および x 軸で囲まれた右図の網点部の図形の面積 S は，



$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\{ax^2-(2a-1)x\}\,dx-\frac{1}{2}(1-a)^2\\&=\frac{a}{3}-\frac{2a-1}{2}-\frac{1}{2}(1-2a+a^2)\\&=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}\end{aligned}$$

よって，S の最大値は $\dfrac{1}{18}$ となり，このとき $a=\dfrac{1}{3}$ である。

コメント

微積分の基本題です。計算も穏やかです。

問　題

t を正の実数とする。$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ。

(2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ。

(3) $-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1) $2t^3-3t^2+1=(t-1)(2t^2-t-1)=(t-1)^2(2t+1)$

(2) $f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ に対して,

$$f'(x)=3x^2+6x-3(t^2-1)$$
$$=3\{x^2+2x-(t+1)(t-1)\}$$
$$=3(x+t+1)(x-t+1)$$

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$t>0$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極小値は，(1)の結果を利用して，

$$f(t-1)=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t+1)(t-1)^2+(t-1)^2(2t+1)$$
$$=(t-1)^2(t-1+3-3t-3+2t+1)=0$$

(3) まず，極大値および $-1\leqq x\leqq 2$ における境界値を求めておくと，

$$f(-t-1)=-(t+1)^3+3(t+1)^2+3(t-1)(t+1)^2+2t^3-3t^2+1$$
$$=(t+1)^2(-t-1+3+3t-3)+2t^3-3t^2+1$$
$$=(t+1)^2(2t-1)+2t^3-3t^2+1=4t^3$$
$$f(-1)=-1+3+3t^2-3+2t^3-3t^2+1=2t^3$$
$$f(2)=8+12-6t^2+6+2t^3-3t^2+1=2t^3-9t^2+27$$

ここで，$f(x)=0$ とおくと，$(x-t+1)^2(x+2t+1)=0$ となり，

$$x=t-1,\ -2t-1$$

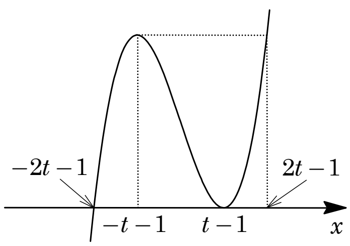
また，$f(x)=4t^3$ とおくと，

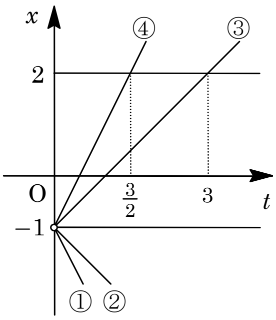
$$x^3+3x^2-3(t^2-1)x-2t^3-3t^2+1=0$$

すると，$(x+t+1)^2(x-2t+1)=0$ となり，

$$x=-t-1,\ 2t-1$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。





さて，$t>0$ において，$x=-1,\ 2$ と $x=-2t-1$ ……①，$x=-t-1$ ……②，$x=t-1$ ……③，$x=2t-1$ ……④との関係をまとめると，右図のようになる。

これより，$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を求めるために，t の範囲を $0<t\leqq\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}<t\leqq 3$，$t>3$ と場合分けをする。

(i)　$0<t\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

このとき，$-2t-1<-t-1<-1<t-1<2t-1\leqq 2$ となる。

すると，$f(2)>f(2t-1)=f(-t-1)>f(-1)$ から，

$$m=f(t-1)=0,\ M=f(2)=2t^3-9t^2+27$$

(ii)　$\dfrac{3}{2}<t\leqq 3$ のとき

このとき，$-2t-1<-t-1<-1<t-1\leqq 2<2t-1$ となる。

ここで，$f(2)-f(-1)=-9t^2+27=-9(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$ となり，

(ii-i)　$\dfrac{3}{2}<t\leqq\sqrt{3}$ のとき

$f(2)\geqq f(-1)$ より，$m=f(t-1)=0$，$M=f(2)=2t^3-9t^2+27$

(ii-ii)　$\sqrt{3}<t\leqq 3$ のとき

$f(2)<f(-1)$ より，$m=f(t-1)=0$，$M=f(-1)=2t^3$

(iii)　$t>3$ のとき

このとき，$-2t-1<-t-1<-1<2<t-1<2t-1$ となるので，

$$m=f(2)=2t^3-9t^2+27,\ M=f(-1)=2t^3$$

(i)～(iii)をまとめて，

$$m=0\ (0<t\leqq 3),\ m=2t^3-9t^2+27\ (t>3)$$

$$M=2t^3-9t^2+27\ (0<t\leqq\sqrt{3}),\ M=2t^3\ (t>\sqrt{3})$$

コメント

3 次関数の微分と増減が題材の頻出問題ですが，内容はかなり繁雑です。そのため，場合分けの前に，入念に準備を行いました。ただ，$t>0$ なので，やりすぎたきらいもありますが。

問　題

a を正の実数とする。2 つの放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-3a$，$y=-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ が異なる 2 点で交わるとし，2 つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。　[2012]

解答例

(1) 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-3a$ ……①，$y=-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ ……②を連立して，

$$\frac{1}{2}x^2-3a=-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2,\ x^2-2ax+a^3+a^2-3a=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

異なる 2 交点をもつことより，

$$D/4=a^2-(a^3+a^2-3a)=-a^3+3a>0,\ a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})<0$$

すると，$a>0$ より，$0<a<\sqrt{3}$

(2) ③の 2 つの解を，$\alpha=a-\sqrt{-a^3+3a}$，$\beta=a+\sqrt{-a^3+3a}$ とおくと，放物線①②によって囲まれる部分の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_\alpha^\beta -(x^2-2ax+a^3+a^2-3a)dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{-a^3+3a}\right)^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{-a^3+3a}\right)^3$$

(3) $f(a)=-a^3+3a$ とおくと，$S(a)=\frac{4}{3}\left(\sqrt{f(a)}\right)^3$ となり，

$$f'(a)=-3a^2+3=-3(a+1)(a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は $a=1$ のとき最大値 2 をとる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

よって，$S(a)$ の最大値は $\frac{4}{3}(\sqrt{2})^3=\frac{8}{3}\sqrt{2}$ であり，このとき $a=1$ となる。

コメント

超頻出の問題です。計算ミスが致命傷になります。

問　題

実数 $x,\ y$ に対して，等式$x^2+y^2=x+y$ ……①を考える。$t=x+y$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　①の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2)　x と y が①の等式を満たすとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

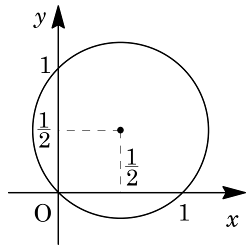
(3)　x と y が①の等式を満たすとする。$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$ を t を用いた式で表せ。また，F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　条件より，$x^2+y^2=x+y$ ……①を変形すると，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

よって，中心$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の円を表し，図示すると，右図のようになる。



(2)　①の等式を満たす x と y に対して，$t=x+y$ ……②のとりうる値の範囲は，円①と直線②が共有点をもつ条件として求められ，

$$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ |1-t|\leqq 1$$

よって，$0\leqq t\leqq 2$ となる。

(3)　①②より，$x^2+y^2=x+y=t$ から，$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=t^2-t$ となり，

$$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$$
$$=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$$
$$=t(t-t^2+t)=-t^3+2t^2$$

すると，$\dfrac{dF}{dt}=-3t^2+4t=-t(3t-4)$

これより，F の増減は右表のようになり，F の最大値は$\dfrac{32}{27}$，最小値は 0 である。

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dF}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

コメント

条件づけられた最大・最小問題です。基本的な問題に誘導が付いています。

問　題

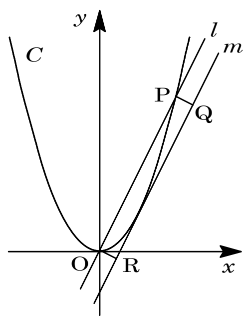
xy 平面における曲線 $C: y = x^2$ と直線 $l: y = ax$ （a は正の定数）について，次の問いに答えよ。

(1) l と平行な, C の接線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2) 原点 O と m の距離を a を用いて表せ。

(3) l と C の交点のうち O 以外のものを P とする。線分 OP を 1 辺とする四角形 OPQR が長方形となるように, m 上に 2 点 Q, R をとる。この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ。 [2007]

解答例



(1) $C: y = x^2$ ……①に対して，$y' = 2x$

さて，接点を $(t,\ t^2)$ とするとき，接線の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2$$

この接線が，$l: y = ax$ ……②と平行なので，

$$2t = a,\quad t = \frac{a}{2}$$

よって，接線 $m: y = ax - \dfrac{a^2}{4}$

(2) 原点 O と $m: ax - y - \dfrac{a^2}{4} = 0$ との距離 d は，

$$d = \frac{\left|-\dfrac{a^2}{4}\right|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}}$$

(3) C と l の交点は，①②より，$x^2 = ax$ から，$x = 0,\ a$

すると，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$ より，$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + a^4} = a\sqrt{1+a^2}$

さて，長方形 OPQR の面積は，

$$\mathrm{OP}\cdot d = a\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^3}{4}$$

条件より，$\dfrac{a^3}{4} = 2$ なので，$a = 2$ である。

コメント

接線を題材とした基本を確認する問題です。

問　題

a を正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$y=\left|x^2-a|x|\right|$ のグラフをかけ。

(2)　$F(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx$ を求めよ。

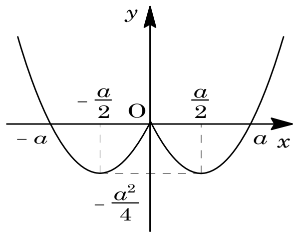
(3)　$F(a)$ の最小値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　まず，$y=x^2-a|x|$……①に対して，

$$y=x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\quad(x\geqq 0)$$

$$y=x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\quad(x<0)$$



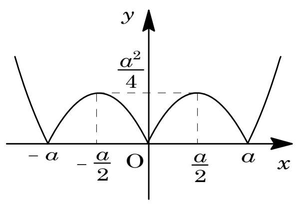
よって，①のグラフは右図のようになる。

すると，$y=\left|x^2-a|x|\right|$……②に対して，

$$y=x^2-a|x|\quad(x^2-a|x|\geqq 0)$$

$$y=-x^2+a|x|\quad(x^2-a|x|<0)$$

よって，②のグラフは，①のグラフの $y<0$ の部分を x 軸について折り返したものとなり，図示すると，右図のようになる。



(2)　②のグラフは y 軸対称なので，

$$F(a)=\int_{-1}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx=2\int_{0}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx=2\int_{0}^{1}\left|x^2-ax\right|dx$$

(i)　$0<a<1$ のとき

$$F(a)=2\int_{0}^{a}-(x^2-ax)\,dx+2\int_{a}^{1}(x^2-ax)\,dx$$

$$=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

$$=-\frac{2}{3}a^3+a^3+\frac{2}{3}(1-a^3)-a(1-a^2)=\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}$$

(ii)　$a\geqq 1$ のとき

$$F(a)=2\int_{0}^{1}-(x^2-ax)\,dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{2}{3}+a$$

(3)　(2)より，$0<a<1$ のとき，

$$F'(a)=2a^2-1$$

すると，$F(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$F'(a)$		$-$	0	$+$	
$F(a)$	$\frac{2}{3}$	↘		↗	$\frac{1}{3}$

また，$a \geqq 1$のとき，$F(a) \geqq F(1) = \dfrac{1}{3}$なので，$F(a)$の最小値は,

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$$

コメント

場合分けの練習問題です。

問　題

a を正の実数とする。関数 $f(x) = -x^2 + ax$ について次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ を通る接線の方程式を a, t を用いて表せ。

(2)　点 $\mathrm{A}(-a,\ 4a^2 - 5a + 2)$ から曲線 $y = f(x)$ へ接線が 2 本引けることを示せ。

(3)　その 2 本の接線のうち接点の x 座標が大きい方の接線を l, 接点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ とする。このとき, $0 < t < a$ を満たすための a の範囲を求めよ。

(4)　$a = 1$ のとき, 直線 $x = -1$, 接線 l と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$f(x) = -x^2 + ax$ より, $f'(x) = -2x + a$

これより, 点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線の方程式は,

$$y - (-t^2 + at) = (-2t + a)(x - t),\quad y = (-2t + a)x + t^2 \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①が点 $\mathrm{A}(-a,\ 4a^2 - 5a + 2)$ を通るとき,

$$4a^2 - 5a + 2 = (-2t + a)(-a) + t^2,\quad t^2 + 2at - 5a^2 + 5a - 2 = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

②の判別式を計算すると,

$$D/4 = a^2 - (-5a^2 + 5a - 2) = 6a^2 - 5a + 2 = 6\left(a - \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{23}{24} > 0$$

よって, ②は異なる 2 つの実数解をもち, 接点は 2 つ存在する。すなわち, 点 A から曲線 $y = f(x)$ へ接線を 2 本引くことができる。

(3)　$g(t) = t^2 + 2at - 5a^2 + 5a - 2$ とおくと, $g(t) = 0$ の大きい方の解が, 接線 l の接点の x 座標である。放物線 $y = g(t)$ の軸が $t = -a < 0$ であることに注意すると, この解が $0 < t < a$ にある条件は,

$$g(0) = -5a^2 + 5a - 2 < 0 \cdots\cdots\cdots③,\quad g(a) = -2a^2 + 5a - 2 > 0 \cdots\cdots\cdots④$$

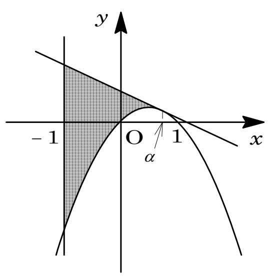
③は $5a^2 - 5a + 2 > 0$ となり, $D = 25 - 40 < 0$ から, つねに成立する。

④より, $2a^2 - 5a + 2 < 0$, $(2a - 1)(a - 2) < 0$ なので, $\dfrac{1}{2} < a < 2$

したがって, 求める条件は $\dfrac{1}{2} < a < 2$ である。

(4)　$a = 1$ のとき, ②は $t^2 + 2t - 2 = 0$ となり, 大きい方の解は $t = -1 + \sqrt{3}$ となる。

ここで, $\alpha = -1 + \sqrt{3}$ とおくと, 接線 l は, ①より $y = (-2\alpha + 1)x + \alpha^2$ となるので, 求める面積 S は,



$$S=\int_{-1}^{\alpha}\{(-2\alpha+1)x+\alpha^2-(-x^2+x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{\alpha}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx=\int_{-1}^{\alpha}(x-\alpha)^2dx$$
$$=\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_{-1}^{\alpha}=-\frac{1}{3}(-1-\alpha)^3=\sqrt{3}$$

コメント

頻出のものです。細かく誘導がつけられています。

問　題

a は 1 より大きい定数とする。関数 $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x=\alpha$ と $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるとする。2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きと等しいとき, a の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。a が(1)で求めた値をとるとき，曲線 $y=f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2003]

解答例

(1) $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)=x^3+x^2-a^2x-a^2$ より，$f'(x)=3x^2+2x-a^2$

条件から，$f'(x)=0$ は 2 つの実数解 $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつので,

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{3},\ \alpha\beta=-\frac{a^2}{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで, 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ線分の傾きは,

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta^3+\beta^2-a^2\beta-a^2)-(\alpha^3+\alpha^2-a^2\alpha-a^2)}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)-a^2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\alpha+\beta-a^2\cdots\cdots\cdots②$$

また，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾き $f'(-1)=1-a^2$ は，条件より，②と等しいので,

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\alpha+\beta-a^2=1-a^2$$

①より，$\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{3}a^2-\dfrac{2}{3}=1$，$\dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{11}{9}$，$a^2=\dfrac{11}{3}$

$a>1$ より，$a=\sqrt{\dfrac{11}{3}}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$

(2) $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ より,

$$S=-\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{48}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$$

コメント

微積分の基本問題です。複雑な計算も必要ありません。

問　題

a を正の定数として，関数 $f(x)=(x-1)\{4x^2-(6a-4)x+12a-11\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f'(x)\geqq 0$ が区間 $0\leqq x\leqq 2$ で成り立つとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (2)のとき，区間 $0\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ。 [2001]

解答例

(1) $f(x)=(x-1)\{4x^2-(6a-4)x+12a-11\}$ より，

$$f'(x)=4x^2-(6a-4)x+12a-11+(x-1)\{8x-(6a-4)\}$$
$$=12x^2-12ax+18a-15$$

(2) 区間 $0\leqq x\leqq 2$ で $f'(x)\geqq 0$ が成り立つ条件は, (1)より，

$$f'(x)=12\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-3a^2+18a-15\ (a>0)$$

(i) $0<\dfrac{a}{2}\leqq 2\ (0<a\leqq 4)$ のとき　$f'\left(\dfrac{a}{2}\right)=-3a^2+18a-15\geqq 0$ より，

$a^2-6a+5\leqq 0$，$1\leqq a\leqq 5$

$0<a\leqq 4$ と合わせると，$1\leqq a\leqq 4$

(ii) $\dfrac{a}{2}>2\ (a>4)$ のとき　$f'(2)=-6a+33\geqq 0$ より，$a\leqq\dfrac{11}{2}$

$a>4$ と合わせると，$4<a\leqq\dfrac{11}{2}$

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$1\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}$

(3) (2)より，$1\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}$ のとき，区間 $0\leqq x\leqq 2$ で $f(x)$ は単調に増加する。

ここで，$f(0)=-12a+11<0$，$f(2)=13$ なので，区間 $0\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)|$ の最大値は，$|f(0)|=-(-12a+11)=12a-11$ または $|f(2)|=13$ である。

(i) $12a-11<13\ (1\leqq a<2)$ のとき　最大値は，$|f(2)|=13$

(ii) $12a-11\geqq 13\ \left(2\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}\right)$ のとき　最大値は，$|f(0)|=12a-11$

コメント

微分法についての基本問題です。(3)は $f(1)=0$ に注目すると，グラフを書くまでもありません。

問　題

a, b, c, d は実数として, x の整式 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たしているとする。

$$f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d$$
$$\int_a^x\{f(t)-g(t)\}dt=x^3-ax^2+ax-2$$

このとき $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。 [1999]

解答例

条件より, $f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ………①

$$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d \text{ ………②}$$
$$\int_a^x\{f(t)-g(t)\}dt=x^3-ax^2+ax-2 \text{ ………③}$$

①より, $f'(x)+g'(x)=3ax^2+2bx+c$

②と比べて, $3a=b$, $2b=c$, $c=d$, すなわち $b=3a$, $c=d=6a$ ………④

④を①に代入して, $f(x)+g(x)=ax^3+3ax^2+6ax+6a$ ………⑤

また, ③の両辺を微分して, $f(x)-g(x)=3x^2-2ax+a$ ………⑥

③の両辺に $x=a$ を代入して, $a^3-a^3+a^2-2=0$, $a=\pm\sqrt{2}$ ………⑦

⑤⑥より, $f(x)=\frac{a}{2}x^3+\frac{3a+3}{2}x^2+2ax+\frac{7}{2}a$

$$g(x)=\frac{a}{2}x^3+\frac{3a-3}{2}x^2+4ax+\frac{5}{2}a$$

⑦を代入し, 複号同順として,

$$f(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x^3\pm\frac{3\sqrt{2}\pm3}{2}x^2\pm2\sqrt{2}x\pm\frac{7}{2}\sqrt{2}$$
$$g(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x^3\pm\frac{3\sqrt{2}\mp3}{2}x^2\pm4\sqrt{2}x\pm\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

コメント

解の方針に迷うところはありません。ただ, ⑦の値を先に⑤式と⑥式に代入して $f(x)$, $g(x)$ を求めようとすると, 計算がゴチャゴチャしてしまいます。

問　題

$a>0$ とする。関数 $f(x)=|x^3-3a^2x|$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ。

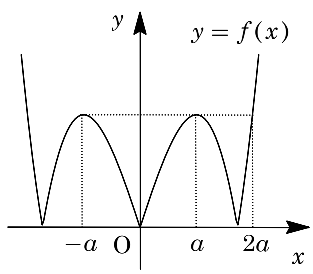
(2) $M(a)$ を最小にする a の値を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $g(x)=x^3-3a^2x$ とすると，$f(x)=|g(x)|$

$$g'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$



$g(x)=2a^3$ の解は，$x^3-3a^2x-2a^3=0$ から，

$$(x+a)^2(x-2a)=0,\ x=-a,\ 2a$$

また，$f(-x)=f(x)$ より，$f(x)$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値は $0\leqq x\leqq 1$ における最大値と一致する。

(i) $2a<1$ $\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$M(a)=f(1)=|g(1)|=g(1)=1-3a^2$$

(ii) $2a\geqq 1$ かつ $a<1$ $\left(\dfrac{1}{2}\leqq a<1\right)$ のとき

$$M(a)=f(a)=|g(a)|=-g(a)=2a^3$$

(iii) $a\geqq 1$ のとき

$$M(a)=f(1)=|g(1)|=-g(1)=3a^2-1$$

(2) 最大値 $M(a)$ は連続的に変化し，$0<a<\dfrac{1}{2}$ のときは単調減少，$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のときは単調増加することより，$M(a)$ が最小となるのは $a=\dfrac{1}{2}$ のときである。

コメント

関数のグラフを書き，極値や区間の境界値を比較して最大値を求める問題です。ていねいな場合分けがすべてです。

問　題

$s,\ t$ を $s<t$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする。以下の問いに答えよ。

(1) s と t の間の関係式を求めよ。

(2) 線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とする。u と v の間の関係式を求めよ。

(3) s, t が変化するとき，v の最小値と，そのときの u, s, t の値を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1) 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあることより，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となり，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s-1,\ s^2-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ t^2-2)$ から，

$$(s-1)(t^2-2)-(t-1)(s^2-2)=0,\quad st(t-s)-(t^2-s^2)+2(t-s)=0$$

ここで，$s<t$ より $t-s>0$ となり，$st-(t+s)+2=0$ ………①

(2) 線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とすると，$u=\dfrac{s+t}{2}$，$v=\dfrac{s^2+t^2}{2}$ となり，

$$s+t=2u\ \text{………②},\quad s^2+t^2=2v\ \text{………③}$$

②③より，$(2u)^2-2st=2v$ となり，$st=2u^2-v$ ………④

②④を①に代入すると，$2u^2-v-2u+2=0$，$v=2u^2-2u+2$ ………⑤

(3) ②④より，$s,\ t$ は x についての 2 次方程式 $x^2-2ux+(2u^2-v)=0$ ……⑥の異なる 2 つの実数解より，

$$D/4=u^2-(2u^2-v)>0,\quad v>u^2\ \text{………⑦}$$

⑤⑦から，$2u^2-2u+2>u^2$，$u^2-2u+2>0$ となるが，この不等式の左辺は，$u^2-2u+2=(u-1)^2+1>0$ となり，つねに成立する。

よって，⑤より，$v=2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$ となり，$u=\dfrac{1}{2}$ のとき v は最小値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

このとき，⑥から，s, t は $x^2-x-1=0$ の 2 つの解となり，$s<t$ より，

$$s=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

コメント

誘導が丁寧についている問題です。なお，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通り，放物線 $y=x^2$ 上の異なる 2 点を結ぶ線分の中点 M の軌跡と考えると，⑦は明らかとなります。

問　題

$a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

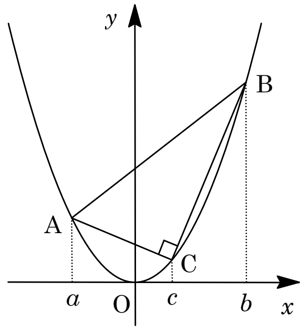
(1) a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2) $b-a\geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

[2013]

解答例＋映像解説



(1) $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a-c,\ a^2-c^2)=(a-c)(1,\ a+c)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(b-c,\ b^2-c^2)=(b-c)(1,\ b+c)$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ なので，$1+(a+c)(b+c)=0$

$$(a+c)(b+c)=-1\ \cdots\cdots\cdots①$$

よって，$a=-c-\dfrac{1}{b+c}\ \cdots\cdots\cdots②$

(2) ②より，$b-a=b+c+\dfrac{1}{b+c}\ \cdots\cdots\cdots③$

ここで，$b+c<0$ とすると，①より $a+c>0$ となり $b<-c<a$ であるが，これは $a<b$ に反するので，$b+c>0$ である。

すると，③より，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$b-a=b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

なお，等号は $b+c=1$ のときに成立する。

(3) $\mathrm{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}=(b-a)\sqrt{1+(b+a)^2}$

ここで，(2)より $b-a\geqq 2$ であり，$(b+a)^2\geqq 0$ であるので，

$$\mathrm{AB}\geqq 2\sqrt{1+0}=2$$

等号が成立するのは，$b-a=2$ かつ $b+a=0$，すなわち $a=-1$，$b=1$ のときである。このとき，$b+c=1$ から $c=0$ となる。

よって，AB の最小値は 2 であり，このとき $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0)$ となる。

コメント

(3)では大雑把に評価して，細部を詰めています。この方法が，いつもうまくいくとは限りませんが。

問　題

座標平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l は線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。　[2012]

解答例

(1) l が y 軸と平行であるとき，k を実数として，$l: x=k$ とおくと，A$(1,\ 0)$ と l の距離が $|k-1|$，B$(-1,\ 0)$ と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より，

$$|k-1|+|k+1|=1\cdots\cdots\cdots①$$

ところが，$|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1|\geqq|(1-k)+(k+1)|=2$ であるので，①を満たす k は存在しない。よって，l は y 軸と平行でない。

(2) (1)より，$l: y=mx+n$，すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると，l は線分 AB と交わることより，$(m+n)(-m+n)\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$

ここで，A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので，

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$3m^2=1$

よって，l の傾きは，$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，$(m+n)(-m+n)>0\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$-m^2+4n^2=1\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，l と原点との距離 d は，⑤より，

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

コメント

点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお，②と④は，正領域・負領域の考え方を利用しています。

問　題

実数 t に対して, xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき, 直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。[2006]

解答例

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ を通る直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ ……①がただ 1 つである条件は, ①を t の方程式としてみたとき, ただ 1 つの解をもつことに対応する。

①より, $t^2 - 2xt + y = 0$ となり,

$$D/4 = x^2 - y = 0$$

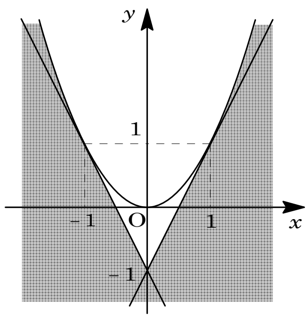
よって, 点 P の軌跡の方程式は, $y = x^2$ ……②である。

(2)　①と②の共有点は, $2tx - t^2 = x^2$ より,

$$(x - t)^2 = 0,\ x = t$$

これより, 直線①は, 放物線②の点 $(t,\ t^2)$ における接線である。

そこで, t が $|t| \geqq 1$ すなわち $t \leqq -1$, $1 \leqq t$ の範囲を動くとき, ①において, $l_1 : y = 2x - 1$, $l_{-1} : y = -2x - 1$ であることを利用すると, 直線 l_t の通過領域は右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



コメント

直線①は, 放物線②の点 $(t,\ t^2)$ における接線です。このためのヒントが(1)の役割でしょうが, 気付きにくい部分です。もっとも, この点を無視しても, 直線②の通過領域は, 有名な実数解条件として求めることができます。

問　題

実数 t に対して，xy 平面上の直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は，t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2) t が $t\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。　[2002]

解答例

(1) $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ ……①より，$(1-t^2)x-2ty-1-t^2=0$ ……①′

円 C の中心を $(a,\ b)$，半径を r とすると，①′ が接することより，

$$\frac{|(1-t^2)a-2tb-1-t^2|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r,\quad \frac{|(-a-1)t^2-2bt+a-1|}{\sqrt{1+2t^2+t^4}}=r$$

$$(-a-1)t^2-2bt+a-1=\pm r(1+t^2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②がどんな t に対しても成立する条件は，

$$-a-1=\pm r,\ -2b=0,\ a-1=\pm r$$

これより，$-a-1=a-1$ から $a=0$，また $b=0$ となり，$r>0$ から $r=1$ である。

よって，円 C の方程式は，$x^2+y^2=1$ である。

すると，①を $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x+\dfrac{-2t}{1+t^2}y=1$ と変形すると，接点の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$ となる。

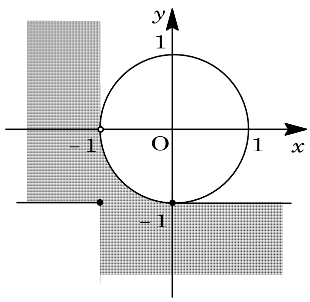
(2) 接点を $(x,\ y)$ とおくと，(1)より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ……③，$y=\dfrac{-2t}{1+t^2}$ ……④

③より，$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ となり，$t\geqq 1$ で $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leqq 1$ より，$-1<x\leqq 0$ となる。

④より，$y=\dfrac{-2}{\dfrac{1}{t}+t}$ となり，$t\geqq 1$ で $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$（等号は $t=1$ のとき）より，$-1\leqq y<0$ である。

よって，接点は円 C 上の $-1<x\leqq 0$，$-1\leqq y<0$ の部分にある。

以上より，直線①の通過領域は右図の網点部となる。なお，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



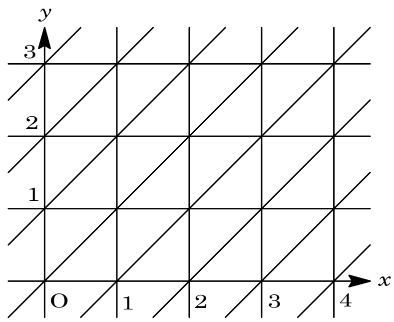
コメント

直線の通過領域を求める有名問題です。(1)の誘導があるために，(2)はずいぶん解きやすくなっています。

問　題

xy 平面全体が右図のような直線の配列で埋められているとする。

このとき，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ について，A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし, m, n は負でない整数であるとする。



[2000]

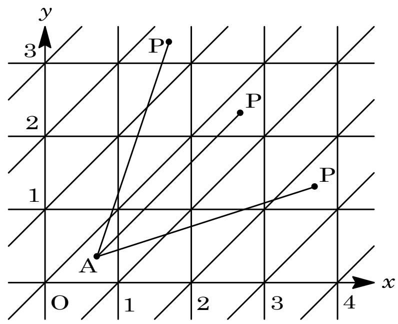
解答例

点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ から点 $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値は, 線分 AP が横切る直線の本数に等しい。

まず, 線分 AP は y 軸に平行な直線を m 本横切り, x 軸に平行な直線を n 本横切る。

また，$y=x$ に平行な直線については, m と n の大小関係によって横切る直線の本数が決まる。

そこで，$f(x,\ y)=y-x-k$ とし，条件を満たす整数 k の個数を求める。



(i)　$m=n$ のとき

線分 AP は，$y=x$ に平行な直線を横切らないので, 求める直線の本数は $m+n$ となる。

(ii)　$m<n$ のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)>0$ かつ $f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)<0$ となるので,

$$n+\frac{1}{3}-m-\frac{2}{3}-k>0,\ \ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}-k<0$$

よって $-\dfrac{1}{3}<k<n-m-\dfrac{1}{3}$ となり，これを満たす整数 k は $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-m-1$ なので，$n-m$ 個存在する。

すなわち, 線分 AP は，$n-m$ 本の $y=x$ に平行な直線を横切ることより，求める直線の本数は $m+n+n-m=2n$ となる。

(iii) $m>n$ のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)<0$ かつ $f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)>0$ から，$n-m-\dfrac{1}{3}<k<-\dfrac{1}{3}$ となり，これを満たす整数 k は $k=n-m,\ n-m+1,\ \cdots,\ -1$ なので，$m-n$ 個存在する。

すなわち，線分 AP は，$m-n$ 本の $y=x$ に平行な直線を横切るので，求める直線の本数は $m+n+m-n=2m$ となる。

コメント

どこまで論理をかけばよいのか迷ってしまう問題です。時間があれば丁寧に，なければ直観的に，というのが妥当な線でしょう。