２０２０ 入試対策
過去問ライブラリー

神戸大学
理系数学22か年

１９９８－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された神戸大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された問題は，その解答例の映像解説を YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 aを正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

(2) $a=2$とする。すべての実数xに対して$f(x)\geqq 2x+b$が成り立つような実数bのとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $0<a\leqq\dfrac{3}{2}$とする。すべての実数xに対して$f(x)\geqq 2x+b$が成り立つような実数bのとり得る値の範囲をaを用いて表せ。また，その条件を満たす点$(a,\ b)$の領域をab平面上に図示せよ。 [2016]

2 $p,\ r$を$-r<p<r$を満たす実数とする。4点$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(r,\ p^2)$，$\mathrm{R}(r,\ r^2)$，$\mathrm{S}(p,\ r^2)$に対し，線分PRの長さは1であるとする。このとき，長方形PQRSの面積の最大値と，そのときのP，Rのx座標をそれぞれ求めよ。 [2013]

3 座標平面上に2点$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$と直線lがあり，Aとlの距離とBとlの距離の和が1であるという。以下の問いに答えよ。

(1) lはy軸と平行でないことを示せ。

(2) lが線分ABと交わるとき，lの傾きを求めよ。

(3) lが線分ABと交わらないとき，lと原点との距離を求めよ。 [2012]

4 以下の問いに答えよ。

(1) tを正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$の表すxy平面上の図形を図示せよ。

(2) aを$a\geqq 0$を満たす実数とする。$x,\ y$が連立不等式

$$ax+(2-a)y\geqq 2,\quad y\geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$のとりうる値の最小値mを，aを用いた式で表せ。

(3) aが$a\geqq 0$の範囲を動くとき，(2)で求めたmの最大値を求めよ。 [2011]

5　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sqrt{3})$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A, B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する。このような r の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた r の値について，C を中心とする半径 r の円が，A, B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ。

(3)　A, B, C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する。このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ。　[2008]

6　xy 平面において，O を原点，P を第 1 象限内の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　2 点 O, P を頂点とし，y 軸上に底辺をもつ二等辺三角形を考える。この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点 P の軌跡 T の方程式を求めよ。

(2)　T を(1)で求めた軌跡とし，a を実数とする。このとき，軌跡 T と直線 $y=a(x-1)$ が第 1 象限内で交点をもつような，a の範囲を求めよ。　[2007]

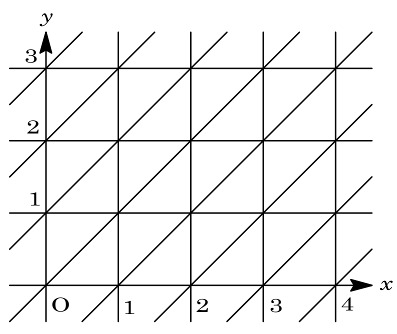
7　a を実数とし，$a>1$ とする。点 $\mathrm{P}(1,\ a)$ を通り，円 $C: x^2+y^2=1$ と接する 2 本の直線のうち，$x=1$ とは異なる直線を l とする。l と x 軸の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする。線分 QA の長さ L を a を用いて表せ。

(2)　三角形 PQA の面積を S とする。a が $a>1$ の範囲を動くとき，S の最小値とそのときの a の値を求めよ。　[2005]

8　xy 平面全体が右図のような直線の配列で埋められているとする。

このとき，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ について，A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし，m, n は負でない整数であるとする。



[2000]

9　連立不等式$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{3}$，$x>3$，$y>3$の表す領域を$D$とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1)　Dを図示せよ。

(2)　D 内を$(x,\ y)$が動くとき$2x+y$のとる値の最小値を求めよ。また，そのときのx, yの値を求めよ。　[1999]

■ 図形と計量

1　三角形 ABC があり，$\mathrm{AB}=2$，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{CAB}>\dfrac{\pi}{4}$とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし，$\angle\mathrm{CAH}=\alpha$とする。辺 AB の中点を M とする。線分 AM 上に A と異なる点 X をとる。3 点 A, X, H を通る円の中心を P，半径を r，$\angle\mathrm{PAH}=\theta$とする。この円と直線 AC との交点で，A と異なる点を Y とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta$をrを用いて表せ。

(2)　$\mathrm{AX}+\mathrm{AY}$をrとαを用いて表せ。

(3)　X のとり方によらず，$\mathrm{AX}+\mathrm{AY}$がつねに一定の値になるときのαの値を求めよ。

[2003]

■ ベクトル

1　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$を内積$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$の値を求めよ。

(3)　点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$とする。　[2019]

$\boxed{2}$ t を $0<t<1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P, 辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q, 辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ。

(3) t が(2)で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。 [2018]

$\boxed{3}$ 四面体 OABC において，P を辺 OA の中点，Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点，R を辺 BC の中点とする。P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ。

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ。[2016]

$\boxed{4}$ 空間において，原点 O を通らない平面 α 上に 1 辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が，平面 α と垂直であることを示せ。 [2014]

$\boxed{5}$ 空間において，2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を l 上に，点 Q を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 R を l 上に，点 S を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。

(3) R, S を(2)で求めた点とする。点 T を l 上に，点 U を z 軸上にとる。また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする。$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。 [2013]

6 四面体 ABCD において，辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を用いて表せ。

(2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき，線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。 [2007]

7 平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり，$\angle\mathrm{XOY} < 180^\circ$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 C が $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c} = t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle\mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおくとき，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および 3 辺の長さ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|\vec{b}-\vec{a}|$ を用いて表せ。 [2006]

8 O を原点とする空間の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ がある。

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

を満たす点を D とする。ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

(1) D の座標を求めよ。

(2) 2 つの実数 s と t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点を P とする。t を固定して考えたとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を最小にする s を t を用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を最小にする s と t の値を求めよ。

(4) (3)で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする。s_0 と t_0 に対し，P_0 を $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = s_0\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t_0\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

となることを示せ。 [2005]

9　正の整数 n に対して，連立不等式 $0 < x \leqq n$，$x \leqq y \leqq 3x$ の表す領域を D_n とする。次の問いに答えよ。

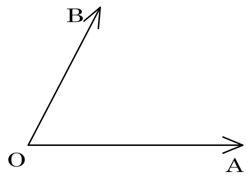
(1)　領域 D_n 内にある格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の個数を S_n とする。S_n を n で表せ。ただし，格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数であるような点のことである。

(2)　原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を始点とし，領域 D_n 内の格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{v_3}=(1,\ 3)$ と 0 以上の整数 m_1，m_2，m_3 を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ と表せることを証明せよ。　[2002]

10　3 点 O, A, B は，一直線上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P を $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$（$t$ は実数）を満たす点とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t で表せ。

(2)　点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$s$ は実数）を満たす点とする。P と Q の中点を M とする。t，s が $0 \leqq t \leqq 1$，$0 \leqq s \leqq 1$ を満たしながら変化するとき，点 M の存在する範囲を図示せよ。



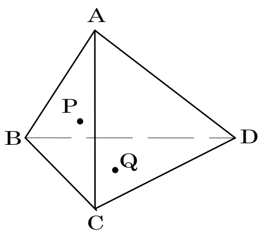
[2001]

11　四面体 ABCD を考える。

面 ABC 上の点 P と面 BCD 上の点 Q について，

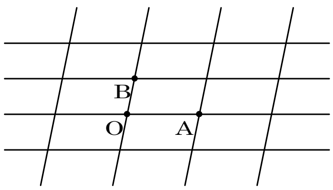
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおくとき，$x:y=s:t$ ならば，線分 AQ と DP が交わることを示せ。　[2000]



12　合同な平行四辺形を平面にしきつめて，図のように 2 組の平行線からなる格子を作り，その各交点を格子点と呼ぶ。

図のような 3 つの格子点 O, A, B について $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ はすべて整数であるとする。このとき，どの 2 つの格子点 P, Q に対しても $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は整数となることを示せ。　[1999]



13 座標空間内の 8 点 O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(2,\ 0,\ 0)$, B$(2,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 2,\ 0)$, P$(0,\ 0,\ 1)$, Q$(2,\ 0,\ 1)$, R$(2,\ 2,\ 1)$, S$(0,\ 2,\ 1)$を頂点とする直方体を考える。次の各問いに答えよ。

(1) $\mathrm{D}=(x,\ y,\ 1)$を面 PQRS 上の点とするときベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を x, y およびベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$がベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$と直交するための条件を x, y を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$である D の中で$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$が最小となるような D を与える x, y の値を求めよ。

[1998]

■ 整数と数列

1 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を$\{a_n\}$とする。

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

すなわち，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=4$で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$とする。この数列の初項から第 n 項までの和をS_nとする。以下の問いに答えよ。

(1) S_nを求めよ。

(2) $S_n=2019$となる自然数 n は存在しないことを示せ。

(3) どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数 n が存在することを示せ。

[2019]

2 約数，公約数，最大公約数を次のように定める。

・ 2 つの整数 a, b に対して，$a=bk$ を満たす整数 k が存在するとき，b は a の約数という。

・ 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という。

・ 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という。

以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c, p は 0 でない整数で $a=pb+c$ を満たしているとする。

(i) $a=18$，$b=30$，$c=-42$，$p=2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ。

(ii) a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする。M と N は等しいことを示せ。ただし，a, b, c, p は 0 でない任意の整数とする。

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を，$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，$a_1=3$，$a_2=4$ で定める。

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。 [2016]

3 a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする。次の条件(＊)を考える。

(＊) 3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) $a=b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(2) $a>b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(3) 条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。 [2015]

4 $m,\ n\,(m<n)$ を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ とおく。3 辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a^2+b^2=c^2$ を示せ。

(2) r を m, n を用いて表せ。

(3) r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4) r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。 [2014]

5　a は正の無理数で，$X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$，$Y = a^2 - 2a$ を考えると，X と Y はともに有理数である。以下の問いに答えよ。

(1)　整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2)　X と Y の値を求めよ。

(3)　a の値を求めよ。ただし，素数の平方根は無理数であることを用いてよい。

[2011]

6　p を 3 以上の素数，a，b を自然数とする。以下の問いに答えよ。ただし，自然数 m，n に対し，mn が p の倍数ならば，m または n は p の倍数であることを用いてよい。

(1)　$a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(2)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(3)　a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ。

[2010]

7　t を実数として，数列 a_1，a_2，…を

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2t,\ a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1}\quad (n \geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$t \geqq 1$ ならば，$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ となることを示せ。

(2)　$t \leqq -1$ ならば，$0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$ となることを示せ。

(3)　$-1 < t < 1$ ならば，$t = \cos\theta$ となる θ を用いて，

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n \geqq 1)$$

となることを示せ。

[2009]

8　1 から n までの自然数 1, 2, 3, … , n の和を S とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば，S が偶数であることを示せ。

(2)　S が偶数ならば，n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3)　S が 4 の倍数ならば，n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ。

[2008]

9　座標平面上の点$(p,\ q)$で，p と q がともに整数であるものを格子点という。次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対し，$p+2q=n$，$p>0$，$q>0$ を満たす格子点$(p,\ q)$の個数をa_nとする。a_nを求めよ。

(2)　自然数 n に対し，$p+2q<n$，$p>0$，$q>0$ を満たす格子点$(p,\ q)$の個数をb_nとする。b_nを求めよ。

(3)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$と$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$を求めよ。　[2003]

10　次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c$ を整数とする。x に関する 3 次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$が有理数の解をもつならば，その解は整数であることを示せ。ただし，正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 $m,\ n$ を用いて$\dfrac{n}{m}$で表せることを用いよ。

(2)　方程式$x^3+2x^2+2=0$は，有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。

[2001]

11　2 つの関数$f(x)=x(1-x)$，$g(x)=\dfrac{2x}{2+x}$を用いて，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を

$$0<a_0=b_0<\frac{1}{2},\ \ a_{n+1}=f(a_n),\ \ b_{n+1}=g(b_n)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1)　$0<x<\dfrac{1}{2}$において，$f(x)$は単調増加であることを示せ。また $x>0$ のとき，$f(x)<g(x)<x$であることを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$0<a_n<b_n<\dfrac{1}{2}$であることを示せ。

(3)　b_nを求めよ。　[2000]

■ 確率

1 n を 2 以上の整数とする。2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ。

(2) $n \geqq 36$ のとき，P_n を求めよ。

(3) $P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ。 [2019]

2 さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ ……($*$)を考える。以下の問いに答えよ。

(1) ($*$)が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ。

(2) ($*$)が整数を解にもつとする。このとき($*$)の解はともに正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。

(3) ($*$)が整数を解にもつ確率を求めよ。 [2018]

3 $\overrightarrow{v_1} = (1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2} = (1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3} = (-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4} = (-1,\ -1,\ 1)$ とする。座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ（1，2，3，4 の目がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{4}$ で出る）をふるごとに，出た目が $k\,(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のときは $\overrightarrow{v_k}$ だけ移動する。すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \overrightarrow{v_k}$ である。ただし，$\mathrm{P}_0 = \mathrm{O}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ。

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ。

(4) n を 6 以下の自然数とする。$\mathrm{P}_n = \mathrm{O}$ となる確率を求めよ。 [2017]

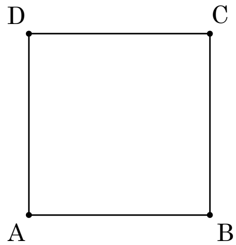
4 n を自然数とする。1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ。

(2) n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ。

(3) $n = 4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ。 [2014]

5　動点 P が，図のような正方形 ABCD の頂点 A から出発し，さいころをふるごとに，次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する。



出た目の数が 2 以下なら辺 AB と平行な方向に移動する。

出た目の数が 3 以上なら辺 AD と平行な方向に移動する。

n を自然数とするとき，さいころを $2n$ 回ふった後に動点 P が A にいる確率を a_n , C にいる確率を c_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　さいころを $2n$ 回ふった後，動点 P は A または C にいることを証明せよ。

(3)　a_n ，c_n を n を用いてそれぞれ表せ。

(4)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ ，$\lim_{n\to\infty} c_n$ をそれぞれ求めよ。　[2013]

6　N を自然数とする。赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする。2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する。赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし，ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n=0,\ 1,\ \cdots,\ N$ に対して，$X=n$ となる確率 p_n を求めよ。

(2)　X の期待値を求めよ。

(3)　$n=0,\ 1,\ \cdots,\ N$ に対して，$Y=n$ となる確率 q_n を求めよ。　[2010]

7　次の問いに答えよ。

(1)　1，2，3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2)　1 の数字を書いたカードを 3 枚，2 の数字を書いたカードを 3 枚，3 の数字を書いたカードを 3 枚，計 9 枚用意する。この中から無作為に，一度に 3 枚のカードを選んだとき，カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。　[2007]

8　A, B, C, D 4 つの袋の中にそれぞれ 6 枚のカードが入っている。それぞれのカードには 1 から 9 までの数字の 1 つが書かれている。A, B, C, D の袋の中のカードは次の 4 つの条件を満たしているとする。

(i)　袋の中からカードを無作為に 1 枚抜いたとき，カードに書かれている数字の期待値は, A, B, C, D すべて同じである。

(ii)　$p(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) = p(\mathrm{B},\ \mathrm{C}) = p(\mathrm{C},\ \mathrm{D}) = p(\mathrm{D},\ \mathrm{A}) = \dfrac{2}{3}$ である。ここで，$p(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ は袋 X と袋 Y からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に抜いたとき, X から抜いたカードに書かれている数字が Y から抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す。

(iii) A, B, C の袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ 2 種類で，D の袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている。

(iv) A の袋の中のカードに書かれている数字の種類は 3 と 9 である。

次の問いに答えよ。

(1)　A の袋の中の 3 の書かれているカードの枚数と，D の袋の中のカードに書かれた数字を求めよ。

(2)　B の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と，そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。

(3)　C の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と，そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。　[2005]

9　次のようなゲームを考える。右のように 1 から 9 までの数字が書かれている表を用意する。

5	2	8
1	9	3
7	4	6

一方，9 枚のカードがあり 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれている。これらのカードをよくまぜ，順に並べる。カードを並べた順に見て，カードに書いてある数字を表から消し，かわりに＊印を書き込む。この表で縦，横あるいは斜めのいずれかに＊印が 3 つ初めて並んだとき，その時点で表にある＊印の個数を得点とする。

たとえば，最初の 4 枚のカードが，順に 5, 4, 6, 9 であれば，下のように変化する。

＊	2	8
1	9	3
7	4	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	＊

＊	2	8
1	＊	3
7	＊	＊

その結果，＊印が初めて 3 つ並んだ。このとき，得点は 4 である。次の問いに答えよ。

(1)　このゲームで起こり得る最小の得点を求めよ。また，得点が最小となる確率を求めよ。

(2)　このゲームで起こり得る最大の得点を求めよ。また，得点が最大となる確率を求めよ。　[2004]

10　数字 $1, 2, \cdots, N$ の書かれたカードが 1 枚ずつ N 枚入っている箱から，元に戻さずに 1 枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える。ここで，$2 \leqq k \leqq N$ とする。引いたカードの順に，書かれている数字を $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$x_1 < x_2 < \cdots < x_k$，すなわち k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ。

(2)　i は整数で，$2 \leqq i \leqq k$ を満たすとする。$x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1},\ x_{i-1} > x_i$ である確率，すなわち k 枚のカードのうち $i-1$ 枚目までは小さい順にカードを引き，i 枚目に初めて $i-1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ。

(3)　N は 5 以上の整数で，$k=5$ とする。$2 \leqq i \leqq 5$ を満たす各整数 i について上の(2)の事象が起こるとき，得点 i 点が与えられるとする。それ以外のときの得点は 0 点とする。このとき，得点の期待値を求めよ。　[2002]

11　白球 3 個，赤球 2 個，青球 1 個合計 6 個の球の入っている袋がある。最初に A 君が，つぎのルール(i)，(ii)に従って袋から球を 1 個または 2 個取り出す。次に B 君が同じルールに従って，袋に残った球を 1 個または 2 個取り出す。ただし，いったん取り出した球は元の袋には戻さないものとする。

(i)　取り出した 1 個目が赤球ならば, 2 個目を取り出すことはできない。

(ii)　取り出した 1 個目が赤球以外ならば，さらに 1 個だけ取り出す。

白球は 1 点，赤球は 2 点，青球は 3 点とし，取り出した球の合計点を各自の得点とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　A 君と B 君の得点が同じになる確率 p_1 を求めよ。

(2)　A 君の得点が B 君の得点より大きくなる確率 p_2 を求めよ。　[2001]

12　A 地点から B 地点まで 0 または 1 の一文字からなる信号を送る。A 地点と B 地点の間に中継点を $2n-1$ 箇所作り AB 間を $2n$ 個の小区間に分割すると，一つの区間において 0 と 1 が逆転して伝わる確率は $\dfrac{1}{4n}$ である。このとき A 地点を発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わる確率を P_{2n} とする。次の各問いに答えよ。

(1)　偶数回の逆転があると，A 地点で発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わることに注意して P_2 を求めよ。

(2)　$(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}$ を示せ。

(3)　P_{2n} を求めよ。

(4)　$\lim_{n\to\infty}P_{2n}$ を求めよ。　[1998]

■ 論証

1　実数 x, y に関する次の各命題の真偽を答えよ。さらに，真である場合は証明し，偽である場合は反例をあげよ。

(1)　$x>0$ かつ $xy>0$ ならば, $y>0$ である。

(2)　$x\geqq 0$ かつ $xy\geqq 0$ ならば, $y\geqq 0$ である。

(3)　$x+y\geqq 0$ かつ $xy\geqq 0$ ならば, $y\geqq 0$ である。　[2008]

2　関数$f(x)$は任意の実数xに対して定義されているとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$が$x=a$において微分可能であることの定義を述べよ。

(2)　次の2つの命題のうち正しいものを選び，それが正しい理由を示せ。

(i)　$f(x)$が$x=a$において連続ならば，必ず，$f(x)$は$x=a$において微分可能である。

(ii)　$f(x)$が$x=a$において連続であっても，$f(x)$は$x=a$において微分可能であるとは限らない。

(3)　関数$f(x)=\cos x$が$x=a$において微分可能であることを，(1)で答えた定義を用いて証明せよ。　[2002]

■ 複素数

1　整式$f(x)$は実数を係数にもつ3次式で，3次の係数は1，定数項は-3とする。方程式$f(x)=0$は，1と虚数α，βを解にもつとし，αの実部は1より大きく，αの虚部は正とする。複素数平面上でα，β，1が表す点を順にA，B，Cとし，原点をOとする。以下の問いに答えよ。

(1)　αの絶対値を求めよ。

(2)　θをαの偏角とする。△ABCの面積Sをθを用いて表せ。

(3)　Sを最大にするθ $(0\leqq\theta<2\pi)$とそのときの整式$f(x)$を求めよ。　[2018]

2　$i=\sqrt{-1}$とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数α，βについて，等式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　自然数nに対して，$z=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つことを示せ。

(3)　2以上の自然数nについて，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

が成り立つことを示せ。　[2011]

3　$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ （$p,\ q$ は実数）を求めよ。

(2)　整数 $a,\ b,\ c$ を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2006]

4　$\alpha=\cos\dfrac{360°}{5}+i\sin\dfrac{360°}{5}$ とする。ただし，i は虚数単位である。100 個の複素数 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{100}$ を，$z_1=\alpha$，$z_n={z_{n-1}}^3$ $(n=2,\ \cdots,\ 100)$ で定める。次の問いに答えよ。

(1)　z_5 を α を用いて表せ。

(2)　$z_n=\alpha$ となるような n の個数を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}z_n$ の値を求めよ。　[2004]

5　次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　複素数 z に対し，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ とする。z が実軸上を動くとき，複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。

(2)　複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ に対し，$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$ とする。$z\neq\pm i$ のとき，複素数平面上で w_1 を表す点を P，w_2 を表す点を Q とする。P，Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。　[2003]

6　0 でない複素数 z に対して，$w=u+iv$ を $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$u,\ v$ は実数，i は虚数単位である。

(1)　複素数平面上で，z が単位円 $|z|=1$ 上を動くとき，w はどのような曲線を描くか。$u,\ v$ が満たす曲線の方程式を求め，その曲線を図示せよ。

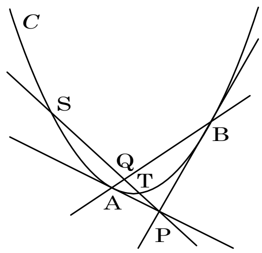
(2)　複素数平面上で，z が実軸からの偏角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の半直線上を動くとき，w はどのような曲線を描くか。$u,\ v$ が満たす曲線の方程式を求め，その曲線を図示せよ。

[2002]

■ 曲線

1 xy 平面において放物線 $C: y=x^2$ と，その下側にある点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ $(q<p^2)$ を考える。P を通るような C の 2 つの接線を考え，その接点をそれぞれ A, B とする。また, P を通る傾き m の直線が C と相異なる 2 点 S, T で交わるとする。

点 A, B の x 座標をそれぞれ a, b とし，点 S, T の x 座標をそれぞれ s, t とする。次の問いに答えよ。

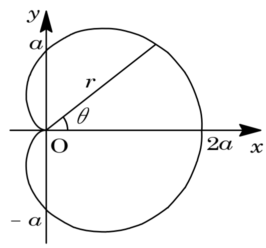


(1) $a+b$，ab を p, q で表せ。

(2) $s+t$，st を p, q, m で表せ。

(3) 直線 AB と直線 ST の交点を Q とし，Q の x 座標を u とする。右図のように $s<u<t<p$ となる場合について，等式 $\dfrac{1}{\mathrm{PS}}+\dfrac{1}{\mathrm{PT}}=\dfrac{2}{\mathrm{PQ}}$ が成立することを示せ。 [2006]

2 $a>0$ を定数として，極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$ により表される曲線 C_a を考える。次の問いに答えよ。



(1) 極座標が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 S を，極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき，極座標が $(2a,\ 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。 [2000]

■ 極限

1 k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3) (2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

[2018]

2 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

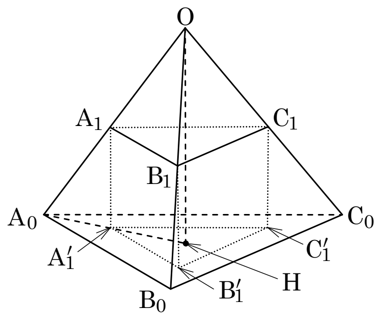
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式を満たす S の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-S=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。 [2017]

3 1 辺の長さが a_0 の正四面体 $\mathrm{OA_0B_0C_0}$ がある。図のように，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 $\mathrm{A_1}$，辺 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 $\mathrm{B_1}$，辺 $\mathrm{OC_0}$ 上の点 $\mathrm{C_1}$ から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_1A_1'}$，$\mathrm{B_1B_1'}$，$\mathrm{C_1C_1'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1\text{-}A_1'B_1'C_1'}$ は正三角柱になるとする。ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする。同様に，点 $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2'}$，$\mathrm{B_2'}$，$\mathrm{C_2'}$，…を次のように定める。正四面体 $\mathrm{OA_kB_kC_k}$ において，辺 $\mathrm{OA_k}$ 上の点 $\mathrm{A_{k+1}}$，辺 $\mathrm{OB_k}$ 上の点 $\mathrm{B_{k+1}}$，辺 $\mathrm{OC_k}$ 上の点 $\mathrm{C_{k+1}}$ から平面 $\mathrm{A_kB_kC_k}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_{k+1}A_{k+1}'}$，$\mathrm{B_{k+1}B_{k+1}'}$，$\mathrm{C_{k+1}C_{k+1}'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}\text{-}A_{k+1}'B_{k+1}'C_{k+1}'}$ は正三角柱になるとする。辺 $\mathrm{A_kB_k}$ の長さを a_k とし，正三角柱 $\mathrm{A_kB_kC_k\text{-}A_k'B_k'C_k'}$ の体積を V_k とするとき，以下の問いに答えよ。



(1) 点 O から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta=\angle\mathrm{OA_0H}$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

(2) a_1 を a_0 を用いて表せ。

(3) V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}V_k$ を求めよ。 [2017]

4　a, b を実数とし，自然数 k に対して $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p, q, r を，a, b を用いて表せ。

(2)　$b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ を求めよ。また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ の和を求めよ。　[2015]

5　n を 2 以上の自然数として，$S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}$ を求めよ。

(2)　k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\frac{1}{k\log k}$$

を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ の値を求めよ。　[2011]

6　a を正の実数とする。xy 平面上の放物線 $C: y=x^2$ 上に点 $\mathrm{A}(-a,\ a^2)$ をとる。$s>0$ のとき，x 軸上の点 $\mathrm{P}(s,\ 0)$ に対して，直線 AP と C の 2 つの交点のうち，A とは異なる交点を $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ とする。Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $\mathrm{P}'(t,\ 0)$ とする。いま，x 軸上の点 $\mathrm{P}_1(c,\ 0)$ $(c>0)$ から出発して，点 P に対して点 Q，P′ を定めたのと同じ方法で P_1 から点 Q_1，P_2 を定め，同様に P_2 から点 Q_2，P_3 を定め，この方法を繰り返して，P_1，P_2，P_3，…と Q_1，Q_2，Q_3，…を定める。次の問いに答えよ。

(1)　t を a と s を用いて表せ。

(2)　点 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の x 座標を x_n とする。数列 $\{u_n\}$ を $u_n=\dfrac{1}{x_n}$ で定める。$\{u_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　直角三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n で表す。自然数 r を選んで，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するようにできる。このような r の値とそのときの極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^r S_n$ を求めよ。　[2005]

7　t を正の実数とし，k を自然数とする。無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　上の無限級数の和を $f_k(t)$ とするとき，それを t と k を用いて表せ。

(2)　$x>0$ のとき，$F_k(x)=\displaystyle\int_1^x f_k(t)\,dt$ を計算せよ。

(3)　$x>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} F_k(x)$ を求めよ。　[2004]

■ 微分法

1 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の $x>0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) a を $a\neq 1$ を満たす正の実数とする。曲線 $y=e^x$ と曲線 $y=x^a$ $(x>0)$ が共有点 P をもち，さらに点 P において共通の接線をもつとする。点 P の x 座標を t とするとき，a と t の値を求めよ。

(3) a と t を(2)で求めた実数とする。x を $x\neq t$ を満たす正の実数とするとき，e^x と x^a の大小を判定せよ。 [2019]

2 n を自然数とする。$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。

(3) (2)における解を x_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx_n$ を求めよ。

[2017]

3 r，c，ω は正の定数とする。座標平面上の動点 P は時刻 $t=0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする。また，動点 Q は時刻 $t=0$ のとき点 $(0,\ -r)$ にあるとする。点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2) 動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1\neq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1))\neq(x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を r，c，ω を用いて与えよ。 [2017]

4　座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を C とする。$a>2$，$0<\theta<\pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる。原点を O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする。点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする。このとき，$0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする。このとき，$0<\theta<\pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ。　[2015]

5　a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を，$y=x^4-2(a+1)x^3+3ax^2$ で定める。曲線 C が 2 つの変曲点 P，Q をもち，それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　線分 PQ の中点と x 座標が一致するような，C 上の点を R とする。三角形 PQR の面積を求めよ。

(3)　曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P' とし，点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q' とする。線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の中点の x 座標を求めよ。

[2015]

6　a を実数とし，$f(x)=xe^x-x^2-ax$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きを -1 とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(3)　b を実数とするとき，2 つの曲線 $y=xe^x$ と $y=x^2+ax+b$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲での共有点の個数を調べよ。　[2014]

7　a, b を正の実数とし, xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(a,\ 0)$，B$(a,\ b)$ をとる。三角形 OAB を, 原点 O を中心に $90°$ 回転するとき, 三角形 OAB が通過してできる図形を D とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　D を xy 平面上に図示せよ。

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(3)　$a+b=1$ のとき, (2)で求めた V の最小値と, そのときの a の値を求めよ。

[2014]

8　以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 1$ において, $x > 2\log x$ が成り立つことを示せ。ただし, e を自然対数の底とするとき, $2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい。

(2)　自然数 n に対して, $(2n\log n)^n < e^{2n\log n}$ が成り立つことを示せ。　[2011]

9　a を実数とする。関数 $f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように, a の値の範囲を定めよ。　[2010]

10　a, b は実数で $a > b > 0$ とする。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log\left(ax+b(1-x)\right)-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし, log は自然対数を表す。このとき, 以下のことを示せ。

(1)　$0 < x < 1$ に対して $f''(x) < 0$ が成り立つ。

(2)　$f'(c)=0$ を満たす実数 c が, $0 < c < 1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して, $ax+b(1-x) \geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。　[2009]

11　$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし, 方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき, 以下のことを示せ。

(1)　$f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　α が $f(x)=0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3)　$f(x)=0$ の解を小さい順に α_1，α_2，α_3 とすれば,

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\ g(\alpha_2)=\alpha_1,\ g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。　[2009]

12　$f(x)=e^x-x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　実数 x について $f(x)\geqq 1$ であることを示せ。

(2)　t は実数とする。このとき，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=t$，$x=t-1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。　[2007]

13　a を正の定数とする。不等式 $a^x\geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。　[2004]

14　関数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2-3x+18}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極小値をすべて求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。ただし，必要ならば $e>2.7$ を用いてよい。　[2003]

15　関数 $f(x)=1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\log x}{x}\ (x>0)$ を考える。次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数 $\log x$ の底である。

(1)　$f(x)$ の極値と変曲点を求め，グラフの概形を描け。ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。また，グラフと座標軸との交点の座標は求めなくてよい。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2001]

16　関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x}$ を考える。$0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。またその最小値を与える x に対して，$\cos x$ の値を求めよ。

(3)　$y=f(x)$ のグラフの x 軸より下方にある部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2000]

17　m は実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=(x^2-x+m)\sin 3\pi x\quad(0<x<1)$$

とする。このとき $f(a)=0$ となる a（$0<a<1$）のうち，$x=a$ を境目にして関数 $f(x)$ の符号が変化するものの個数を求めよ。　[1999]

18　$0<x<\dfrac{1}{2}$ とする。一辺の長さが 1 の正方形の紙の 4 つのすみから一辺の長さが x の正方形を切り取りふたのない箱 A を作る。さらに, 切り取った一辺の長さが x の正方形の 4 つのすみをそれぞれ切り取り, A と相似なふたのない箱 B_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ を作る。次の各問いに答えよ。

(1)　箱 A の容積 $f(x)$ を最大にする x の値 a を求めよ。

(2)　箱 B_1 の容積 $g(x)$ を最大にする x の値 b を求めよ。

(3)　方程式 $f'(x)+4g'(x)=0$ が区間 $a<x<b$ に解をもつことを示せ。　[1998]

■ 積分法

1　$a,\ b$ を実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=a\cos x+b$ が, $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3 dx$ を満たすとする。このとき, $a,\ b$ が満たす関係式を求めよ。

(2)　(1)で求めた関係式を満たす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ。

[2013]

2　$x>0$ に対し, 関数 $f(x)$ を, $\displaystyle f(x)=\int_0^{x}\frac{dt}{1+t^2}$ と定め, $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{d}{dx}f(x)$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{d}{dx}g(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ。　[2012]

3　自然対数の底を e とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$e<3$ であることを用いて, 不等式 $\log 2>\dfrac{3}{5}$ が成り立つことを示せ。

(2)　関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}-x$ の導関数を求めよ。

(3)　積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\cos x}dx$ の値を求めよ。

(4)　(3)で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ。　[2012]

4　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0 \text{ または } x>2 \text{ のとき}\\ |x-1| & 0\leqq x\leqq 2 \text{ のとき}\end{cases}$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)=f(f(x))$ とおく。関数 $y=g(x)$ のグラフをかけ。

(2)　n を自然数とする。$\displaystyle\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}\,dx$ を求めよ。　[2005]

5　$f(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で，$f(0)=0$，$f(\pi)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=-\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,dx$ を示せ。

(2)　$f(x)=x(x-\pi)$ のとき，実数 a に対し，$F(a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\{af(x)-\sin x\}^2\,dx$ とする。a を変化させたとき，$F(a)$ を最小にする a の値を求めよ。　[2003]

■ 積分の応用

1　媒介変数表示　$x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t$　$(0\leqq t\leqq\pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2)　C の凹凸を調べ，C の概形を描け。

(3)　C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。　[2019]

2　座標空間において，O を原点とし，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 0)$ とする。△OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x, y, z の式で表せ。

(2)　P$(x,\ y,\ z)$ が L 上の点であるための条件は，$z^2\leqq 2xy$ かつ $0\leqq x+y\leqq 2$ であることを示せ。

(3)　$1\leqq a\leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　立体 $\{(x,\ y,\ z)\mid(x,\ y,\ z)\in L,\ 1\leqq x\leqq 2\}$ の体積を求めよ。　[2018]

3 a を正の定数とし，2 曲線 $C_1 : y=\log x$，$C_2 : y=ax^2$ が点 P で接しているとする。以下の問いに答えよ。

(1) P の座標と a の値を求めよ。

(2) 2 曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2016]

4 極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。

(4) 曲線 C の長さを求めよ。 [2016]

5 座標平面上の 2 つの曲線 $y=\dfrac{x-3}{x-4}$，$y=\dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 2 曲線 C_1，C_2 の交点をすべて求めよ。

(2) 2 曲線 C_1，C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2015]

6 c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。 [2013]

7 座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0\leqq t\leqq 1$ を用いて

$$x=1-t^2,\quad y=t-t^3$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形を描け。

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分が，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2012]

8　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$，$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$　$(x>0)$とする。以下の問いに答えよ。ただし，自然対数の底eについて，$e=2.718\cdots$であること，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$であることを証明なしで用いてよい。

(1)　2曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$の共有点の座標をすべて求めよ。

(2)　区間 $x>0$ において，関数$y=f(x)$と$y=g(x)$の増減，極値を調べ，2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$のグラフの概形をかけ。グラフの変曲点は求めなくてよい。

(3)　区間 $1\leqq x\leqq e$ において，2 曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$，および直線$x=e$で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

9　aを$0\leqq a<\dfrac{\pi}{2}$の範囲にある実数とする。2つの直線$x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$および2つの曲線$y=\cos(x-a)$，$y=-\cos x$によって囲まれる図形を G とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　図形Gの面積をSとする。Sをaを用いた式で表せ。

(2)　aが$0\leqq a<\dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，Sを最大にするようなaの値と，そのときのSの値を求めよ。

(3)　図形Gをx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積をVとする。Vをaを用いた式で表せ。　[2009]

10　xy平面上に5点A$(0,\ 2)$，B$(2,\ 2)$，C$(2,\ 1)$，D$(4,\ 1)$，P$(0,\ 3)$をとる。点Pを通り傾きaの直線lが，線分BCと交わり，その交点はB, Cと異なるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　aの値の範囲を求めよ。

(2)　直線lと線分AB, 線分BCで囲まれる図形をx軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積をV_1，直線lと線分BC, 線分CDで囲まれる図形をx軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積をV_2とするとき，それらの和$V=V_1+V_2$をaの式で表せ。

(3)　(1)で求めたaの値の範囲で，(2)で求めたVは，$a=-\dfrac{3}{4}$のとき最小値をとることを示せ。　[2008]

11 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$で表される曲線を C とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) y を x の式で表せ。

(2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。　[2007]

12 xyz 空間に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(-1,\ 1,\ 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) t を $0<t<2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と，$\triangle\mathrm{PQR}$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。　[2006]

13 正の実数 a, b に対して，2 つの曲線 $C_1 : ay^2 = x^3$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$，$C_2 : bx^2 = y^3$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ の原点 O 以外の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) 交点 P の座標を求め, 2 つの曲線 C_1，C_2 の概形を描け。

(2) 2 つの曲線 C_1，C_2 で囲まれる部分の面積を a と b で表せ。また，この面積が一定値 S であるように a, b が動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。　[2002]

14 $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |x-a|\sin x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とする。$y=f(x)$ のグラフと，x 軸および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を S とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) S を a を用いて表せ。

(2) a が $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動くときの S の最小値を求めよ。　[1999]

15 $0<a<4$ とし，座標平面上の 4 点 $(0,\ 0)$, $(a,\ 0)$, $(a,\ 4-a)$, $(0,\ 4-a)$ を頂点とする長方形の内部を I_a とする。$y \leqq \dfrac{1}{x}$ をみたす I_a の点 $(x,\ y)$ 全体のなす図形の面積を $S(a)$ とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(2) $S(a)$ の最大値を求めよ。　[1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

a を正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$a=2$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を a を用いて表せ。また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域を ab 平面上に図示せよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|=\left|(x+a)^2-a^2+a\right|$ に対して，

(i)　$-a^2+a<0\ (a>1)$ のとき

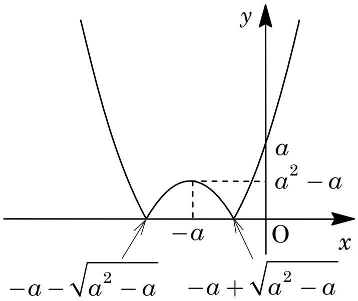
$-a-\sqrt{a^2-a}<x<-a+\sqrt{a^2-a}$ において，

$$f(x)=-x^2-2ax-a=-(x+a)^2+a^2-a$$

$x\leqq -a-\sqrt{a^2-a}$，$-a+\sqrt{a^2-a}\leqq x$ において，

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

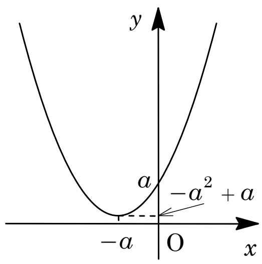
よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(ii)　$-a^2+a\geqq 0\ (0<a\leqq 1)$ のとき

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



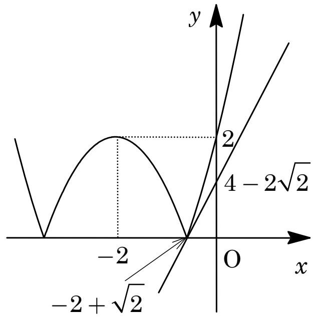
(2)　$a=2$ のとき，$f(x)=\left|x^2+4x+2\right|$ となる。

さて，$y=x^2+4x+2$ のグラフ上の $x=t$ における接線の傾きが 2 とすると，$y'=2x+4$ から，

$$2t+4=2,\ t=-1$$

すると，$-1<-2+\sqrt{2}$ から，$y=f(x)$ のグラフがつねに直線 $y=2x+b$ の上側にあり，しかも b の値が最大になるのは，右図の位置関係の場合である。

すなわち，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b のとり得る値は，$b\leqq 4-2\sqrt{2}$ である。



(3)　(a)　$0<a\leqq 1$ のとき

(1)(ii)の場合から $f(x)=x^2+2ax+a$ となり，$y=f(x)$ のグラフ上の $x=t$ において接線の傾きが 2 とすると，$f'(x)=2x+2a$ から，

$$2t+2a=2,\ t=1-a$$

ここで，直線 $y=2x+b$ が点 $(1-a,\ f(1-a))=(1-a,\ -a^2+a+1)$ を通るとき，

$$-a^2+a+1=2(1-a)+b,\ b=-a^2+3a-1$$

よって，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b の条件は，

$$b\leqq -a^2+3a-1$$

(b)　$1<a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

(a)より，$y=x^2+2ax+a$ のグラフと直線 $y=2x+b$ の接点は $x=1-a$ となり，まず，この値と $x=-a+\sqrt{a^2-a}$ との大小関係を調べると，

$$-a+\sqrt{a^2-a}-(1-a)=\sqrt{a^2-a}-1=\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}-1\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}-1<0$$

これより，$-a+\sqrt{a^2-a}<1-a$ となり，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=2x+b$ がただ 1 つの共有点をもつとき，この点は $y=x^2+2ax+a$ 上の接点である。

すると，(a)と同様に，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b の条件は，

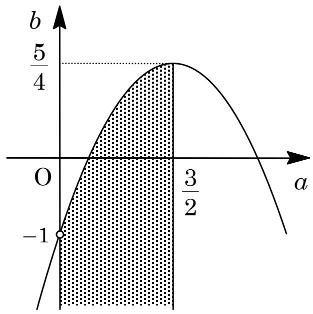
$$b\leqq -a^2+3a-1$$

(a)(b)より，求める条件は，$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ において，

$$b\leqq -a^2+3a-1=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

この条件を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。

ただし，b 軸以外の境界線は領域に含む。



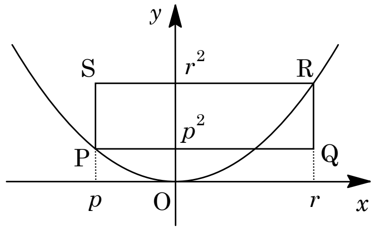
コメント

絶対値つきの関数のグラフについての基本問題です。(2)(3)では，図だけで処理をするには微妙な感じでしたので，まず数式を用いて確認をしています。

問　題

p, r を $-r<p<r$ を満たす実数とする。4 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(r,\ p^2)$, $\mathrm{R}(r,\ r^2)$, $\mathrm{S}(p,\ r^2)$ に対し，線分 PR の長さは 1 であるとする。このとき，長方形 PQRS の面積の最大値と，そのときの P，R の x 座標をそれぞれ求めよ。 [2013]

解答例＋映像解説



$-r<p<r$ より，$r^2-p^2=(r+p)(r-p)>0$ となるので，長方形 PQRS の面積 A は,

$$A=(r-p)(r^2-p^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\mathrm{PR}=1$ より，

$$(r-p)^2+(r^2-p^2)^2=1\cdots\cdots\cdots②$$

相加平均と相乗平均の関係を用いると，①②から,

$$A=\sqrt{(r-p)^2(r^2-p^2)^2}\leqq\frac{1}{2}\{(r-p)^2+(r^2-p^2)^2\}=\frac{1}{2}$$

等号成立は，$(r-p)^2=(r^2-p^2)^2=\dfrac{1}{2}$ のときである。すなわち,

$$r-p=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots③,\quad r^2-p^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots④$$

④より，$(r+p)(r-p)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，③を代入すると，$r+p=1\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，③⑤より，$p=\dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$，$r=\dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ となり，このとき，A は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

コメント

相加平均と相乗平均の関係を利用すると，スッキリと解ける問題です。なお，対角線のなす角に注目する別解も考えられます。

問　題

座標平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。　[2012]

解答例

(1) l が y 軸と平行であるとき，k を実数として，$l: x=k$ とおくと，A$(1,\ 0)$ と l の距離が $|k-1|$，B$(-1,\ 0)$ と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より，

$$|k-1|+|k+1|=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ところが，$|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1| \geqq |(1-k)+(k+1)|=2$ であるので，①を満たす k は存在しない。よって，l は y 軸と平行でない。

(2) (1)より，$l: y=mx+n$，すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると，l は線分 AB と交わることより，$(m+n)(-m+n) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので，

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$3m^2=1$

よって，l の傾きは，$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，$(m+n)(-m+n)>0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$-m^2+4n^2=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

すると，l と原点との距離 d は，⑤より，

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

コメント

点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお，②と④は，正領域・負領域の考え方を利用しています。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2)　a を $a\geqq 0$ を満たす実数とする。$x,\ y$ が連立不等式

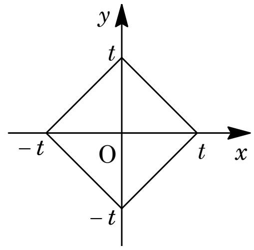
$$ax+(2-a)y\geqq 2,\quad y\geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3)　a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$t>0$ のとき，$|x|+|y|=t$ ……①に対して，



(i)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$x+y=t$

(ii)　$x\leqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$-x+y=t$

(iii)　$x\leqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$-x-y=t$

(iv)　$x\geqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$x-y=t$

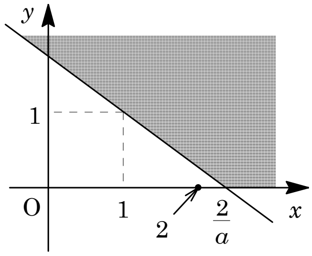
(i)～(iv)より，①で表される図形は右図の正方形である。

(2)　$a\geqq 0$ のとき，連立不等式 $ax+(2-a)y\geqq 2$ ……②，$y\geqq 0$ ……③で表される領域は，まず②の境界線 $ax+(2-a)y=2$ …… ②$'$ に対して，

$$a(x-y)+2y-2=0$$

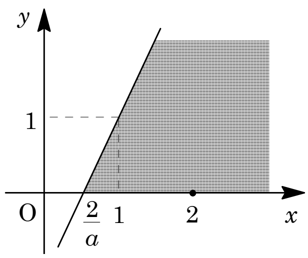
すると，0 以上の任意の実数 a に対して，$x=y=1$ で成立することから，直線②$'$ はつねに点 $(1,\ 1)$ を通る。また，直線②$'$ は，$a=0$ のとき $y=1$ となり x 軸に平行になり，$a>0$ のとき x 軸と交わり，その交点は点 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ である。

さらに，$x=y=0$ のとき②は成立しないので，不等式②の表す領域は，直線②$'$ を境界線とする原点を含まない側である。



(i)　$a=0$ または $\dfrac{2}{a}\geqq 2\ (0\leqq a\leqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{2}{2-a}\right)$ で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{2-a}$ をとる。



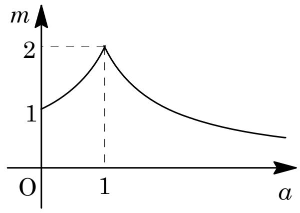
(ii)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 2\ (a\geqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，x 軸との交点 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{a}$ をとる。

(i)(ii)より，$|x|+|y|$の最小値 m は，

$$m=\frac{2}{2-a}\quad(0\leqq a\leqq 1),\quad m=\frac{2}{a}\quad(a\geqq 1)$$

(3)　(2)より，a と m の関係をグラフに表すと右図のようになり，$a=1$ のとき m は最大値 2 をとる。



コメント

不等式②で表される領域を把握するために，あの手この手を用いています。これは，極力，場合分けを避けるためです。

問　題

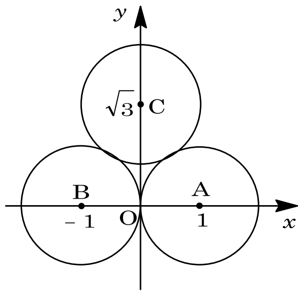
xy 平面上に 3 点 $A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3})$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A, B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する。このような r の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた r の値について，C を中心とする半径 r の円が，A, B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ。

(3)　A, B, C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する。このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ。　[2008]

解答例



(1)　$A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$ を中心とする半径 r の 2 つの円が接するのは，外接する場合のみなので，

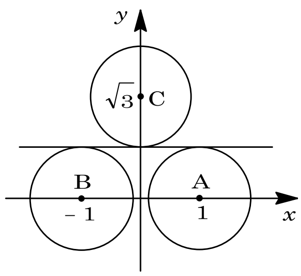
$$2r=2,\ \ r=1$$

(2)　$C(0,\ \sqrt{3})$ に対し，$AC=2$ より，C を中心とする半径 1 の円は，A を中心とする半径 1 の円に接する。

同様に，$BC=2$ より，C を中心とする半径 1 の円は，B を中心とする半径 1 の円に接する。

(3)　3 点 A, B, C を中心とする半径 s の 3 つの円を，それぞれ円 A, B, C とする。

さて，(2)より，$s=1$ のとき，3 円 A, B, C は互いに外接し，3 円に接する接線は存在しない。また，$s>1$ のときは，3 円 A, B, C は互いに交わり，3 円に接する接線は存在しない。また，これより，3 円に接する直線 l は，$s<1$ のときに存在する。

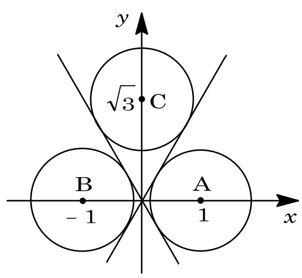


(i)　2 円 A, B の共通外接線に円 C が接するとき

2 円 A, B の共通外接線は x 軸に平行になり，$l: y=s$ とおくことができ，直線 l と円 C が接することより，

$$\sqrt{3}-s=s,\ \ s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，$l: y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。



(ii)　2 円 A, B の共通内接線に円 C が接するとき

まず，2 円 A, B の共通内接線は原点を通る。

ここで，x 軸の正の部分とのなす角を θ とすると，

$$\sin\theta=s,\ \ \tan\theta=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$$

直線 l は $y=\pm\dfrac{s}{\sqrt{1-s^2}}x$ すなわち $\pm sx-\sqrt{1-s^2}\,y=0$ とおくことができ，直線 l と円 C が接することより，

$$\frac{|-\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{3}\,|}{\sqrt{s^2+1-s^2}}=s,\quad 3(1-s^2)=s^2,\quad s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，$l: y=\pm\sqrt{3}x$ である。

コメント

(3)では，共通接線 l が 3 本存在しますが，対称性を考えると明らかでしょう。

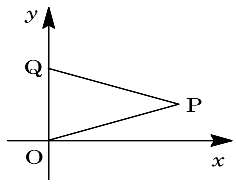
問　題

xy 平面において，O を原点，P を第 1 象限内の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 O，P を頂点とし，y 軸上に底辺をもつ二等辺三角形を考える。この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点 P の軌跡 T の方程式を求めよ。

(2) T を(1)で求めた軌跡とし，a を実数とする。このとき，軌跡 T と直線 $y=a(x-1)$ が第 1 象限内で交点をもつような，a の範囲を求めよ。　　[2007]

解答例



(1) 二等辺三角形の底辺を OQ，第 1 象限内の頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。ただし，$x>0,\ y>0$ である。

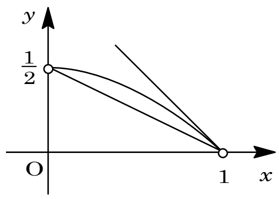
条件より，△OPQ の周の長さが 2 なので，

$$2\sqrt{x^2+y^2}+2y=2,\ \sqrt{x^2+y^2}=1-y$$

$y\leqq 1$ のもとで，両辺を 2 乗すると，$x^2+y^2=(1-y)^2$

まとめると，点 P の軌跡の方程式は，

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①$$



(2) まず，$y=a(x-1)$ ……②は，点$(1,\ 0)$を通り，傾きが a の直線を表す。

さて，①より $y'=-x$ となり，$x=1$ のとき $y'=-1$ である。すなわち，点$(1,\ 0)$における接線の傾きは-1となる。

また，②が点$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$を通るとき，$a=-\frac{1}{2}$ である。

したがって，①と②が第 1 象限内で交点をもつような a の範囲は，図より，

$$-1<a<-\frac{1}{2}$$

コメント

(2)の別解として，①と②の $x\neq 1$ の交点を求め，それが 0 より大，1 より小という不等式を立てるという方法もあります。

問　題

a を実数とし，$a>1$ とする。点 $\mathrm{P}(1,\ a)$ を通り，円 $C: x^2+y^2=1$ と接する 2 本の直線のうち，$x=1$ とは異なる直線を l とする。l と x 軸の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

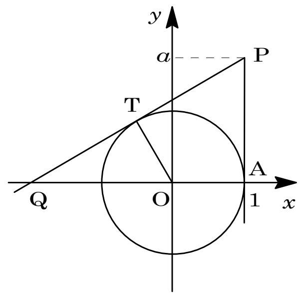
(1)　$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする。線分 QA の長さ L を a を用いて表せ。

(2)　三角形 PQA の面積を S とする。a が $a>1$ の範囲を動くとき，S の最小値とそのときの a の値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　円 C と l との接点を T とおくと，

$$\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PQ}}$$



そこで，$\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とすると，

$$\frac{1}{-q}=\frac{a}{\sqrt{(1-q)^2+a^2}},\quad \sqrt{(1-q)^2+a^2}=-aq$$

両辺を 2 乗して，$(a^2-1)q^2+2q-(a^2+1)=0$

$$\{(a^2-1)q+a^2+1\}(q-1)=0$$

$q\neq1$ より，$q=-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$

よって，$L=1-q=1+\dfrac{a^2+1}{a^2-1}=\dfrac{2a^2}{a^2-1}$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{QA}\cdot\mathrm{PA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2a^2}{a^2-1}\cdot a=\dfrac{a^3}{a^2-1}$ より，

$$S'=\frac{3a^2(a^2-1)-a^3\cdot2a}{(a^2-1)^2}=\frac{a^2(a^2-3)}{(a^2-1)^2}$$

a	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
S'		$-$	0	$+$
S		↘		↗

右表より，$a=\sqrt{3}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

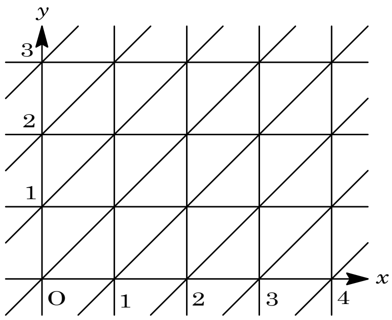
コメント

図形と式および微分法についての基本問題です。なお，(1)は，いろいろな解き方が考えられます。

問　題

xy 平面全体が右図のような直線の配列で埋められているとする。

このとき，点$\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$と$\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$について，A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし, m, n は負でない整数であるとする。



[2000]

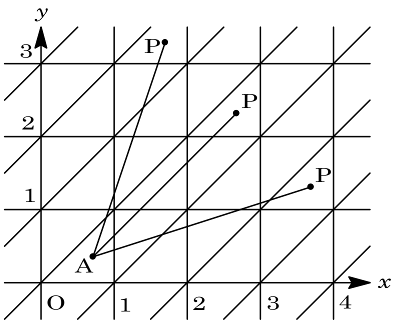
解答例

点$\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$から点$\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値は，線分 AP が横切る直線の本数に等しい。

まず，線分 AP は y 軸に平行な直線を m 本横切り, x 軸に平行な直線を n 本横切る。

また，$y=x$ に平行な直線については，m と n の大小関係によって横切る直線の本数が決まる。

そこで，$f(x,\ y)=y-x-k$ とし，条件を満たす整数 k の個数を求める。



(i)　$m=n$ のとき

線分 AP は，$y=x$ に平行な直線を横切らないので，求める直線の本数は$m+n$ となる。

(ii)　$m<n$ のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)>0$ かつ $f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)<0$ となるので,

$$n+\frac{1}{3}-m-\frac{2}{3}-k>0\,,\ \ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}-k<0$$

よって$-\dfrac{1}{3}<k<n-m-\dfrac{1}{3}$ となり，これを満たす整数 k は$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-m-1$ なので，$n-m$ 個存在する。

すなわち，線分 AP は，$n-m$ 本の $y=x$ に平行な直線を横切ることより，求める直線の本数は$m+n+n-m=2n$ となる。

(iii)　$m>n$ のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)<0$ かつ $f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)>0$ から，$n-m-\dfrac{1}{3}<k<-\dfrac{1}{3}$ となり，これを満たす整数 k は$k=n-m,\ n-m+1,\ \cdots,\ -1$ なので，$m-n$ 個存在する。

すなわち，線分 AP は，$m-n$ 本の $y=x$ に平行な直線を横切るので，求める直線の本数は $m+n+m-n=2m$ となる。

コメント

どこまで論理をかけばよいのか迷ってしまう問題です。時間があれば丁寧に，なければ直観的に，というのが妥当な線でしょう。

問　題

連立不等式$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{3}$，$x>3$，$y>3$の表す領域を D とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1)　Dを図示せよ。

(2)　D 内を$(x,\ y)$が動くとき$2x+y$のとる値の最小値を求めよ。また，そのときのx, yの値を求めよ。　[1999]

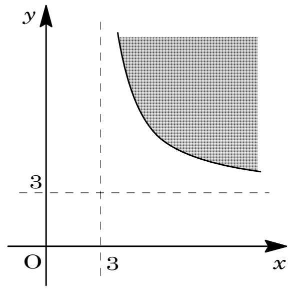
解答例

(1)　条件より，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{3}$……①，$x>3$……②，$y>3$……③

①より，$\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-3}{3x}$

②③を考えて，$y\geqq\dfrac{3x}{x-3}=3+\dfrac{9}{x-3}$………④

②③④を図示すると，右図のようになる。ただし，境界線は含む。



(2)　$2x+y=k$とおくと，$y=-2x+k$………⑤

(1)の図より，④の境界線$y=\dfrac{3x}{x-3}$と⑤が接するとき，kの値は最小となる。

$\dfrac{3x}{x-3}=-2x+k$より，$2x^2-(3+k)x+3k=0$………⑥

$$D=(3+k)^2-4\cdot2\cdot3k=0$$

$k^2-18k+9=0$で，図から$k>3$より，$k=9+6\sqrt{2}$

よって，$2x+y$のとる値の最小値は$9+6\sqrt{2}$となる。

このとき，⑥より$x=\dfrac{3+k}{4}=\dfrac{6+3\sqrt{2}}{2}$

⑤より$y=-2\cdot\dfrac{6+3\sqrt{2}}{2}+(9+6\sqrt{2})=3+3\sqrt{2}$

コメント

不等式で条件付けられた2変数関数の最小値を求める問題です。領域の考え方を利用してグラフ処理をするタイプで，頻出基本題の一つです。

問　題

三角形 ABC があり，$AB=2$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle CAB>\dfrac{\pi}{4}$ とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし，$\angle CAH=\alpha$ とする。辺 AB の中点を M とする。線分 AM 上に A と異なる点 X をとる。3 点 A, X, H を通る円の中心を P, 半径を r, $\angle PAH=\theta$ とする。この円と直線 AC との交点で, A と異なる点を Y とする。次の問いに答えよ。

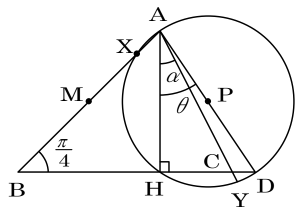
(1)　$\cos\theta$ を r を用いて表せ。

(2)　$AX+AY$ を r と α を用いて表せ。

(3)　X のとり方によらず，$AX+AY$ がつねに一定の値になるときの α の値を求めよ。

[2003]

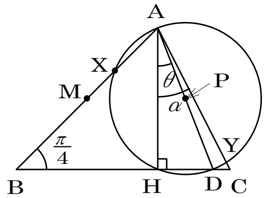
解答例



(1)　まず, 直線 BC と 3 点 A, X, H を通る円との交点を D とすると，$\angle AHD=\dfrac{\pi}{2}$ より，AD は円の直径となり，$AD=2r$ である。

また，$AH=AB\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ なので，

$$\cos\theta=\frac{AH}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2r}$$



(2)　円の直径が AD より，$\angle AXD=\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$AX=AD\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2r\left(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}r(\cos\theta-\sin\theta)$$

次に，$\angle AYD=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha\leqq\theta$ のとき，

$$AY=AD\cos(\theta-\alpha)=2r(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$$

また，$\alpha>\theta$ のときは，$AY=AD\cos(\alpha-\theta)$ となるが，$\cos(\alpha-\theta)=\cos(\theta-\alpha)$ より，$\alpha\leqq\theta$ のときと一致する。

ここで, (1)より，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{2}{4r^2}}=\dfrac{\sqrt{4r^2-2}}{2r}$ なので，

$$AX+AY=\sqrt{2}r\left(\frac{\sqrt{2}}{2r}-\frac{\sqrt{4r^2-2}}{2r}\right)+2r\left(\frac{\sqrt{2}}{2r}\cos\alpha+\frac{\sqrt{4r^2-2}}{2r}\sin\alpha\right)$$
$$=1-\sqrt{2r^2-1}+\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{4r^2-2}\sin\alpha$$
$$=1+\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{2r^2-1}(\sqrt{2}\sin\alpha-1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　AX + AY が X の位置によらず一定である条件は，(＊)が r の値によらず一定であることに等しいので，

$$\sqrt{2}\sin\alpha - 1 = 0\,,\ \ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ である。

コメント

位置関係は少々複雑ですが，アバウトに考えても差し支えないように問題が構成されています。

問　題

$|\overrightarrow{AB}|=2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{PM}|^2$ を内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ を用いて表せ。

(2) $\angle AGB=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ の値を求めよ。

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle ABG$ の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle ABG<\pi$ とする。　[2019]

解答例＋映像解説

(1) △PAB の AB の中点 M に対し，$\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$ より，

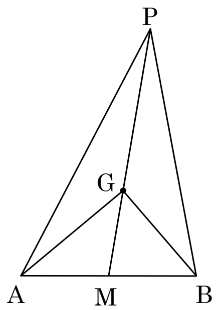
$$|\overrightarrow{PM}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{PA}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+|\overrightarrow{PB}|^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PAB に余弦定理を適用すると，$|\overrightarrow{AB}|=2$ から，

$$4=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$|\overrightarrow{PM}|^2=\dfrac{1}{4}(2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+4+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})$ となり，

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+1\cdots\cdots\cdots③$$



(2) $\angle AGB=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，△GAB は斜辺が $AB=2$ の直角三角形より，

$$MG=MA=MB=1$$

点 G は△PAB の重心なので，$PM=3GM=3$ となり，③から，

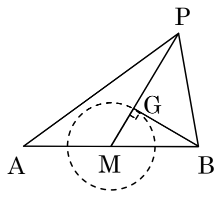
$$9=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+1,\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=8$$

(3) △PAB において，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，③から，

$$|\overrightarrow{PM}|^2=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4},\ |\overrightarrow{PM}|=\frac{3}{2}$$

すると，$GM=\dfrac{1}{3}PM=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ となり，点 G は点 M を中心として，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を描く。

これより，$\angle ABG$ が最大になるのは，右図のように，BG がこの円に接するときである。このとき，$MB=1$，$MG=\dfrac{1}{2}$ から $\sin\angle ABG=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle ABG=\dfrac{\pi}{6}$ である。



コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。この問題にはいろいろな解法があり，たとえば，(1)では中線定理の利用，(2)では $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=0$ を変形する方法，(3)では座標系の設定などが考えられます。

問　題

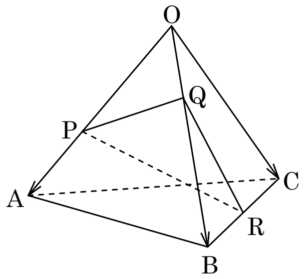
t を $0<t<1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P, 辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q, 辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ。

(3)　t が(2)で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説



(1)　$\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=1-t:t$，$\mathrm{OQ}:\mathrm{QB}=t:1-t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{a}-t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　正四面体 OABC は 1 辺の長さが 1 から，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

ここで，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ となり，(1)から，

$$(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1}{2}-t\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot1^2-\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}=0$$

まとめると，$6t^2-7t+2=0$ から $(3t-2)(2t-1)=0$ となり，$0<t<1$ より，

$$t=\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$$

(3)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=(1-t)^2\cdot1^2-2t(1-t)\cdot\dfrac{1}{2}+t^2\cdot1^2=3t^2-3t+1$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\cdot1^2+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}$$

(i)　$t=\dfrac{2}{3}$ のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=\dfrac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\dfrac{7}{36}$ となり，このとき，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{6}=\dfrac{\sqrt{21}}{36}$ である。

(ii)　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき

$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=\dfrac{1}{4}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=\dfrac{1}{4}$ となり，このとき，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ である。

コメント

空間ベクトルの図形への応用に関する基本的な問題です。

問　題

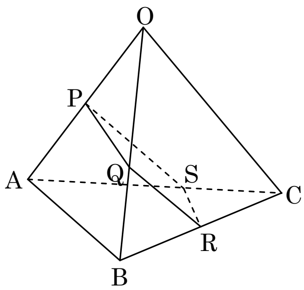
四面体 OABC において, P を辺 OA の中点, Q を辺 OB を 2:1 に内分する点, R を辺 BC の中点とする。P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ。

(3)　四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき, $|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ。[2016]

解答例＋映像解説



(1)　P は OA の中点, Q は OB を 2:1 に内分する点, R は BC の中点であり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点 S に対し, $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=k:1-k$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\vec{a}+k\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また, s, t を実数として, (1)の結果より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\Big(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\Big)+t\Big(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\Big)$$

$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\Big)\vec{a}+\Big(\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\Big)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立なので,

$$1-k=\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots③,\quad 0=\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots④,\quad k=\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

③⑤より, $1-\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{s}{2}-\dfrac{t}{2}$ となり, $s=-1$

④に代入すると, $-\dfrac{2}{3}+\dfrac{t}{2}=0$ から $t=\dfrac{4}{3}$ となり, ⑤から $k=\dfrac{2}{3}$ なので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$$

(3)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC に対し,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

さて, $\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$ より, $|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|=\dfrac{1}{3}|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|$ となり,

$$|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=1+4+4-4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=5$$

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ である。

コメント

空間ベクトルの四面体への応用について，参考書の例題の掲載されるような典型題です。

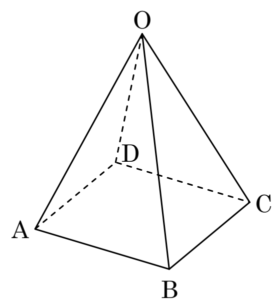
問　題

空間において，原点 O を通らない平面α上に 1 辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表せ。

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$のとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$が，平面$\alpha$と垂直であることを示せ。　[2014]

解答例＋映像解説



(1) 正方形 ABCD に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$とおくと，①より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

すると，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2)=0\cdots\cdots\cdots②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\cdots\cdots\cdots⑤$

よって，②⑤より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は平面$\alpha$上の平行でない 2 つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と垂直になるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は平面$\alpha$と垂直である。

コメント

(2)を図形的に考えると，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$から点 O は線分 AB の垂直二等分面上，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$から線分 BC の垂直二等分面上，すると点 O はこの 2 つの平面の交線上の点となります。ここで，正方形 ABCD の中心 H とおくと$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$は平面$\alpha$に垂直になり，また$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4\overrightarrow{\mathrm{OH}}$であることから題意成立です。ただ，どちらにせよ，不思議なことは「1 辺の長さ 1 の正方形」という条件をストレートに利用していないことです。

問　題

空間において，2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を l とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を l 上に，点 Q を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　点 R を l 上に，点 S を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。

(3)　R, S を(2)で求めた点とする。点 T を l 上に，点 U を z 軸上にとる。また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする。$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$ より，k を実数として，直線 l は，

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 0)+k(-1,\ -1,\ 0)=(-k,\ 1-k,\ 0)$$

さて，l 上に点 P，z 軸上に点 Q とると，p，q を実数として，$\mathrm{P}(-p,\ 1-p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ q)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(p,\ p-1,\ q)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=l(3,\ 1,\ -1)$　(l は実数)から，

$$p=3l,\ p-1=l,\ q=-l$$

すると，$l=\dfrac{1}{2}$，$p=\dfrac{3}{2}$，$q=-\dfrac{1}{2}$ から，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ となる。

(2)　l 上に点 R，z 軸上に点 S とると，r，s を実数として，$\mathrm{R}(-r,\ 1-r,\ 0)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ s)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(r,\ r-1,\ s)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\vec{z}=(0,\ 0,\ 1)$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\vec{z}=0$ から，

$$-r-r+1=0,\ s=0$$

すると，$r=\dfrac{1}{2}$，$s=0$ から，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ 0)$ となる。

(3)　l 上に点 T，z 軸上に点 U とると，t，u を実数として，$\mathrm{T}(-t,\ 1-t,\ 0)$，$\mathrm{U}(0,\ 0,\ u)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=(t,\ t-1,\ u)$ となる。

ここで，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)\neq\vec{0}$ は $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないので，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}\neq 0$ から，

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\neq 0,\ a-b\neq 0$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ は $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=m(a,\ b,\ c)$　(m は実数)から，

$$t=ma,\ t-1=mb,\ u=mc$$

すると，$m(a-b)=1$ より，$m=\dfrac{1}{a-b}$ となり，$t=\dfrac{a}{a-b}$，$u=\dfrac{c}{a-b}$ から，

$$\mathrm{T}\left(-\frac{a}{a-b},\ -\frac{b}{a-b},\ 0\right),\ \mathrm{U}\left(0,\ 0,\ \frac{c}{a-b}\right)$$

コメント

同じような問題が 3 題も続きます。上の解答例は，意味を考えずに，ただ計算を行ったにすぎません。

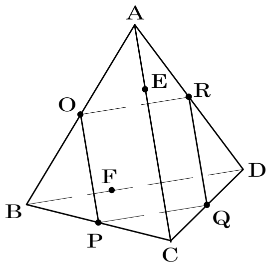
問　題

四面体 ABCD において，辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を用いて表せ。

(2)　辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき，線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。　[2007]

解答例



(1)　点 O, P, Q, R は，それぞれ辺 AB, BC, CD, DA の中点なので，中点連結定理を用いると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

これより，四角形 OPQR は平行四辺形となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

(2)　線分 EF の中点を M とする。また，$0<t<1$，$0<s<1$ として，$\mathrm{AE}:\mathrm{EC} = t:1-t$，$\mathrm{BF}:\mathrm{FD} = s:1-s$ とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BD}})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) + \frac{1}{2}t\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}t\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{1}{2}s\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

よって，点 M は 3 点 O, P, R を含む平面上にある。

さらに，(1)より，4 点 O, P, Q, R は同一平面上にあることから，点 M は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にある。

コメント

(1)で求めた関係は，ベクトルの計算だけでも導けますが，上記のように，中点連結定理を利用した方が単純明快です。

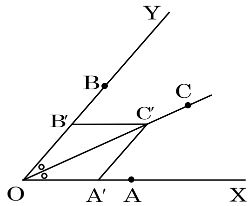
問　題

平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり，$\angle\text{XOY} < 180°$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a} = \overrightarrow{\text{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\text{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 C が $\angle\text{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{\text{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c} = t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2)　$\angle\text{XOY}$ の二等分線と $\angle\text{XAB}$ の二等分線の交点を P とおくとき，$\vec{p} = \overrightarrow{\text{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および 3 辺の長さ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|\vec{b} - \vec{a}|$ を用いて表せ。　[2006]

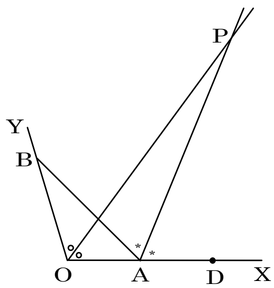
解答例



(1)　$\overrightarrow{\text{OA}'} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{\text{OB}'} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とおくと，$\overrightarrow{\text{OA}'}$，$\overrightarrow{\text{OB}'}$ は，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルである。

これから，$\overrightarrow{\text{OA}'} + \overrightarrow{\text{OB}'} = \overrightarrow{\text{OC}'}$ とすると，線分 OC′ は OA′，OB′ を隣り合う 2 辺とするひし形の対角線となる。

よって，t を実数として，$\overrightarrow{\text{OC}} = t\overrightarrow{\text{OC}'} = t(\overrightarrow{\text{OA}'} + \overrightarrow{\text{OB}'})$ である点 C は，$\angle\text{XOY}$ の二等分線上にある。



(2)　点 P は $\angle\text{XOY}$ の二等分線上にあるので，(1)より，

$$\overrightarrow{\text{OP}} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \cdots\cdots\cdots ①$$

また，点 P は $\angle\text{XAY}$ の二等分線上にあるので，OD の中点を A として，点 D を定義すると，s を実数として，(1)より，

$$\overrightarrow{\text{OP}} = \overrightarrow{\text{OA}} + s\left(\frac{\overrightarrow{\text{AD}}}{|\overrightarrow{\text{AD}}|} + \frac{\overrightarrow{\text{AB}}}{|\overrightarrow{\text{AB}}|}\right)$$

$$= \vec{a} + s\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{|\vec{b} - \vec{a}|}\right) = \left\{1 + s\left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|}\right)\right\}\vec{a} + \frac{s}{|\vec{b} - \vec{a}|}\vec{b} \cdots\cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$\frac{t}{|\vec{a}|} = 1 + s\left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|}\right) \cdots\cdots\cdots ③,\quad \frac{t}{|\vec{b}|} = \frac{s}{|\vec{b} - \vec{a}|} \cdots\cdots\cdots ④$$

④より $s = \dfrac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{b}|}t$ となり，③に代入して，

$$\frac{t}{|\vec{a}|}=1+\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{b}|}\left(\frac{1}{|\vec{a}|}-\frac{1}{|\vec{b}-\vec{a}|}\right)t,\ \left(\frac{1}{|\vec{a}|}+\frac{1}{|\vec{b}|}-\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)t=1$$

よって，$t=\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{b}-\vec{a}|}$ となり，①から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{b}-\vec{a}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=\frac{1}{|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{b}-\vec{a}|}(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})$$

コメント

角の二等分線をひし形の対角線として表現する有名問題です。なお，(2)では傍心のベクトル表示を求めています。

問　題

O を原点とする空間の 3 点 $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ 2,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$ がある。

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA}$$

を満たす点を D とする。ただし，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

(1) D の座標を求めよ。

(2) 2 つの実数 s と t に対して，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ を満たす点を P とする。t を固定して考えたとき，$|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s を t を用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s と t の値を求めよ。

(4) (3)で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする。s_0 と t_0 に対し，P_0 を $\overrightarrow{OP_0}=s_0\overrightarrow{OA}+t_0\overrightarrow{OB}$ を満たす点とする。

$$\overrightarrow{OP_0}=\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OD}|^2}\right)\overrightarrow{OD}$$

となることを示せ。 [2005]

解答例

(1) $\overrightarrow{OA}=(1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{OB}=(1,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{OC}=(0,\ 0,\ 1)$ から，

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{OB}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{OC}|=1$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1+2=3,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$$

すると，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,\ 1,\ -1)$ なので，D の座標は $D(0,\ 1,\ -1)$ である。

(2) $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ より，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CP}|^2&=|s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|^2\\&=s^2|\overrightarrow{OA}|^2+t^2|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+2st\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-2t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-2s\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=3s^2+5t^2+1+6st-2s=3s^2+(6t-2)s+5t^2+1\\&=3\left(s+\frac{3t-1}{3}\right)^2+2t^2+2t+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

よって，$s=-\dfrac{3t-1}{3}$ のとき，$|\overrightarrow{CP}|^2$ は最小になる。

(3) (2)より，$|\overrightarrow{CP}|^2=3\left(s+\dfrac{3t-1}{3}\right)^2+2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}$ となり，$|\overrightarrow{CP}|^2$ が最小になるのは，$s+\dfrac{3t-1}{3}=0$ かつ $t+\dfrac{1}{2}=0$ のときである。

すなわち，$s=\dfrac{5}{6}$，$t=-\dfrac{1}{2}$ のときである。

(4)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s_0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_0\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

また，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}=-\dfrac{1}{2}$ から，

$$\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

コメント

問題文からはいかめしい雰囲気が漂っていますが，内容はベクトルの基本題です。

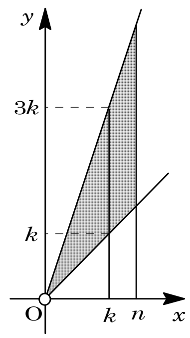
問　題

正の整数 n に対して，連立不等式 $0<x\leqq n$, $x\leqq y\leqq 3x$ の表す領域を D_n とする。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D_n 内にある格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の個数を S_n とする。S_n を n で表せ。ただし，格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数であるような点のことである。

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を始点とし，領域 D_n 内の格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{v_3}=(1,\ 3)$ と 0 以上の整数 m_1，m_2，m_3 を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ と表せることを証明せよ。 [2002]

解答例



(1) 領域 D_n 内において，$x=k$ $(1\leqq k\leqq n)$ 上の格子点の個数は，$3k-k+1=2k+1$ なので，D_n 内にある格子点の総数は，

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n(n+2)$$

(2) 領域 D_n 内における $x=k$ $(1\leqq k\leqq n)$ 上の格子点について，題意の成立することを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $k=1$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$ である。

このとき，この $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，それぞれ $(1,\ 1)=1\cdot\overrightarrow{v_1}+0\cdot\overrightarrow{v_2}+0\cdot\overrightarrow{v_3}$，$(1,\ 2)=0\cdot\overrightarrow{v_1}+1\cdot\overrightarrow{v_2}+0\cdot\overrightarrow{v_3}$，$(1,\ 3)=0\cdot\overrightarrow{v_1}+0\cdot\overrightarrow{v_2}+1\cdot\overrightarrow{v_3}$ と表すことができる。

(ii) $k=l$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(l,\ l),\ (l,\ l+1),\ \cdots,\ (l,\ 3l)$ である。

ここで，この $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が，すべて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ と表せると仮定する。ただし，m_1，m_2，m_3 は 0 以上の整数とする。

さて，$k=l+1$ のときは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(l+1,\ l+1),\ (l+1,\ l+2),\ \cdots,\ (l+1,\ 3l+1)$，$(l+1,\ 3l+2)$，$(l+1,\ 3l+3)$ であるが，

$$(l+1,\ l+1)=(l,\ l)+\overrightarrow{v_1},\ (l+1,\ l+2)=(l,\ l+1)+\overrightarrow{v_1},\ \cdots,$$
$$(l+1,\ 3l+1)=(l,\ 3l)+\overrightarrow{v_1},\ (l+1,\ 3l+2)=(l,\ 3l)+\overrightarrow{v_2},$$
$$(l+1,\ 3l+3)=(l,\ 3l)+\overrightarrow{v_3}$$

これより，$k=l+1$ のときも，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ の形で表せる。

(i)(ii)より，領域 D_n 内における格子点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ と表せる。

コメント

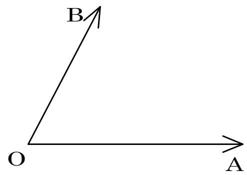
(2)も(1)と同じように，直線 $x=k$ 上の格子点に注目して，証明をしてみました。

問　題

3 点 O, A, B は，一直線上にない点とし，$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ とする。また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P を $\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$（$t$ は実数）を満たす点とする。このとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t で表せ。

(2)　点 Q を $\overrightarrow{OQ}=2s\overrightarrow{OA}$（$s$ は実数）を満たす点とする。P と Q の中点を M とする。t, s が $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$ を満たしながら変化するとき，点 M の存在する範囲を図示せよ。



[2001]

解答例

(1)　$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$ より，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\vec{b}+t(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{b})=\vec{b}+2t(\vec{a}+\vec{b})$$

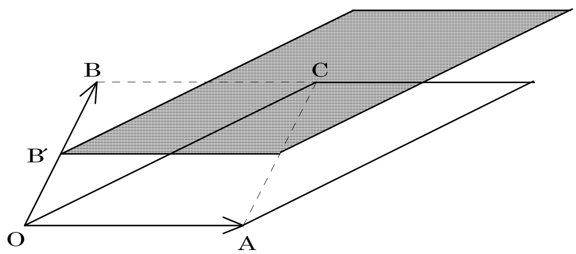
(2)　PQ の中点が M より，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=\frac{1}{2}\{\vec{b}+2t(\vec{a}+\vec{b})+2s\vec{a}\}=\frac{1}{2}\vec{b}+t(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{a}$$

ここで，$\frac{1}{2}\vec{b}=\overrightarrow{OB'}$，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB'}+t\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OA}$$

すると, $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$ より，点 M は OA, OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の内部または辺上を $\overrightarrow{OB'}$ の方向に平行移動した領域に存在する。図示すると右図の網点部となる。



コメント

神戸大頻出のベクトルと領域の融合問題です。本年度は，基本中の基本というレベルです。

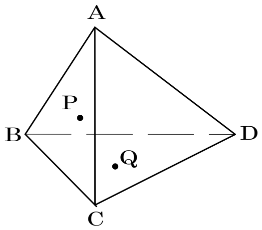
問　題

四面体 ABCD を考える。

面 ABC 上の点 P と面 BCD 上の点 Q について,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおくとき, $x : y = s : t$ ならば, 線分 AQ と DP が交わることを示せ。　[2000]



解答例

$x : y = s : t$ より, $(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のとき, $\dfrac{s}{x} = \dfrac{t}{y}$ と変形すると, $k>0$ として,

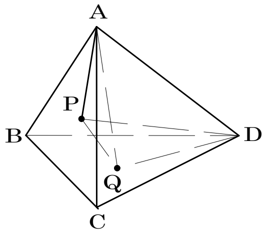
$$s = kx,\quad t = ky$$

すると, 条件より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}} = k(x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

よって, Q は 3 点 A, P, D で決まる平面上にあり, 四角形 APQD の 2 本の対角線である線分 AQ と DP は交わる。



また, $x = 0$, $y \neq 0$ のとき, $s = 0$ となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = y\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AC}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって, P は辺 AC 上の点, Q は面 BCD と面 ACD の交線である辺 CD 上の点となり, 線分 AQ と DP は面 ACD 上で交わる。

さらに, $y = 0$, $x \neq 0$ のとき, $t = 0$ となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって, P は辺 AB 上の点, Q は面 BCD と面 ABD の交線である辺 BD 上の点となり, 線分 AQ と DP は面 ABD 上で交わる。

なお, $(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときは, 点 P は点 A と一致し, 任意の $(s,\ t)$ に対して線分 AQ と DP は点 A で交わる。

以上より, $x : y = s : t$ ならば, 線分 AQ と DP は交わる。

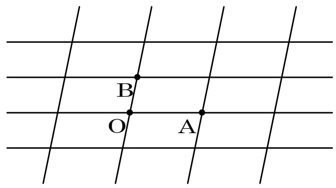
コメント

$x : y = s : t$ という式を見たとき, 場合分けをしようか, x, y の値が明らかに正としようか迷いました。前者の立場で解を作りましたが, 後者でもよかったかもしれません。

問　題

合同な平行四辺形を平面にしきつめて，図のように 2 組の平行線からなる格子を作り，その各交点を格子点と呼ぶ。

図のような 3 つの格子点 O, A, B について $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ はすべて整数であるとする。このとき，どの 2 つの格子点 P, Q に対しても $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は整数となることを示せ。　[1999]



解答例

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$………①

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ はすべて整数なので，①より $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は整数となる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であり，2 点 P, Q は格子点なので，s, t, u, v を整数として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|(u-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(v-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$=(u-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2(u-s)(v-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(v-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の右辺の各項はすべて整数なので，任意の格子点 P, Q に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は整数となる。

コメント

不気味なくらい簡単に証明ができてしまいます。何か「ひとひねり」あるのではないかと勘ぐってしまいます。

問　題

座標空間内の 8 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 1), Q(2, 0, 1), R(2, 2, 1), S(0, 2, 1) を頂点とする直方体を考える。次の各問いに答えよ。

(1) $\mathrm{D}=(x,\ y,\ 1)$ を面 PQRS 上の点とするときベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を x, y およびベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$がベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$と直交するための条件を x, y を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$である D の中で$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$が最小となるような D を与える x, y の値を求めよ。 [1998]

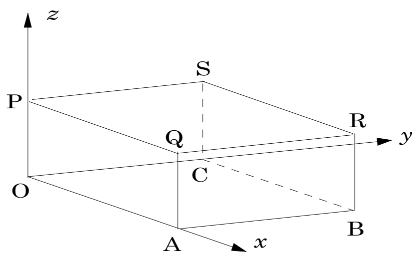
解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$ とおく。

$$(x,\ y,\ 1)=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+(0,\ 0,\ 1)$$

$$x=2s,\ \ y=2t\ \cdots\cdots\cdots①$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{x}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(2,\ 0,\ 1)-(0,\ 2,\ 0)=(2,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$より, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$

よって, $2x-2y+1=0$

(3) (2)より, $y=x+\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=x^2+y^2+1=x^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1=2x^2+x+\frac{5}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

ここで, $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$ で①より, $0\leqq x\leqq 2$, $0\leqq y\leqq 2\ \cdots\cdots\cdots③$

すると, $x=0$ のとき$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$は最小となるが, このとき②から $y=\dfrac{1}{2}$ となり, これは③をみたす。よって, $(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$とき$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$は最小値をとる。

コメント

本問の(2)の設問「ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$がベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$と直交する」というのは, 高校数学の立場に翻訳すると「ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$がベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$と垂直である」ということでしょう。

問　題

次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を$\{a_n\}$とする。

1，3，4，1，3，4，1，3，4，…

すなわち，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=4$で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n=a_{n-3}$とする。この数列の初項から第 n 項までの和をS_nとする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_nを求めよ。

(2)　$S_n=2019$となる自然数 n は存在しないことを示せ。

(3)　どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数 n が存在することを示せ。

[2019]

解答例＋映像解説

(1)　1，3，4 を繰り返し並べて得られる周期 3 の数列$\{a_n\}$に対し，この初項から第 n 項までの和をS_nとする。ここで，$S_3=8$に注意して，lを 0 以上の整数とすると，

(i)　$n=3l+1$のとき　$S_{3l+1}=8l+1$より，$S_n=8\cdot\frac{n-1}{3}+1=\frac{8}{3}n-\frac{5}{3}$

(ii)　$n=3l+2$のとき　$S_{3l+2}=8l+4$より，$S_n=8\cdot\frac{n-2}{3}+4=\frac{8}{3}n-\frac{4}{3}$

(iii)　$n=3l+3$のとき　$S_{3l+3}=8(l+1)$より，$S_n=8\cdot\frac{n-3}{3}+8=\frac{8}{3}n$

(2)　$2019=8\times252+3$なので，以下$\bmod 8$で記すと，$2019\equiv3$である。

さて，(1)から，$n=3l+1$のとき$S_n\equiv1$，$n=3l+2$のとき$S_n\equiv4$，$n=3l+3$のとき$S_n\equiv0$である。

これより，$S_n=2019$となる自然数 n は存在しない。

(3)　まず，任意の自然数 k に対して，k とk^2を 8 で割った余りについて表にまとめると，右のようになり，

$$k^2\equiv0,\ 1,\ 4\pmod 8$$

k	k^2
0	0
1	1
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
7	1

また，(1)より，lを任意の 0 以上の整数とするとき，

$$S_{3l+1}=8l+1,\ S_{3l+2}=8l+4,\ S_{3l+3}=8(l+1)$$

すなわち，S_nは，8 で割ったときの余りが，1，4，0 であるすべての自然数を表す。

以上より，どのような自然数 k に対しても，$S_n=k^2$となる自然数 n が存在する。

コメント

周期数列が題材の整数問題です。(2)は 3 つの場合について方程式を立ててもよいのですが，(3)との関連も考え，8 で割った余りに着目して処理をしています。

問　題

約数，公約数，最大公約数を次のように定める。

・ 2 つの整数 a, b に対して，$a=bk$ を満たす整数 k が存在するとき，b は a の約数という。

・ 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という。

・ 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という。

以下の問いに答えよ。

(1)　a, b, c, p は 0 でない整数で $a=pb+c$ を満たしているとする。

(i)　$a=18$，$b=30$，$c=-42$，$p=2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ。

(ii)　a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする。M と N は等しいことを示せ。ただし，a, b, c, p は 0 でない任意の整数とする。

(2)　自然数の列 $\{a_n\}$ を，$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$a_1=3$，$a_2=4$ で定める。

(i)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(ii)　a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iii)　a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　(i)　$a=18=2\times3^2$ と $b=30=2\times3\times5$ の公約数の集合 S は，

$$S=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

また，$b=30=2\times3\times5$ と $c=-42=-2\times3\times7$ の公約数の集合 T は，

$$T=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

(ii)　a, b, c, p は 0 でない任意の整数，そして a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とし，$a=pb+c$ ……①を満たしている。

まず，N は b と c の公約数で，①から N は a の約数でもある。すると，N は a と b の公約数となり，a と b の最大公約数 M と比べると，$N\leqq M$ である。

また，M は a と b の公約数で，①から $c=a-pb$ となるので，M は c の約数でもある。すると，M は b と c の公約数となり，b と c の最大公約数 N と比べると，$M\leqq N$ である。

したがって，$N\leqq M$ かつ $M\leqq N$ から，$M=N$ である。

(2)　(i)　0 でない任意の整数 l と m に対して，その最大公約数を $G(l,\ m)$ で表す。

さて，$a_1=3$，$a_2=4$，$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる自然数の列 $\{a_n\}$ に対して，帰納的に $a_n\neq0$ なので，(1)から $G(a_{n+2},\ a_{n+1})=G(a_{n+1},\ a_n)$

$$G(a_{n+1},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=G(a_3,\ a_2)=G(a_2,\ a_1)=G(4,\ 3)=1$$

(ii)　$a_{n+4}=6a_{n+3}+a_{n+2}=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}=37a_{n+2}+6a_{n+1}$

ここで，$6a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ から，

$$a_{n+4}=37a_{n+2}+(a_{n+2}-a_n)=38a_{n+2}-a_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

(iii)　②に(1)の結果を適用すると，$G(a_{n+4},\ a_{n+2})=G(a_{n+2},\ a_n)$ である。

ここで，$a_3=6a_2+a_1=27$，$a_4=6a_3+a_2=166$ なので，

(a)　n が奇数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_3,\ a_1)=G(27,\ 3)=3$$

(b)　n が偶数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_4,\ a_2)=G(166,\ 4)=2$$

コメント

ユークリッドの互除法に関する基本を確認した後，それを漸化式に適用する問題です。細かい誘導のため，方針に迷いはないでしょう。

問　題

a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする。次の条件(＊)を考える。

(＊)　3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(2)　$a>b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(3)　条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1)　条件より，a, b, c は 1 以上 7 以下の自然数である。

さて，$a=b>c$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ となり，$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は，すべて満たされている。

すると，(＊)を満たす条件は，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ であり，$a=b>c$ から $\dfrac{2}{a}>\dfrac{1}{c}$ となる。

これより，$(a,\ c)$ の条件は，$a>c$ かつ $a<2c$ より，$c<a<2c$ となり，

$(a,\ c)=(3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (7,\ 4),$
$(6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$

したがって，(＊)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は 9 個である。

(2)　$a>b>c$ のとき，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ となり，$a+b>c$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は，すべて満たされている。

すると，(＊)を満たす条件は，$b+c>a$ ……①かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ ……②である。

まず，①より $b>a-c$，②より $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-c}{ac}$ すなわち $b<\dfrac{ac}{a-c}$ となり，

$$a-c<b<\frac{ac}{a-c}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$a>b>c$ から $2\leqq b\leqq 6$，また $a-c\geqq 2$ に注意すると，$3\leqq b\leqq 6$ となる。

(i)　$b=3$ のとき　$a>3>c$ であり，③より $a-c=2$ かつ $ac>6$ となり，
$(a,\ c)=(4,\ 2)$

(ii)　$b=4$ のとき　$a>4>c$ であり，③より $a-c<4<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>8$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 3)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>12$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3)$

(iii) $b=5$のとき　$a>5>c$であり，③より$a-c<5<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$かつ$ac>10$のとき　$(a,\ c)=(6,\ 4)$

(b)　$a-c=3$かつ$ac>15$のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3),\ (7,\ 4)$

(c)　$a-c=4$かつ$ac>20$のとき　$(a,\ c)=(7,\ 3)$

(iv) $b=6$のとき　$a>6>c$であり，③より$a-c<6<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$かつ$ac>12$のとき　$(a,\ c)=(7,\ 5)$

(b)　$a-c=3$かつ$ac>18$のとき　$(a,\ c)=(7,\ 4)$

(c)　$a-c=4$かつ$ac>24$のとき　この場合を満たす$(a,\ c)$は存在しない。

(d)　$a-c=5$かつ$ac>30$のとき　この場合を満たす$(a,\ c)$は存在しない。

(i)～(iv)より，(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は9個である。

(3)　まず$a>b=c$のとき，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$となり，$a+b>c$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$は，すべて満たされている。

すると，(＊)を満たす条件は，$b+c>a$であり，$a>b=c$から$2c>a$となる。

これより，$(a,\ c)$の条件は，$a>c$かつ$a<2c$より$c<a<2c$となり，(1)の結果から，(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は9個である。

次に，$a=b=c$のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$となり，(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は明らかに7個である。

以上より，a, b, cの大小関係も考えて，条件(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組の個数は，

$$9\times3+9\times3!+9\times3+7=115$$

コメント

忍耐強く解いていくタイプの問題です。特に，(2)については，解答例ではbの値で場合分けをしましたが，aやcの値でもさほど変わりません。途中で浮気心が出てしまうとマズイことになります。

問　題

$m,\ n\ (m<n)$ を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ とおく。3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a^2+b^2=c^2$ を示せ。

(2)　r を $m,\ n$ を用いて表せ。

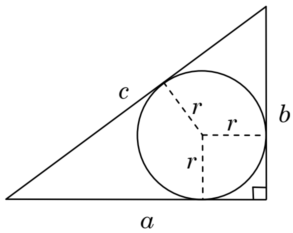
(3)　r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4)　r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　$a^2+b^2=(n^2-m^2)^2+(2mn)^2=n^4+2m^2n^2+m^4=(n^2+m^2)^2=c^2$

(2)　(1)より，3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ の三角形は，斜辺の長さが c の直角三角形なので，内接円の半径を r とすると，



$$(a-r)+(b-r)=c$$

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(n^2-m^2+2mn-n^2-m^2)$$

$$=mn-m^2=m(n-m)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　まず，三角形の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}ab=mn(n^2-m^2)$

r が素数のとき，$(*)$より，$(m,\ n-m)=(1,\ r)$，$(r,\ 1)$

(i)　$(m,\ n-m)=(1,\ r)$ のとき　$n-1=r$ から，$n=r+1$

$$S=1\cdot(r+1)\{(r+1)^2-1\}=r(r+1)(r+2)$$

(ii)　$(m,\ n-m)=(r,\ 1)$ のとき　$n-r=1$ から，$n=r+1$

$$S=r(r+1)\{(r+1)^2-r^2\}=r(r+1)(2r+1)$$

(4)　(i)　$S=r(r+1)(r+2)$ のとき

S は連続する 3 つの自然数の積なので，6 の倍数である。

(ii)　$S=r(r+1)(2r+1)$ のとき

$$S=r(r+1)(r-1+r+2)=(r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)$$

S は連続する 3 つの自然数の積の和なので，6 の倍数である。

(i)(ii)より，いずれの場合も，S は 6 で割り切れる。

コメント

直角三角形の内接円を題材にした頻出問題です。(4)の(ii)は式変形で示しましたが，普通に，3 で割った余りに着目して場合分けをする方法でも簡単に示せます。

問　題

a は正の無理数で，$X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$，$Y = a^2 - 2a$ を考えると，X と Y はともに有理数である。以下の問いに答えよ。

(1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2) X と Y の値を求めよ。

(3) a の値を求めよ。ただし，素数の平方根は無理数であることを用いてよい。

[2011]

解答例

(1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ると，

$$x^3 + 3x^2 - 14x + 6 = (x^2 - 2x)(x + 5) - 4x + 6$$

よって，商は $x + 5$，余りは $-4x + 6$ である。

(2) (1)より，$X = Y(a + 5) - 4a + 6 \cdots\cdots(*)$となり，

$$(-X + 5Y + 6) + (Y - 4)a = 0$$

X と Y は有理数, a は無理数から，$-X + 5Y + 6 = Y - 4 = 0$

よって，$X = 26$，$Y = 4$

(3) $Y = 4$ より，$a^2 - 2a - 4 = 0$ となり, $a > 0$ から，$a = 1 + \sqrt{5}$

このとき, (*)から，$X = 26$ となる。

よって，$a = 1 + \sqrt{5}$

コメント

有理数と無理数を題材に，除法に関する等式をからめた問題です。計算も穏やかで文系風ですが，内容は受験生の意表を突くものです。

問　題

p を 3 以上の素数, a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい。

(1)　$a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(2)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(3)　a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。　[2010]

解答例

(1)　条件から, ab が p の倍数より, a または b は p の倍数である。

ここで, a, b の一方が p の倍数, 他方が p の倍数でないとき, $a+b$ は p の倍数ではない。また, a, b がともに p の倍数であるとき, $a+b$ は p の倍数である。

したがって, $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数である。

(2)　まず, $a+b$ と a^2+b^2 に対して,

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)\ \cdots\cdots\cdots①$$

$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるので, ①より, $2ab$ は p の倍数である。

p は 3 以上の素数から, 2 と p は互いに素となるので, ab は p の倍数である。

よって, (1)の結果から, a と b はともに p の倍数である。

(3)　まず, a^2+b^2 と a^3+b^3 に対して,

$$ab(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)-(a^3+b^3)\ \cdots\cdots\cdots②$$

a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるので, ②より, $ab(a+b)$ は p の倍数である。すると, 条件より, ab または $a+b$ が p の倍数である。

(i)　ab が p の倍数であるとき

①より, $(a+b)^2$ は p の倍数となり, $a+b$ は p の倍数である。

(1)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(ii)　$a+b$ が p の倍数であるとき

(2)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(i)(ii)より, いずれの場合も, a と b はともに p の倍数である。

コメント

(3)の②式は①式を参考に作りました。

問　題

t を実数として，数列 a_1，a_2，…を

$$a_1=1,\ a_2=2t,\ a_{n+1}=2ta_n-a_{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$t\geqq 1$ ならば, $0<a_1<a_2<a_3<\cdots$ となることを示せ。

(2)　$t\leqq -1$ ならば, $0<|a_1|<|a_2|<|a_3|<\cdots$ となることを示せ。

(3)　$-1<t<1$ ならば，$t=\cos\theta$ となる θ を用いて，

$$a_n=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n\geqq 1)$$

となることを示せ。 [2009]

解答例

(1)　$t\geqq 1$ のとき, $0<a_n<a_{n+1}$ $(n\geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

条件より，$a_1=1$，$a_2=2t\geqq 2$ なので, $0<a_1<a_2$ が成り立つ。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$0<a_k<a_{k+1}$ の成立を仮定すると，条件より，

$$a_{k+2}-a_{k+1}=(2t-1)a_{k+1}-a_k\geqq a_{k+1}-a_k>0$$

よって, $0<a_{k+1}<a_{k+2}$ が成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対し, $t\geqq 1$ のとき, $0<a_n<a_{n+1}$ が成り立つ。

(2)　$t\leqq -1$ のとき, $0<|a_n|<|a_{n+1}|$ $(n\geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

条件より，$|a_1|=1$，$|a_2|=2|t|\geqq 2$ なので, $0<|a_1|<|a_2|$ が成り立つ。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$0<|a_k|<|a_{k+1}|$ の成立を仮定すると，条件より，

$$|a_{k+2}|=|2ta_{k+1}-a_k|\geqq|2ta_{k+1}|-|a_k|=2|t||a_{k+1}|-|a_k|$$

すると，$|a_{k+2}|-|a_{k+1}|\geqq(2|t|-1)|a_{k+1}|-|a_k|\geqq|a_{k+1}|-|a_k|>0$

よって, $0<|a_{k+1}|<|a_{k+2}|$ が成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対し，$t\leqq -1$ のとき, $0<|a_n|<|a_{n+1}|$ が成り立つ。

(3)　$-1<t<1$ のとき，$t=\cos\theta$ となる θ を用いて，$a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ $(n\geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

$a_1=1=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$，$a_2=2t=2\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ となり，成立する。

(ii)　$n=k$, $k+1$のとき

$a_k=\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$, $a_{k+1}=\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$であると仮定すると，条件より，

$$a_{k+2}=2t\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin(k+1)\theta\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin(k+2)\theta+\sin k\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}$$

(i)(ii)より，自然数 n に対し，$-1<t<1$ $(t=\cos\theta)$のとき，$a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$が成り立つ。

コメント

3 題とも数学的帰納法でクリアーに示せます。なお，(1)を参考にして(2)では三角不等式を用いましたが，漸化式では，1999 年に東大・理で利用して以来，久々です。

問　題

1 から n までの自然数 1, 2, 3, $\cdots$, n の和を S とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば, S が偶数であることを示せ。

(2)　S が偶数ならば, n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3)　S が 4 の倍数ならば, n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ。

[2008]

解答例

(1)　まず, $S=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ である。

さて, k を 0 以上の整数として, n を 4 で割った余りで分類する。

(i)　n を 4 で割った余りが 0 のとき　$n=4k+4$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+4)(4k+5)=2(k+1)(4k+5)$$

(ii)　n を 4 で割った余りが 3 のとき　$n=4k+3$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+3)(4k+4)=2(k+1)(4k+3)$$

(i)(ii)より, S は偶数である。

(2)　(iii)　n を 4 で割った余りが 1 のとき　$n=4k+1$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+1)(4k+2)=(4k+1)(2k+1)$$

(iv)　n を 4 で割った余りが 2 のとき　$n=4k+2$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+2)(4k+3)=(2k+1)(4k+3)$$

(iii)(iv)より, S はいずれも奇数である。

よって, (1)と合わせ, S が偶数ならば, n を 4 で割った余りは 0 または 3 である。

(3)　S が 4 の倍数ならば, (2)より, n を 4 で割った余りは 0 または 3 となるので, n を 8 で割った余りは 0, 3, 4, 7 のいずれかである。

(i)　n を 8 で割った余りが 0 のとき　$n=8k+8$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+8)(8k+9)=4(k+1)(8k+9)$$

(ii)　n を 8 で割った余りが 3 のとき　$n=8k+3$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+3)(8k+4)=2(8k+3)(2k+1)$$

$(8k+3)(2k+1)$ は奇数より, S は 4 の倍数ではない。

(iii)　n を 8 で割った余りが 4 のとき　$n=8k+4$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+4)(8k+5)=2(8k+5)(2k+1)$$

$(8k+5)(2k+1)$ は奇数より, S は 4 の倍数ではない。

(iv) n を 8 で割った余りが 7 のとき　$n=8k+7$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+7)(8k+8)=4(k+1)(8k+7)$$

(i)～(iv)より, S が 4 の倍数ならば, n を 8 で割った余りが 0 または 7 である。

コメント

余りで整数を分類するタイプの証明問題です。(2)は, (1)の逆の証明ですが, 転換法を意識して記述しています。(3)は(2)が誘導です。

問　題

座標平面上の点$(p,\ q)$で，pとqがともに整数であるものを格子点という。次の問いに答えよ。

(1)　自然数nに対し，$p+2q=n$，$p>0$，$q>0$を満たす格子点$(p,\ q)$の個数をa_nとする。a_nを求めよ。

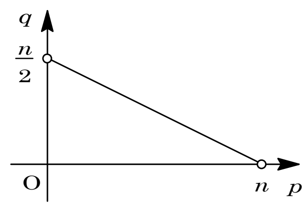
(2)　自然数nに対し，$p+2q<n$，$p>0$，$q>0$を満たす格子点$(p,\ q)$の個数をb_nとする。b_nを求めよ。

(3)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$と$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$p=n-2q$より，qが整数ならばpは整数となる。

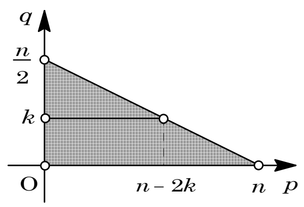
すると，$p>0$，$q>0$を満たす格子点$(p,\ q)$の個数をa_nとすると，



(i)　nが偶数のとき　$a_n=\dfrac{n}{2}-1$

(ii)　nが奇数のとき　$a_n=\dfrac{n-1}{2}$

(2)　$q=k$上の$p+2q<n$，$p>0$，$q>0$を満たす格子点は$n-2k-1$個あるので，領域内の格子点の個数をb_nとすると，



(i)　nが偶数のとき

$$b_n=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(n-2k-1)$$
$$=(n-1)\left(\frac{n}{2}-1\right)-2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\frac{n}{2}=\frac{1}{4}(n-2)^2$$

(ii)　nが奇数のとき

$$b_n=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k-1)=(n-1)\cdot\frac{n-1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$$

(3)　まず，$\dfrac{a_n}{n^2}$について，nが偶数のとき$\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n^2}\to 0\ (n\to\infty)$，$n$が奇数のとき$\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n^2}\to 0\ (n\to\infty)$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$である。

次に，$\dfrac{b_n}{n^2}$について，nが偶数のとき$\dfrac{b_n}{n^2}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2\to\dfrac{1}{4}\ (n\to\infty)$，$n$が奇数のとき$\dfrac{b_n}{n^2}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right)\to\dfrac{1}{4}\ (n\to\infty)$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{4}$である。

コメント

格子点の個数を数えるのに場合分けが必要なケースです。しかし，2 直線$q=k$，$p+2q=n$の交点がつねに格子点となるので，さほど複雑ではありません。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c$ を整数とする。x に関する 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が有理数の解をもつならば，その解は整数であることを示せ。ただし，正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 $m,\ n$ を用いて $\dfrac{n}{m}$ で表せることを用いよ。

(2)　方程式 $x^3+2x^2+2=0$ は，有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。

[2001]

解答例

(1)　互いに素な自然数 $m,\ n$ を用いて，3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解を $x=\pm\dfrac{n}{m}$ とおくと，$\pm\dfrac{n^3}{m^3}+a\cdot\dfrac{n^2}{m^2}\pm b\cdot\dfrac{n}{m}+c=0$ となるので，

$$\pm n^3+amn^2\pm bm^2n+cm^3=0,\ \pm n^3=m(-an^2\mp bmn-cm^2)$$

さて，$a,\ b,\ c$ は整数なので，$-an^2\mp bmn-cm^2$ は整数となり，m は n^3 の約数となる。ところが，m と n は互いに素なので，$m=1$ となる。

すると，$x=\pm n$ となり，解は整数である。

(2)　方程式 $x^3+2x^2+2=0$ が有理数の解をもつとすると，(1)より整数解となる。

ここで，$f(x)=x^3+2x^2+2$ とおくと，

$$f'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)$$

右表より，$f(x)=0$ の実数解は $x<-\dfrac{4}{3}$ にただ 1 つ存在する。

x	$\cdots$	$-\dfrac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$

さて，$f(-2)=2,\ f(-3)=-7$ より，この実数解は $-3<x<-2$ に存在することがわかるので，$f(x)=0$ は整数解をもたない。

よって，$f(x)=0$ は有理数の解をもたない。

コメント

(1)は有名問題です。(2)はグラフを用いて考えましたが，「やりすぎ」かもしれません。

問　題

2 つの関数 $f(x)=x(1-x)$，$g(x)=\dfrac{2x}{2+x}$ を用いて，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$0<a_0=b_0<\frac{1}{2},\ a_{n+1}=f(a_n),\ b_{n+1}=g(b_n)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

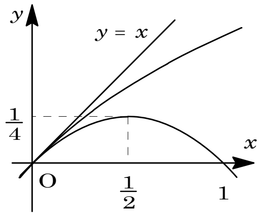
(1) $0<x<\dfrac{1}{2}$ において，$f(x)$ は単調増加であることを示せ。また $x>0$ のとき，$f(x)<g(x)<x$ であることを示せ。

(2) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$0<a_n<b_n<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(3) b_n を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $f(x)=x(1-x)=-x^2+x$，$f'(x)=-2x+1$ なので，$0<x<\dfrac{1}{2}$ において，$f'(x)>0$ となり $f(x)$ は単調増加となる。



また，$g(x)=\dfrac{2x}{2+x}=2+\dfrac{-4}{x+2}$

ここで，$h(x)=x-g(x)=x-2+\dfrac{4}{x+2}$ とおくと，

$$h'(x)=1-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

$x>0$ のとき $h'(x)>0$ より，$h(x)>h(0)=0$

また，$k(x)=g(x)-f(x)=2+\dfrac{-4}{x+2}+x^2-x$ とおくと，

$$k'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}+2x-1=\frac{4+(2x-1)(x+2)^2}{(x+2)^2}=\frac{2x^3+7x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$x>0$ のとき $k'(x)>0$ より，$k(x)>k(0)=0$

以上より, $x>0$ のとき，$f(x)<g(x)<x$

(2) $n\geqq 1$ のとき，$0<a_n<b_n<\dfrac{1}{2}$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき　$0<a_0=b_0<\dfrac{1}{2}$ なので，(1)より $f(0)<f(a_0)=f(b_0)<g(b_0)$，

さらに, $x>0$ のとき $g(x)$ は単調増加なので，$g(b_0)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{2}$ となる。

以上まとめて，$f(0)<f(a_0)<\ g(b_0)<\dfrac{1}{2}$ なので，$0<a_1<b_1<\dfrac{1}{2}$

(ii)　$n=k$ のとき　$0<a_k<b_k<\dfrac{1}{2}$ と仮定して, (i)と同様にすると,

$f(0)<f(a_k)<f(b_k)<g(b_k)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{2}$ より，$0<a_{k+1}<b_{k+1}<\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より, $n\geqq 1$ のとき，$0<a_n<b_n<\dfrac{1}{2}$

(3)　$b_{n+1}=g(b_n)=\dfrac{2b_n}{2+b_n}$ で, (2)から $0<b_n$ なので，$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{2+b_n}{2b_n}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{2}$

よって，$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b_0}+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{2+b_0n}{2b_0}$ より，$b_n=\dfrac{2b_0}{2+b_0n}$

コメント

(1)(2)の流れから, (3)は数列の極限かと思いましたが，はずれてしまいました。なお, (1)は上の解のように微分するまでもありませんでした。

問　題

n を 2 以上の整数とする。2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ。

(2) $n \geqq 36$ のとき，P_n を求めよ。

(3) $P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ。　[2019]

解答例＋映像解説

(1) 2 個のさいころの出た目の数とその積について，積を 2 で割った余りが 1 となるのは，右表から，$1 \equiv 1 \times 1 \pmod 2$ すなわち(奇数)×(奇数)の場合だけより，その確率 P_2 は，

$$P_2 = \frac{3\times 3}{6^2} = \frac{1}{4}$$

mod 2	0	1
0	0	0
1	0	1

また，積を 3 で割った余りが 1 となるのは，右表から，$1 \equiv 1 \times 1 \pmod 3$ または $1 \equiv 2 \times 2 \pmod 3$，すなわち(3 の倍数＋1)×(3 の倍数＋1)の場合，または(3 の倍数＋2)×(3 の倍数＋2)の場合より，その確率 P_3 は，

$$P_3 = \frac{2\times 2 + 2\times 2}{6^2} = \frac{2}{9}$$

mod 3	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

さらに，積を 4 で割った余りが 1 となるのは，右表から，$1 \equiv 1 \times 1 \pmod 4$ または $1 \equiv 3 \times 3 \pmod 4$，すなわち(4 の倍数＋1)×(4 の倍数＋1)の場合，または (4 の倍数＋3)×(4 の倍数＋3)の場合より，その確率 P_4 は，

$$P_4 = \frac{2\times 2 + 1\times 1}{6^2} = \frac{5}{36}$$

mod 4	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

(2) 2 個のさいころの出た目の数とその積についてをまとめると，右表のようになる。

ここで，$n \geqq 37$ のとき，積を n で割った余りは右表で表され，これが 1 となるのは，1×1 の場合だけである。また，$n = 36$ のときは，$0 \equiv 6 \times 6 \pmod{36}$ 以外は $n \geqq 37$ のときと同じなので，$n \geqq 36$ のとき積を n で割った余りが 1 となる確率 P_n は，$P_n = \dfrac{1\times 1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$ である。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(3)　まず，(1)，(2)より，$P_n=\dfrac{1}{18}=\dfrac{2}{36}$ となる n は $5\leqq n\leqq 35$ の範囲にある。そして，1×1 は n で割った余りが必ず 1 になることより，条件を満たす n は，積を n で割った余りが 1 となるのが 1×1 以外にもう 1 組だけある数となる。

さて，(2)の表は，積の値が対角線に関して対称になっていることから，対角線上にない積については複数個の組が存在し，不適である。

これより，積を対角線上の値に絞り込み，さらに $n\geqq 5$ から積は 6 以上で考えればよいので，以下，積が 9, 16, 25, 36 という 4 通りの場合について調べる。

(i)　積が $9\,(9=8+1=2^3+1)$ のとき

$n=8$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 9 以外の数に 25 があり不適である。

(ii)　積が $16\,(16=15+1=3\times 5+1)$ のとき

$n=5$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 16 以外の数に 6 があり不適である。

$n=15$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 16 以外の数はないので適する。

(iii)　積が $25\,(25=24+1=2^3\times 3+1)$ のとき

$n=6$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 25 以外の数はないので適する。

$n=8$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 25 以外の数に 9 があり不適である。

$n=12$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 25 以外の数はないので適する。

$n=24$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 25 以外の数はないので適する。

(iv)　積が $36\,(36=35+1=5\times 7+1)$ のとき

$n=5$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 36 以外の数に 6 があり不適である。

$n=7$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 36 以外の数に 15 があり不適である。

$n=35$ とすると，積を n で割って 1 余る 1, 36 以外の数はないので適する。

(i)～(iv)より，$P_n=\dfrac{1}{18}$ となる n は，$n=6,\ 12,\ 15,\ 24,\ 35$ である。

コメント

数え上げるタイプの確率問題です。(3)は(1)と(2)の結果を利用するものの，これだけでは調べるのに時間がかかりすぎます。絞り込む手を見つけなくてはいけません。

問　題

さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ ……(＊)を考える。以下の問いに答えよ。

(1) (＊)が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ。

(2) (＊)が整数を解にもつとする。このとき(＊)の解はともに正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。

(3) (＊)が整数を解にもつ確率を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1) 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ ……(＊)が $x = 1$ を解にもつ条件は，

$1 - a + b = 0$，$a = 1 + b$ ………①

ここで，さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数が a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和が b である。そこで，2 回目と 3 回目の目の数とその和 b の値をまとめると右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

すると，$b \geqq 2$ より，①から $a \geqq 3$ となり，

(i) $(a,\ b) = (3,\ 2)$ のとき

目の出方は，表より 1 通り。

(ii) $(a,\ b) = (4,\ 3)$ のとき

目の出方は，表より 2 通り。

(iii) $(a,\ b) = (5,\ 4)$ のとき　目の出方は，表より 3 通り。

(iv) $(a,\ b) = (6,\ 5)$ のとき　目の出方は，表より 4 通り。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{1+2+3+4}{6^3} = \dfrac{5}{108}$ である。

(2) (＊)が整数解をもつとき，その解を $x = \alpha,\ \beta$　$(\alpha \leqq \beta)$ とすると，

$a = \alpha + \beta$ ………②，$b = \alpha\beta$ ………③

すると，α，β はともに整数となり，さらに $a > 0$，$b > 0$ なので，②③より $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ である。

また，$\alpha \leqq \beta$ から $2\alpha = \alpha + \alpha \leqq \alpha + \beta$ で，②から $\alpha + \beta \leqq 6$ なので，$2\alpha \leqq 6$ すなわち $\alpha \leqq 3$ となる。したがって，少なくとも 1 つの解は 3 以下である。

(3) (＊)が整数解 $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ をもつとき，$1 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{a}{2}$ ……④に注意して，a の値で場合分けをする。

(i) $a = 1$ のとき　④から整数 α は存在しない。

(ii) $a = 2$ のとき　④から $\alpha = 1$，②から $\beta = 1$，③から $b = 1$ となり，不適である。

(iii) $a=3$のとき　④から$\alpha=1$，②から$\beta=2$，③から$b=2$となる。

すると，(1)の表より 1 通り。

(iv) $a=4$のとき　④から$\alpha=1,\ 2$となる。

(iv-a)　$\alpha=1$のとき　②から$\beta=3$，③から$b=3$となるので，表より 2 通り。

(iv-b)　$\alpha=2$のとき　②から$\beta=2$，③から$b=4$となるので，表より 3 通り。

(v)　$a=5$のとき　④から$\alpha=1,\ 2$となる。

(v-a)　$\alpha=1$のとき　②から$\beta=4$，③から$b=4$となるので，表より 3 通り。

(v-b)　$\alpha=2$のとき　②から$\beta=3$，③から$b=6$となるので，表より 5 通り。

(vi)　$a=6$のとき　④から$\alpha=1,\ 2,\ 3$となる。

(v-a)　$\alpha=1$のとき　②から$\beta=5$，③から$b=5$となるので，表より 4 通り。

(v-b)　$\alpha=2$のとき　②から$\beta=4$，③から$b=8$となるので，表より 5 通り。

(v-c)　$\alpha=3$のとき　②から$\beta=3$，③から$b=9$となるので，表より 4 通り。

(i)～(vi)より，求める確率は，$\dfrac{1+(2+3)+(3+5)+(4+5+4)}{6^3}=\dfrac{1}{8}$である。

コメント

2 次方程式の解が絡んだ形の確率の問題です。解答例からもわかるように，丁寧に場合分けをするタイプです。なお，(3)は(1)と同じく，a の値を基準に場合分けをしています。

問　題

$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$とする。座標空間内の動点Pが原点Oから出発し，正四面体のサイコロ（1, 2, 3, 4の目がそれぞれ確率$\dfrac{1}{4}$で出る）をふるごとに，出た目が$k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$のときは$\overrightarrow{v_k}$だけ移動する。すなわち，サイコロをn回ふった後の動点Pの位置をP_nとして，サイコロを$(n+1)$回目にふって出た目がkならば，$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$である。ただし，$P_0=O$である。以下の問いに答えよ。

(1)　点P_2がx軸上にある確率を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$となる確率を求めよ。

(3)　4点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある確率を求めよ。

(4)　nを6以下の自然数とする。$P_n=O$となる確率を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　正四面体のサイコロを2回ふったとき，1回目，2回目に出た目を，それぞれa, bとする。$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$に対して，$P_0=O$から$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$である。

このとき，点P_2がx軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$のときであり，その確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times4=\dfrac{1}{4}$となる。

(2)　(1)と同様に，点P_2がy軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$のときであり，その確率は$\dfrac{1}{4}$である。

また，点P_2がz軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$のときであり，その確率は$\dfrac{1}{4}$である。

さらに，$(a,\ b)=(1,\ 1)$では$P_2(2,\ 2,\ 2)$，$(a,\ b)=(2,\ 2)$では$P_2(2,\ -2,\ -2)$，$(a,\ b)=(3,\ 3)$では$P_2(-2,\ 2,\ -2)$，$(a,\ b)=(4,\ 4)$では$P_2(-2,\ -2,\ 2)$となる。

さて，サイコロを4回ふったとき，1回目，2回目，3回目，4回目に出た目を，それぞれa, b, c, dとすると，$\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_4}=\overrightarrow{v_c}+\overrightarrow{v_d}$となる。

すると，$\overrightarrow{P_2P_4}=\overrightarrow{v_c}+\overrightarrow{v_d}$についても$\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$と同様に考えることができるので，$\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$となるのは，次の場合である。

(a)　$\overrightarrow{P_0P_2}$がx軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がy軸に平行またはz軸に平行なとき

(b)　$\overrightarrow{P_0P_2}$がy軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がx軸に平行またはz軸に平行なとき

(c)　$\overrightarrow{P_0P_2}$がz軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がx軸に平行またはy軸に平行なとき

その確率は，$\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{8}$である。

(3)　(2)と同様に設定すると，$\overrightarrow{P_0P_1}=\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_3}=\overrightarrow{v_c}$ となる。

これより，4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある条件は，$\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{v_c}$ が同一平面上のベクトルであることになる。

ここで，$\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{v_c}$ が同一平面上にないときを考えると，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$ から異なる 3 個のベクトルを選ぶとして，その確率は $\dfrac{{}_4C_3\cdot 3!}{4^3}=\dfrac{3}{8}$ である。

よって，4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率は，$1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$ となる。

(4)　サイコロを n 回 $(1\leqq n\leqq 6)$ ふったとき，1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ r 回, s 回, t 回, u 回だけ出て，$P_n=O$ になったとすると，

$$r+s+t+u=n\cdots\cdots\cdots①,\ \ r\overrightarrow{v_1}+s\overrightarrow{v_2}+t\overrightarrow{v_3}+u\overrightarrow{v_4}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$r+s-t-u=0$，$r-s+t-u=0$，$r-s-t+u=0$ なので，

$$r=s=t=u\cdots\cdots\cdots③$$

③を①に代入すると $n=4r$ となり，n が 4 の倍数のとき，すなわち $n=4$ のときのみ $P_n=O$ となる。

そこで，$P_4=O$ については $r=s=t=u=1$ から，その確率は，

$$4!\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{3}{32}$$

また，$n\neq 4$ のときは，$P_n=O$ となる場合はない。

以上より，$P_n=O$ となる確率は，$n=4$ のとき $\dfrac{3}{32}$，$n\neq 4$ のとき 0 である。

コメント

確率に空間ベクトルが融合した記述しにくい問題です。(3)では，余事象を利用して 1 次独立な 3 つのベクトルを選ぶ確率をもとに計算しましたが，場合分けをして直接的に求めても構いません。なお，(4)については，(3)までの流れでは記述量が多くなりすぎるため，設定を変更しています。

問　題

n を自然数とする。1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ。

(2) n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ。

(3) $n=4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ。 [2014]

解答例＋映像解説

(1) 1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードの数字の和は，

$$A+B=1+2+\cdots+2n=\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)=n(2n+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さて，n が奇数のとき，$A=B$ とすると，①より $2A=n(2n+1)\cdots\cdots\cdots②$

②の左辺は偶数，右辺は奇数より成立しない。よって，A と B は等しくない。

(2) n が偶数のとき，$A-B=k$ とおくと，①より，

$$2A=n(2n+1)+k,\ \ k=-n(2n+1)+2A$$

すると，$n(2n+1)$, $2A$ はともに偶数なので，A と B の差 k は偶数である。

(3) まず，$n=4$ のとき，1 から 8 までの番号をつけた 8 枚のカードから 4 枚を取り出す場合の数は，${}_8\mathrm{C}_4=70$ である。

さて，①より $A+B=4\times9=36$ なので，$A=B$ となるのは $A=18$ のときであり，取り出す 4 枚のカードの数字を $p, q, r, s\ (1\leqq p<q<r<s\leqq 8)$ とおくと，

$$p+q+r+s=18\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$18<s+s+s+s=4s$ から $s>\dfrac{9}{2}$ となり，$s=5,\ 6,\ 7,\ 8$

(i) $s=5$ のとき　③より，$p+q+r=13\ (1\leqq p<q<r\leqq 4)$

このとき，満たす $(p,\ q,\ r)$ は存在しない。

(ii) $s=6$ のとき　③より，$p+q+r=12\ (1\leqq p<q<r\leqq 5)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(3,\ 4,\ 5)$

(iii) $s=7$ のとき　③より，$p+q+r=11\ (1\leqq p<q<r\leqq 6)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 4,\ 6),\ (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 5)$

(iv) $s=8$ のとき　③より，$p+q+r=10\ (1\leqq p<q<r\leqq 7)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 5)$

(i)～(iv)より，求める場合は $1+3+4=8$ 通りとなり，その確率は $\dfrac{8}{70}=\dfrac{4}{35}$ である。

コメント

場合の数と確率の基本問題です。(1)と(2)は，$A+B$ を考えるのがポイントです。(3)は，場合分けをして丁寧に数え上げましたが，いきなり網羅していってもよいでしょう。