２０２０ 入試対策
過去問ライブラリー

熊本大学
医系数学10か年

２０１０－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された熊本大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3)　$\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 [2019]

■ 図形と計量

1　$\triangle$ABC の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　$\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

■ ベクトル

1　t を実数とする。空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle$ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3)　$\angle$BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。 [2018]

2　△ABC と, A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし, 直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を, 線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき, また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, k, m を用いて表せ。

(2)　$|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$, $\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}$, $m=-1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき, k の値を求めよ。　[2016]

3　p, q, r を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$, $\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき, 以下の問いに答えよ。ただし, O を原点とする。

(1)　p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2)　q, r を p を用いて表せ。

(3)　p', q', r' を実数とし, 空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$, $\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$, $\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき, p', q', r' を p を用いて表せ。

(4)　(3)における 3 点 A′, B′, C′ は一直線上にないことを示せ。　[2015]

4　空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また, PM＋MQ が最小になる OB 上の点を M とし, PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を, それぞれ t, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　△QMN の面積を t を用いて表せ。

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき, △QMN の面積の最大値を求めよ。　[2014]

5　O を原点とする空間内の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 1,\ -2)$ に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 k に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき, k の値の範囲を求めよ。

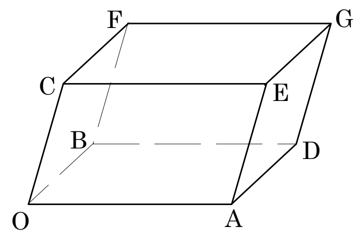
(2)　点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる C の座標を求めよ。　[2013]

6　1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を $1:2$ に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　[2012]

7　平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を $2:3$ に内分する点を N，辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k:1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3)　3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。　[2011]

8　原点を O とし，空間内に 3 点 A$(4,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2)　C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が△OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。　[2010]

■ 整数と数列

1 a と b を正の実数とする。$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$BX_1 = a$，$CX_1 = b$ とする。各 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を a, b を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b = 8a$ のとき，$l_n > \dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい。 [2015]

2 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a，b，c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a} + \dfrac{\log b}{b} + \dfrac{\log c}{c} < \log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e > 2.7$ および $\log 2 > 0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 a，b，c，d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab} = d^{abc}$，$a \leqq b \leqq c$，$d \geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 [2014]

3 x, y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ。

(2) $x^5y - xy^5$ は 30 の倍数であることを示せ。 [2011]

■ 確率

1 赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。 [2019]

2 m, n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

3　X, Y は$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする。また, n を自然数とする。A 君, B 君が以下のルールで対戦する。

(i)　1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii)　1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げたとき, X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2)　A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組$(X,\ Y)$は何通りあるか。

[2013]

4　$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$個の 1 と 4 個の -1 からなる数列a_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列$\{a_k\}$は何通りあるか求めよ。

(2)　数列$\{a_k\}$の初項から第 k 項までの積を$b_k = a_1a_2\cdots a_k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$とおく。$b_1+b_2+\cdots+b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$ の最大値および最小値を与える数列$\{a_k\}$はそれぞれ何通りあるか求めよ。

[2012]

5　赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2)　取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

[2010]

■ 複素数

1　複素数平面上で$|z+i|-|z-i|=1$を満たす点zの全体をHとおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角θの範囲は$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(1)　Hの点zに対して，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　Hの点zに対して$w=\dfrac{1}{z}$とする。wの絶対値r_2と偏角θ_2のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。　[2018]

2　$s>0$，$t>0$とする。複素数平面上の$\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，$\triangle$ACD が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数をzとするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　zをs, tを用いて表せ。

(2)　α，β，γが等式$4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$を満たすとき，$\gamma$と$z$をそれぞれ求めよ。

(3)　(2)で求めたγとzに対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC}=\theta$とする。このとき，$\cos\theta$の値を求めよ。　[2017]

3　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$を満たすθに対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$とする。ただし，$i$は虚数単位である。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して，$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$とするとき，z_nを極形式で表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$となる最小の$n$を求めよ。

(3)　z_{1000}が実数となるようなθの値の個数を求めよ。　[2016]

■ 曲線

1　xy平面上で，点$(1,\ 0)$までの距離とy軸までの距離の和が 2 である点の軌跡をCとする。以下の問いに答えよ。

(1)　Cで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　aを正の数とする。円$x^2+y^2=a$とCの交点の個数が，aの値によってどのように変わるかを調べよ。　[2013]

2　楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)における 2 つの交点を A, B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。　[2011]

■ 極限

1　n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} に対して，分数の和 $\dfrac{a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{2n}}$ ……(＊)を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して(＊)がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_2 を求めよ。

(2)　S_n を与える順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。　[2017]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　p を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 a, b を定めよ。

(2)　$\displaystyle S(t)=\int_0^{t^2}e^{-x}\sin\frac{x}{t}dx$　$(t\neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。　[2010]

■ 微分法

1　半径 1 の円に外接する $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x, y を求めよ。　[2017]

2　$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ $(x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>0)$ における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1)　接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2)　(1)で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $l_k : y=k(x-a)+f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3)　(2)の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2017]

3　a を正の定数とする。条件 $\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$，$0<\theta<\pi$ を満たす θ について，以下の問いに答えよ。

(1)　条件を満たす θ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　条件を満たす θ の個数を求めよ。　[2014]

4　半径 1，中心角 θ $(0<\theta<\pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(\theta)$ を求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ。　[2013]

■ 積分法

1　関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x\geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極大値を求めよ。

(2)　$-3\leqq x\leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

[2018]

2 r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を $a_n=\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\lim_{r\to+0}rf(r)$ を求めよ。 [2015]

3 正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t-ax\cos t|dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。 [2012]

4 関数 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)dt$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。 [2010]

■ 積分の応用

1 座標平面上の曲線 $C_1: y=x^2+2ax-2a+1$ および $C_2: y=x^3+1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

(2) (1)で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。 [2019]

2 座標平面上の曲線 $y=x\sin 3x+3x^2\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを l とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2019]

3 $x\geqq 1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $x\geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3) (2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016]

4 a, b を実数とし，曲線 $C: y=x^3-3ax^2+bx$ を考える。C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。

(3) a が(2)で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値を求めよ。 [2016]

5 a を $a>2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=a$ の交点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

(2) C と x 軸，および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

(3) S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。 [2014]

$\boxed{6}$ xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。 [2011]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

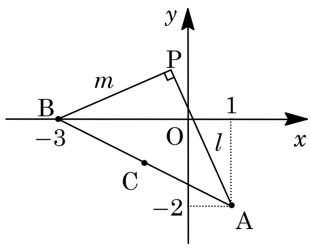
(1)　直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3)　△APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。　[2019]

解答例

(1)　$l: y=ax-a-2=a(x-1)-2$ ……①は点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$ を通る傾き a の直線，$m: y=bx+3b=b(x+3)$ ……②は点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ を通る傾き b の直線である。

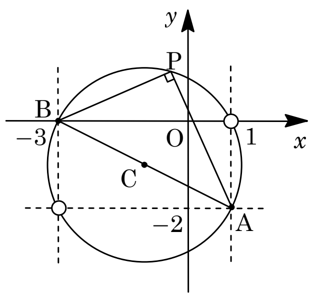


そして，l と m は直交するので，$ab=-1$ ………③

実数 a, b が③を保ちながら変化するとき，l と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円を描く。

この円は中心が線分 AB の中点 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$，半径が $\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ なので，方程式は，

$$(x+1)^2+(y+1)^2=5 \text{ ………④}$$



ただし，①は点 A を通る直線のうち $x=1$ を表さず，②は点 B を通る直線のうち $x=-3$ を表さない。

よって，点 P の軌跡は，④で表される円から 2 点 $(1,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を除く。

(2)　②③から $m: y=-\dfrac{1}{a}(x+3)$，すなわち $m: x+ay+3=0$ となり，

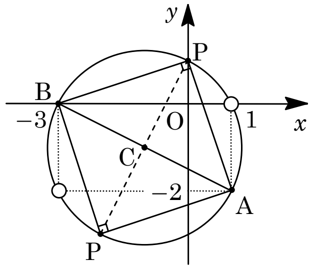
$$\mathrm{AP}=\frac{|1-2a+3|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}$$

また，①から $l: ax-y-a-2=0$ となり，$\mathrm{BP}=\dfrac{|-3a-a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}}$

(3)　△APB の面積が最大となるのは，点 P と直線 AB の距離が最大のときである。

すなわち，△APB が直角二等辺三角形の場合より AP = BP となり，(2)から，

$$\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}},\ |2a-4|=|4a+2|$$



(i)　$2a-4=4a+2$ のとき　$2a=-6$ より $a=-3$

(ii)　$2a-4=-(4a+2)$ のとき　$6a=2$ より $a=\frac{1}{3}$

(i)(ii)より，求める a の値は，$a=-3,\ \frac{1}{3}$ である。

コメント

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが，ここでは図形的に処理しました。ただ，どのような解法にせよ，軌跡の限界のチェックは重要です。

問　題

△ABC の 3 辺の長さを BC$=a$，AC$=b$，AB$=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

解答例

(1) △ABC の 3 辺の長さ a, b, c について，$a>0$，$b>0$，$c>0$ ………①

$$a<b+c,\ b<c+a,\ c<a+b \text{ ………②}$$

条件より，$a+b+c=1$ ……③，$9ab=1$ ……④

③から $c=1-a-b$ となり，①に代入すると，$1-a-b>0$，$a+b<1$ ………⑤

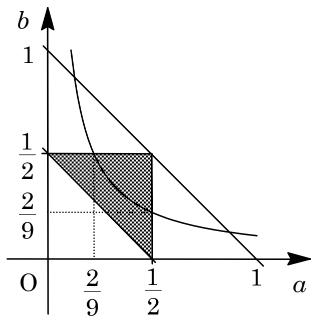
また，②に代入すると，$a<1-a$，$b<1-b$，$1-a-b<a+b$ となり，

$$a<\frac{1}{2},\ b<\frac{1}{2},\ a+b>\frac{1}{2} \text{ ………⑥}$$

よって，①②③をまとめると，⑤⑥から，

$$0<a<\frac{1}{2},\ 0<b<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<a+b<1$$

これを ab 平面上に図示すると右図の網点部となる。



そして，④から $b=\dfrac{1}{9a}$ となり，この領域内で a のとり得る範囲を調べると，$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$ である。

(2) $\angle\mathrm{C}=\theta$ とおき，△ABC に余弦定理を適用すると，③④から，

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2\cdot\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}(-1-2ab+2a+2b)$$

$$=\frac{9}{2}\left(-1-\frac{2}{9}+2a+\frac{2}{9a}\right)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$$

ここで，$f(a)=9a+\dfrac{1}{a}-\dfrac{11}{2}$ とおくと，$\cos\theta=f(a)$ となり，

$$f'(a)=9-\frac{1}{a^2}=\frac{9a^2-1}{a^2}$$

すると，$\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減は右表のようになり，$\cos\theta$ のとり得る範囲は，

a	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

$$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$$

コメント

三角形を題材とした図形の計量問題です。そこに，微分と増減の内容が加えられています。(1)は，式変形だけではややこしそうだったので，図を用いています。

問　題

t を実数とする。空間の 4 点 $A(1,\ 5,\ 0)$，$B(4,\ 2,\ 0)$，$C(t,\ 2t,\ t-1)$，$D(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3) $\angle BAC$ が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

解答例

(1) 4 点 $A(1,\ 5,\ 0)$，$B(4,\ 2,\ 0)$，$C(t,\ 2t,\ t-1)$，$D(1,\ 6,\ 1)$ に対し，

$$\overrightarrow{AB}=3(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),\ \overrightarrow{BC}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

$\triangle ABC$ が直角三角形になる場合は，

(i) $\angle BAC=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より，$(t-1)-(2t-5)=0$ となり $t=4$

(ii) $\angle ABC=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ より，$(t-4)-(2t-2)=0$ となり $t=-2$

(iii) $\angle ACB=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ より，

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0,\ 6t^2-21t+15=0$$

よって，$(2t-5)(t-1)=0$ から，$t=\dfrac{5}{2},\ 1$

(i)～(iii)より，求める t の値は，$t=-2,\ 1,\ \dfrac{5}{2},\ 4$ となる。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AD}$ （p, q は実数）であり，

$$(t-1,\ 2t-5,\ t-1)=3p(1,\ -1,\ 0)+q(0,\ 1,\ 1)$$

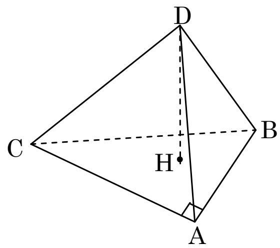
$$t-1=3p\cdots\cdots\cdots①,\ 2t-5=-3p+q\cdots\cdots\cdots②,\ t-1=q\cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$3p=q$ となり，②に代入すると $2t-5=0$ から $t=\dfrac{5}{2}$ である。

(3) $\angle BAC=90^\circ$ のとき，(1)から $t=4$ となり，$\overrightarrow{AC}=3(1,\ 1,\ 1)$ である。

すると，$|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{1+1+1}=3\sqrt{3}$ となり，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{6}$$



ここで，点 D から平面 ABC に垂線を引き，この垂線と平面 ABC の交点を H とおき，$\overrightarrow{AD}=(0,\ 1,\ 1)$ に注意して，

$$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\ \ (r, s\text{ は実数})$$

すると，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-3$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=6$ から，

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=(r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}=(3\sqrt{2})^2r+3=18r+3=0$$

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=(r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}=(3\sqrt{3})^2s-6=27s-6=0$$

これより，$r=-\dfrac{1}{6}$，$s=\dfrac{2}{9}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\frac{1}{6}\cdot3(1,\ -1,\ 0)+\frac{2}{9}\cdot3(1,\ 1,\ 1)-(0,\ 1,\ 1)=\frac{1}{6}(1,\ 1,\ -2)$$

以上より，四面体 ABCD の体積 V は，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2}\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{6}\sqrt{1+1+4}=\dfrac{3}{2}$ となる。

コメント

空間ベクトルと図形についての基本的な問題です。なお，平面の方程式などを利用すると，記述を少し短縮できます。

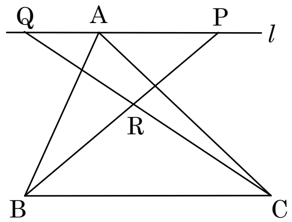
問　題

$\triangle$ABC と, A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし, 直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を, 線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき, また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, k, m を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$, $\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}$, $m=-1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき, k の値を求めよ。 [2016]

解答例



(1) $\triangle$ABC において, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

そして, l 上に点 P, Q を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k(\vec{c}-\vec{b})$ $(k>0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}=km(\vec{c}-\vec{b})$ で定めると, 線分 PB と線分 QC が 1 点で交わることより $m\leqq 1$ となり,

$$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=|(k-km)(\vec{c}-\vec{b})|=k(1-m)|\vec{c}-\vec{b}|$$

ここで, QP // BC なので,

$$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=\mathrm{BC}:\mathrm{QP}=|\vec{c}-\vec{b}|:k(1-m)|\vec{c}-\vec{b}|=1:k-km$$

すると, $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{k-km}{1+k-km}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{1+k-km}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{k-km}{1+k-km}\vec{b}+\frac{1}{1+k-km}k(\vec{c}-\vec{b})=\frac{-km}{1+k-km}\vec{b}+\frac{k}{1+k-km}\vec{c}$$

(2) $m=-1$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{c}=k\vec{b}-(k+1)\vec{c}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{b}=-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}$$

さて, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=2$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$ で, $\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0,\ -k(k+1)\cdot 1^2+\{k^2+(k+1)^2\}\cdot\frac{3}{2}-k(k+1)\cdot 2^2=0$$

まとめると, $4k^2+4k-3=0$, $(2k+3)(2k-1)=0$

よって, $k>0$ から, $k=\dfrac{1}{2}$

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は, 普通に内分比を設定し, 分点ベクトルで処理してもよいのですが, 記述量が多くなります。また, (2)は, 解答例のように(1)の結果を無視しています。

問　題

$p,\ q,\ r$ を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) $q,\ r$ を p を用いて表せ。

(3) $p',\ q',\ r'$ を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，$p',\ q',\ r'$ を p を用いて表せ。

(4) (3)における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。　[2015]

解答例

(1) $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-1,\ 1-p,\ 1),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -1-p,\ r)$$

A, B, C が一直線上にあることより，k を 0 でない実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$-2=k(q-1)\cdots\cdots\text{①},\quad -1-p=k(1-p)\cdots\cdots\text{②},\quad r=k\cdots\cdots\text{③}$$

$p=1$ のとき，②は $0\cdot k=-2$ となり実数 k は存在しない。また，$p=-1$ のとき，②は $2k=0$ となり $k\neq 0$ に反する。よって，$p\neq\pm 1$ である。

(2) ②より，$k=\dfrac{p+1}{p-1}$ となり，③から，$r=\dfrac{p+1}{p-1}$

また，①から $-2=\dfrac{p+1}{p-1}(q-1)$ となり，$q=1+\dfrac{-2(p-1)}{p+1}=\dfrac{-p+3}{p+1}\cdots\cdots$④

(3) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{-2(p-1)}{p+1},\ 1-p,\ 1\right)=\dfrac{1}{p+1}(-2p+2,\ -p^2+1,\ p+1)$

ここで，$\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$-2p+2-(p^2-1)p'=0,\quad -2-(p+1)p'=0,\quad p'=\frac{-2}{p+1}\cdots\cdots\text{⑤}$$

また，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$(-2p+2)q'-(p^2-1)+p+1=0,\quad -2(p-1)q'-(p^2-p-2)=0$$

よって，$q'=\dfrac{p^2-p-2}{-2(p-1)}=-\dfrac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}\cdots\cdots$⑥

さらに，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$2p-2+p^2-1+(p+1)r'=0,\quad (p+1)r'+(p^2+2p-3)=0$$

よって，$r'=-\dfrac{p^2+2p-3}{p+1}=-\dfrac{(p-1)(p+3)}{p+1}$

(4)　A′，B′，C′ が一直線上と仮定すると，④より $q' = \dfrac{-p'+3}{p'+1}$ となり，⑤⑥から，

$$-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)} = \frac{\dfrac{2}{p+1}+3}{\dfrac{-2}{p+1}+1},\quad -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)} = \frac{3p+5}{p-1}$$

まとめると，$-(p+1)(p-2) = 2(3p+5)$ から，$p^2+5p+8=0$ ………⑦

すると，⑦の判別式 $D = 5^2 - 4\cdot 8 < 0$ から実数 p は存在しない。

よって，A′，B′，C′ は一直線上にない。

コメント

空間ベクトルの成分に関する問題ですが，図形的な意味を考えず，数式の計算だけで押し通した解答例です。

問　題

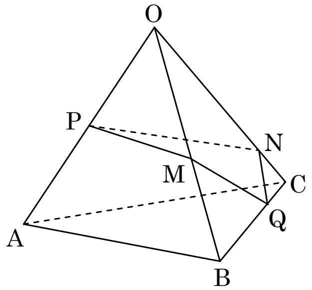
空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM + MQ が最小になる OB 上の点を M とし，PN + NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　△QMN の面積を t を用いて表せ。

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の面積の最大値を求めよ。　[2014]

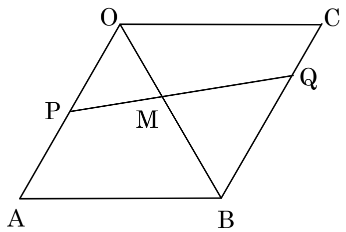
解答例



(1) 折れ線の長さ PM + MQ が最小になる OB 上の点 M は, 右下図の正四面体 OABC の展開図において, 辺 OB と PQ の交点である。

すると，$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\dfrac{1}{2}:t=1:2t$ より，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2t+1}\vec{b}$$



また，PN + NQ が最小となる OC 上の点 N に対して，同様に考えると，$\mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\dfrac{1}{2}:1-t=1:2-2t$ となり，$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}$ である。

(2)　まず，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ から，

$$\triangle\mathrm{OMN}=\frac{1}{2t+1}\cdot\frac{1}{3-2t}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{BQM}=\frac{2t}{2t+1}\cdot\frac{t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{2t^2}{2t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{CQN}=\frac{2-2t}{3-2t}\cdot\frac{1-t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，△QMN の面積を S とおくと，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}-\frac{2t^2}{2t+1}-\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{-4t^2+4t}{(2t+1)(3-2t)}=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)}$$

(3)　(2)より，$S=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{-4t^2+4t+3}=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{4t(1-t)+3}$ となり，$u=t(1-t)=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ とおくと，$0<t<1$ から，$0<u\leqq\dfrac{1}{4}$ となり，

$$S=\frac{\sqrt{3}u}{4u+3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{3}{4u+3}\right)$$

よって，$u=\dfrac{1}{4}\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$のとき，$S$は最大値$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$をとる。

コメント

(3)は，普通に微分法を利用するという方法もありますが，分母・分子の形に注目して置き換えをしています。

問　題

O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

(2)　点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる C の座標を求めよ。 [2013]

解答例

(1)　A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1,\ -2)$，P$(x,\ y,\ z)$ に対し $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ より，

$$-x+y+z\geqq 0\ \cdots\cdots\text{①},\quad 2x+y-2z\geqq 0\ \cdots\cdots\text{②}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k(-1,\ 1,\ 1)+(1-k)(2,\ 1,\ -2)=(-3k+2,\ 1,\ 3k-2)\ \cdots\cdots\text{③}$$

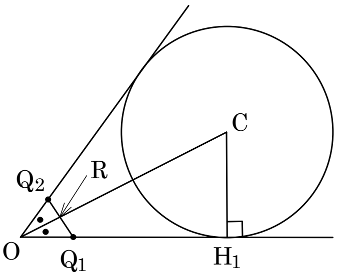
ここで，点 Q は直線 AB 上にあるので，領域 D に含まれる条件は，①②から，

$$-(-3k+2)+1+3k-2\geqq 0\ \cdots\cdots\text{④},\quad 2(-3k+2)+1-2(3k-2)\geqq 0\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

④から $6k-3\geqq 0$ より $k\geqq\dfrac{1}{2}$，⑤から $-12k+9\geqq 0$ より $k\leqq\dfrac{3}{4}$ なので，$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq\dfrac{3}{4}$

(2)　(1)より，$k=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}$ のときの点 Q をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ とおくと，③より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$$



さて，領域 D に含まれる点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円で $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となるのは，この円が半直線 $\mathrm{OQ_1}$，$\mathrm{OQ_2}$ に接するときである。すなわち，半直線 OC は $\angle\mathrm{Q_1OQ_2}$ の二等分線となり，半直線 OC と線分 $\mathrm{Q_1Q_2}$ の交点を R とおくと，

$$\mathrm{Q_1R}:\mathrm{Q_2R}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}|:|\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}|=\frac{\sqrt{6}}{2}:\frac{3\sqrt{2}}{4}=2:\sqrt{3}$$

これより，t を正の定数として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})$ と表せる。

さらに，円と半直線 $\mathrm{OQ_1}$ の接点を $\mathrm{H_1}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\dfrac{3}{4}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)t=\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)t$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\frac{\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)t}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=(\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}-t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})$$
$$=t(\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}-2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})=t(1,\ -1,\ -1)$$

$t>0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{CH_1}}|=\sqrt{3}t$ となり，条件より $\sqrt{3}t=\sqrt{6}$ から $t=\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})=\sqrt{6}\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$$

よって，求める点 C の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{6}+2\sqrt{2},\ \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$である。

コメント

計算量が多いため，細かな説明は省略ぎみの解答例となっています。

問　題

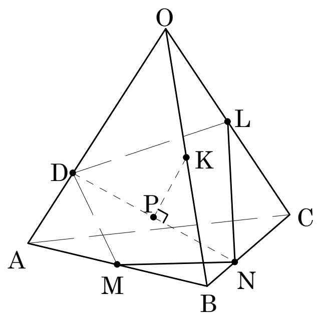
1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を $1:2$ に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。 [2012]

解答例

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，点 D は直線 OA 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{a}$ ………①



また，点 D は平面 LMN 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=r\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$
$$=r\cdot\frac{\vec{c}}{2}+s\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+t\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$
$$=\frac{s}{2}\vec{a}+\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}t\right)\vec{b}+\left(\frac{r}{2}+\frac{t}{3}\right)\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

ただし，$r+s+t=1$ ………③

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$k=\frac{s}{2}\ \cdots\cdots\cdots ④,\quad \frac{s}{2}+\frac{2}{3}t=0\ \cdots\cdots\cdots ⑤,\quad \frac{r}{2}+\frac{t}{3}=0\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④より $s=2k$，⑤に代入して $t=-\frac{3}{4}s=-\frac{3}{2}k$，⑥に代入して $r=-\frac{2}{3}t=k$

すると，③から $2k-\frac{3}{2}k+k=1$ となり，$k=\frac{2}{3}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a}$ である。

(2) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=(\sqrt{2})^2\cos 60^\circ=1$ ………⑦

まず，点 P は直線 DN 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+u\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{2}{3}(1-u)\vec{a}+\frac{2}{3}u\vec{b}+\frac{1}{3}u\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{2}{3}(1-u)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}u-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\frac{1}{3}u\vec{c}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{(4-4u)\vec{a}+(4u-3)\vec{b}+2u\vec{c}\right\}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}=\frac{1}{3}(-2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{KP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}=0$ から，

$$\left\{(4-4u)\vec{a}+(4u-3)\vec{b}+2u\vec{c}\right\}\cdot(-2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=0$$

⑦より，$(4-4u)(-4+2+1)+(4u-3)(-2+4+1)+2u(-2+2+2)=0$

$$20u-13=0,\ u=\frac{13}{20}$$

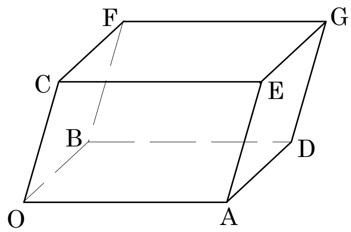
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{20}\vec{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{13}{20}\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{20}\vec{c}=\frac{7}{30}\vec{a}+\frac{13}{30}\vec{b}+\frac{13}{60}\vec{c}$

コメント

空間ベクトルの図形への応用についての基本的な問題です。

問　題

平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を $2:3$ に内分する点を N，辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k:1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。



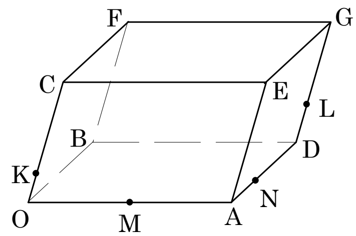
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

[2011]

解答例



(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DL}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MK}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OK}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}$$

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があることより，s, t を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=s\overrightarrow{\mathrm{MN}}+t\overrightarrow{\mathrm{MK}}$$

(1)より，$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}=s\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)$ ………①

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①より，

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\ \cdots\cdots\cdots②,\quad 1=\frac{2}{5}s\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{1}{3}=tk\ \cdots\cdots\cdots④$$

②③より，$s=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{3}{2}$ となり，④に代入すると，$k=\dfrac{2}{9}$ である。

(3) 辺 GF 上の点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=p\vec{a}$　$(0\leqq p\leqq 1)$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FP}}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，3 点 M, N, K の定める平面上に点 P があることより，(2)と同様にして，

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)=\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{2}{5}s\vec{b}+tk\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，⑤⑥より，

$$p-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad 1=\frac{2}{5}s\ \cdots\cdots\cdots⑧,\quad 1=tk\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑦⑧より，$s=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{7}{2}-2p$ となり，⑨に代入すると，$k=\dfrac{2}{7-4p}$ ………⑩

よって，$0 \leqq p \leqq 1$ から $3 \leqq 7-4p \leqq 7$ となり，⑩より $\dfrac{2}{7} \leqq k \leqq \dfrac{2}{3}$ である。

コメント

平行六面体を題材とした空間ベクトルの基本的な問題です。なお，(2)で，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ の 1 次結合で表したのは，次の設問(3)の問題文によります。

問　題

原点を O とし，空間内に 3 点 $A(4,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 2,\ 0)$，$C(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) △OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2) C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が△OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。 [2010]

解答例

(1) 2 点 $B(1,\ 2,\ 0)$，$C(2,\ 1,\ 2)$ に対して，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$x=2t+(1-t)=t+1,\quad y=t+2(1-t)=-t+2,\quad z=2t$$

$A(4,\ 0,\ 0)$ から，△OAP の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{16\{(t+1)^2+(-t+2)^2+4t^2\}-\{4(t+1)\}^2}=2\sqrt{(-t+2)^2+4t^2}$$
$$=2\sqrt{5t^2-4t+4}=2\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$$

よって，$0<t<1$ から，$t=\frac{2}{5}$ のとき，△OAP の面積は最小となる。

(2) 3 点 O, A, P を通る平面に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=4a=0\cdots\cdots①,\quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=a(t+1)+b(-t+2)+2ct=0\cdots\cdots②$$

①より $a=0$ となり，②に代入すると，$c=\frac{t-2}{2t}b$ となり，

$$\vec{n}=\left(0,\ b,\ \frac{t-2}{2t}b\right)=\frac{b}{2t}(0,\ 2t,\ t-2)$$

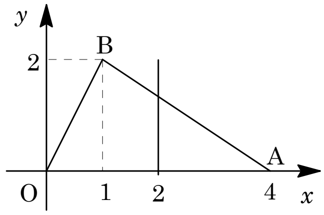
これより，点 C を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルとする直線は，u をパラメータとして，

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+u(0,\ 2t,\ t-2)$$

xy 平面との交点 D は，$z=0$ として，$2+u(t-2)=0$，$u=\frac{2}{2-t}$ となり，

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+\frac{2}{2-t}(0,\ 2t,\ t-2)=\left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$$

よって，$D\left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$ である。



さて，直線 AB の方程式は，$y=-\frac{2}{3}(x-4)$ となり，直線 $x=2$ との交点は，$y=\frac{4}{3}$ である。

これより，点 D が△OAB の内部にある条件は，

$$0<\frac{2+3t}{2-t}<\frac{4}{3}$$

すると，$0<t<1$ から，左側の不等式は成立し，右側の不等式から，

$$3(2+3t)<4(2-t)\,,\ t<\frac{2}{13}$$

以上より，$0<t<\dfrac{2}{13}$

コメント

(2)は，与えられた点の座標との相性を考え，座標計算で進めました。ベクトルを前面に出す解法も可能です。

問　題

a と b を正の実数とする。△ABC において，∠B と∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$BX_1=a$，$CX_1=b$ とする。各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

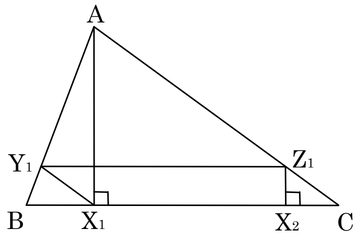
線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を a, b を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b=8a$ のとき，$l_n>\dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169<\log_2 9<3.17$ を用いてよい。　[2015]

解答例

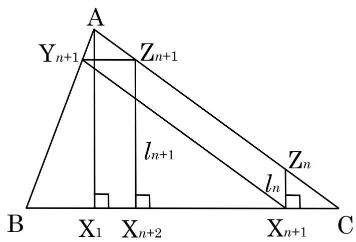


(1) 条件より，$AX_1=1$，$BX_1=a$，$CX_1=b$

そして，$X_1Y_1 /\!/ AC$，$Y_1Z_1 /\!/ BC$ より，

$$CZ_1 : Z_1A = BY_1 : Y_1A = BX_1 : X_1C = a : b$$

よって，$l_1=Z_1X_2=\dfrac{a}{a+b}AX_1=\dfrac{a}{a+b}$



(2) $Z_nX_{n+1}=l_n$，$Z_{n+1}X_{n+2}=l_{n+1}$ について，(1)と同様に考えると，

$$CZ_{n+1} : Z_{n+1}A = BY_{n+1} : Y_{n+1}A = BX_{n+1} : X_{n+1}C \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$CX_{n+1} : CX_1 = l_n : 1$ より，

$$CX_{n+1}=bl_n$$

すると，$BX_{n+1} : X_{n+1}C=(a+b-bl_n) : bl_n \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$CZ_{n+1} : Z_{n+1}A=(a+b-bl_n) : bl_n$ となり，

$$l_{n+1}=\frac{a+b-bl_n}{(a+b-bl_n)+bl_n}AX_1=\frac{a+b-bl_n}{a+b}=-\frac{b}{a+b}l_n+1$$

(3) $b=8a$ のとき，(1)(2)より，$l_1=\dfrac{1}{9}$，$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$ となり，

$$l_{n+1}-\frac{9}{17}=-\frac{8}{9}\Big(l_n-\frac{9}{17}\Big)$$

すると，$l_n-\dfrac{9}{17}=\Big(l_1-\dfrac{9}{17}\Big)\Big(-\dfrac{8}{9}\Big)^{n-1}=-\dfrac{64}{17\cdot 9}\Big(-\dfrac{8}{9}\Big)^{n-1}=\dfrac{8}{17}\Big(-\dfrac{8}{9}\Big)^{n}$ となり，

$$l_n = \frac{8}{17}\left(-\frac{8}{9}\right)^n + \frac{9}{17}$$

条件より，奇数 n は k を自然数として，$n = 2k-1$ とおくと，$l_n > \frac{1}{2}$ から，

$$\frac{8}{17}\left(-\frac{8}{9}\right)^{2k-1} + \frac{9}{17} > \frac{1}{2},\ \frac{8}{17}\left(-\frac{9}{8}\right)\left(-\frac{8}{9}\right)^{2k} > -\frac{1}{2\cdot 17},\ \left(\frac{8}{9}\right)^{2k} < \frac{1}{18}$$

両辺に底 2 で対数をとると，$2k(\log_2 2^3 - \log_2 3^2) < -\log_2 2\cdot 3^2$ となり，

$$2k(2\log_2 3 - 3) > 1 + 2\log_2 3,\ k > \frac{1+\log_2 9}{2(\log_2 9 - 3)} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2(\log_2 9 - 3)}$$

ここで，$3.169 < \log_2 9 < 3.17$ から，$12.2 < \frac{1}{2} + \frac{4}{2(\log_2 9 - 3)} < 12.4$

よって，$k \geqq 13$ となり，求める最小の奇数 n は，$2\cdot 13 - 1 = 25$ となる。

コメント

漸化式の図形への応用です。平行線を利用した頻出の内容になっていますが，最後の詰めの計算は面倒です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a, b, c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2)　自然数 a, b, c, d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。　[2014]

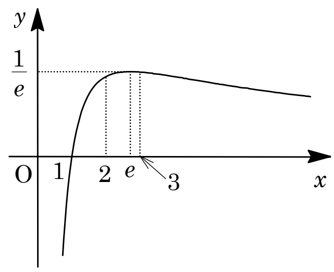
解答例

(1)　まず，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，グラフの概形は右下図である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0



これより，正の実数 a, b, c について，

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$$

$$\log 4-\frac{3}{e}=\frac{2e\log 2-3}{e}>\frac{2\times 2.7\times 0.6-3}{e}>0$$

よって，$\dfrac{3}{e}<\log 4$ から，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2)　$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$　$(a\leqq b\leqq c,\ d\geqq 3)$に対して，$\log a^{bc}b^{ca}c^{ab}=\log d^{abc}$ から，

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d,\quad \frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log d$$

すると，(1)より $\log d<\log 4$ となり，d は 3 以上の整数より，$d=3$ である。

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log 3\quad(a\leqq b\leqq c)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，(＊)を満たす 1 組の整数解として，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ がある。

ここで，$f(3)-f(2)=\dfrac{\log 3}{3}-\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{\log 9-\log 8}{6}>0$ なので，

$$0=f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots\cdots$$

すると，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq f(3)+f(3)+f(3)=3\cdot\dfrac{\log 3}{3}=\log 3$ となり，等号が成立する，すなわち(＊)を満たす整数解は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ のみである。

コメント

(2)において，1 組の整数解はすぐに目視でわかりますので，それ以外には存在しないという形式で記しています。$f(x)$ のグラフが役に立ったわけです。

問　題

x, y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ。

(2)　$x^5y - xy^5$ は 30 の倍数であることを示せ。　[2011]

解答例

(1)　整数 x に対して，$f(x) = x^5 - x = x(x-1)(x+1)(x^2+1)$ ……(＊)とおく。

ここで，$x(x-1)(x+1)$ は連続する 3 整数の積なので 6 の倍数であり，(＊)より，$f(x)$ は 6 の倍数となる。

また，k を整数として，x を分類すると，

(i)　$x = 5k$ のとき　(＊)より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(ii)　$x = 5k \pm 1$ のとき

$(x-1)(x+1) = 5k(5k \pm 2)$ なので，(＊)より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(iii)　$x = 5k \pm 2$ のとき

$x^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5 = 5(5k^2 \pm 4k + 1)$ なので，(＊)より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(i)～(iii)より，どんな整数 x に対しても，$f(x)$ は 5 の倍数である。

したがって，6 と 5 は互いに素から，$f(x)$ は $6 \times 5 = 30$ の倍数となる。

(2)　整数 x, y に対して，

$$g(x,\ y) = x^5y - xy^5 = x^5y - xy + xy - xy^5 = y(x^5 - x) - x(y^5 - y)$$

ここで，(1)より，$x^5 - x$，$y^5 - y$ は，ともに 30 の倍数である。

よって，$g(x,\ y)$ は 30 の倍数となる。

コメント

整数についての基本的な問題です。(2)では，積の微分法の公式を証明するときに現れる式変形を思い浮かべ，$g(x,\ y)$ を変形しました。

問　題

赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1)　k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2)　k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3)　ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。　[2019]

解答例

(1)　まず，赤球 n 個，白球 n 個，合計 $2n$ 個入っている箱から，n 個の球を取り出す ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通りが同様に確からしいとする。

取り出した n 個の球のうち赤球が k 個 $(0\leqq k\leqq n)$ となるのは，${}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}$ 通りであり，さらに ${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$ ……①を考え合わせると，その確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2)　取り出した n 個の球のうち赤球が k 個 $(1\leqq k\leqq n)$ となり，さらにゲームに勝つ確率 P_k は，$P_k=\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\cdot\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であり，

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n^2\{(n-1)!\}^2}=\frac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

$$ {}_n\mathrm{C}_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}=\frac{n}{k}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

これより，$P_k=\dfrac{\left(\dfrac{n}{k}\right)^2({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{\dfrac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\cdot\left(\dfrac{k}{n}\right)^2=\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ である。

(3)　ゲームに勝つ確率 P は，$P=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P_k=\frac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2$ ………②

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2=({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ の値を求めるために，$(x+1)^{n-1}(x+1)^{n-1}=(x+1)^{2n-2}$ ……③に注意して左辺を展開し，①を用いると，

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1})({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}x+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_0x^{n-1})$$

そして，この式の x^{n-1} の係数に着目すると，$({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ となり，また③の右辺を展開したとき，x^{n-1} の係数は ${}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$ であることより，

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2={}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると，②④から，$P=\dfrac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}=\dfrac{n}{2(2n-1)}$ である。

コメント

丁寧に誘導のついた確率と二項係数の問題です。ポイントは④を導くことですが，上記の方法は修得しておくことの 1 つです。

問　題

m, n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

解答例

(1) 初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 5 回投げた後に $R_{(3,\ 4)}$ に移るには，右に 2 回，上に 3 回だけ移動すればよい。

すなわち，硬貨の表が 2 回，裏が 3 回出ればよいので，その確率は，

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16} $$

(2) 初めに 1 の目が上で $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 2 回投げた後に 6 の目が上にあるのは，$R_{(3,\ 1)}$ または $R_{(1,\ 3)}$ に移るときである。

(i) $R_{(1,\ 1)}\to R_{(3,\ 1)}$ のとき　右に 2 回すなわち硬貨の表が 2 回出ればよい。

(ii) $R_{(1,\ 1)}\to R_{(1,\ 3)}$ のとき　上に 2 回すなわち硬貨の裏が 2 回出ればよい。

(i)(ii)より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ である。

次に，初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 2 回投げた後に 6 の目が上にあり，しかも 5 回投げた後に $R_{(3,\ 4)}$ に移るには，

(iii) $R_{(1,\ 1)}\to R_{(3,\ 1)}\to R_{(3,\ 4)}$ のとき

$R_{(3,\ 1)}\to R_{(3,\ 4)}$ では，硬貨の裏が 3 回出ればよい。

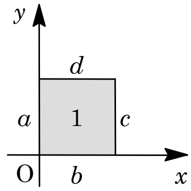
(iv) $R_{(1,\ 1)}\to R_{(1,\ 3)}\to R_{(3,\ 4)}$ のとき

$R_{(1,\ 3)}\to R_{(3,\ 4)}$ では，硬貨の表が 2 回で裏が 1 回出ればよい。

(iii)(iv)より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{2^5}=\frac{1}{8}$ である。

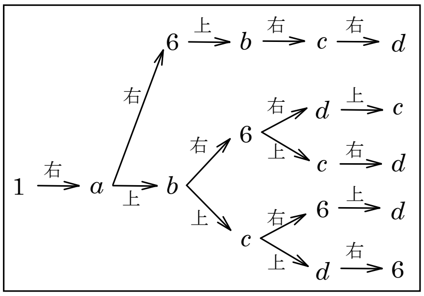
以上より，求める条件付き確率は，$\frac{1}{8}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ となる。

(3)　さいころの 1 と 6 以外の目を a, b, c, d $(a+c=b+d=7)$ とおき，初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあるとき，上から見た配置が右図とする。



そして，硬貨を 5 回投げたとき，5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる場合を考える。

まず，1 回目に硬貨が表で右に転がった場合，すなわち上面が $1 \to a$ と，硬貨が裏で上に転がった場合，すなわち上面が $1 \to b$ とは対等なので，以下，上面が $1 \to a$ のときを調べる。



このとき，上面に 6 通りの目がでるのは，樹形図から，$1 \to a \to 6$ のときは 1 通り，$1 \to a \to b$ のときは 4 通り，合わせて 5 通りとなる。

同様に，1 回目に硬貨が裏の場合も 5 通りとなるので，求める確率は，

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}$$

コメント

前半は標準的な確率の問題ですが，(3)はかなり注意力を要します。ここでは，樹形図をもとにチェックしながら解きましたが，時間をかなり費やします。