2020 入試対策
過去問ライブラリー

九州大学
文系数学22か年

1998－2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された九州大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」や「コンピュータ」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された問題は，その解答例の映像解説を YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 　表に 3，裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき，出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。 [2019]

2 　自然数 n に対して，$a_n=(\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2) $a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

(3) $a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。 [2008]

3 　$f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2) 不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3) 不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。 [2007]

4 　関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ について，次の問いに答えよ。ただし，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ とする。

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) 実数 k に対し，$f(x)=k$ を満たす x の個数を求めよ。 [2006]

5 　実数 x に対して，$[x]$は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0°<\theta<180°$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $(0°<\alpha<90°)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。 [2005]

6 実数a, cを係数とする関数$f(x)=ax^2+c$について，次の条件を考える。

　(＊)　$0 \leqq x \leqq 1$の範囲で$f(x) \geqq (x+1)^2$が成立する。

(1)　$a \geqq 2$のとき，条件(＊)を満たす最小のcの値は$\dfrac{a}{a-1}$であることを示せ。

(2)　$a \leqq 2$のとき，条件(＊)を満たす最小のcの値は$4-a$であることを示せ。

(3)　関数$f(x)$が条件(＊)を満たしているとき，定積分$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$を最小にする$a$，$c$と，そのときの定積分の値を求めよ。　[2003]

7 a, b, cを実数とし，$a>0$とする。$f(x)=ax^2+bx+c$とおく。実数pに対し，xの関数$px-f(x)$の最大値を$g(p)$とおく。

(1)　2つの関数$y=f(x)$と$y=g(x)$が一致するとき，$f(x)$を求めよ。

(2)　実数xに対し, pの関数$xp-g(p)$の最大値を$h(x)$とおく。$h(x)$を求めよ。

(3)　直線$y=px+q$が点$(t,\ f(t))$で$y=f(x)$のグラフに接するための必要十分条件は$g(p)=pt-f(t)$かつ$q=-g(p)$であることを示せ。　[2003]

8 実数p, q, rを係数とする関数$f(x)=px^2+qx+r$をここでは高々2次の関数とよぶことにする。また, a, b, cは異なる3つの実数とする。

(1)　$f(a)=1$，$f(b)=0$，$f(c)=0$を満たす高々2次の関数$f(x)$を求めよ。

(2)　高々2次の関数$f(x)$，$g(x)$が$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，$f(c)=g(c)$を満たすならば，$f(x)$と$g(x)$は同じ関数であることを示せ。

(3)　$h(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$とすると，

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

であることを示せ。　[2000]

9 kを実数として，$f(x)=x^2-2kx+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$とおく。方程式$f(x)=0$が実数解$\alpha$，$\beta$　$(\alpha \leqq \beta)$をもつとき，次の問いに答えよ。

(1)　α，βが$\alpha \leqq 1 \leqq \beta$を満たすように$k$の値の範囲を定めよ。

(2)　(1)の場合に$f(x)$の最小値がとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 微分と積分

1　k を実数とする。3 次関数 $y=x^3-kx^2+kx+1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。　[2019]

2　座標平面内の曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし，$a,\ b$ は実数，$c>0$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ をそれぞれ c を用いて表せ。

(2)　この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。　[2018]

3　定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1: y=2x^2+1$，$C_2: y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2)　C_1 と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。　[2017]

4　座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，$a,\ b$ は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2)　β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。　[2016]

5　座標平面上の 2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=-x^2+ax+b$ を考える。ただし，$a,\ b$ は実数とする。

(1)　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための $a,\ b$ に関する条件を求めよ。

以下，$a,\ b$ が(1)の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする。

(2)　b を a を用いて表せ。

(3)　a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。　[2015]

6　関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2)　(1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし $p<q$）。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3)　$t \geqq 0$ のとき, 2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。　[2012]

7　放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし, $t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　H の座標を t を用いて表せ。

(2)　P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。

(3)　$x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(4)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき, t の値を求めよ。　[2011]

8　xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし，その両端を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする。C 上の 2 点 M, N を $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ となるようにとる。ただし，$\mathrm{N} \neq \mathrm{B}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{MAB}=\theta$ とおくとき，弦の長さ MB および点 M の座標を θ を用いて表せ。

(2)　点 N から x 軸におろした垂線を NP としたとき, PB を θ を用いて表せ。

(3)　$t=\sin\theta$ とおく。条件 $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ を t を用いて表せ。

(4)　$\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となるような点 M がただ一つあることを示せ。　[2010]

9　曲線 $y=x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし, $a<0<b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2)　線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3)　$\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たしながら P と Q が動くとき, (2)で求めた面積の最小値を求めよ。　[2009]

10　放物線$C: y=x^2$上の点Pにおける法線とは，点PにおけるCの接線と点Pで垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点$(p,\ p^2)$におけるCの法線の方程式を求めよ。

(2)　y軸上の点$(0,\ a)$を通るCの法線の本数を求めよ。　[2008]

11　曲線$C: y=x^2$上に点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$をとり，点Pにおける曲線Cの接線をl，点Pを通りlに垂直な直線をmとする。ただし，$t>0$とする。接線lとx軸との交点をQとし，直線mとx軸，y軸との交点をそれぞれR_1，R_2とする。また，$\triangle \mathrm{PQR}_1$の面積をS_1とし，曲線Cとy軸および線分PR_2で囲まれる図形の面積をS_2とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点Qと点R_1のx座標をtを用いて表せ。

(2)　面積S_2をtを用いて表せ。

(3)　$S_1>S_2$が成り立つtの範囲を求めよ。　[2006]

12　2 つの関数$f(x)=-px^2+2\ (p>0)$，$g(x)=|x|-2$が与えられていて，放物線$y=f(x)$が 2 点$(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$を通るとする。

(1)　pの値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$と$y=g(x)$の交点をすべて求めよ。

(3)　(2)で求めた交点のうち，x座標が最小になる点を$\mathrm{A}(a,\ f(a))$とする。このとき，点Aにおける$y=f(x)$の接線$y=h(x)$を求めよ。また，この接線$y=h(x)$と$y=g(x)$の，点Aとは異なる，交点$\mathrm{B}(b,\ g(b))$を求めよ。

(4)　次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a\leqq x\leqq b,\ y\leqq h(x),\ y\geqq f(x),\ y\geqq g(x)$$

[2004]

13　関数$f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$を考える。

(1)　関数$f(x)$がつねに増加するためのa，bの条件を求め，その範囲をab平面上に図示せよ。

(2)　$a=0$のとき，関数$f(x)$が$x>-1$においてつねに増加するためのbの条件を求めよ。

(3)　関数$f(x)$が$x>-1$においてつねに増加するためのa，bの条件を求め，その範囲をab平面上に図示せよ。　[2001]

14　放物線 $y=x^2-2px$ 上の点 $(t,\ t^2-2pt)$ における接線を y 軸方向に b だけ平行移動した直線を $l(t,\ b)$ とする。

(1)　直線 $l(t,\ b)$ の方程式を求めよ。

(2)　この放物線と直線 $l(t,\ b)$ とが, x 座標が正の 2 点で交わるための $t,\ b$ の範囲を求めよ。

(3)　放物線と直線 $l(t,\ b)$ とが 2 点で交わるとき, これらが囲む図形の面積 S を求めよ。

(4)　(3)の図形の面積 S を直線 $x=u$ で 2 等分したい。u を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　座標平面上に原点 O, 点 $\mathrm{A}(1,\ a)$, 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1)　$a=1$ のとき, $\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2)　$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形であり, a が有理数であるとき, s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。　[2017]

2　座標平面上の直線 $y=-1$ を l_1, 直線 $y=1$ を l_2 とし, x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について, 次の条件を考える。

$$d(\mathrm{P},\ l_1)\geqq \mathrm{PO}\quad \text{かつ}\quad d(\mathrm{P},\ l_2)\geqq \mathrm{PA}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ただし, $d(\mathrm{P},\ l)$ は点 P と直線 l の距離である。

(1)　条件①を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2)　条件①を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし, a の値は(1)で求めた範囲にあるとする。　[2014]

3　座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x+2y\leqq 5,\ 3x+y\leqq 8,\ -2x-y\leqq 4,\ -x-4y\leqq 7$$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$x+y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q および点 R の座標を求めよ。

(2)　$a>0$ かつ $b>0$ とする。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。　[2013]

4　座標平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2)　円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3)　不等式 $y\geqq\dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を D とする。また，不等式 $|x|+|y|\leqq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2\leqq 2$ の表す領域を B とする。そして，和集合 $A\cup B$，すなわち領域 A と領域 B を合わせた領域を E とする。このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D\cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ。　[2013]

5　$\angle\mathrm{A}$ が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし，線分 AM を $1:3$ に内分する点を P とする。また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB, AC との交点をそれぞれ Q, R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle\mathrm{QMR}$ を求めよ。

(2)　$\angle\mathrm{QMR}$ の 2 倍と $\angle\mathrm{QMB}$ の大小を判定せよ。　[2009]

6　a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C : y=ax^2\ (x\geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2)　曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)　$a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

[2005]

7 次の問いに答えよ。

(1) 原点を中心とする半径 $r\,(r>0)$ の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は，$ax+by=r^2$ で与えられることを示せ。

(2) 円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $C: y=x^2+1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これらの接線の方程式を求めよ。

(3) 問(2)における 3 本の接線のうち, x 軸の正の部分と交わる接線を l_1, x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

[2002]

8 3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) y 軸に平行な直線 $x=p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。 [2001]

■ 図形と計量

1 t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において, 辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また, AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下, t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。 [2016]

2　鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1)　A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

(2)　G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3)　△ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。　[2014]

3　三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，∠A と∠B に関する条件を求めよ。　[2010]

4　3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より長さが短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2)　この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3)　x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。　[2007]

5　長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1)　直円錐の展開図を用いて，l の長さを求めよ。

(2)　l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ とする。

(3)　P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0°<\theta\leqq 90°$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1 座標空間内の 3 点 A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(3,\ 2,\ 3)$，C$(4,\ 5,\ 6)$を通る平面をαとし，平面α上にない点P$(6,\ p,\ q)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から平面αに下ろした垂線とαとの交点を H とする。線分 PH の長さをp, qを用いて表せ。

(2) 点 P が$(p-9)^2+(q-7)^2=1$を満たしながら動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値と最小値を求めよ。 [2019]

2 平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し，$L=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$および$\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$とおくとき，次の等式を示せ。

$$L=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

(2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また，L の最小値は$\dfrac{1}{3}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)$ であることを示せ。 [2018]

3 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P, 辺 OB を$2:1$に内分する点を Q, 辺 OC を$1:3$に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。 [2015]

4 1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$を満たす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。辺 AP を$1:3$に内分する点を D, 辺 CP の中点を E, 辺 BC を$t:(1-t)$に内分する点を Q とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$t$を用いて表せ。

(3) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の値を求めよ。

(4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，tの値および線分 OP の長さを求めよ。 [2013]

5　原点を O とする座標空間に，3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 0,\ 2)$，$C(-2,\ 1,\ 3)$ がある。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle ABC$ において，$\angle B$ は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。

(2)　点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

(3)　$\triangle OAH$ の面積を求めよ。　[2012]

6　平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は $4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=10$ となることを示せ。

(3)　$4|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{PC}|^2=-4$ を満たす点を P とするとき，$|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ。

[2011]

7　座標平面に 3 点 $O(0,\ 0)$，$A(2,\ 6)$，$B(3,\ 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{CP}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2)　$s=\dfrac{1}{2}$ とし，t を $t\geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値を求めよ。

(3)　$s=1$ とし，t を $t\geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値を求めよ。　[2009]

8　t を $0\leqq t\leqq 1$ を満たす数とし，空間内の 4 点 $A(t,\ 0,\ 1)$，$B(1,\ t,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ t)$，$P\left(\dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t\right)$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle ABC$ は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　$\triangle ABC$ の重心を G とする。$\overrightarrow{PG}$ は $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直であることを示せ。

(3)　四面体 PABC の体積 $V(t)$ を求めよ。また $V(t)$ の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ。　[2007]

9　空間ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$について次の問いに答えよ。ただし，h と k は実数とする。

(1)　$h\vec{a}+\vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直であるとき，すべての実数 x に対して，$|x\vec{a}+\vec{b}| \geqq |h\vec{a}+\vec{b}|$ が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする。

(2)　$h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき，すべての実数 x, y に対して，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}| \geqq |h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 4,\ -2)$，$\vec{c}=(-3,\ -6,\ 6)$ とするとき，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ の最小値を与える実数 x, y と，そのときの最小値を求めよ。　[2006]

10　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ とする。平行四辺形 ABCD の辺 BC を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $1-\beta:\beta$ に内分する点を Q とする。また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ として次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　長さの比 $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$ および $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(3)　$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=1$，$\angle\mathrm{DAB}=60^\circ$ とするとき，$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を求めよ。　[2004]

11　空間内に四面体 OABC があり $\angle\mathrm{AOB}$, $\angle\mathrm{BOC}$, $\angle\mathrm{COA}$ はすべて 90° であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1)　$\angle\mathrm{OGA}$, $\angle\mathrm{OGB}$, $\angle\mathrm{OGC}$ がすべて 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

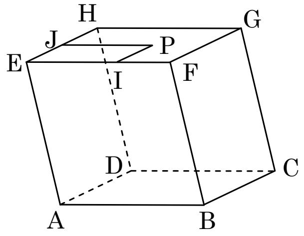
(2)　線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。　[2003]

12　空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ はベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2)　a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$|\overrightarrow{AE}|=2a$ とし，$\angle FBC=\angle BCD=90^\circ$，$\angle EAB=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{EI}|$，$y=|\overrightarrow{EJ}|$ とするとき，△ACP の面積を a, x, y を用いて表せ。

(3)　問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。　[2002]



（平行六面体ABCD-EFGH）

13　空間内に 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3) をとる。

(1)　空間内の点 P が $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2)　(1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3)　(1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。　[2000]

14　大きさ 1 の空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

を満たすとき，点 $D(\vec{d})$，$E(\vec{e})$，$F(\vec{f})$ および原点 O について次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ となるような実数 x, y, z を求めよ。同様に $\vec{f}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2)　ベクトル $\vec{d}$，$\vec{f}$，$\vec{d}-\vec{f}$ の大きさを求めよ。

(3)　三角形 ODF の面積を求めよ。

(4)　四面体 ODEF の体積を求めよ。　[1999]

15　辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とおき，線分 OA を$m:n$に内分する点を P，線分 BC を$m:n$に内分する点を Q，線分 CO を$m:n$に内分する点を R，線分 AB を$m:n$に内分する点を S とする。（ただし，$m, n>0$とする）

(1)　①　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{RS}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

　②　$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を求めよ。

　③　$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{RS}$が垂直かどうか調べよ。

(2)　①　$m=n$のとき，点 P, Q, R, S は同一平面上にあることを示せ。

　②　このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{OG}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

　③　G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1　以下の問いに答えよ。

(1)　nを自然数とするとき，2^nを 7 で割った余りを求めよ。

(2)　自然数mは，2 進法で 101 が 6 回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。mを 7 で割った余りを求めよ。　[2018]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2)　225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3)　225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。　[2017]

3　自然数nに対して，10^nを 13 で割った余りをa_nとおく。a_nは 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1}は$10a_n$を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2)　a_1，a_2，$\cdots$，a_6を求めよ。

(3)　以下の 3 条件を満たす自然数Nをすべて求めよ。

　(i)　Nを十進法で表示したとき 6 桁となる。

　(ii)　Nを十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

　(iii)　Nは 13 で割り切れる。　[2016]

4 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2) p を素数とし，k を 0 以上の整数とする。$2^{p-1}-1=p^k$ を満たす p，k の組をすべて求めよ。 [2015]

5 次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。 [2014]

6 100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした。以下の問いに答えよ。

(1) x が 0 以上の整数であるとき，次のことを示せ。

$\dfrac{1}{3}(100-7x)$ は，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，それ以外の場合は整数ではない。

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする。このとき，セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。

(3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき，A のみ，あるいは B のみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A，B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。 [2012]

7 数列 a_1，a_2，…，a_n，… は，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1-a_n{}^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{7}$ とする。$a_k=a_1$ を満たす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ。

[2011]

8 以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1) 和$1+2+\cdots+n$をnの多項式で表せ。

(2) 和$1^2+2^2+\cdots+n^2$をnの多項式で表せ。

(3) 和$1^3+2^3+\cdots+n^3$をnの多項式で表せ。 [2010]

9 放物線$C: y=x^2-1$と$a_1>1$を満たす実数a_1を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C上の点$(a_1,\ a_1{}^2-1)$における接線とx軸との交点のx座標をa_2とするとき，a_2をa_1を用いて表せ。

(2) (1)で求めたa_2に対して，C上の点$(a_2,\ a_2{}^2-1)$おける接線とx軸との交点のx座標をa_3とする。この操作を繰り返してできる数列をa_1，a_2，…，a_n，…とする。このとき，すべてのnに対して，$a_n>1$を示せ。

(3) $b_n=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$とおくとき，すべてのnに対して，$b_{n+1}<b_n{}^2$を示せ。

(4) $a_1=2$のとき，$b_n<10^{-12}$となるnの値を1つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10}2$を0.301として計算してよい。 [2008]

10 2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$a_1=b_1=1$および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n,\ b_{n+1}=2a_n{}^2+b_n{}^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$のとき，a_nは3で割り切れるが，b_nは3で割り切れないことを示せ。

(2) $n\geqq 2$のとき，a_nとb_nは互いに素であることを示せ。 [2006]

11 座標平面上で，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$，$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$が表す領域を，それぞれA, Bとする。

(1) 領域Aを図示せよ。

(2) 領域Bを図示せよ。

(3) 領域Bの点$(x,\ y)$で，xが正の整数でありyが整数であって，$\log_x|y|$が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。 [2003]

12　$\{m_k\}$を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y = x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し，点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を l_k とし，この直線と C とのもう 1 つの交点を P_{k+1} とする。ただし, C と l_k が接する場合は $\mathrm{P}_{k+1} = \mathrm{P}_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

(1)　a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。

(2)　数列$\{a_k\}$の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ。

(3)　$a_1 = \dfrac{m_1}{1+r}$ とする。このとき，ある 2 次関数 $y = bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 l_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ。ただし，$m_1 \neq 0$，$r \neq -1$，0 とする。　[2003]

13　正の整数 a に対し, a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし, 1 および a 自身も約数とする。たとえば，$f(1) = 1$ であり，$a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

(1)　a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1) f(b)$ が成り立つことを示せ。

　必要ならば，$1 + r + \cdots + r^m = \dfrac{r^{m+1} - 1}{r - 1}$ $(r \neq 1)$ を用いてよい。

(2)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geqq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3)　$a = 2^2 r$，$b = 2^4 s$ （r, s は正の奇数）の形をした偶数 a, b を考える。$f(a) = 2b$，$f(b) = 2a$ をみたす a, b を求めよ。　[2002]

14　次の問いに答えよ。

(1)　n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても，

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

(2)　$p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3)　整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

[2002]

15 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2$, $a_{n+1}={a_n}^2-a_n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与える。a_1, $\cdots$, a_n の積を P_n とおく。

(1) 各 n について $a_n>0$ であることを示せ。

(2) 各 n について $a_{n+1}=P_n+1$ であることを示せ。

(3) $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ とおく。S_1, S_2, S_3, S_4 を求めよ。

(4) 各 n について S_n を P_n で表せ。 [2001]

16 (1) 自然数 $a,\ b$ が互いに素であるとはどういうことか。

(2) 自然数 $a,\ b$ が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ。

(3) n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば, $\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし, 有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。

(4) n が自然数のとき, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。 [2001]

17 原点を O, 直線 $x=1$ 上の動点を P, 中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C とする。線分 OP と C との交点で原点でないものを Q とし, OP 上に $\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ を満たす点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ をとる。

(1) 点 P を動かしたとき, 点 R の軌跡を表す方程式を x と y とで表せ。

(2) $m,\ n$ を 100 以下の自然数として, 点 $\left(\dfrac{1}{m},\ \dfrac{1}{n}\right)$ が(1)で求めた曲線上にあるような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。 [2000]

18 実数 p, 自然数 q に対して, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n-p,\ b_1=q,\ b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$$

と定める。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け, 第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする。m を正の偶数とするとき第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ。

[1999]

19　(1)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

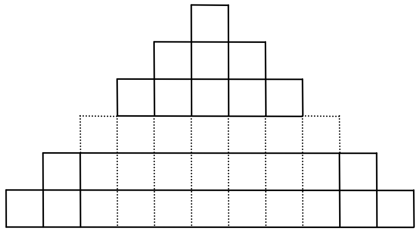
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

①　$m=2,\ 3,\ 4$ のとき，どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。

②　一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3)　辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。　[1998]



■ 確率

1　3 つの部品 a, b, c からなる製品が多数入った箱がある。製品を 1 つ取り出したとき，部品 a, b, c が不良品である確率について次のことがわかっている。

・部品 a が不良品である確率は p である。

・部品 a が不良品でないとき，部品 b が不良品である確率は q である。

・部品 a が不良品であるとき，部品 b も不良品である確率は $3q$ である。

・部品 b が不良品でないとき，部品 c が不良品である確率は r である。

・部品 b が不良品であるとき，部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし，$0<p<1$，$0<q<\frac{1}{3}$，$0<r<\frac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 製品を 1 つ取り出したとき，部品 a，b の少なくとも一方が不良品である確率を p, q を用いて表せ。

(2)　製品を 1 つ取り出したとき，部品 c が不良品である確率を p, q, r を用いて表せ。

(3)　製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき，部品 b も不良品である確率を p, q を用いて表せ。　[2018]

2　A と B の 2 人が A, B, A, B, …の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。さらに，p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。

(2)　さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

(3)　自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。　[2017]

3　袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

（操作）コインが点 $(x,\ y)$ にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x+1,\ y)$ に移動，青玉を取り出したときには点 $(x,\ y+1)$ に移動，白玉を取り出したときには点 $(x-1,\ y-1)$ に移動し，取り出した玉は袋に戻す。

最初に原点 $(0,\ 0)$ にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　操作を n 回繰り返したとき，白玉を一度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2)　操作を n 回繰り返したとき，到達点となりうる点の個数を求めよ。

(3)　座標平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4)　自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。　[2016]

4　袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。

(操作)　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。　[2015]

5 A さんは 5 円硬貨を 3 枚, B さんは 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお, 表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし, 硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて, 以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p, および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

[2014]

6 横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して, 以下の操作 L と操作 R を考える。

L : さいころを投げて, 出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R : さいころを投げて, 出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば, 表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに, 3 の目が出た場合は, 裏裏表表裏表 となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき, 表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき, 表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき, すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

[2013]

7 いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき, 次の試行 T を考える。

(試行 T) 箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ, その後, 箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個, 箱 B に白玉が 2 個入っているとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 試行 T を 1 回行ったときに, 箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2) 試行 T を 2 回行ったときに, 箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3) 試行 T を 3 回行ったときに, 箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

[2012]

8　1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1)　カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。

(2)　カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。

(3)　左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

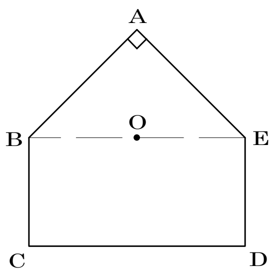
(4)　左端のカードの数字の期待値を求めよ。　[2011]

9　1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある。これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a, b, c, d, e, f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$ となる確率を求めよ。

(2)　$a+b=c+d$ となる確率を求めよ。　[2009]

10　図のような五角形 ABCDE（角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形）において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点 O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i=\mathrm{B}$ である。このとき，次の問いに答えよ。

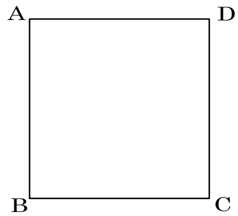


(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1q_2\cdots q_n=0$ となる確率を求めよ。　[2008]

11　図のような 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある。この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える。点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　表の出る確率が$\dfrac{1}{2}$のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。同様に上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 表の出る確率 p が$\dfrac{1}{2}$より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A, B, C, D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ。同様に 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ。　[2007]

12　1 つのさいころを 4 回投げて，出た目の数を順に x_1，x_2，x_3，x_4 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$x_1 < x_2$ となる確率を求めよ。

(2)　$x_1 < x_2 < x_3$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_k \geqq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ。ただし，$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のときは $k = 4$ と定める。　[2005]

13　スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に 6 個並んでいる。これらの 6 個の電球のスイッチを同時に入れた後，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

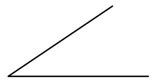
(1)　赤青青青青青，赤赤青青青青，…… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2)　色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3)　色の変化がちょうど n 回$(0 \leqq n \leqq 5)$起きる確率を求めよ。

(4)　色の変化の回数の期待値を求めよ。　[2004]

14　n を正の整数とする。平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし，1 回折れ線とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。



（1回折れ線）

(1)　平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i)　n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる。

(ii)　n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

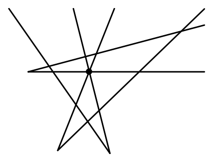
分割される平面の領域の数を L_n で表す。$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また，L_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。

(2)　平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。

(i)　n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

(ii)　n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない(右図を参照せよ)。

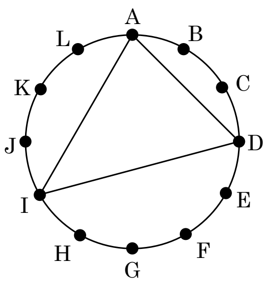
分割される平面の領域の数を H_n で表す。H_3 を求めよ。



（同一点で交わる 3本の1回折れ線）

(3)　H_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。　[2002]

15　右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, I を選べば，図のような三角形が得られる。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(2)　二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(3)　直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(4)　3 点を選んで得られる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。　[1998]

■ 論証

1　0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7,\quad g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2)　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。　[2019]

2　係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい，可約でないとき既約であるという。たとえば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1)　x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2)　1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3)　x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。　[2000]

3　下記の各命題についてその真偽を記し，理由を述べよ。

(1)　$\sqrt{7}$ は無理数である。

(2)　和も積も共に 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a，b は，共に有理数である。

(3)　無理数は何乗かすると有理数になる。ただし，ここで何乗かするというのは，n を 1 以上のある整数として n 乗することである。

(4)　和も積も共に有理数であるような 2 つの実数 a，b に対して，a^5+b^5 は有理数である。　[2000]

4　実数 a, b は $0<a<b$ を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\quad \sqrt{ab},\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

[1999]

5 (1)　$x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2)　①　不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

②　①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。　[1998]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

表に 3, 裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき，出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。 [2019]

解答例＋映像解説

表に 3, 裏に 8 が書かれた硬貨を 10 回投げ，表が n 回，裏が $10-n$ 回出たとき，出た数字 10 個の積は $3^n\cdot 8^{10-n}$ となる。そして，この積が 8 桁になることより，

$$10^7 \leqq 3^n\cdot 8^{10-n} < 10^8 \cdots\cdots\cdots ①$$

①より，$7\leqq \log_{10}3^n\cdot 8^{10-n}<8$ となり，$7\leqq n\log_{10}3+3(10-n)\log_{10}2<8$ から，

$$7\leqq (\log_{10}3-3\log_{10}2)n+30\log_{10}2<8 \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ から，②は，

$$7\leqq -0.4259n+9.030<8,\ 1.030<0.4259n\leqq 2.030 \cdots\cdots\cdots ③$$

③を満たす整数 n は，$n=3,\ 4$ となり，これより求める確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_{10}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{120}{2^{10}}+\frac{210}{2^{10}}=\frac{165}{512}$$

コメント

対数計算の基本問題です。繁雑な計算もありません。

問　題

自然数 n に対して，$a_n=(\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2)　$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

(3)　$a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。　[2008]

解答例

(1)　$a_1=(\cos 2)(\cos 1)$ なので,

$$4a_1\sin 1=4(\cos 2)(\cos 1)\sin 1=2(\cos 2)\sin 2=\sin 4$$

よって，$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2)　$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき

(1)から，$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ となるので成立している。

(ii)　$n=k$ のとき

$a_k=\dfrac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}$ と仮定すると,

$$a_{k+1}=(\cos 2^{k+1})a_k=(\cos 2^{k+1})\frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+1}\sin 1}=\frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2}\sin 1}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ である。

(3)　$\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin 1<1$ となるので, (2)より,

$$a_n=\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}\leqq\frac{1}{2^{n+1}\sin 1}<\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

コメント

サインの 2 倍角公式の適用に気付くことがポイントです。なお，(3)は，結論を変形して方針を立てましたが，大雑把な評価で証明可能でした。

問　題

$f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2)　不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

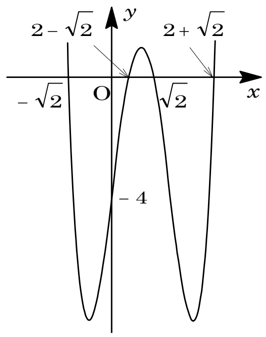
(3)　不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=0$ より，$(x^2-2)(x^2-4x+2)=0$ となり，

$$x=\pm\sqrt{2}\,,\ x=2\pm\sqrt{2}$$

小さい順に並べると，$-\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$



(2)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$f(n)\leqq 0$ の解は, (1)から,

$$-\sqrt{2}\leqq n\leqq 2-\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\leqq n\leqq 2+\sqrt{2}$$

n は整数なので，$n=-1,\ 0,\ 2,\ 3$

(3)　$f(n)\leqq 0$ を満たす整数 $n=-1,\ 0,\ 2,\ 3$ は，$f(n)\leqq 1$ を満たす。

次に，$f(-2)=28>1$，$f(4)=28>1$ より，$n\leqq -2$ または $n\geqq 4$ において，$f(n)\leqq 1$ を満たす n は存在しない。

さらに，$f(1)=1$ から，$n=1$ は $f(n)\leqq 1$ を満たす。

以上より，$f(n)\leqq 1$ を満たす整数は，$n=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ である。

コメント

数学Ⅱの範囲は超えていますが，4 次関数 $y=f(x)$ のグラフを対応させて考えています。(3)も視覚的に解いています。

問　題

関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|$ について，次の問いに答えよ。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　実数 k に対し，$f(x)=k$ を満たす x の個数を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=0$ より，$\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|=0$，$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$

すると，$\sin x=1$，$\sin x=0$ から，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ において，$x=\frac{\pi}{2}$，0，$\pm\pi$

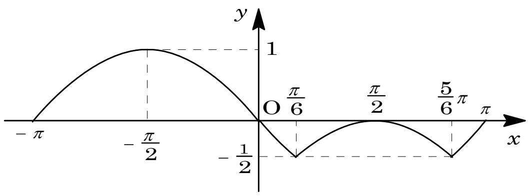
(2)　$g(x)=\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}$ とおくと，

(i)　$-\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき　$g(x)=-\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\sin x$

(ii)　$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\sin x-1$$

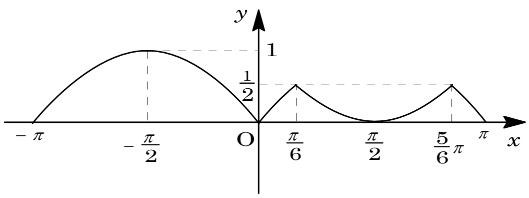
よって，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



すると，$f(x)=|g(x)|$ から，

$$f(x)=g(x)\quad(g(x)\geqq 0)$$
$$f(x)=-g(x)\quad(g(x)\leqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　$f(x)=k$ を満たす異なる x の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数に一致する。

したがって，$k<0$，$1<k$ のとき 0 個，$k=1$ のとき 1 個，$\frac{1}{2}<k<1$ のとき 2 個，$k=0$，$\frac{1}{2}$ のとき 4 個，$0<k<\frac{1}{2}$ のとき 6 個である。

コメント

絶対値が二重についている関数のグラフを描く問題です。丁寧に場合分けをすると，完答できます。

問　題

実数 x に対して，$[x]$は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\frac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0°<\theta<180°$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $(0°<\alpha<90°)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0\leqq\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。 [2005]

解答例

(1) $\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ より，$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ $\left(\frac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$ のもとで，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 2,\ 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3$$

すると，$-\frac{3}{2}\leqq\cos\theta<\frac{1}{2}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では，$60°<\theta<180°$

(2) $\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ より，$\sin\theta>0$ のもとで，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 1,\ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{1}{2}$$

すると，$\sin\theta\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では，$45°\leqq\theta\leqq 135°$

(3) 条件より，$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0$ ……①，$\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 0$ ……②

①より，$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ $\left(\frac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$ のもとで，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1,\ 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<2$$

すると，$-\frac{3}{2}\leqq\cos\theta<-\frac{1}{2}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では，

$$120°<\theta<180° \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$\sin\theta>0$ のもとで，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 0,\ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{3}{2},\ \sin\theta\geqq\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

条件から，$\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $(0°<\alpha<90°)$ なので，$0°<\theta<180°$ の範囲では，

$$\alpha\leqq\theta\leqq 180°-\alpha \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$\sin 120°>\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ から，$\alpha<120°<180°-\alpha$ となるので，③④より，求める θ の範囲は，$120°<\theta\leqq 180°-\alpha$ である。

コメント

ガウス記号に，三角関数，対数関数が混在し，盛りだくさんです。

問　題

実数 a, c を係数とする関数 $f(x)=ax^2+c$ について，次の条件を考える。

(＊)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で $f(x)\geqq (x+1)^2$ が成立する。

(1)　$a\geqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2)　$a\leqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が条件(＊)を満たしているとき，定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a，c と，そのときの定積分の値を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ で，$f(x)\geqq (x+1)^2$ より，$(a-1)x^2-2x+(c-1)\geqq 0$

$g(x)=(a-1)x^2-2x+(c-1)$ とおくと，$a\geqq 2$ から $a-1\geqq 1$ であり，

$$g(x)=(a-1)\Big(x-\frac{1}{a-1}\Big)^2-\frac{1}{a-1}+c-1$$

ここで，$a\geqq 2$ から $0<\dfrac{1}{a-1}\leqq 1$ なので，条件(＊)は，

$$g\Big(\frac{1}{a-1}\Big)=-\frac{1}{a-1}+c-1\geqq 0,\quad c\geqq\frac{1}{a-1}+1=\frac{a}{a-1}$$

よって，条件(＊)を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ である。

(2)　(i)　$1<a\leqq 2$ のとき　$a-1>0$，$\dfrac{1}{a-1}\geqq 1$ より，条件(＊)は，

$$g(1)=a-1-2+c-1\geqq 0,\quad c\geqq 4-a$$

(ii)　$a=1$ のとき　$g(x)=-2x+(c-1)$ より，条件(＊)は，

$$g(1)=-2+c-1\geqq 0,\quad c\geqq 3$$

(iii)　$a<1$ のとき　$a-1<0$，$\dfrac{1}{a-1}<0$ より，条件(＊)は，

$$g(1)=a-1-2+c-1\geqq 0,\quad c\geqq 4-a$$

(i)(ii)(iii)より，いずれの場合も，条件(＊)を満たす最小の c の値は $4-a$ である。

(3)　$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (ax^2+c)\,dx=\dfrac{a}{3}+c$ なので，

(i)　$a\geqq 2$ のとき　(1)より，$c\geqq\dfrac{a}{a-1}$ なので，

$$I\geqq\frac{a}{3}+\frac{a}{a-1}=\frac{a^2+2a}{3(a-1)}=\frac{1}{3}\Big(a+3+\frac{3}{a-1}\Big)=\frac{1}{3}\Big(a-1+\frac{3}{a-1}+4\Big)$$

ここで，相加・相乗平均の関係から，$a-1+\dfrac{3}{a-1}\geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\dfrac{3}{a-1}}=2\sqrt{3}$

等号は $a-1=\dfrac{3}{a-1}$，すなわち $(a-1)^2=3$，$a=1+\sqrt{3}$ のときに成立する。

よって，$I\geqq\dfrac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)$ となる。

(ii)　$a \leqq 2$ のとき　(2)より，$c \geqq 4-a$ なので,

$$I \geqq \frac{a}{3}+4-a=-\frac{2}{3}a+4 \geqq -\frac{2}{3}\cdot 2+4=\frac{8}{3}$$

(i)(ii)より，$\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)<\frac{8}{3}$ から, I の最小値は $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)$ である。

このとき，$a=1+\sqrt{3}$，$c=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

コメント

計算量は多いのですが，内容は基本事項の組合せです。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a>0$ とする。$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。実数 p に対し，x の関数 $px-f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1)　2 つの関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ。

(2)　実数 x に対し, p の関数 $xp-g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。$h(x)$ を求めよ。

(3)　直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ であることを示せ。　[2003]

解答例

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ で，$F(x)=px-f(x)$ とおくと，

$$F(x)=-ax^2+(p-b)x-c=-a\left(x-\frac{p-b}{2a}\right)^2+\frac{(p-b)^2}{4a}-c$$

$a>0$ より，$F(x)$ の最大値 $g(p)$ は，$g(p)=\dfrac{(p-b)^2}{4a}-c$ である。

$$g(x)=\frac{(x-b)^2}{4a}-c=\frac{1}{4a}x^2-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c$$

条件 $f(x)=g(x)$ より，$a=\dfrac{1}{4a}$ ……①，$b=-\dfrac{b}{2a}$ ……②，$c=\dfrac{b^2}{4a}-c$ ……③

①より，$4a^2=1$，$a>0$ から $a=\dfrac{1}{2}$ となり，②に代入して $b=-b$ から $b=0$，さらに③に代入して，$c=-c$ から $c=0$ である。よって，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

(2)　$G(p)=xp-g(p)$ とおくと，

$$G(p)=-\frac{1}{4a}p^2+\left(\frac{b}{2a}+x\right)p-\frac{b^2}{4a}+c=-\frac{1}{4a}\{p-(b+2ax)\}^2+ax^2+bx+c$$

よって，$G(p)$ の最大値 $h(x)$ は，$h(x)=ax^2+bx+c$ である。

(3)　直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接する条件は,

$$pt+q=f(t)\ \cdots\cdots\cdots④,\quad p=f'(t)\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$p=2at+b$，$t=\dfrac{p-b}{2a}$ ………⑥

⑥を④に代入して，$p\cdot\dfrac{p-b}{2a}+q=a\cdot\dfrac{(p-b)^2}{4a^2}+b\cdot\dfrac{p-b}{2a}+c$

$$q=\frac{(p-b)^2}{4a}+(b-p)\frac{p-b}{2a}+c=-\frac{(p-b)^2}{4a}+c=-g(p)\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦を④に代入すると，$pt-g(p)=f(t)$ ………⑧

よって，④かつ⑤は，⑦かつ⑧と同値なので，求める条件は，$g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ となる。

コメント

(3)の解は(1)と(2)を無視しています。何らかの関係があるとは思ったものの……。

問　題

実数 $p,\ q,\ r$ を係数とする関数 $f(x)=px^2+qx+r$ をここでは高々2 次の関数とよぶことにする。また, a, b, c は異なる 3 つの実数とする。

(1) $f(a)=1$, $f(b)=0$, $f(c)=0$ を満たす高々2 次の関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 高々2 次の関数 $f(x)$, $g(x)$ が $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, $f(c)=g(c)$ を満たすならば, $f(x)$ と $g(x)$ は同じ関数であることを示せ。

(3) $h(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ とすると,

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

であることを示せ。　[2000]

解答例

(1) $f(b)=f(c)=0$, $b\neq c$ なので, $f(x)=p(x-b)(x-c)$

$f(a)=1$ より, $p(a-b)(a-c)=1$, $p=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$ となり,

$$f(x)=\frac{1}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)$$

(2) $k(x)=f(x)-g(x)$ とおくと, 条件より, $a,\ b,\ c$ は異なる 3 つの実数で, しかも $k(a)=k(b)=k(c)=0$ から, $k(x)$ は $(x-a)(x-b)(x-c)$ で割り切れる。

ところが, $f(x)$, $g(x)$ は高々2 次の関数なので, $k(x)$ も高々2 次の関数となる。よって, $k(x)=0$, すなわち $f(x)=g(x)$ となる。

(3) $h'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$ より,

$$h'(a)=(a-b)(a-c),\ h'(b)=(b-a)(b-c),\ h'(c)=(c-a)(c-b)$$

よって, $\dfrac{h(x)}{h'(a)(x-a)}=\dfrac{h(x)}{(a-b)(a-c)(x-a)}=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)$

$$\frac{h(x)}{h'(b)(x-b)}=\frac{h(x)}{(b-a)(b-c)(x-b)}=\frac{1}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c)$$

$$\frac{h(x)}{h'(c)(x-c)}=\frac{h(x)}{(c-a)(c-b)(x-c)}=\frac{1}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

ここで, $F(x)=\dfrac{h(x)}{h'(a)(x-a)}+\dfrac{h(x)}{h'(b)(x-b)}+\dfrac{h(x)}{h'(c)(x-c)}$ とおくと, $F(x)$ は高々2 次の関数で, しかも $F(a)=F(b)=F(c)=1$ となる。

よって, (2)より $F(x)=1$ となり,

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

コメント

(3)では，(2)をどのように利用しようか迷いました。とにかく高々2 次の関数をつくらなくてはいけないので，証明する式の両辺に$h(x)$をかけたわけです。もし，これに気付かなければ，右辺をそのまま計算しても OK ですが。

問　題

k を実数として，$f(x)=x^2-2kx+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$ とおく。方程式 $f(x)=0$ が実数解 α，β $(\alpha\leqq\beta)$ をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) α，β が $\alpha\leqq1\leqq\beta$ を満たすように k の値の範囲を定めよ。

(2) (1)の場合に $f(x)$ の最小値がとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

(1) $f(x)=x^2-2kx+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$

$f(x)=0$ の実数解 α，β が $\alpha\leqq1\leqq\beta$ を満たす条件は，

$$f(1)=1-2k+\frac{1}{5}(2k-1)(4k-3)\leqq0$$

$(2k-1)(-5+4k-3)\leqq0$ より，$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq2$

(2) $f(x)=(x-k)^2-k^2+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)=(x-k)^2+\dfrac{3}{5}k^2-2k+\dfrac{3}{5}$ より，

$f(x)$ の最小値を $m(k)$ とおくと，

$$m(k)=\frac{3}{5}k^2-2k+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\left(k-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{15}$$

(1)より，$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq2$ なので，$m\left(\dfrac{5}{3}\right)\leqq m(k)\leqq m\left(\dfrac{1}{2}\right)$

よって，$-\dfrac{16}{15}\leqq m(k)\leqq-\dfrac{1}{4}$

コメント

超基本です。計算ミス以外に減点の可能性が考えられないくらいです。

問　題

k を実数とする。3 次関数 $y=x^3-kx^2+kx+1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4\left|k\right|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。　　　　[2019]

解答例＋映像解説

実数 k に対して，$f(x)=x^3-kx^2+kx+1$ とおくとき，$f'(x)=3x^2-2kx+k$

ここで，3 次関数 $y=f(x)$ が極大値と極小値をもつことより，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことが必要で，その判別式 $D/4=k^2-3k>0$ から，

$$k<0,\ 3<k\cdots\cdots\cdots(*)$$

このとき，$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$$\alpha=\frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3},\ \beta=\frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3}$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

そして，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は極大値 $f(\alpha)$，極小値 $f(\beta)$ をもち，

$$f(\alpha)-f(\beta)=\left[f(x)\right]_\beta^\alpha=\int_\beta^\alpha f'(x)dx=3\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{3}{6}(\alpha-\beta)^3=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{2\sqrt{k^2-3k}}{3}\Big)^3=\frac{4}{27}(k^2-3k)^{\frac{3}{2}}$$

ここで，条件より，$\dfrac{4}{27}(k^2-3k)^{\frac{3}{2}}=4\left|k\right|^3$ から，$(k^2-3k)^3=3^6k^6$ となり，

$$k^2-3k=9k^2,\ 8k^2=-3k$$

すると，$(*)$から，$k=-\dfrac{3}{8}$ となる。

コメント

3 次関数の極大値と極小値の差という有名問題です。類題は，たとえば 1998 年の東大・文にも見られます。なお，解答例はテクニカルな方法で記しましたが，普通に解と係数の関係を利用する解法でも構いません。

問　題

座標平面内の曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし，$a,\ b$ は実数，$c>0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) $a,\ b$ をそれぞれ c を用いて表せ。

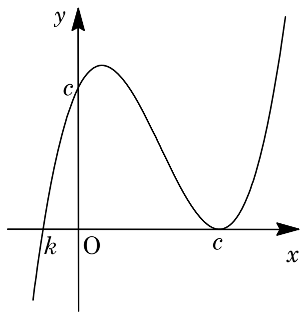
(2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。 [2018]

解答例＋映像解説

(1) 曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ ……①は，点 $(c,\ 0)$ $(c>0)$ で x 軸に接していることより，k を実数として，$y=(x-c)^2(x-k)$ と表せる。

さらに，$x=0$ のとき $y=c$ から $-c^2k=c$ となり，$k=-\dfrac{1}{c}$ より，

$$y=(x-c)^2\left(x+\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots\cdots②$$



②を展開すると，$y=x^3+\left(-2c+\dfrac{1}{c}\right)x^2+(c^2-2)x+c$ となり，①と比べて，

$$a=-2c+\frac{1}{c},\ \ b=c^2-2$$

(2) 曲線②と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{-\frac{1}{c}}^{c}(x-c)^2\left(x+\frac{1}{c}\right)dx=\int_{-\frac{1}{c}}^{c}(x-c)^2\left(x-c+c+\frac{1}{c}\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{c}}^{c}\left\{(x-c)^3+\left(c+\frac{1}{c}\right)(x-c)^2\right\}dx=\left[\frac{(x-c)^4}{4}+\left(c+\frac{1}{c}\right)\frac{(x-c)^3}{3}\right]_{-\frac{1}{c}}^{c}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{c}-c\right)^4-\frac{1}{3}\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(-\frac{1}{c}-c\right)^3=\frac{1}{12}\left(c+\frac{1}{c}\right)^4$$

ここで，$c>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から，$c+\dfrac{1}{c}\geqq 2\sqrt{c\cdot\dfrac{1}{c}}=2$ である。なお，等号は $c=\dfrac{1}{c}$ すなわち $c=1$ のときに成立する。

したがって，$S\geqq\dfrac{1}{12}\cdot 2^4=\dfrac{4}{3}$ から，S を最小にする c の値は $c=1$ である。

コメント

微積分の総合問題です。(2)の積分計算は，結果だけでなく過程も記しましたが，これは準公式といっても差し支えないものです。

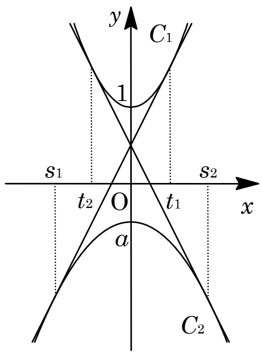
問　題

定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1 : y=2x^2+1$，$C_2 : y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2)　C_1 と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説



(1)　放物線 $C_1 : y=2x^2+1$ ……①，$C_2 : y=-x^2+a$ ……②の共通接線に対して，C_1，C_2 上の接点をそれぞれ $(t,\ 2t^2+1)$，$(s,\ -s^2+a)$ とおく。

①より，$y'=4x$ から接線の方程式は，

$$y-(2t^2+1)=4t(x-t),\quad y=4tx-2t^2+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$y'=-2x$ から接線の方程式は，

$$y-(-s^2+a)=-2s(x-s)$$
$$y=-2sx+s^2+a\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④が一致することより，

$$4t=-2s\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad -2t^2+1=s^2+a\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤から $s=-2t$ となり，⑥に代入すると，$-2t^2+1=4t^2+a$ から，

$$t^2=\frac{1-a}{6},\quad t=\pm\sqrt{\frac{1-a}{6}}$$

よって，共通接線は，③から $y=\pm4\sqrt{\dfrac{1-a}{6}}\,x-2\cdot\dfrac{1-a}{6}+1$ となり，

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{6-6a}\,x+\frac{a+2}{3},\quad y=-\frac{2}{3}\sqrt{6-6a}\,x+\frac{a+2}{3}$$

(2)　右上図のように，接点の x 座標を $t_1=\sqrt{\dfrac{1-a}{6}}$，$s_1=-2t_1$ とおき，C_1，C_2 と 2 本の共通接線で囲まれた図形の面積を，それぞれ S_1，S_2 とする。

すると，y 軸に関する対称性から，

$$S_1=2\int_0^{t_1}\{2x^2+1-(4t_1x-2t_1{}^2+1)\}dx=4\int_0^{t_1}(x-t_1)^2dx$$
$$=\frac{4}{3}\Big[(x-t_1)^3\Big]_0^{t_1}=\frac{4}{3}t_1{}^3$$
$$S_2=2\int_{s_1}^{0}\{-2s_1x+s_1{}^2+a-(-x^2+a)\}dx=2\int_{s_1}^{0}(x-s_1)^2dx$$
$$=\frac{2}{3}\Big[(x-s_1)^3\Big]_{s_1}^{0}=-\frac{2}{3}s_1{}^3=\frac{16}{3}t_1{}^3$$

これより，$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{16}{4}=4$ となる。

コメント

放物線と接線で囲まれる図形の面積という頻出の構図です。なお，(1)では重解条件を利用しても構いません。

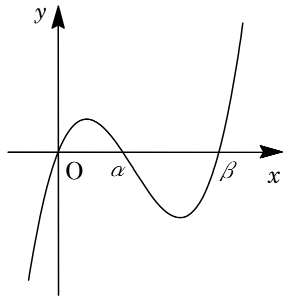
問　題

座標平面において, x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり, 曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし, a, b は実数である。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して, $0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき, S を最小とする α を β の式で表せ。　　　　[2016]

解答例＋映像解説



(1) 曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸と 3 点 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ で交わっているので, C は,

$$y=x(x-\alpha)(x-\beta)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$$

さて, C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とし, $f(x)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$ とおくと,

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} -f(x)dx\\
&=\int_0^{\alpha} f(x)dx-\left(\int_0^{\beta} f(x)dx-\int_0^{\alpha} f(x)dx\right)\\
&=2\int_0^{\alpha} f(x)dx-\int_0^{\beta} f(x)dx\\
&=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^{\alpha}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^{\beta}\\
&=2\left(\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta}{3}+\frac{\alpha^3\beta}{2}\right)-\left(\frac{\beta^4}{4}-\frac{\alpha\beta^3+\beta^4}{3}+\frac{\alpha\beta^3}{2}\right)\\
&=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta+\frac{1}{12}\beta^4-\frac{1}{6}\alpha\beta^3
\end{aligned}$$

(2) β の値を固定し, S を α の関数と考え $S(\alpha)$ と記すと, (1)から,

$$S(\alpha)=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{\beta}{3}\alpha^3-\frac{\beta^3}{6}\alpha+\frac{1}{12}\beta^4\quad(0<\alpha<\beta)$$

$$\begin{aligned}
S'(\alpha)&=-\frac{2}{3}\alpha^3+\beta\alpha^2-\frac{\beta^3}{6}=-\frac{1}{6}(4\alpha^3-6\beta\alpha^2+\beta^3)\\
&=-\frac{1}{6}(2\alpha-\beta)(2\alpha^2-2\beta\alpha-\beta^2)
\end{aligned}$$

すると, $\alpha=\dfrac{\beta}{2}$, $\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\beta$ のとき $S'(\alpha)=0$ となり, $0<\alpha<\beta$ における $S(\alpha)$ の増減は右表のようになる。

α	0	$\cdots$	$\dfrac{\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$\alpha=\dfrac{\beta}{2}$のとき，Sは最小となる。

コメント

定積分と面積についての基本問題です。ただ，(2)の結論は感覚的にわかりますが。

問　題

座標平面上の 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -x^2 + ax + b$ を考える。ただし，a, b は実数とする。

(1)　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a, b に関する条件を求めよ。

以下，a，b が(1)の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする。

(2)　b を a を用いて表せ。

(3)　a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1)　$C_1 : y = x^2 \cdots\cdots$①，$C_2 : y = -x^2 + ax + b \cdots\cdots$②を連立すると，

$$x^2 = -x^2 + ax + b,\ 2x^2 - ax - b = 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わることより，③の判別式 $D = a^2 + 8b > 0$

(2)　③の解 $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 8b}}{4}$ を $x = \alpha$，β　$(\alpha < \beta)$ とおくと，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_\alpha^\beta (-x^2 + ax + b - x^2)dx = \int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3$$

条件より，$\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = 9$ から $\beta - \alpha = 3$ となり，$\dfrac{\sqrt{a^2+8b}}{2} = 3$ である。

よって，$a^2 + 8b = 36$ から，$b = -\dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2} \cdots\cdots\cdots$④

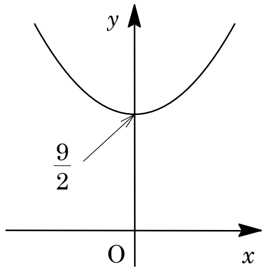
(3)　④を②に代入すると，$C_2 : y = -x^2 + ax - \dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2} = -\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2}$

そこで，C_2 の頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$x = \frac{a}{2},\ y = \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

a がすべての実数値をとって変化するとき，点 P の軌跡は，放物線 $y = \dfrac{1}{8}(2x)^2 + \dfrac{9}{2}$ すなわち $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}$ である。

図示すると，右図の曲線となる。



コメント

センターレベルの基本問題です。なお，(3)において，軌跡の限界については考えなくてもよいにもかかわらず，図示する意味は……。

問　題

関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<q$)。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき, 2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。 [2012]

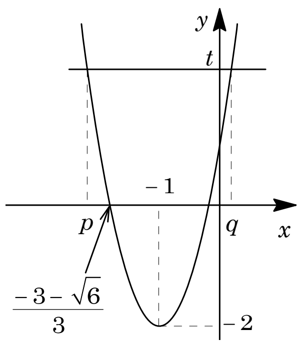
解答例

(1) $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ に対して,

$$f'(x)=3x^2+6x+1$$

ここで, $t \geqq 0$ のとき，$f'(x)=t$ とすると,

$$3x^2+6x+1=t,\ 3(x+1)^2-2=t \cdots\cdots\cdots ①$$



右図より，①は異なる 2 つの実数解をもつことより，接点が 2 個，すなわち接線が 2 本存在する。

(2) ①の解が $x=p,\ q\ (p<q)$ なので,

$$p+q=-\frac{6}{3}=-2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(p)+f(p)=p^3+3p^2+p-1+q^3+3q^2+q-1$$
$$=(p+q)^3-3pq(p+q)+3(p+q)^2-6pq+(p+q)-2$$

②より，$f(p)+f(p)=-8+6pq+12-6pq-2-2=0$

よって，$\dfrac{p+q}{2}=-1$，$\dfrac{f(p)+f(p)}{2}=0$ となり，$\mathrm{P}(p,\ f(p))$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にある。

(3) $p \leqq \dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$ として，$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+(p^3+3p^2+p-1)^2$

ここで，$u=(p+1)^2$ とおくと，$p+1 \leqq -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ から，$u \geqq \dfrac{2}{3}$ となり,

$$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+\left\{(p+1)^3-2(p+1)\right\}^2=u+u(u-2)^2=u^3-4u^2+5u$$

$g(u)=u^3-4u^2+5u$ とおくと,

$$g'(u)=3u^2-8u+5$$
$$=(3u-5)(u-1)$$

$g(u)$ の増減は右表のようになる。

u	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(u)$		+	0	−	0	+
$g(u)$	$\frac{50}{27}$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

そして，$u=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{5}{3}$ で最小値 $\dfrac{50}{27}$ をとる。

さて, (2)より，$\mathrm{PQ}=2\mathrm{PA}=2\sqrt{g(u)}$ となるので, PQ の最小値は,

$$2\sqrt{\frac{50}{27}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{9}$$

$u=\dfrac{2}{3}$ では，$p=-1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$，②より，$q=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

$u=\dfrac{5}{3}$ では，$p=-1-\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$，②より，$q=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$

コメント

(3)の変数の置き換えは, 2 段階だったものを，まとめて記しています。

問　題

放物線$y=x^2$上の点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$から直線$y=x$へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

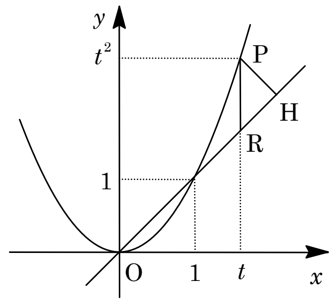
(1)　H の座標をtを用いて表せ。

(2)　P を通りy軸に平行な直線と直線$y=x$との交点を R とするとき，三角形 PRH の面積をtを用いて表せ。

(3)　$x\geqq 1$の範囲において，放物線$y=x^2$と直線$y=x$および線分 PH とで囲まれた図形の面積をS_1とするとき，S_1をtを用いて表せ。

(4)　放物線$y=x^2$と直線$y=x$で囲まれた図形の面積をS_2とする。$S_1=S_2$であるとき，tの値を求めよ。　[2011]

解答例



(1)　放物線$y=x^2$上の点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$から直線$y=x$ ……①

への垂線の方程式は，

$$y-t^2=-(x-t),\quad y=-x+t^2+t\ \cdots\cdots ②$$

①②より，$x=-x+t^2+t$，$x=y=\dfrac{t^2+t}{2}$

よって，点 H の座標は，$\left(\dfrac{t^2+t}{2},\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$である。

(2)　$t>1$から，点 P と直線①の距離は，

$$\mathrm{PH}=\frac{|t-t^2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{t^2-t}{\sqrt{2}}$$

△PRH は直角二等辺三角形より，その面積S_0は，$S_0=\dfrac{1}{2}\mathrm{PH}^2=\dfrac{1}{4}t^2(t-1)^2$

(3)　放物線$y=x^2$，直線$y=x$，線分 PH で囲まれた図形の面積S_1は，

$$S_1=\int_1^t(x^2-x)\,dx+S_0=\frac{1}{3}(t^3-1)-\frac{1}{2}(t^2-1)+\frac{1}{4}t^2(t-1)^2$$
$$=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}$$

(4)　放物線$y=x^2$と直線$y=x$で囲まれた図形の面積S_2は，

$$S_2=\int_0^1(x-x^2)\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$より，$\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$となり，$t^2(3t^2-2t-3)=0$

$t>1$から，$t=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

コメント

放物線を題材にした図形の基本問題です。

問　題

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし，その両端を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする。C 上の 2 点 M，N を $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ となるようにとる。ただし，$\mathrm{N}\neq\mathrm{B}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{MAB}=\theta$ とおくとき，弦の長さ MB および点 M の座標を θ を用いて表せ。

(2)　点 N から x 軸におろした垂線を NP としたとき, PB を θ を用いて表せ。

(3)　$t=\sin\theta$ とおく。条件 $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ を t を用いて表せ。

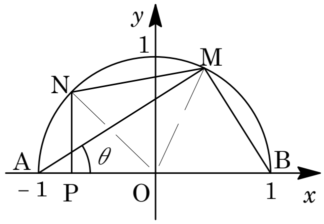
(4)　$\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となるような点 M がただ一つあることを示せ。　[2010]

解答例

(1)　$\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ より，点 M は BN の垂直二等分線上にあり，$\angle\mathrm{AMB}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{MB}=\mathrm{AB}\sin\theta=2\sin\theta$$

また，$\angle\mathrm{MOB}=2\theta$ から，$\mathrm{M}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$



(2)　$\angle\mathrm{NOB}=4\theta$ から，$\mathrm{N}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$

よって，$\mathrm{P}(\cos 4\theta,\ 0)$ より，$\mathrm{PB}=1-\cos 4\theta$

(3)　$\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ より，$2\sin\theta=1-\cos 4\theta$ となり，

$$1-\cos 4\theta=2\sin^2 2\theta=8\sin^2\theta\cos^2\theta=8\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$

これから，$t=\sin\theta$ とおくと，$2t=8t^2(1-t^2)$ ………①

ここで，$0^\circ<4\theta\leqq 180^\circ$ $(0^\circ<\theta\leqq 45^\circ)$ から，$0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，①は,

$$1=4t(1-t^2),\ \ 4t^3-4t+1=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　$f(t)=4t^3-4t+1$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-4=4(3t^2-1)$$

$0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，②を満たす t はただ一つ存在する。このとき，$t=\sin\theta$ から，θ すなわち点 M はただ一つ存在する。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$1-\sqrt{2}$

コメント

丁寧な誘導のついた問題です。ただ，それが行き過ぎて, (1)と(2)は不気味です。

問　題

曲線 $y=x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし, $a<0<b$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2)　線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3)　$\angle\mathrm{PRQ}=90°$ を満たしながら P と Q が動くとき, (2)で求めた面積の最小値を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　$y=x^2$ より $y'=2x$ となり, 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様にして, 点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は,

$$y=2bx-b^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $2ax-a^2=2bx-b^2$

$$2(b-a)x=b^2-a^2,\ \ x=\frac{a+b}{2}$$

①より, $y=2a\cdot\dfrac{a+b}{2}-a^2=ab$ となり, $\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$である。

ここで, 線分 PQ の中点を M とおくと, $\mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$となり,

$$\mathrm{MR}=\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(b-a)^2}{2}$$

よって, $\triangle\mathrm{PRQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(b-a)^2}{2}\cdot(b-a)=\dfrac{1}{4}(b-a)^3$

(2)　直線 PQ の方程式は,

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a),\ \ y=(a+b)x-ab$$

さて, 線分 PQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を S_0 とすると,

$$S_0=\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

さらに, $\triangle\mathrm{PSQ}=\triangle\mathrm{PRQ}$ を用いると, 折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=S_0+\triangle\mathrm{PSQ}=\frac{1}{6}(b-a)^3+\frac{1}{4}(b-a)^3=\frac{5}{12}(b-a)^3\ \cdots\cdots\cdots③$$

(3)　条件より, 直線 PR と QR が直交するので, $2a\cdot 2b=-1$, $a=-\dfrac{1}{4b}$

すると, ③に代入して, $S=\dfrac{5}{12}\left(b+\dfrac{1}{4b}\right)^3$

$b>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係から，

$$b+\frac{1}{4b} \geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4b}}=1$$

ここで，等号は$b=\dfrac{1}{4b}\left(b=\dfrac{1}{2}\right)$のときに成立する。

以上より，S の最小値は$\dfrac{5}{12}\cdot 1^3=\dfrac{5}{12}$である。

コメント

形式を変更すると，センター試験にそのまま流用できます。

問　題

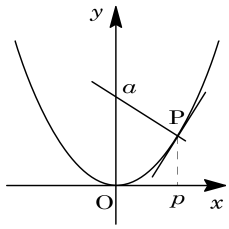
放物線$C : y = x^2$上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点$(p,\ p^2)$における C の法線の方程式を求めよ。

(2)　y 軸上の点$(0,\ a)$を通る C の法線の本数を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$C : y = x^2$ より，$y' = 2x$ となり，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$における接線の方向ベクトル，すなわち法線の法線ベクトルの成分は，$(1,\ 2p)$と表せる。



これより，P における法線の方程式は，

$$(x - p) + 2p(y - p^2) = 0$$

$$x + 2py - p - 2p^3 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　①が点$(0,\ a)$を通る条件は，$2pa - p - 2p^3 = 0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，②の異なる実数解 p の個数が，点$(0,\ a)$を通る法線の本数に一致することより，

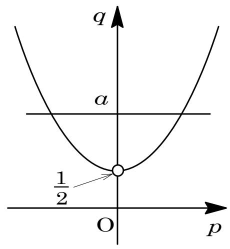
(i)　$p = 0$ のとき

②は任意の実数 a で成立する。

(ii)　$p \neq 0$ のとき

②より，$2a - 1 - 2p^2 = 0$，$a = p^2 + \dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ③$

さて，$p \neq 0$ のもとで，③の異なる実数解 p の個数は，直線 $q = a$ と $q = p^2 + \dfrac{1}{2}$ のグラフの共有点の個数に一致する。



すると，右図より，$a > \dfrac{1}{2}$ のとき p は 2 個存在し，$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき p は存在しない。

(i)(ii)より，題意の法線の本数は，$a > \dfrac{1}{2}$ のとき 3 本，$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき 1 本である。

コメント

法線の本数についての基本的な問題です。ただし，$a = \dfrac{1}{2}$ の場合は要注意です。

問　題

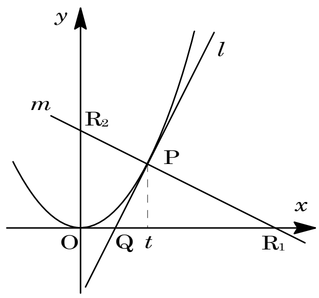
曲線$C : y = x^2$上に点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする。ただし，$t>0$ とする。接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれR_1，R_2とする。また，$\triangle \mathrm{PQR}_1$の面積をS_1とし，曲線 C と y 軸および線分PR_2で囲まれる図形の面積をS_2とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 Q と点R_1の x 座標を t を用いて表せ。

(2)　面積S_2を t を用いて表せ。

(3)　$S_1 > S_2$が成り立つ t の範囲を求めよ。　[2006]

解答例



(1)　$y = x^2$に対して，$y' = 2x$ より，接線 l の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2$$

x 軸との交点 Q は，$2tx - t^2 = 0$ より $x = \dfrac{t}{2}$

また, P を通り, l に垂直な直線 m の方程式は,

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t),\quad y = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2} + t^2$$

x 軸との交点R_1は，$-\dfrac{1}{2t}x + \dfrac{1}{2} + t^2 = 0$ より，

$$\frac{1}{2t}x = \frac{1}{2} + t^2,\quad x = t + 2t^3$$

(2)　R_2の y 座標は，$y = \dfrac{1}{2} + t^2$ より，

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(t^2 + \frac{1}{2} + t^2\right)\cdot t - \int_0^t x^2 dx = t^3 + \frac{1}{4}t - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t$$

(3)　$S_1 = \dfrac{1}{2}\left(t + 2t^3 - \dfrac{1}{2}t\right)\cdot t^2 = \dfrac{1}{4}t^3 + t^5$ となり，$S_1 > S_2$から，

$$\frac{1}{4}t^3 + t^5 > \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t,\quad 12t^5 - 5t^3 - 3t > 0,\quad t(4t^2 - 3)(3t^2 + 1) > 0$$

よって, $t>0$ から，$t > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

コメント

微積分に関するセンターレベルの問題です。曲線と直線の位置関係についても，場合分けは必要ありません。

問　題

2 つの関数 $f(x)=-px^2+2$ $(p>0)$，$g(x)=|x|-2$ が与えられていて，放物線 $y=f(x)$ が 2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るとする。

(1) p の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点をすべて求めよ。

(3) (2)で求めた交点のうち，x 座標が最小になる点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。このとき，点 A における $y=f(x)$ の接線 $y=h(x)$ を求めよ。また，この接線 $y=h(x)$ と $y=g(x)$ の，点 A とは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g(b))$ を求めよ。

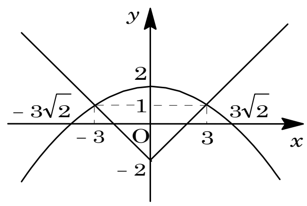
(4) 次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a\leqq x\leqq b,\ y\leqq h(x),\ y\geqq f(x),\ y\geqq g(x)$$

[2004]

解答例

(1) 放物線 $y=-px^2+2$ が 2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ と $(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るので，$0=-18p+2$，$p=\dfrac{1}{9}$



(2) $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$ より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフはともに y 軸対称である。

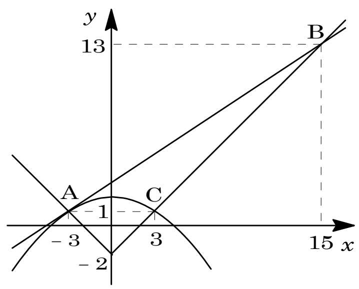
これより，$x\geqq 0$ において，$f(x)=g(x)$ とすると，

$$-\frac{1}{9}x^2+2=x-2,\ x^2+9x-36=0,\ (x+12)(x-3)=0$$

$x\geqq 0$ から，$x=3$，$y=3-2=1$ となる。

対称性から，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の座標は，$(3,\ 1)$，$(-3,\ 1)$ である。

(3) $f'(x)=-\dfrac{2}{9}x$ から，$f'(-3)=\dfrac{2}{3}$ となる。



これより，$\mathrm{A}(-3,\ 1)$ における接線の方程式は，

$$y-1=\frac{2}{3}(x+3),\ y=\frac{2}{3}x+3$$

$y=x-2$ との交点は，$\dfrac{2}{3}x+3=x-2$ から $x=15$

$$y=15-2=13$$

よって，$\mathrm{B}(15,\ 13)$ となる。

(4) $\mathrm{C}(3,\ 1)$ として，求める図形の面積を S とすると，

$$S=\triangle\mathrm{ABC}-2\int_0^3\left(-\frac{x^2}{9}+2-1\right)dx=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12-2\int_0^3\left(-\frac{x^2}{9}+1\right)dx$$

$$=36-2\left[-\frac{1}{27}x^3+x\right]_0^3=32$$

コメント

計算ミスが致命傷になる超基本題です。

問　題

関数$f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$を考える。

(1)　関数$f(x)$がつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a=0$のとき，関数$f(x)$が$x>-1$においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3)　関数$f(x)$が$x>-1$においてつねに増加するためのa, bの条件を求め，その範囲をab平面上に図示せよ。　[2001]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$に対して，$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$

関数$f(x)$がつねに増加する条件は，$f'(x)\geqq 0$である。ただし，等号は恒等的には成立しない。

(i)　$a=0$のとき　$f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$なので，$2b=0$かつ$b+1>0$

よって，$b=0$となる。

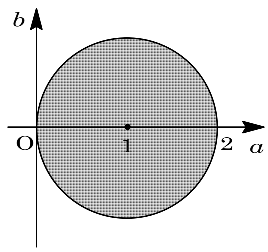
(ii)　$a\neq 0$のとき　$a>0$かつ$f'(x)=0$の判別式$D\leqq 0$

$$D/4=(a+b)^2-2a(b+1)\leqq 0,\ a^2+b^2-2a\leqq 0$$

よって，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

(i)(ii)より，$a=b=0$，または$a>0$かつ$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

すなわち，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。



(2)　$a=0$のとき，$x>-1$で$f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$となる条件は,

(i)　$2b=0$のとき　(1)より適する。

(ii)　$2b\neq 0$のとき　$2b>0$かつ$f'(-1)=-2b+b+1=-b+1\geqq 0$

よって, $0<b\leqq 1$となる。

(i)(ii)より，求める条件は, $0\leqq b\leqq 1$

(3)　$a\neq 0$のとき　$f'(x)=2a\left(x+\dfrac{a+b}{2a}\right)^2-\dfrac{a^2+b^2-2a}{2a}$

$x>-1$で$f'(x)\geqq 0$となる条件は, $a>0$において,

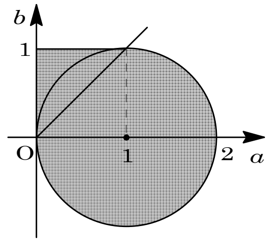
(i)　$-\dfrac{a+b}{2a}\leqq -1$ $(b\geqq a)$のとき

$f'(-1)=2a-2(a+b)+b+1=-b+1\geqq 0$より, $b\leqq 1$となる。

(ii)　$-\dfrac{a+b}{2a}>-1$ $(b<a)$のとき

$f'(x)=0$の判別式$D\leqq 0$なので, (1)より，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

(2)と合わせると，$a=0$ のとき $0\leqq b\leqq 1$，$a>0$ のとき $b\geqq a$ ならば $b\leqq 1$ で，$b<a$ ならば $(a-1)^2+b^2\leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。



コメント

ていねいに場合分けをして，結論を導いていく標準的な問題です。

問　題

放物線$y=x^2-2px$上の点$(t,\ t^2-2pt)$における接線を y 軸方向に b だけ平行移動した直線を$l(t,\ b)$とする。

(1)　直線$l(t,\ b)$の方程式を求めよ。

(2)　この放物線と直線$l(t,\ b)$とが, x座標が正の 2 点で交わるための t, b の範囲を求めよ。

(3)　放物線と直線$l(t,\ b)$とが 2 点で交わるとき，これらが囲む図形の面積 S を求めよ。

(4)　(3)の図形の面積Sを直線$x=u$で 2 等分したい。uを求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$y=x^2-2px$ ……①より，$y'=2x-2p$

$x=t$における接線は，$y=(2t-2p)(x-t)+(t^2-2pt)=2(t-p)x-t^2$

これより，求める直線$l(t,\ b)$は，$y=2(t-p)x-t^2+b$ ………②

(2)　①②の交点の x 座標は，$x^2-2px=2(t-p)x-t^2+b$

$$x^2-2tx+t^2-b=0 \text{ ………③}$$

③の解を$x=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$とすると，$0<\alpha<\beta$より，

$D/4=t^2-(t^2-b)>0$から，$b>0$ ………④

$\alpha+\beta=2t>0$から，$t>0$ ………⑤

$\alpha\beta=t^2-b>0$から，$b<t^2$ ………⑥

④⑤⑥をまとめて，$t>0$，$0<b<t^2$

(3)　$S=\int_\alpha^\beta\left\{2(t-p)x-t^2+b-(x^2-2pt)\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$ ………⑦

よって，$S=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$

$$=\frac{1}{6}\left\{(2t)^2-4(t^2-b)\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}b\sqrt{b}$$

(4)　⑦より，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$によって, Sは 2 等分されることがわかる。

すなわち，$u=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=t$

コメント

微積分についての基本問題です。(4)は⑦の式の意味を考えると, 瞬間的に答が求まります。

問　題

座標平面上に原点 O，点 $A(1,\ a)$，点 $B(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

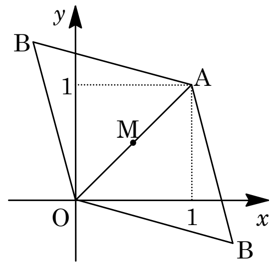
(1)　$a=1$ のとき，△OAB が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2)　$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3)　△OAB が正三角形であり，a が有理数であるとき，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　原点 O，$A(1,\ a)$，$B(s,\ t)$ に対し，辺 OA の中点を M とし，$\overrightarrow{OA}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}$ とする。



ここで，正三角形 OAB に対し，$a=1$ のとき，$M\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，

$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1)$，$MB=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{6}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OM}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\vec{n}$$

$$=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，$s=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，$t=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$　（複号同順）

(2)　$\sqrt{3}$ が無理数でないとすると，p,q を互いに素な自然数として $\sqrt{3}=\frac{q}{p}$ とおけ，

$$\sqrt{3}p=q,\ 3p^2=q^2$$

すると，q^2 は 3 の倍数，すなわち q は 3 の倍数となる。

これより，k を自然数として，$q=3k$ とおけ，

$$3p^2=9k^2,\ p^2=3k^2$$

すると，p^2 は 3 の倍数，すなわち p も 3 の倍数となり，$p,\ q$ が互いに素ということに反する。よって，$\sqrt{3}$ は無理数である。

(3)　(1)と同様にすると，$M\left(\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}\right)$，$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a,\ -1)$，$MB=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+1}$

$$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a,\ -1)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}\right)\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，$s=\frac{1\pm\sqrt{3}a}{2}$，$t=\frac{a\mp\sqrt{3}}{2}$　（複号同順）………①

さて，a が有理数であるとき，①から $\pm\sqrt{3}=a-2t$ ………②

ここで，t が有理数であると仮定すると，②の右辺は有理数となり，(2)の結論に反する。したがって，t は無理数である。

すなわち, s と t のうち少なくとも 1 つは無理数である。

コメント

図形と式に実数の性質が融合した問題です。(1)(2)が(3)への誘導でしょうが, 何か肩すかしを食らったような……。

問　題

座標平面上の直線 $y=-1$ を l_1, 直線 $y=1$ を l_2 とし, x 軸上の 2 点 O(0, 0), A$(a,\ 0)$ を考える。点 P$(x,\ y)$ について, 次の条件を考える。

$$d(\mathrm{P},\ l_1)\geqq \mathrm{PO}\quad かつ\quad d(\mathrm{P},\ l_2)\geqq \mathrm{PA}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ただし, $d(\mathrm{P},\ l)$ は点 P と直線 l の距離である。

(1) 条件①を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2) 条件①を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし, a の値は(1)で求めた範囲にあるとする。 [2014]

解答例＋映像解説

(1) $l_1 : y=-1$, $l_2 : y=1$, O(0, 0), A$(a,\ 0)$, P$(x,\ y)$ に対して, $d(\mathrm{P},\ l_1)\geqq\mathrm{PO}$ かつ $d(\mathrm{P},\ l_2)\geqq\mathrm{PA}$ ……①より,

$$|y+1|\geqq\sqrt{x^2+y^2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad |y-1|\geqq\sqrt{(x-a)^2+y^2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より, $(y+1)^2\geqq x^2+y^2$, $y\geqq\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots④$

③より, $(y-1)^2\geqq(x-a)^2+y^2$, $y\leqq-\dfrac{1}{2}(x-a)^2+\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

そこで, ①を満たす点 P が存在する条件は, ④⑤より, ある x に対して,

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\leqq-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2},\quad 2x^2-2ax+a^2-2\leqq 0$$

これより, $2x^2-2ax+a^2-2=0\cdots\cdots⑥$の判別式を D とおくと,

$$D/4=a^2-2(a^2-2)=-a^2+4\geqq 0,\quad -2\leqq a\leqq 2$$

(2) ⑥より, $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2+4}}{2}$ となり, この値を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと, 点 P 全体がなす図形の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right\}dx=\int_\alpha^\beta-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{-a^2+4}\right)^3$$

コメント

軌跡と領域についての標準的な問題です。出題範囲外ですが, 題材は数 C の放物線の定義がベースになっています。

問　題

座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x+2y \leqq 5,\ 3x+y \leqq 8,\ -2x-y \leqq 4,\ -x-4y \leqq 7$$

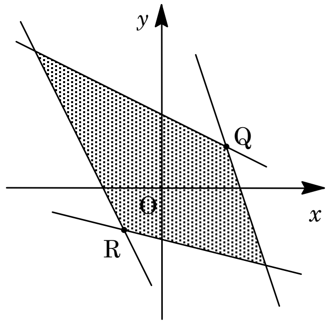
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$x+y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q および点 R の座標を求めよ。

(2) $a>0$ かつ $b>0$ とする。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。 [2013]

解答例＋映像解説

(1) 連立不等式 $x+2y \leqq 5$，$3x+y \leqq 8$，$-2x-y \leqq 4$，$-x-4y \leqq 7$ の表す領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。



ここで，$x+y=k$ とおくと，この方程式は傾き -1 の直線を表す。

すると，図より，k の値が最大となる点 Q は，境界線 $x+2y=5$ ……①と $3x+y=8$ ……②の交点である。

①②を連立すると，$x=\dfrac{11}{5}$，$y=\dfrac{7}{5}$ より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ となる。

k の値が最小となる点 R は，境界線 $-2x-y=4$ ……③と $-x-4y=7$ ……④の交点である。③④を連立すると，$x=-\dfrac{9}{7}$，$y=-\dfrac{10}{7}$ より，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{9}{7},\ -\dfrac{10}{7}\right)$ となる。

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$ax+by=l$ とおくと，この方程式は傾き $-\dfrac{a}{b}$ の直線を表す。

すると，l が点 Q でのみ最大値をとる条件は，直線①の傾きが $-\dfrac{1}{2}$ で，直線②の傾きが -3 より，$-3<-\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<3$ ………⑤

また，l が点 R でのみ最小値をとる条件は，直線③の傾きが -2 で，直線④の傾きが $-\dfrac{1}{4}$ より，$-2<-\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{4}<\dfrac{a}{b}<2$ ………⑥

⑤⑥より，求める値の範囲は，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<2$ である。

コメント

領域と最大・最小についての基本問題です。ただ，問題の特性として，解答例を作成するのに時間がかかります。

問　題

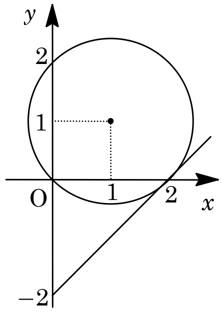
座標平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2) 円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 不等式 $y\geqq\dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を D とする。また，不等式 $|x|+|y|\leqq2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2\leqq2$ の表す領域を B とする。そして，和集合 $A\cup B$，すなわち領域 A と領域 B を合わせた領域を E とする。このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D\cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ。　　[2013]

解答例＋映像解説



(1) 円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$ ……①と直線 $y=x-2$ すなわち $x-y-2=0$ ……②に対して，C の中心 $(1,\ 1)$ と直線②との距離は，$\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$ となる。これは，C の半径と等しいので，円 C と直線②は接する。

また，直線②の法線ベクトルの成分は $(1,\ -1)$ とすることができ，しかもこのベクトルの大きさは，円 C の半径 $\sqrt{2}$ と等しいことより，接点の座標は，

$$(1,\ 1)+(1,\ -1)=(2,\ 0)$$

(2) 円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ ……③との共有点は，①③を連立して，

$$(x-1)^2+\left(\frac{1}{4}x^2-2\right)^2=2,\ 16(x-1)^2+(x^2-8)^2=32$$

まとめると，$x^4-32x+48=0$，$(x-2)^2(x^2+4x+12)=0$

すると，$x^2+4x+12=0$ は実数解をもたないので，解は $x=2$ だけとなり，共有点の座標は $(2,\ 0)$ である。

(3) 不等式 $|x|+|y|\leqq2$ の表す領域 A は，4 点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$，$(0,\ -2)$ を頂点とする正方形の内部または周上を表す。

また，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2\leqq2$ の表す領域 B は，$x\geqq0$ のとき中心 $(1,\ 1)$ で半径 $\sqrt{2}$ の円の内部または周上，$x\leqq0$ のとき中心 $(-1,\ 1)$ で半径 $\sqrt{2}$ の円の内部または周上を表す。

さらに，不等式 $y\geqq\dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域 D は，放物線③の上側または線上を表す。

以上より，$D\cap E=D\cap(A\cup B)$ の表す領域は，右下図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

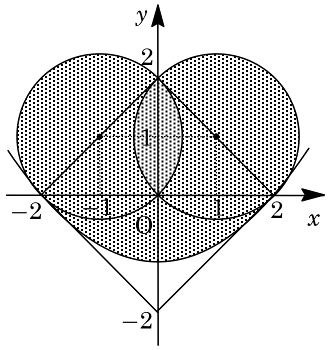
この面積 S は，y 軸に関する対称性より，

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2+\int_0^2\left\{-x+2-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$$

$$=\pi+\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2-x+3\right)dx$$

$$=\pi+\left[-\frac{1}{12}x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^2=\pi+\frac{10}{3}$$

よって，$S=2\pi+\dfrac{20}{3}$ である。



コメント

不等式と領域の基本問題です。見かけほど繁雑ではありません。

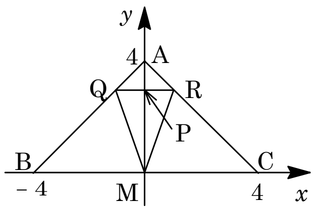
問　題

$\angle$A が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし，線分 AM を 1 : 3 に内分する点を P とする。また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB，AC との交点をそれぞれ Q，R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle\mathrm{QMR}$ を求めよ。

(2)　$\angle\mathrm{QMR}$ の 2 倍と $\angle\mathrm{QMB}$ の大小を判定せよ。　　[2009]

解答例



(1)　M を原点とし，A$(0,\ 4)$，B$(-4,\ 0)$，C$(4,\ 0)$とする座標系を設定しても，一般性を失わない。

すると，AP : PM $=1:3$ なので，AP $=$ QP $=$ RP $=1$ となり，Q$(-1,\ 3)$，R$(1,\ 3)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=(-1,\ 3),\ \overrightarrow{\mathrm{MR}}=(1,\ 3)$$

よって，$\cos\angle\mathrm{QMR}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MR}}|}=\dfrac{-1+9}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\dfrac{4}{5}$

(2)　(1)より，$\cos 2\angle\mathrm{QMR}=2\cos^2\angle\mathrm{QMR}-1=\dfrac{7}{25}$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(-4,\ 0)$から，

$$\cos\angle\mathrm{QMB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MB}}|}=\frac{4}{\sqrt{10}\times 4}=\frac{1}{\sqrt{10}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$7\sqrt{10}<25$ から $\dfrac{7}{25}<\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ となり，①②より，

$$\cos 2\angle\mathrm{QMR}<\cos\angle\mathrm{QMB}$$

よって，$2\angle\mathrm{QMR}>\angle\mathrm{QMB}$ である。

コメント

いろいろな解法が考えられます。上の解は，座標系を設定したときの一例です。

問　題

a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C: y=ax^2\ (x \geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。このとき次の問いに答えよ。

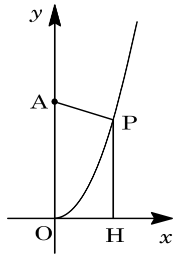
(1)　点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2)　曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)　$a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

[2005]

解答例



(1)　$\mathrm{P}(t,\ at^2)$ とおくと，$\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ より，

$$\mathrm{AP}^2 = t^2 + \left(at^2 - a - \frac{1}{2a}\right)^2 = a^2t^4 - 2a^2t^2 + a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1$$

$$= a^2(t^2-1)^2 + \frac{1}{4a^2} + 1$$

これより，$t^2=1\ (t=1)$ のとき，AP^2 は最小値 $\dfrac{1+4a^2}{4a^2}$ をとる。

すなわち $\mathrm{P}(1,\ a)$ において，AP は最小値 $\sqrt{\dfrac{1+4a^2}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{1+4a^2}}{2a}$

をとる。

(2)　$S(a) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{PH})\cdot\mathrm{OH} - \displaystyle\int_0^1 ax^2\,dx = \dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{2a}+a\right)\cdot 1 - a\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{4a}$

(3)　$a>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$S(a) \geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{4a}} = 2\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号は $\dfrac{2}{3}a = \dfrac{1}{4a}$ すなわち $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき成立する。

よって，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき，$S(a)$ は最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

コメント

場合分けが不要であるように問題が設定されています。相加平均と相乗平均の関係を用いて，面積の最小値を求めます。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) 原点を中心とする半径 $r\,(r>0)$ の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は，$ax+by=r^2$ で与えられることを示せ。

(2) 円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $C:y=x^2+1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これらの接線の方程式を求めよ。

(3) 問(2)における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

[2002]

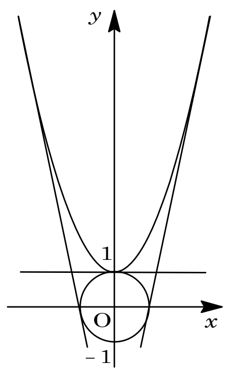
解答例

(1) 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ において，$a^2+b^2=r^2$ ………①

また，この点における接線は，その法線ベクトルの成分が $(a,\ b)$ から，

$$a(x-a)+b(y-b)=0\,,\ ax+by=a^2+b^2$$

①より，$ax+by=r^2$



(2) $x^2+y^2=1$ ……②，$y=x^2+1$ ……③に対して，

③上の接点を $(t,\ t^2+1)$ とおくと，$y'=2x$ より，接線は，

$$y-(t^2+1)=2t(x-t)\,,\ 2tx-y-t^2+1=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

②と④が接するので，$\dfrac{|-t^2+1|}{\sqrt{4t^2+1}}=1$

$$(-t^2+1)^2=4t^2+1\,,\ t^4-6t^2=0\,,\ t=0,\ \pm\sqrt{6}$$

よって，接線は④より，$y=1$，$y=\pm2\sqrt{6}\,x-5$ となる。

(3) 2 直線 $y=1$ と $y=2\sqrt{6}\,x-5$ の交点は，$2\sqrt{6}\,x-5=1$ より，$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

求める部分の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}(x^2+1-1)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}(x^2+1-2\sqrt{6}x+5)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}x^2dx+\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}(x-\sqrt{6})^2dx=\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-\sqrt{6})^3\Big]_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

コメント

誘導に従って(1)を用いて(2)を解こうとしましたが，計算が複雑なので止めました。

問　題

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。　　[2001]

解答例

(1) 点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点を $(x,\ y)$ とすると，

$$\frac{x+X}{2} = p,\quad \frac{y+Y}{2} = q$$

$x = 2p - X,\ y = 2q - Y$ より，対称点の座標は $(2p - X,\ 2q - Y)$ となる。

(2) $G : y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ……①上の点 $(X,\ Y)$ に対して，

$$Y = X^3 + aX^2 + bX + c \text{ ………②}$$

G 上の点 $(p,\ p^3 + ap^2 + bp + c)$ に関して対称移動した点を $(x,\ y)$ とすると，

$$X = 2p - x,\quad Y = 2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y \text{ ………③}$$

②③より，$2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y = (2p - x)^3 + a(2p - x)^2 + b(2p - x) + c$

$$y = x^3 - (a + 6p)x^2 + (12p^2 + 4ap + b)x - 6p^3 - 2ap^2 + c \text{ ………④}$$

①と④が一致する条件は,

$$a = -a - 6p \text{ ……⑤},\quad b = 12p^2 + 4ap + b \text{ ……⑥},\quad c = -6p^3 - 2ap^2 + c \text{ ……⑦}$$

⑤より $p = -\dfrac{1}{3}a$ となり，このとき⑥⑦はともに成立する。

すると，$q = p^3 + ap^2 + bp + c = \dfrac{2}{27}a^3 - \dfrac{1}{3}ab + c$ となり，G はこのグラフ上の点 $\left(-\dfrac{1}{3}a,\ \dfrac{2}{27}a^3 - \dfrac{1}{3}ab + c\right)$ に関して点対称である。

(3) 直線 $x = p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点を $(x,\ y)$ とすると，

$$\frac{x+X}{2} = p,\quad y = Y$$

$x = 2p - X,\ y = Y$ より，対称点の座標は $(2p - X,\ Y)$ となる。

(4) (2)と同様にして，$X = 2p - x,\ Y = y$ を②に代入すると，

$$y = -x^3 + (a + 6p)x^2 - (12p^2 + 4ap + b)x + 8p^3 + 4ap^2 + 2bp + c \text{ ………⑧}$$

x^3 の係数を比べると，どんな p の値に対しても①と⑧は一致しない。

したがって, G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でない。

コメント

3 次曲線の有名な性質についての証明問題です。このように，一度きっちり証明しておくと記憶に残ります。

問　題

t を$0<t<1$を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ$2:1$，$t:1-t$，$1:3$に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値t_0 を求めよ。

以下，t は$0<t<t_0$ を満たすものとする。

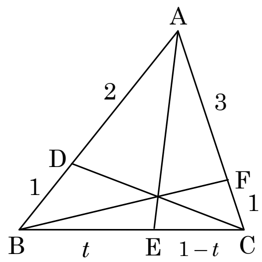
(2)　$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3)　三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4)　三角形 PQR の面積を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

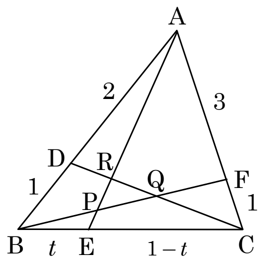
(1)　△ABC において，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=2:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=t:1-t$，$\mathrm{CF}:\mathrm{FA}=1:3$ であり，$t=t_0$ のとき，AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から，



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0=3(1-t_0)$ から，$t_0=\dfrac{3}{5}$ となる。

(2)　条件より，$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ なので，



$$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=k:1-k,\quad \mathrm{CR}:\mathrm{RD}=l:1-l$$

さて，△AEC と直線 BF にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt=3(1-k)$ より，$k=\dfrac{3}{3+t}$ となる。

また，△CDB と直線 AE にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1,\quad \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt=3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l=3-3t$，$l=\dfrac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3)　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QF}=m:1-m$ とし，△BFA と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1,\quad \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m=4(1-m)$ より，$m=\dfrac{2}{3}$ となる。

よって，△ABC の面積が 1 から，$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}$

(4)　(2)から，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=\dfrac{3}{3+t}:\left(1-\dfrac{3}{3+t}\right)=3:t$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{3+t}\triangle\mathrm{ABE}=\frac{3}{3+t}\cdot t\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3t}{3+t}$$

また，$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=\dfrac{3-3t}{3-t}:\left(1-\dfrac{3-3t}{3-t}\right)=3-3t:2t$ から，

$$\triangle\mathrm{CAR}=\frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle\mathrm{CAD}=\frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2-2t}{3-t}$$

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{BCQ}-\triangle\mathrm{CAR}-\triangle\mathrm{ABP}$ より，

$$\triangle\mathrm{PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

コメント

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

問　題

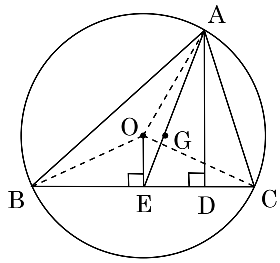
鋭角三角形 △ABC について，∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。　[2014]

解答例＋映像解説



(1) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2R\sin C,\ \mathrm{BC}=2R\sin A,\ \mathrm{CA}=2R\sin B$$

ここで，△ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C\cdots\cdots\cdots①$$

A から辺 BC に下ろした垂線が AD より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AD}\cdot R\sin A\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\mathrm{AD}\cdot R\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$

また，O から辺 BC に下ろした垂線が OE で，$\angle\mathrm{BOE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\frac{1}{2}\cdot 2\angle\mathrm{A}=A$

よって，$\mathrm{OE}=R\cos\angle\mathrm{BOE}=R\cos A$

(2) 直線 AG と辺 BC は BC の中点，すなわち点 E で交わり，G と O が一致するならば，$\mathrm{GE}\perp\mathrm{BC}$ すなわち $\mathrm{AE}\perp\mathrm{BC}$ となる。これより $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

同様に考えると，$\mathrm{BG}\perp\mathrm{AC}$ となり，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となり，△ABC は正三角形である。

(3) OG が BC と平行であるとき，△OGE ∽ △DEA となり，$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=\mathrm{GE}:\mathrm{EA}$

ここで，点 G は△ABC の重心より，$\mathrm{GE}:\mathrm{EA}=1:3$ となり，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=1:3,\ \mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$$

(1)の結果から，$2R\sin B\sin C=3R\cos A$，$2\sin B\sin C=-3\cos(B+C)$ となり，

$$2\sin B\sin C=-3(\cos B\cos C-\sin B\sin C),\ 3\cos B\cos C=\sin B\sin C$$

よって，$\tan B\tan C=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=3$ となる。

コメント

図形の計量についての標準的な問題です。誘導に従えば，一見，難しそうな(3)の関係式が証明できます。

問　題

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

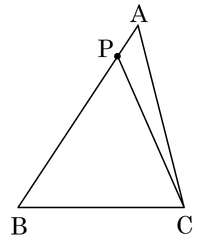
(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき, t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　余弦定理から，$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ となり，



$$\mathrm{CP}^2=b^2+t^2c^2-2btc\cos\angle\mathrm{A}$$
$$=b^2+t^2c^2-t(b^2+c^2-a^2)$$
$$=ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2$$

(2)　$\mathrm{CP}=a$ のとき, (1)より，$ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2=a^2$

$$(1-t)(-a^2+b^2-tc^2)=0$$

すると, $t\geqq 0$ から, $b\geqq a$ のとき $t=1,\ \dfrac{-a^2+b^2}{c^2}$，$b<a$ のとき $t=1$ である。

(3)　t の値が $0\leqq t\leqq 1$ に 2 つ存在する条件は, $b\geqq a$ のとき $0\leqq\dfrac{-a^2+b^2}{c^2}<1$ より,

$$b\geqq a\cdots\cdots\cdots①,\ \ b^2<a^2+c^2\cdots\cdots\cdots②$$

①より $\angle\mathrm{B}\geqq\angle\mathrm{A}$, ②より $\angle\mathrm{B}<90°$

まとめると，$\angle\mathrm{A}\leqq\angle\mathrm{B}<90°$ となる。

コメント

三角比の応用についての基本問題です。

問　題

3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$ ，$4-x$ ，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より長さが短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3) x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。　[2007]

解答例

(1) まず，$x^2-2x>0$ かつ $4-x>0$ から，$x<0$，$2<x<4$ ……①となり，条件より，

$$\sqrt{x^2-2x} \geqq 4-x \cdots\cdots\text{②},\quad \sqrt{x^2-2x} \geqq 2 \cdots\cdots\text{③}$$

$4-x>0$ なので，②より $x^2-2x \geqq (4-x)^2$ となり，$x \geqq \dfrac{8}{3}$ ………②′

③から，$x^2-2x \geqq 4$ となり，$x \leqq 1-\sqrt{5}$，$1+\sqrt{5} \leqq x$ ………③′

①②′③′をまとめると，$1+\sqrt{5} \leqq x < 4$ ………④

さらに，三角形の形成条件から，$\sqrt{x^2-2x} < (4-x)+2$

$$x^2-2x < (6-x)^2,\quad x < \frac{18}{5} \cdots\cdots\cdots\text{⑤}$$

④⑤より，$1+\sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}$

(2) (1)より，$\dfrac{2}{5} < 4-x \leqq 3-\sqrt{5}$ となるので，$4-x<2$ である。

よって，最短の辺の長さは $4-x$ であり，余弦定理より，

$$\cos\theta = \frac{2^2+(x^2-2x)-(4-x)^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{x^2-2x}} = \frac{6x-12}{4\sqrt{x^2-2x}} = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

(3) (1)より，$x>2$ なので，

$$\cos\theta = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

$1+\sqrt{5} \leqq x < \dfrac{18}{5}$ より，$x=1+\sqrt{5}$ のとき $\cos\theta$ は最小となり，最小値は，

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{-1+5}} = \frac{3}{4}(-1+\sqrt{5})$$

コメント

(1)では，不等式が多量に現れるので，いったん中締めをしています。なお，両辺を 2 乗すると，一般的に同値関係が崩れるので注意が必要です。

問　題

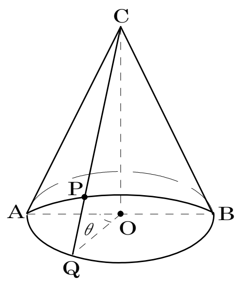
長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが$\sqrt{3}$の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1) 直円錐の展開図を用いて，l の長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ としてCP^2 を$\sin\theta$で表せ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ の範囲で$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$の最大値を求めよ。　　[1999]

解答例



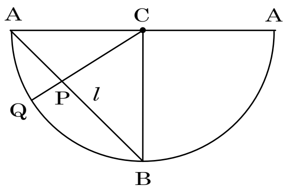
(1) 母線 AC の長さは$\sqrt{1+3}=2$となるので，側面の展開図の中心角をφとすると，

$$2\pi\cdot 1=2\pi\cdot 2\cdot\frac{\varphi}{360^\circ}\text{ より，}\ \varphi=180^\circ$$

線分 AB は底面の直径なので，$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

よって，l の長さは展開図で $\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$ となる。

(2) 弧 AQ の長さは，底面では$2\pi\cdot 1\cdot\dfrac{\theta}{360^\circ}$であるが，側面の展開図では$2\pi\cdot 2\cdot\dfrac{\angle\mathrm{ACQ}}{360^\circ}$と表せるので，$\angle\mathrm{ACQ}=\dfrac{\theta}{2}$

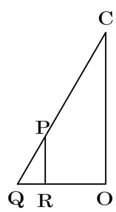


$\triangle\mathrm{APC}$ に正弦定理を適用すると，$\angle\mathrm{CAP}=45^\circ$ から，

$$\frac{\mathrm{CP}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\left(135^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

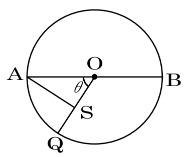
$$\mathrm{CP}=\frac{2\sin 45^\circ}{\sin\left(135^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

よって，$\mathrm{CP}^2=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{1+2\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{4}{1+\sin\theta}$



(3) $\triangle\mathrm{COQ}$ について考えると，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CQ}}$ から，

$$\mathrm{OR}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}}\text{ より，}\ \mathrm{OR}^2=\frac{1}{1+\sin\theta}$$



次に底面について，$\mathrm{OS}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$ より $\mathrm{OS}^2=\cos^2\theta$

よって，$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}=\cos^2\theta(1+\sin\theta)=(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0°<\theta\leqq 90°$ より $0<t\leqq 1$

このとき，$f(t)=(1-t^2)(1+t)$ とおくと，

$$f'(t)=-2t(1+t)+(1-t^2)$$
$$=-(3t-1)(t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{32}{27}$	$\searrow$	

$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{32}{27}$ をとる。すなわち $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値は $\dfrac{32}{27}$ である。

コメント

断面図や展開図を書かないと，位置関係がとらえきれない問題です。

問　題

座標空間内の 3 点 $A(1,\ 2,\ 3)$，$B(3,\ 2,\ 3)$，$C(4,\ 5,\ 6)$ を通る平面を α とし，平面 α 上にない点 $P(6,\ p,\ q)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。線分 PH の長さを p, q を用いて表せ。

(2) 点 P が $(p-9)^2+(q-7)^2=1$ を満たしながら動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値と最小値を求めよ。 [2019]

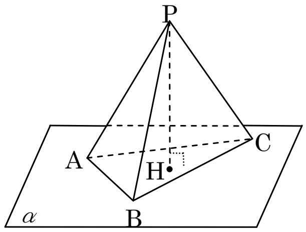
解答例＋映像解説

(1) $A(1,\ 2,\ 3)$，$B(3,\ 2,\ 3)$，$C(4,\ 5,\ 6)$ に対して，

$$\overrightarrow{AB}=(2,\ 0,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(3,\ 3,\ 3),$$

また，$P(6,\ p,\ q)$ から，$\overrightarrow{AP}=(5,\ p-2,\ q-3)$

ここで，3 点 A, B, C を通る平面 α 上に H があるので，k, l を実数として，$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ とおくと，



$$\overrightarrow{PH}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}$$

PH は平面 α に垂直なので，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB}$ から $(k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{AB}=0$ となり，

$$k\cdot 4+l\cdot 6-10=0,\ 2k+3l=5\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC}$ から $(k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{AC}=0$ となり，

$$k\cdot 6+l\cdot(9+9+9)-(15+3p-6+3q-9)=0,\ 2k+9l=p+q\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$l=\dfrac{p+q-5}{6}$，$k=\dfrac{15-p-q}{4}$ となり，

$$\overrightarrow{PH}=\frac{15-p-q}{4}(2,\ 0,\ 0)+\frac{p+q-5}{6}(3,\ 3,\ 3)-(5,\ p-2,\ q-3)$$
$$=\frac{15-p-q}{2}(1,\ 0,\ 0)+\frac{p+q-5}{2}(1,\ 1,\ 1)-(5,\ p-2,\ q-3)$$
$$=\frac{1}{2}(0,\ -p+q-1,\ p-q+1)$$

これより，$|\overrightarrow{PH}|^2=\dfrac{1}{4}\{(-p+q-1)^2+(p-q+1)^2\}=\dfrac{1}{2}(p-q+1)^2$ となり，

$$PH=\frac{1}{\sqrt{2}}|p-q+1|$$

(2) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\times 27-36}=3\sqrt{2}$

これより，四面体 ABCP の体積 V は，(1)の結果を用いると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}|p-q+1|=|p-q+1|$$

条件より，$(p-9)^2+(q-7)^2=1$ なので，$p=9+\cos\theta$，$q=7+\sin\theta$ とおけ，

$$V=|9+\cos\theta-7-\sin\theta+1|=|3-\sin\theta+\cos\theta|=\left|3-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$
$$=3-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，V の最大値は $3+\sqrt{2}$，最小値は $3-\sqrt{2}$ である。

コメント

計算量はやや多めですが，空間図形の標準的な典型問題です。なお，(1)は平面 α の方程式を求めた後，点と平面の距離の公式という手もありますが……。