２０２０ 入試対策
過去問ライブラリー

長崎大学
医系数学10か年

２０１０－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された長崎大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列／論　証

複素数／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=A$ とするとき，$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$ の値を A を用いて表せ。　[2018]

2　方程式 $\log_2 x^2=2+\log_2|x-2|$ を解け。　[2018]

3　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$4\sin^3\theta+3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。　[2017]

■ 図形と式

1　放物線 $C: y=x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q をとる。P，Q の x 座標をそれぞれ p，q (ただし，$p<q$)とする。直線 PQ の傾きを a とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　a を p, q を用いて表せ。

(2)　$a=1$ とする。直線 PQ と x 軸の正の向きとのなす角 θ_1 (ただし，$0<\theta_1<\pi$)を求めよ。

(3)　$a=1$ とする。放物線 C 上に点 R をとる。R の x 座標を r (ただし，$r<p$)とする。三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR と x 軸の正の向きとのなす角 θ_2 (ただし，$0<\theta_2<\pi$)を求めよ。また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ。さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ。

(4)　$a=2$ とする。放物線 C 上に点 S$(1,\ 1)$ をとる。三角形 PQS が $\angle\mathrm{S}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ。　[2015]

2　k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる 2 点で交わるものとする。その 2 つの交点を P, Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　k の値の範囲を求めよ。

(2)　2 点 P, Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ。

(3)　上の(2)の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする。r^2 を a と k で表せ。

(4)　点 R の座標を $(2,\ 1)$ とする。k の値が(1)で求めた範囲を動くとき，3 点 P，Q，R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ。　[2014]

3 原点Oを中心とし，半径1の円をCとする。次の問いに答えよ。

(1) 直線$y=2$上の点$\mathrm{P}(t,\ 2)$から円Cに2本の接線を引き，その接点をM，Nとする。直線OPと弦MNの交点をQとする。点Qの座標をtを用いて表せ。ただし，tは実数とする。

(2) 点Pが直線$y=2$上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ。 [2012]

4 実数x, yが連立不等式

$$10^{10}<2^x3^y<10^{11}\ \cdots\cdots\cdots\text{(A)},\ \ 10^9<3^x2^y<10^{10}\ \cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) 連立不等式(A), (B)が表すxy平面上の領域は，どのような図形であるか答えよ。また，その理由を述べよ。

(2) 連立不等式(A), (B)が満たす実数x，yにおいて，$x+y$がとりうる値の範囲，および$y-x$がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(3) 連立不等式(A), (B)が満たす整数x，yを考える。このとき，$y-x$が最大になる整数x，yを求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$として計算してよい。

[2012]

5 円$C_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$と放物線$C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$について，次の問いに答えよ。

(1) C_1と座標軸との共有点，およびC_2と座標軸との共有点の座標を求めよ。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3\leqq 0 \\ y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1 \end{cases}$ を満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域をDとする。Dの面積Sを求めよ。

(3) 点$(x,\ y)$が領域Dを動くとき，$x+y$の最大値を求めよ。 [2011]

■ 図形と計量

1　$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle B=\alpha$ である△ABC を考える。△ABC の外接円の半径を R とする。この外接円上の点 P が，点 A を含まない弧 BC 上を動くものとする。$\angle BAP=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABP の面積の最大値を R，α を用いて表せ。

(2)　△BPC の面積を R，θ を用いて表せ。

(3)　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ とする。△ABP と△BPC の面積の和 S の最大値を求めよ。　[2010]

■ ベクトル

1　空間内に，3 点 A$(3,\ -1,\ 1)$，B$(0,\ 2,\ 4)$，C$(1,\ 0,\ 4)$がある。点 C から直線 AB に垂線を引き，交点を H とする。$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB}$ とおくとき，実数 t の値と線分 CH の長さを求めよ。　[2019]

2　△OAB の 2 辺 OA, OB 上にそれぞれ点 C, D があり，直線 CD は△OAB の重心 G を通るものとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=x\vec{a}$ $(0<x<1)$，$\overrightarrow{OD}=y\vec{b}$ $(0<y<1)$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$CG:GD=t:(1-t)$，$0<t<1$ とする。このとき，x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(2)　y を x の式で表せ。また，$0<y<1$ より x の値の範囲を求めよ。

(3)　△OCD の面積を S_1，△OAB の面積を S_2 とし，$f(x)=\dfrac{S_1}{S_2}$ とする。関数 $f(x)$の増減表をつくり，$f(x)$の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ。　[2019]

3 空間内の 3 点 A, B, C を頂点とする△ABC を考える。2 辺 BC, AC の中点をそれぞれ M, N とし，中線 AM と BN の交点を G とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) 2 点 P, Q が $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たすとき, 3 点 P, Q, G は同一直線上にあることを示せ。

(3) △ABC の頂点の座標が A(0, 0, 1)，B(7, 0, 6)，C(2, 12, 5) であるとき，xy 平面上を動く点 P$(x,\ y,\ 0)$ を考える。このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

(4) (3)において，特に点 P$(x,\ y,\ 0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする。$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ の最大値とそのときの P の座標，および最小値とそのときの P の座標を，それぞれ求めよ。 [2017]

4 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある。右の図 1 のように, 2 辺 BC, CD 上に，BS = CT = x ($0 \leqq x \leqq 2$) を満たす点 S, T をとる。このとき，三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

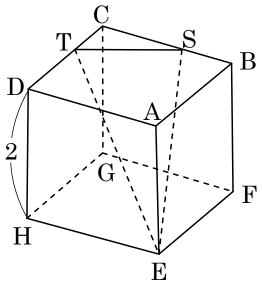


図1

(1) 右の図 2 を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ。

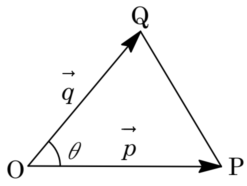


図2

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{c}$ とおく。立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ。

(3) 上の(1)を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ。

(4) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの x の値も答えよ。 [2016]

5　ひし形の紙がある(図 1)。点線で半分に折ると正三角形になった(図 2)。これを少し開いて机の上に立てると，三角錐の形になる。その高さを次のようにして求めたい。

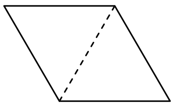


図1

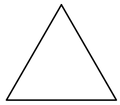


図2

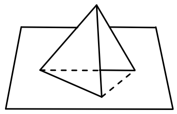


図3

図 4 において，2 つの正三角形 OAB と OAC の 1 辺の長さを 1 とする。点 O と平面 ABC との距離が，三角錐 OABC の高さになる。

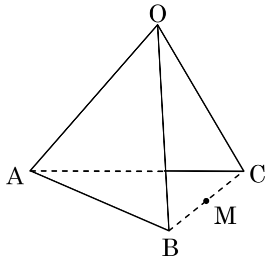


図4 (図3の拡大図)

空間ベクトルを利用してこの高さを求める。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ とおき，線分 BC の中点を M とする。以下の問いに答えよ。

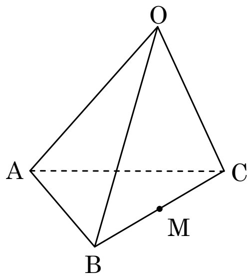
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。また，$|\vec{b}+\vec{c}|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおくと，点 H は直線 AM 上にある。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つことを示せ。さらに，H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす点であるとき，t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(4)　三角錐 OABC の高さを h とする。h を $\cos\theta$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立つとき，θ と h の値を求めよ。　[2015]

6　右図のような四面体 OABC がある。各面 ABC, OBC, OCA, OAB の重心を，それぞれ P, Q, R, S とし，辺 BC の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{m}$ とおく。次の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{m}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(2)　線分 OP と線分 AQ の交点を G とする。線分 OP 上の点 U は，実数 s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$(0\leqq s\leqq 1)$ と表され，線分 AQ 上の点 V は，実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(0\leqq t\leqq 1)$ と表される。このことを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(3)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を表せ。

(4)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中から必要なものを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ をそれぞれ表せ。また，点 G が線分 BR および線分 CS 上にあることを示せ。　[2013]

7　四面体 OABC において，

$$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=3,\ \mathrm{OC}=2,\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ,\ \angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$$

とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　平面 ABC 上に点 H をとり，s, t, u を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおく。このとき，$s+t+u=1$ となることを示せ。

(2)　(1)の $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直であるとき，s, t, u の値をそれぞれ求めよ。

(3)　平面 OAB 上に点 K をとり，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直であるとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ。　[2012]

8　3 辺の長さが $\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=5$ である直角三角形 ABC と，その内側にあって 2 辺 AB および AC に接する円 O を考える。この円の半径を r とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB との交点を H とする。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きで大きさが 1 のベクトルを，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{u}$ $(t>0)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 AO と辺 BC の交点を M とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{u}$ と $\vec{v}$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ の内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HO}}$ を，それぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ および t を用いて表せ。また，円 O の半径 r を t で表せ。

(3)　円 O が辺 BC にも接するとき，その中心を I とする。すなわち，I は三角形 ABC の内心である。そのときの t の値と，内接円 I の半径を求めよ。

(4)　円 O と内接円 I が共有点をもたないような t の範囲を求めよ。　[2011]

■ 整数と数列

1　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=6n-2a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ が成り立つとき，初項 a_1 および一般項 a_n を求めよ。　[2018]

2　数列 $\{a_n\}$ の一般項が，$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$ であるとき，$a_{n+1}-a_n$ を n の式で表し，a_n が最大となる正の整数 n をすべて求めよ。　[2017]

3　半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある。その面積を S とする。D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる。さらに，D_1 の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_2 をつくる。このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n \geqq 2)$。D_n の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S と S_1 を求めよ。

(2)　S_n を n の式で表せ $(n \geqq 1)$。

(3)　$S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ。ただし，$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$ である。　[2016]

4　1 から $2n$ までの偶数の平方の和を a_n，奇数の平方の和を b_n とする。すなわち

$$a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2,\ b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

である。なお，1 から n までの自然数の平方の和については

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1)　偶数の平方の和 $2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2$ と奇数の平方の和 $1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2$ を求めよ。

(2)　a_n と b_n を求めよ。

(3)　$\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ および $\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ を計算せよ。

(4)　$c_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$ とするとき，$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ を求めよ。　[2014]

5　n を 2 以上の整数とする。n 個の実数 a_1，a_2，…，a_n が与えられたとき，

$$P_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2,\ Q_n = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2$$

とおく。次に，$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する $a_i a_j$ の和を R_n とする。たとえば，$R_2 = a_1a_2$，$R_3 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ である。同様に，$1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する $(a_i - a_j)^2$ の和を S_n とする。たとえば，$S_2 = (a_1 - a_2)^2$，$S_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2$ である。次の問いに答えよ。

(1)　P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ。

(2)　すべての $n \geqq 2$ に対して，$S_n = (n-1)Q_n - 2R_n$ と表されることを，数学的帰納法で証明せよ。

(3)　Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ。

(4)　$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ のとき，Q_4 の最小値と，そのときの a_1，a_2，a_3，a_4 の値をそれぞれ求めよ。　[2013]

6 次の問いに答えよ。

(1) 関係式 $a_1=1$，$na_{n+1}-(n+1)a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めたい。$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおいて数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，a_n を求めよ。

(2) $x\neq 1$ のとき，等比数列の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\frac{x^n-1}{x-1}$ の両辺を x で微分せよ。その結果を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}kx^k$ を求めよ。

(3) $p\neq 1$ のとき，関係式 $c_1=0$，$\dfrac{pc_{n+1}}{n}-\dfrac{c_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。 [2011]

■ 論証

1 4 次方程式の解について，次の問いに答えよ。ただし，下のことは既知としてよい。

自然数 $k,\ l,\ m$ が次の条件

(イ) k と l は 1 以外の公約数をもたない　　(ロ) k は lm の約数である

を満たすならば, k は m の約数である。

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ は整数で，$d\neq 0$ とする。方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は自然数であり，かつ $|d|$ の約数に限ることを証明せよ。

(2) 方程式 $2x^4-2x-1=0$ の実数解はすべて無理数であることを証明せよ。 [2010]

■ 複素数

1　方程式$z^3=1$の解をz_1，z_2，z_3とし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$とする。複素数平面上に3点$\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$z_1+z_2+z_3$，$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$，$z_1z_2z_3$の値をそれぞれ求めよ。

(2)　複素数平面上の点$\mathrm{P}(\alpha)$について，線分の長さの 2 乗の和$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$および線分の長さの積$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$の値を，$\alpha$を用いてそれぞれ表せ。

(3)　複素数平面上の点$\mathrm{P}(\alpha)$について，αが$\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri$ $(r>0)$を満たすとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$の最大値，およびそのときの r とαの値を求めよ。ただし，iは虚数単位である。

(4)　(3)において，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$が最大になるときの$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$の値を求めよ。

[2019]

2　tを正の実数とし，複素数平面上に2点$\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{t}\right)$がある。等式

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{t}\left|z-t\right| \cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

を満たす点$\mathrm{P}(z)$の全体が表す図形を F とする。下の小問(1)から(4)を通して F がどのような図形を表すか調べたい。以下の問いに答えよ。

(1)　AとBはどちらも図形Fの点ではないことを示せ。

(2)　$t=1$ならば，Fはどのような図形を表すか。

(3)　$t\neq1$とする。図形 F の点$\mathrm{P}(z)$が直線 AB 上に位置するような z の値は 2 つある。その値z_1とz_2を求めよ。ただし，$|z_1|<|z_2|$とする。

(4)　$t\neq1$とする。2点$\mathrm{P}_1(z_1)$，$\mathrm{P}_2(z_2)$を結ぶ線分の中点を$\mathrm{M}(m)$として，mの値を求めよ。また，$\mathrm{P}(z)$が図形 F の点であるとき，$|z-m|$の値を求めよ。さらに，F はどのような図形を表すか。

[2018]

3　複素数平面上の点$\mathrm{P}(z)$が，原点を中心とする半径 3 の円の周上を動くとき，$w=\dfrac{z+3i}{z}$で表される点$\mathrm{Q}(w)$はどのような図形を描くか。

[2017]

■ 極限

1　放物線 $C: y=x^2$ と定点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ および C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_1(2,\ 4)$ が与えられている。自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，以下の操作を繰り返す。

> C 上の第 1 象限の点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ {p_n}^2)$ に対し，
> 手順 1　直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}$ と C との交点のうち，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}_n(q_n,\ {q_n}^2)$ とし，
> 手順 2　直線 $\mathrm{Q}_n\mathrm{B}$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}_{n+1}(p_{n+1},\ {p_{n+1}}^2)$ とする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a を定数とする。直線 $y=ax+1$ と C との交点のうち，第 1 象限にあるものを $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，第 2 象限にあるものを $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とする。このとき，$pq=-1$ が成り立つことを示せ。また，点 Q_1 の座標を求めよ。

(2)　点 P_2，Q_2 および P_3 の座標を求めよ。

(3)　数列 $\{p_n\}$ および数列 $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(4)　$x\geqq 0$ の範囲において，C と直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。さらに，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$ を求めよ。　[2017]

2　次の関係式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，一般項 a_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}-(\sqrt{2}+1)a_n=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

[2015]

3　a, b を $a>b>0$ を満たす定数とし，

$$a_1=a,\ a_{n+1}={a_n}^2+{b_n}^2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$b_1=b,\ b_{n+1}=2a_nb_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_n+b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定義するとき，その一般項 c_n を a, b を用いて表せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項 a_n，b_n を a, b を用いて表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ が存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ。

(4)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき，$a+b<1$ が成り立つことを証明せよ。　[2010]

■ 微分法

1 　3 次方程式$x^3-3px+p=0$が異なる 3 つの実数解をもつように，実数 p の値の範囲を求めよ。 [2019]

2 　関数$y=\log x$ $(x>0)$上の点$\mathrm{P}(t,\ \log t)$における接線を l とする。また，点 P を通り，l に垂直な直線を m とする。2 本の直線 l, m および y 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。$S=5$となるときの点 P の座標を求めよ。 [2019]

3 　原点を O とする座標平面上に，曲線$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$があり，C 上に x 座標を t とする第 1 象限の点 P をとる。このとき，点 P から x 軸および y 軸に垂線を下ろし，交点をそれぞれ Q, R とする。四角形 OQPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。 [2019]

4 　自然数 n に対して，関数$f_n(x)$と$g_n(x)$を次のように定める。

$$f_n(x)=\frac{a_n}{x}\ (x>0),\quad g_n(x)=x(x-1)^{2n}\ (x\geqq 0)$$

ただし，a_nは各自然数 n に対して定まり，x とは無関係な正の実数である。以下の問いに答えよ。

(1) 　$x=t$ $(0<t<1)$における$y=f_n(x)$の接線を l とするとき，l の式を t およびa_nを用いて表せ。

(2) 　(1)の接線 l は，$x=t$ $(0<t<1)$において，$y=g_n(x)$にも接しているものとする。すなわち，$f_n(t)=g_n(t)$，$f_n'(t)=g_n'(t)$が同時に成り立つ。このとき，t およびa_nをそれぞれ n の式で表せ。

(3) 　曲線$y=g_n(x)$と x 軸とで囲まれる図形の面積をS_nとするとき，S_nを n の式で表せ。

(4) 　(2)において，接線 l と x 軸および y 軸とで囲まれる図形の面積をT_nとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$の値を e を用いて表せ。ただし，$e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$とする。[2019]

5 　関数$f(x)$を，$f(x)=\begin{cases}x^2+x & (x<0)\\ x & (x\geqq 0)\end{cases}$と定義する。「微分係数の定義」にしたがって，$f(x)$の$x=0$における微分係数を求めよ。 [2018]

6　e を自然対数の底とする。$x>e$ の範囲において，関数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ を考える。この両辺の対数を x について微分することにより，y は減少関数であることを示せ。また，$e<a<b$ のとき，$a^b>b^a$ が成り立つことを証明せよ。　[2017]

7　xy 平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円がある。この円の周上に 2 点 $\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ と $\mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとる。ただし，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。さらに，2 点 A, B から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点をそれぞれ C, D とする。扇形 OAB の面積を S_1，弧 AB と線分 BD, DC, CA で囲まれた図形 F の面積を S_2 とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 を α と β で表せ。

(2)　S_2 を α と β で表せ。

(3)　$S_1=S_2$ のとき，β を α の式で表せ。また，このとき $t=\cos\alpha-\cos\beta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(4)　(3)のとき，扇形 OAB および図形 F を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を，それぞれ V_1 および V_2 とする。さらに，$V=V_1-V_2$ とする。V を t の式で表せ。

(5)　(4)において，V の最大値，およびそのときの A, B の座標を求めよ。　[2017]

■ 積分法

1　積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1)　部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2)　$F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3)　$n\geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n\geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4)　$p(x)=x^n$ とおくとき, k 次導関数 $p^{(k)}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。　[2018]

2　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

[2015]

3　次の問いに答えよ。

(1)　$I_1=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$ とする。$x=\tan\theta$ とおくことにより，$I_1=\dfrac{\pi}{3}$ を示せ。

(2)　(1)の I_1 を部分積分して，I_1 と $I_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の関係式を導き，I_2 の値を求めよ。

(3)　$t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。

(4)　合成関数の微分法を用いて，関数 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ。

(5)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$ を求めよ。　[2012]

4　曲線 $y=\log x$ の接線はつねにこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ。以下，k は自然数とする。

(1)　点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする。また，$k\geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする。四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ。

(2)　次の 2 つの値の大小を比較せよ。

(ア)　$\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$　(ただし，$k\geqq 2$)

(イ)　$\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1}\log x\,dx$　(ただし，$k\geqq 1$)

(3)　$a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$$

(4)　2 以上の自然数 n について

$$U_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right),\ \ V_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

とおくとき，次の不等式を示せ。

$$U_n<\log(n!)<V_n$$

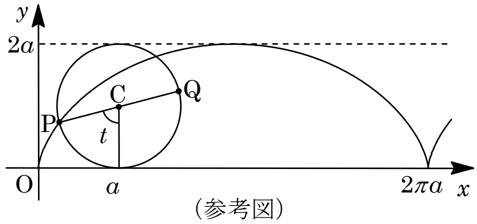
[2011]

■ 積分の応用

1　半径 a の円が x 軸上を滑ることなく正の方向に回転していくとき，円周上の 2 つの定点 P と Q の運動について考える。時刻 $t=0$ のとき P は原点 O にあり，Q は点 $(0,\ 2a)$ にある。円は毎秒 1 ラジアンの速さで回転する。このとき，点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ は

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$$

で表される。以下の問いに答えよ。



（参考図）

(1)　時刻 t における円の中心 C と点 Q の座標を，それぞれ求めよ。

(2)　時刻 t における点 P の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ。また，時刻 t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲において，速さ $\left|\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\right|$ の最大値と最小値，およびそのときの P の座標を求めよ。

(3)　時刻 t における点 Q の速度ベクトル $\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。さらに，内積 $\overrightarrow{v_{\mathrm{P}}}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{Q}}}$ を求めよ。

(4)　時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ から $t=\dfrac{3\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のり L_{P} と，点 Q が動く道のり L_{Q} を，それぞれ求めよ。　[2018]

2　関数 $f(x)=xe^x$ で定まる曲線 $C:y=f(x)$ を考える。p を正の数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。また，すべての x について，$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$ が成り立つような定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

(2)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $l:y=c(x-p)+d$ とする。c と d の値を p を用いて表せ。さらに，区間 $x\geqq 0$ において関数

$$g(x)=f(x)-\{c(x-p)+d\}$$

の増減を調べ，不等式 $f(x)\geqq c(x-p)+d\ (x\geqq 0)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$x\geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 l，および y 軸で囲まれた図形を F とする。その面積 $S(p)$ を求めよ。

(4)　2 辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える。R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ。　[2016]

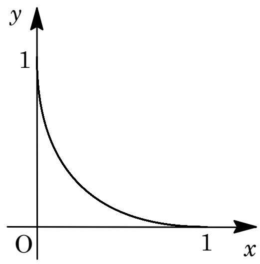
3 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (a>0)$ と y 軸の交点を $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(0,\ -a)$ とする。θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ はこの楕円上を動く。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AP の長さを l とする。$X=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$Y=l^2$ となる関数を $Y=f(X)$ とする。$f(X)$ を X の式で表せ。

(2) $0<a<1$ の場合。(1)の関数 $f(X)$ の最大値を a を用いて表し，そのときの X の値を求めよ。

(3) $a=2$ の場合。(1)の関数 $f(X)$ の値が最大となるときの点 P を P_1 とする。$f(X)$ の最大値と P_1 の座標を求めよ。また点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とし点 P_1 を通る円を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。 [2016]

4 曲線 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸および y 軸で囲まれた右図の図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2015]



5 自然対数の底を e とする。区間 $x\geqq0$ で定義される関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ を考え，曲線 $y=f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる。それらを，P_0，P_1，P_2，…とする。点 P_0 は原点である。

自然数 $n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ。

(2) 面積 S_n を求めよ。

(3) $I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k$ とする。このとき，I_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ。 [2015]

6　曲線$C: y=\log x$上の点$\mathrm{P}(t,\ \log t)$における接線を l とする。ただし，$1<t<e$とする。eは自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　接線lの方程式を求めよ。

(2)　接線 l と y 軸との交点を Q とし，接線 l と x 軸との交点を R とする。Q と R の座標を求めよ。

(3)　接線lとx軸およびy軸によって囲まれた図形をD_1，接線lと曲線Cおよびx軸によって囲まれた図形をD_2とする。D_1の面積$S_1(t)$とD_2の面積$S_2(t)$を求めよ。

(4)　$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$とおく。このとき$S(t)$の増減を調べ，その最小値およびそのときの t の値を求めよ。　[2014]

7　区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，関数$f(x)$と関数$g(x)$を

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x\,,\quad g(x)=\cos\frac{x}{2}+c$$

と定義する。cは定数である。次の問いに答えよ。

(1)　区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，2 曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が$x=0$以外の点で接するように c の値を定め，接点$(p,\ q)$を求めよ。また，そのとき，区間$0 \leqq x \leqq \pi$における関数$f(x)$と関数$g(x)$の大小関係を調べよ。

(2)　定数 c と接点$(p,\ q)$は(1)で求めたものとする。そのとき，区間$0 \leqq x \leqq p$において，y 軸および 2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形を D とする。Dをy軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vを求めよ。　[2014]

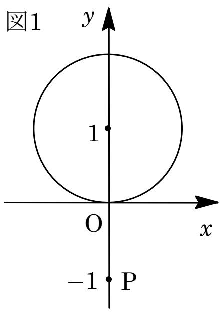
8　次の問いに答えよ。

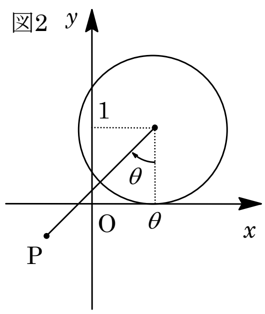
(1) 関数$y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$の増減およびグラフの凹凸を調べよ。また，y の最大値およびそのときの x の値，y の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

(2)　2 つの曲線$y=-x+2-\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$と$y=-x+2+\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$によって囲まれた図形Dを座標平面上に描け。なお，Dの境界が座標軸と共有点をもつならば，その座標も記入せよ。

(3)　上の図形Dをx軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2013]

9　半径 1 の円と長さ 2 の線分がある。この線分を一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える。線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする。この図形を図 1 のように xy 平面上におく。すなわち，中心が点$(0,\ 1)$，P が点$(0,\ -1)$と一致するようにおく。





次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる。図 2 は円が θ だけ回転したときの状態を表している。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，点 P が描く曲線 C について考察する。次の問いに答えよ。

(1)　図 2 における点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2)　曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ。

(3)　曲線 C と 2 直線 $y=-1$ および $x=\pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[2013]

10　xyz 空間において，底面の半径が 2，高さが 4 である直円柱 $x^2+y^2 \leqq 4$，$0 \leqq z \leqq 4$ を考える。この円柱内で，さらに $z \leqq (x-2)^2$，$z \leqq y^2$ を満たす点$(x,\ y,\ z)$からなる立体を V とする。次の問いに答えよ。

(1)　立体 V を平面 $x=t\ (-2 \leqq t \leqq 2)$ で切った切り口の面積を $A(t)$ とする。$A(t)$ を t を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。

[2010]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列／論　証

複素数／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=A$ とするとき，$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$ の値を A を用いて表せ。 [2018]

解答例

$\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=A$ とするとき，$P=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$ とおくと，

$$P=1+1-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$
$$=2-2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4A^2$$

コメント

三角関数の計算についての基本題です。

問　題

方程式 $\log_2 x^2 = 2 + \log_2 |x-2|$ を解け。 [2018]

解答例

$\log_2 x^2 = 2 + \log_2 |x-2|$ に対して，$x^2 > 0$ かつ $|x-2| > 0$ より，$x \neq 0$，$x \neq 2$

このとき，$\log_2 x^2 = 2\log_2 2 + \log_2 |x-2|$，$\log_2 x^2 = \log_2 4|x-2|$ より，

$$x^2 = 4|x-2|$$

(i)　$x > 2$ のとき　$x^2 = 4(x-2)$ から $x^2 - 4x + 8 = 0$

$D/4 = 4 - 8 = -4 < 0$ となり，実数解をもたないので不適。

(ii)　$x < 2$ のとき　$x^2 = -4(x-2)$ から $x^2 + 4x - 8 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4+8} = -2 \pm 2\sqrt{3}$ となり，ともに $x < 2$，$x \neq 0$ を満たす。

(i)(ii)より，求める解は，$x = -2 \pm 2\sqrt{3}$ である。

コメント

対数方程式を解く問題です。真数条件に要注意です。

問　題

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ。 [2017]

解答例

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$t = \sin\theta$ とおくと，$0 \leqq t \leqq 1$ となり，

$$f(\theta) = 4\sin^3\theta + 3\cos^2\theta = 4\sin^3\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4t^3 - 3t^2 + 3$$

ここで，$g(t) = f(\theta)$ とおくと，

$$g'(t) = 12t^2 - 6t = 6t(2t-1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	3	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	4

これより，$g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$t = 1\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ のとき最大値 4 をとり，$t = \frac{1}{2}\left(\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right)$ のとき最小値 $\frac{11}{4}$ をとる。

コメント

三角関数の最大・最小に関する問題です。直接的に微分するよりは置換えの方が楽そうです。

問　題

放物線$C: y=x^2$上に異なる 2 点 P, Q をとる。P, Q のx座標をそれぞれp, q(ただし，$p<q$)とする。直線 PQ の傾きをaとおく。以下の問いに答えよ。

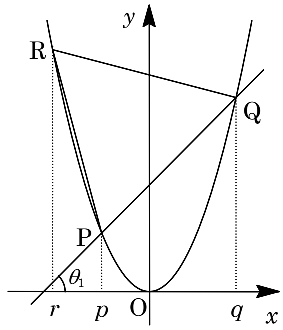
(1)　aをp, qを用いて表せ。

(2)　$a=1$とする。直線 PQ とx軸の正の向きとのなす角θ_1(ただし，$0<\theta_1<\pi$)を求めよ。

(3)　$a=1$とする。放物線C上に点 R をとる。R のx座標をr (ただし，$r<p$)とする。三角形 PQR が正三角形になるとき，直線 PR とx軸の正の向きとのなす角θ_2(ただし，$0<\theta_2<\pi$)を求めよ。また，このとき直線 PR の傾き，および直線 QR の傾きを，それぞれ求めよ。さらに，正三角形 PQR の面積を求めよ。

(4)　$a=2$とする。放物線C上に点S(1, 1)をとる。三角形 PQS が$\angle\mathrm{S}=\dfrac{\pi}{2}$である直角三角形になるとき，この三角形の面積を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$C: y=x^2$上の 2 点$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$に対して，直線 PQ の傾きaは，$a=\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=p+q$

(2)　$a=1$のとき，直線 PQ とx軸の正の向きとのなす角θ_1は，$\tan\theta_1=1$より$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$

(3) 直線 PR とx軸の正の向きとのなす角θ_2は，$\theta_2=\theta_1+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7}{12}\pi$となり，このとき直線 PR の傾きは,

$$\tan\theta_2=\tan\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\Big)=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$$

同様に，直線 QR とx軸の正の向きとのなす角θ_3は，$\theta_3=\theta_2+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{11}{12}\pi$となり，このとき，直線 QR の傾きは，$\tan\theta_3=\tan\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}\pi\Big)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+1\cdot\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$

ここで，(1)から，$p+q=1$……①となり，同様にすると，

$$p+r=-2-\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad q+r=-2+\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②③から，$2(p+q+r)=-3$，$p+q+r=-\dfrac{3}{2}$……④であり，①④より$r=-\dfrac{5}{2}$，③④より$p=\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$から，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{1}{2}-\sqrt{3},\ \dfrac{13}{4}-\sqrt{3}\Big)$，$\mathrm{R}\Big(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{25}{4}\Big)$となるので,

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\Big\{\sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(-3-\sqrt{3})^2}\Big\}^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}(2\sqrt{6})^2\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$$

(4)　$a=2$ のとき，(1)から，$p+q=2$ ………⑤

さて，S(1, 1) に対して，$\overrightarrow{\mathrm{SP}}=(p-1,\ p^2-1)=(p-1)(1,\ p+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=(q-1,\ q^2-1)=(q-1)(1,\ q+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{SP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{SP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=0$ となり，$1+(p+1)(q+1)=0$

②を代入して，$1+pq+2+1=0$，$pq=-4$ ………⑥

⑤⑥から，p，q は t の 2 次方程式 $t^2-2t-4=0$ の 2 つの解となり，$p<q$ から，

$p=1-\sqrt{5}$，$q=1+\sqrt{5}$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{SP}}|=|p-1|\sqrt{1+(p+1)^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+(2-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{SQ}}|=|q-1|\sqrt{1+(q+1)^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+4\sqrt{5}}$

よって，$\triangle\mathrm{PQS}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+4\sqrt{5}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{100-80}=5\sqrt{5}$

コメント

放物線を題材にした図形と式についての基本的な問題です。

問　題

k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる 2 点で交わるものとする。その 2 つの交点を P, Q とする。次の問いに答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 2 点 P, Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ。

(3) 上の(2)の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする。r^2 を a と k で表せ。

(4) 点 R の座標を $(2,\ 1)$ とする。k の値が(1)で求めた範囲を動くとき，3 点 P, Q, R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ。　[2014]

解答例

(1) 円 $x^2+y^2=1$ ……①と直線 $x+2y=k$ ……②が異なる 2 点 P, Q で交わる条件は，円①の中心と直線②の距離が半径より小さいことに等しく，

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}<1,\ |k|<\sqrt{5},\ -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$$

(2) 2 点 P, Q を通る円の中心の軌跡は，線分 PQ の垂直二等分線である。

すなわち，円①の中心を通り，方向ベクトルが直線②の法線ベクトルとなり，その成分が $(1,\ 2)$ であることより，直線 $y=2x$ である。

(3) 2 点 P, Q を通る円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とすると，

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2,\ x^2+y^2-2ax-4ay=r^2-5a^2 \cdots\cdots③$$

すると，円①と③の共通弦は，①－③より，$2ax+4ay=1-r^2+5a^2$

$a\neq 0$ のときは，$x+2y=\dfrac{1-r^2+5a^2}{2a}$ となり，②と一致することより，

$$\frac{1-r^2+5a^2}{2a}=k,\ r^2=5a^2-2ak+1$$

なお，この式は $a=0$ のときも成立している。

(4) (3)より，円③は，$x^2+y^2-2ax-4ay=-2ak+1$ となり，R$(2,\ 1)$ を通るので，

$$4+1-4a-4a=-2ak+1,\ ak=4a-2$$

$a=0$ のときは成立しないので，$k=\dfrac{4a-2}{a}$

さて，(1)から $|k|<\sqrt{5}$ なので，$\left|\dfrac{4a-2}{a}\right|<\sqrt{5}$ となり，

$$\left(\frac{4a-2}{a}\right)^2<5,\ (4a-2)^2<5a^2,\ 11a^2-16a+4<0$$

よって, 3 点 P, Q, R を通る円の中心の x 座標 a は，$\dfrac{8-2\sqrt{5}}{11}<a<\dfrac{8+2\sqrt{5}}{11}$

なお，この範囲は $a\neq 0$ を満たしている。

コメント

円と直線についての基本的な問題です。いろいろな解法が考えられます。

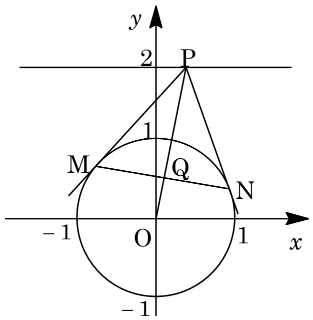
問　題

原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 C に 2 本の接線を引き，その接点を M，N とする。直線 OP と弦 MN の交点を Q とする。点 Q の座標を t を用いて表せ。ただし，t は実数とする。

(2)　点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2012]

解答例



(1)　円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{N}(x_2,\ y_2)$ における接線の方程式は，それぞれ

$$x_1x+y_1y=1,\ x_2x+y_2y=1$$

ともに点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ を通ることより，

$$tx_1+2y_1=1\cdots\cdots\cdots①,\ tx_2+2y_2=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，方程式 $tx+2y=1\cdots\cdots③$で表される図形を考えると，これは直線を表し，①より点 M，②より点 N を通る。すなわち③は直線 MN の方程式である。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k(t,\ 2)$ とおくと，点 Q が直線 MN 上にあることより，

$$t\cdot kt+2\cdot 2k=1,\ k=\frac{1}{t^2+4}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{t^2+4}(t,\ 2)$ より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t}{t^2+4},\ \dfrac{2}{t^2+4}\right)$

(2)　$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，(1)より，$x=\dfrac{t}{t^2+4}\cdots\cdots\cdots④$，$y=\dfrac{2}{t^2+4}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より $x=\dfrac{t}{2}y$ となり，$y>0$ から $t=\dfrac{2x}{y}\cdots\cdots\cdots⑥$

⑥を⑤に代入して，$y\left(\dfrac{4x^2}{y^2}+4\right)=2$，$2x^2+2y^2=y$ となり，

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}y=0,\ x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\cdots\cdots\cdots⑦$$

よって，点 Q の軌跡は円⑦である。ただし，$y>0$ から原点は除く。

コメント

軌跡についての有名な頻出問題です。(1)(2)とも，いろいろな解法がありますが，その 1 例を記しています。

問　題

実数 x, y が連立不等式

$$10^{10} < 2^x 3^y < 10^{11} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{A}),\ \ 10^9 < 3^x 2^y < 10^{10} \cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) 連立不等式(A)，(B)が表す xy 平面上の領域は，どのような図形であるか答えよ。また，その理由を述べよ。

(2) 連立不等式(A)，(B)が満たす実数 x，y において，$x+y$ がとりうる値の範囲，および $y-x$ がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(3) 連立不等式(A)，(B)が満たす整数 x，y を考える。このとき，$y-x$ が最大になる整数 x，y を求めよ。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ として計算してよい。

[2012]

解答例

(1) $10^{10} < 2^x 3^y < 10^{11} \cdots\cdots(\mathrm{A})$ より，$10 < x\log_{10}2 + y\log_{10}3 < 11 \cdots\cdots\cdots$①

$10^9 < 3^x 2^y < 10^{10} \cdots\cdots(\mathrm{B})$ より，$9 < x\log_{10}3 + y\log_{10}2 < 10 \cdots\cdots\cdots$②

ここで，$\log_{10}2 = a$，$\log_{10}3 = b$ とおくと，①②は，

$$10 < ax + by < 11 \cdots\cdots\cdots③,\ \ 9 < bx + ay < 10 \cdots\cdots\cdots④$$

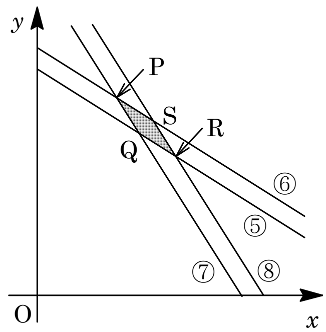
連立不等式③④で表される領域の境界線を，

$$ax + by = 10,\ \ y = -\frac{a}{b}x + \frac{10}{b} \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$ax + by = 11,\ \ y = -\frac{a}{b}x + \frac{11}{b} \cdots\cdots\cdots⑥$$

$$bx + ay = 9,\ \ y = -\frac{b}{a}x + \frac{9}{a} \cdots\cdots\cdots⑦$$

$$bx + ay = 10,\ \ y = -\frac{b}{a}x + \frac{10}{a} \cdots\cdots\cdots⑧$$



すると，直線⑤と⑥は平行，直線⑦と⑧は平行であり，領域は平行四辺形である。

また，直線⑤上の点$\left(0,\ \dfrac{10}{b}\right)$と直線⑥の距離を d_1，直線⑦上の点$\left(0,\ \dfrac{9}{a}\right)$と直線⑧の距離を d_2 とおくと，

$$d_1 = \frac{\left|b\cdot\dfrac{10}{b} - 11\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ d_2 = \frac{\left|a\cdot\dfrac{9}{a} - 10\right|}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって，$d_1 = d_2$ より，領域はひし形となる。

(2)　まず，$0<a<b$ より，$-\dfrac{b}{a}<-1<-\dfrac{a}{b}<0$ となる。

ここで，直線⑥と⑦の交点を P とし，P の x 座標を x_p とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}=-\frac{b}{a}x_p+\frac{9}{a},\ \ x_p=\frac{-11a+9b}{b^2-a^2}$$

直線⑤と⑦の交点を Q とし，Q の x 座標を x_q とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_q+\frac{10}{b}=-\frac{b}{a}x_q+\frac{9}{a},\ \ x_q=\frac{-10a+9b}{b^2-a^2}$$

直線⑤と⑧の交点を R とし，R の x 座標を x_r とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_r+\frac{10}{b}=-\frac{b}{a}x_r+\frac{10}{a},\ \ x_r=\frac{-10a+10b}{b^2-a^2}=\frac{10}{a+b}$$

直線⑥と⑧の交点を S とし，S の x 座標を x_s とおくと，

$$-\frac{a}{b}x_s+\frac{11}{b}=-\frac{b}{a}x_s+\frac{10}{a},\ \ x_s=\frac{-11a+10b}{b^2-a^2}$$

さて，$x+y$ のとりうる値の範囲は，$x+y=k$ すなわち $y=-x+k$ ……⑨として直線⑨が(1)の領域と共有点をもつ範囲として求められる。

(i)　直線⑨が点 Q を通るとき

$$x+y=x_q-\frac{a}{b}x_q+\frac{10}{b}=\frac{b-a}{b}\cdot\frac{-10a+9b}{b^2-a^2}+\frac{10}{b}=\frac{19}{a+b}=\frac{19}{\log_{10}6}$$

(ii)　直線⑨が点 S を通るとき

$$x+y=x_s-\frac{a}{b}x_s+\frac{11}{b}=\frac{b-a}{b}\cdot\frac{-11a+10b}{b^2-a^2}+\frac{11}{b}=\frac{21}{a+b}=\frac{21}{\log_{10}6}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{19}{\log_{10}6}<x+y<\dfrac{21}{\log_{10}6}$

次に，$y-x$ のとりうる値の範囲は，$y-x=l$ すなわち $y=x+l$ ……⑩として直線⑩が(1)の領域と共有点をもつ範囲として求められる。

(iii) 直線⑩が点 R を通るとき

$$y-x=-\frac{a}{b}x_r+\frac{10}{b}-x_r=-\frac{a+b}{b}\cdot\frac{10}{a+b}+\frac{10}{b}=0$$

(iv) 直線⑩が点 P を通るとき

$$y-x=-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}-x_p=-\frac{a+b}{b}\cdot\frac{-11a+9b}{b^2-a^2}+\frac{11}{b}=\frac{2}{b-a}=\frac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}$$

(iii)(iv)より，$0<y-x<\dfrac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}$

(3)　点 P において，$x_p=\dfrac{-11a+9b}{b^2-a^2}=\dfrac{-11a+9b}{(b+a)(b-a)}=\dfrac{0.9829}{0.7781\times0.1761}$

$$-\frac{a}{b}x_p+\frac{11}{b}=x_p+\frac{2}{\log_{10}\frac{3}{2}}=x_p+\frac{2}{0.1761}$$

よって，点$\mathrm{P}(x_p,\ y_p)$とおくと，$x_p \fallingdotseq 7.17$，$y_p \fallingdotseq 18.53$となる。

これより，$y-x$が最大になる整数として，$(x,\ y)=(8,\ 18)$が考えられ，この点が(1)の領域内にあるかどうかを調べると，

$$8a+18b=8\times0.3010+18\times0.4771=10.9958$$

$$8b+18a=8\times0.4771+18\times0.3010=9.2348$$

すると，不等式③と④をともに満たすことより，$y-x$が最大になる整数は，$(x,\ y)=(8,\ 18)$である。

コメント

内容は基本的ですが，計算によって疲労が蓄積する問題です。なお，(3)で 10.9958 というギリギリの値は，出題者の善意のためとみなし，それ以降の詰めは省きました。

問　題

円 $C_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$ と放物線 $C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C_1 と座標軸との共有点，および C_2 と座標軸との共有点の座標を求めよ。

(2)　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3 \leqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1 \end{cases}$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。D の面積 S を求めよ。

(3)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　まず，$C_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3=0$ に対して，$y=0$ とすると，

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0,\ (x-\sqrt{3})^2=0,\ x=\sqrt{3}$$

また，$x=0$ とすると，$y^2-4y+3=0$，$y=1,\ 3$ となり，C_1 と座標軸の共有点は，

$$(\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 3)$$

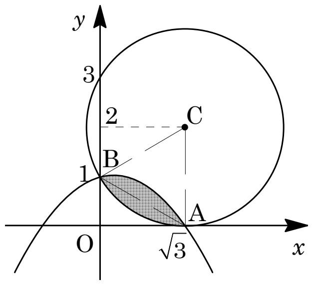
$C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1 \cdots\cdots(*)$ に対して，$y=0$ とすると，

$$\sqrt{3}x^2-x-2\sqrt{3}=0,\ (\sqrt{3}x+2)(x-\sqrt{3})=0,\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3}$$

また，$x=0$ とすると，$y=1$ となり，C_2 と座標軸の共有点は，

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right),\ (\sqrt{3},\ 0),\ (0,\ 1)$$

(2)　$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-4y+3 \leqq 0$，$y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x+1$ の表す領域 D は，右図の網点部となる。



そこで，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，また C_1 の中心を $\mathrm{C}(\sqrt{3},\ 2)$ とおく。領域 D の線分 AB の下側，上側の部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする。

さて，$\mathrm{CA}=\mathrm{CB}=\mathrm{AB}=2$ から，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形となり，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$$

また，直線 $\mathrm{AB}: y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$ であるので，

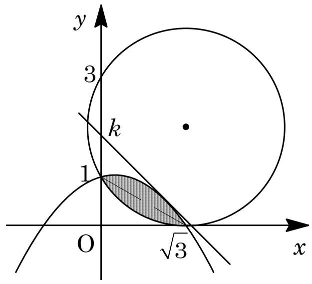
$$S_2=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}x+1+\frac{1}{\sqrt{3}}x-1\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\sqrt{3})^3=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

すると，領域 D の面積 S は,

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{3}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(3)　$x+y=k$ とおくと，右図から，直線 $y=-x+k$ が C_2 に接するとき k は最大値をとる。



さて, (∗)より，$y'=-x+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ となり，$y'=-1$ から,

$$-x+\frac{1}{2\sqrt{3}}=-1,\quad x=\frac{1}{2\sqrt{3}}+1=\frac{\sqrt{3}}{6}+1$$

(∗)を $y=-\dfrac{1}{2}x\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+1$ と変形して代入すると,

$$y=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+1\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}+1\right)+1=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}+1\right)+1=\frac{13}{24}$$

よって，$x+y$ は $(x,\ y)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+1,\ \dfrac{13}{24}\right)$ において最大となり，その最大値は,

$$\frac{\sqrt{3}}{6}+1+\frac{13}{24}=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{37}{24}$$

コメント

内容は基本的ですが，計算量のある問題です。特に(3)では，図を雑にかくと調べることが増えてきます。

問　題

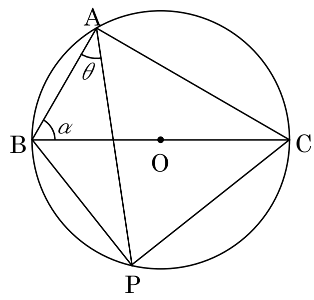
$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle B=\alpha$ である△ABC を考える。△ABC の外接円の半径を R とする。この外接円上の点 P が，点 A を含まない弧 BC 上を動くものとする。$\angle BAP=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) △ABP の面積の最大値を R，α を用いて表せ。

(2) △BPC の面積を R，θ を用いて表せ。

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ とする。△ABP と△BPC の面積の和 S の最大値を求めよ。　[2010]

解答例



(1) $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$ より，△ABC の外接円の中心を O とすると，点 O は辺 BC の中点であり，$BC=2R$ となる。

まず，$\angle ABC=\alpha$ から，$AB=2R\cos\alpha$

また，$\angle PBC=\angle PAC=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$BP=2R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\sin\theta$$

さらに，$\angle ABP=\alpha+\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}AB\cdot BP\sin\angle ABP=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\theta\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=2R^2\cos\alpha\sin\theta\cos(\theta-\alpha)=2R^2\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}$$
$$=R^2\cos\alpha\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\alpha<2\theta-\alpha<\pi-\alpha$ であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から $2\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ となる θ が存在する。すると，この θ において $\sin(2\theta-\alpha)=1$ となり，△ABP の面積は最大値 $R^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$ をとる。

(2) $CP=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\cos\theta$ より，

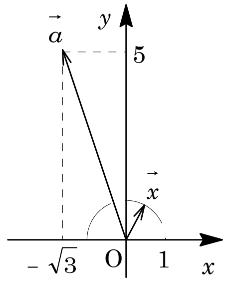
$$\triangle BPC=\frac{1}{2}BP\cdot CP=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta=2R^2\sin\theta\cos\theta=R^2\sin 2\theta$$

(3) $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ のとき, (1)より，$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$となり，

$$S=\triangle ABP+\triangle BCP=\frac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin 2\theta\right\}$$
$$=\frac{1}{4}R^2(\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}+4\sin 2\theta)$$
$$=\frac{1}{4}R^2(-\sqrt{3}\cos 2\theta+5\sin 2\theta+\sqrt{3})$$

ここで，$\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 5)$，$\vec{x}=(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$とおくと，

$$S=\frac{1}{4}R^2(\vec{a}\cdot\vec{x}+\sqrt{3})$$



ここで，$0<2\theta<\pi$から，$\vec{a}\cdot\vec{x}$の値が最大となるのは，$\vec{x}$が$\vec{a}$と同じ向きになるときであり，このとき$\vec{a}\cdot\vec{x}$の値は$|\vec{a}|\cdot|\vec{x}|=2\sqrt{7}$である。

よって, Sの最大値は，$\frac{1}{4}(2\sqrt{7}+\sqrt{3})R^2$である。

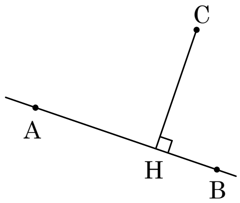
コメント

(1)の結論は図からストレートに導けますが, (3)も考えて数式処理をしました。

問　題

空間内に，3 点 $\mathrm{A}(3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 4)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 4)$ がある。点 C から直線 AB に垂線を引き，交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおくとき，実数 t の値と線分 CH の長さを求めよ。 [2019]

解答例



3 点 $\mathrm{A}(3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 4)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 4)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 3,\ 3)=3(-1,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 1,\ 3)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3t+2,\ 3t-1,\ 3t-3)$$

条件から $\mathrm{CH}\perp\mathrm{AB}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となり，

$$-(-3t+2)+(3t-1)+(3t-3)=0,\ 9t-6=0$$

よって，$t=\dfrac{2}{3}$ となり，このとき $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-2+2,\ 2-1,\ 2-3)=(0,\ 1,\ -1)$ なので，

$$\mathrm{CH}=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2}$$

コメント

内積計算を題材にした空間ベクトルの基本題です。

問　題

△OAB の 2 辺 OA, OB 上にそれぞれ点 C, D があり，直線 CD は△OAB の重心 G を通るものとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\vec{a}\ (0<x<1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=y\vec{b}\ (0<y<1)$ とするとき，以下の問いに答えよ。

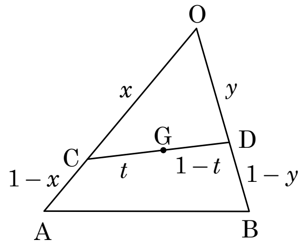
(1)　$\mathrm{CG}:\mathrm{GD}=t:(1-t)$，$0<t<1$ とする。このとき，x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(2)　y を x の式で表せ。また，$0<y<1$ より x の値の範囲を求めよ。

(3)　△OCD の面積を S_1，△OAB の面積を S_2 とし，$f(x)=\dfrac{S_1}{S_2}$ とする。関数 $f(x)$ の増減表をつくり，$f(x)$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ。　[2019]

解答例

(1)　△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=y\vec{b}$ とし，$\mathrm{CG}:\mathrm{GD}=t:(1-t)$ とするとき，



$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)x\vec{a}+ty\vec{b}\cdots\cdots\cdots①$$

一方，点 G は△OAB の重心なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立なので，$(1-t)x=\dfrac{1}{3}$，$ty=\dfrac{1}{3}$ となり，$0<t<1$ から，

$$x=\frac{1}{3(1-t)}\cdots\cdots\cdots③,\quad y=\frac{1}{3t}\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$0<x<1$，$0<y<1$ のもとで，③より $1-t=\dfrac{1}{3x}$ となり，

$$t=1-\frac{1}{3x}=\frac{3x-1}{3x},\quad 3t=\frac{3x-1}{x}$$

④に代入すると，$x\neq\dfrac{1}{3}$ のもとで，$y=\dfrac{x}{3x-1}\cdots\cdots\cdots⑤$

さて，③④より，$0<t<1$ なので $\dfrac{1}{3}<x<1$，$\dfrac{1}{3}<y<1$ となり，このもとで⑤から，

$$\frac{1}{3}<\frac{x}{3x-1}<1\cdots\cdots\cdots⑥$$

すると，$3x-1>0$ から，⑥は $3x-1<3x$ かつ $x<3x-1$ となり，$x>\dfrac{1}{2}$ である。

よって，$\dfrac{1}{3}<x<1$ と合わせると，$\dfrac{1}{2}<x<1$ である。

(3)　△OCD の面積を S_1，△OAB の面積を S_2 とすると，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot x\mathrm{OA}\cdot y\mathrm{OB}\cdot\sin\angle\mathrm{AOB},\quad S_2=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\angle\mathrm{AOB}$$

すると，⑤から，$f(x)=\dfrac{S_1}{S_2}=xy=\dfrac{x^2}{3x-1}$ となり，

$$f'(x)=\frac{2x(3x-1)-x^2\cdot 3}{(3x-1)^2}=\frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$

これより，$\dfrac{1}{2}<x<1$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ の最小値は $\dfrac{4}{9}$ である。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{4}{9}$	↗	

また，このとき $x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{1}{2-1}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$ となる。

コメント

平面ベクトルの図形への応用についての有名問題です。(3)は題意に従いましたが，$f(x)$ の最小値は，相加平均と相乗平均の関係を用いても求められます。

問　題

空間内の 3 点 A, B, C を頂点とする△ABC を考える。2 辺 BC, AC の中点をそれぞれ M, N とし，中線 AM と BN の交点を G とする。以下の問いに答えよ。

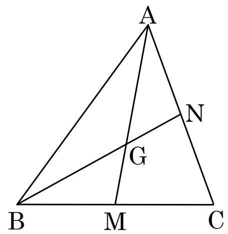
(1)　$\overrightarrow{AG}$ を，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2)　2 点 P, Q が $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PQ}$ を満たすとき，3 点 P, Q, G は同一直線上にあることを示せ。

(3)　△ABC の頂点の座標が A(0, 0, 1)，B(7, 0, 6)，C(2, 12, 5) であるとき，xy 平面上を動く点 P$(x,\ y,\ 0)$ を考える。このとき $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

(4)　(3)において，特に点 P$(x,\ y,\ 0)$ が，xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くものとする。$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ の最大値とそのときの P の座標，および最小値とそのときの P の座標を，それぞれ求めよ。　[2017]

解答例



(1)　条件より，点 G は△ABC の重心なので，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(2)　(1)から，$\overrightarrow{PG}-\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$ となり，

$$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$$

$$3\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，与えられた条件 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PQ}$ に，①を代入すると $3\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PQ}$ となり，これより 3 点 P, Q, G は同一直線上にある。

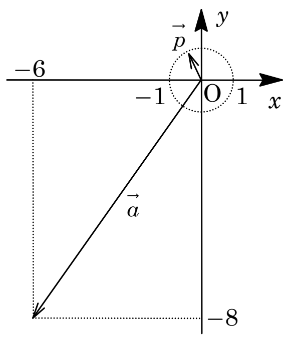
(3)　A(0, 0, 1)，B(7, 0, 6)，C(2, 12, 5) に対して，△ABC の重心は G(3, 4, 4) となり，P$(x,\ y,\ 0)$ とすると，①から，

$$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|=3\left|\overrightarrow{PG}\right|=3\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+16}$$

すると，$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ は，P(3, 4, 0) で最小値 $3\sqrt{16}=12$ をとる。

(4)　P$(x,\ y,\ 0)$ が xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くことより，$0\leqq\theta<2\pi$ として $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおき，(3)と同様にすると，

$$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|=3\sqrt{(\cos\theta-3)^2+(\sin\theta-4)^2+16}$$
$$=3\sqrt{-6\cos\theta-8\sin\theta+42}\cdots\cdots\cdots②$$



ここで，ベクトル $\vec{a}=(-6,\ -8)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を設定し，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を φ $(0\leqq\varphi\leqq\pi)$ とすると，

$$-6\cos\theta-8\sin\theta=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi$$
$$=10\cos\varphi\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3\sqrt{10\cos\varphi+42}$

すると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$は，$\cos\varphi=1\ (\varphi=0)$すなわち$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5},\ 0\right)$のとき最大値$3\sqrt{10+42}=6\sqrt{13}$をとり，$\cos\varphi=-1\ (\varphi=\pi)$すなわち$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5},\ 0\right)$のとき最小値$3\sqrt{-10+42}=12\sqrt{2}$をとる。

コメント

ベクトルと図形を題材にした基本的な問題です。誘導が細かいので，方針に迷うことはないでしょう。なお, (4)では$\vec{a}$と$\vec{p}$を設定し, 2 つのベクトルの内積を用いて図形的に処理をしています。もちろん，サインでの合成でも構いませんが。

問　題

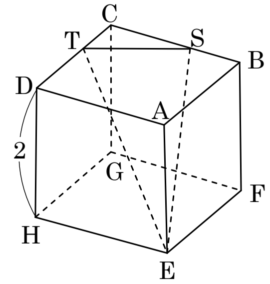


図1

1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH がある。右の図 1 のように，2 辺 BC，CD 上に，$\mathrm{BS}=\mathrm{CT}=x\ (0\leqq x\leqq 2)$ を満たす点 S，T をとる。このとき，三角形 EST の面積の最大値と最小値を求めたい。以下の問いに答えよ。

(1)　右の図 2 を参考にして，三角形 OPQ において $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおくとき，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

と表されることを証明せよ。

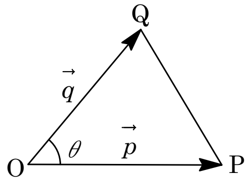


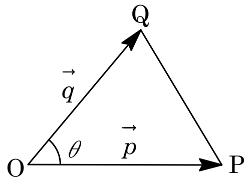
図2

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\vec{c}$ とおく。立方体の 1 辺の長さが 2 であることに注意して，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および x を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2$ を，それぞれ x の式として表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{ES}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}$ は，x によらない一定の値になることを示せ。

(3)　上の(1)を利用して三角形 EST の面積 $f(x)$ を求めよ。

(4)　$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値も答えよ。　[2016]

解答例

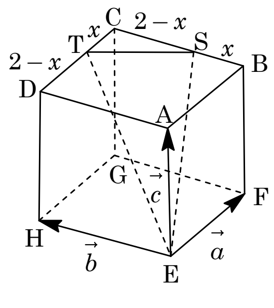


(1)　$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2(1-\cos^2\theta)}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{ES}}=\overrightarrow{\mathrm{EB}}+\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{x}{2}\vec{b}=\vec{a}+\frac{x}{2}\vec{b}+\vec{c}$

$$\overrightarrow{\mathrm{ET}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\overrightarrow{\mathrm{DT}}=\vec{b}+\vec{c}+\frac{2-x}{2}\vec{a}=\frac{2-x}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$



ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2=2^2+2^2+\frac{x^2}{4}\cdot 2^2=x^2+8$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2=\frac{(2-x)^2}{4}\cdot 2^2+2^2+2^2=x^2-4x+12$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}}=\frac{2-x}{2}\cdot 2^2+\frac{x}{2}\cdot 2^2+2^2=8$$

(3)　$\triangle\mathrm{EST}$ の面積 $f(x)$ は，(1)より，

$$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{ES}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{ET}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{ES}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ET}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+8)(x^2-4x+12)-8^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-4x^3+20x^2-32x+32}$$

(4)　$g(x)=x^4-4x^3+20x^2-32x+32$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x^3-12x^2+40x-32 \\ &= 4(x-1)(x^2-2x+8) \\ &= 4(x-1)\{(x-1)^2+7\} \end{aligned}$$

これより，$0\leqq x\leqq 2$ における $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	32	$\searrow$	17	$\nearrow$	32

すると，$f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{g(x)}$ より，$f(x)$ は，$x=0$，2 のとき最大値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{32}=2\sqrt{2}$ をとり，$x=1$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ をとる。

コメント

空間の三角形の面積を求める問題です。対象が立方体ですので，計算は簡単です。

問　題

ひし形の紙がある(図 1)。点線で半分に折ると正三角形になった(図 2)。これを少し開いて机の上に立てると，三角錐の形になる。その高さを次のようにして求めたい。

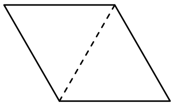


図1

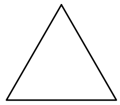


図2

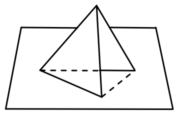


図3

図 4 において，2 つの正三角形 OAB と OAC の 1 辺の長さを 1 とする。点 O と平面 ABC との距離が，三角錐 OABC の高さになる。

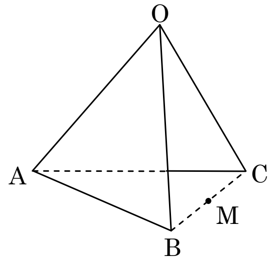


図4 (図3の拡大図)

空間ベクトルを利用してこの高さを求める。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ とおき，線分 BC の中点を M とする。以下の問いに答えよ。

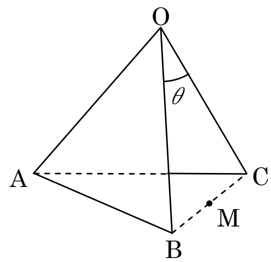
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。また，$|\vec{b}+\vec{c}|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおくと，点 H は直線 AM 上にある。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つことを示せ。さらに，H が $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を満たす点であるとき，t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(4)　三角錐 OABC の高さを h とする。h を $\cos\theta$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が成り立つとき，θ と h の値を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，M は線分 BC の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{3}$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

また，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ から，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1^2\cdot\cos\theta=\cos\theta$ となり，

$$|\vec{b}+\vec{c}|^2=1^2+2\cos\theta+1^2=2+2\cos\theta$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}\vec{b}+\dfrac{t}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}(1-t)+\frac{t}{2}\cos\theta+\frac{t}{2}\cdot1^2-\frac{1}{2}(1-t)-\frac{t}{2}\cdot1^2-\frac{t}{2}\cos\theta=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が成り立つ。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$ から，

$$(1-t)\Big(-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\Big)+\frac{t}{2}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\Big)+\frac{t}{2}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\Big)=0$$

すると，$-\dfrac{1}{2}(1-t)+\dfrac{t}{2}\cos\theta=0$ から，$t=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ ………(＊)

(4)　(3)から(＊)のとき，$h=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=(1-t)^2+\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}t(1-t)+\frac{1}{2}t(1-t)+\frac{t^2}{2}\cos\theta$$

$$=\frac{t^2}{2}(1+\cos\theta)-t+1=\frac{1}{2(1+\cos\theta)}-\frac{1}{1+\cos\theta}+1=\frac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

よって，$h=\sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}}$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のとき M は H と一致することから $t=1$ となり，(＊)より，

$$\frac{1}{1+\cos\theta}=1,\ \cos\theta=0$$

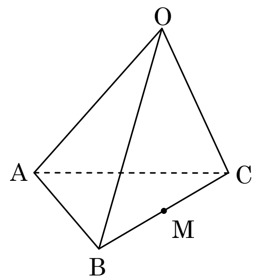
これより，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$h=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる。

コメント

空間ベクトルの応用問題です。細かすぎるほどの誘導が付けられています。

問　題

右図のような四面体 OABC がある。各面 ABC, OBC, OCA, OAB の重心を，それぞれ P, Q, R, S とし，辺 BC の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{m}$ とおく。次の問いに答えよ。



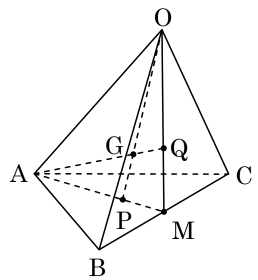
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{m}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(2)　線分 OP と線分 AQ の交点を G とする。線分 OP 上の点 U は，実数 s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$(0\leqq s\leqq 1)$ と表され，線分 AQ 上の点 V は，実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(0\leqq t\leqq 1)$ と表される。このことを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(3)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を表せ。

(4)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中から必要なものを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ をそれぞれ表せ。また，点 G が線分 BR および線分 CS 上にあることを示せ。　[2013]

解答例



(1)　面 ABC, OBC の重心は，それぞれ P, Q なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}\vec{m},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{m}$$

(2)　線分 OP と線分 AQ の交点 G は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}s\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{m}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{m}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{m}$ は 1 次独立なので，①②より，$\frac{1}{3}s=1-t$　$\frac{2}{3}s=\frac{2}{3}t$

すると，$s=t=\frac{3}{4}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{m}\cdots\cdots\cdots③$

(3)　③より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdots\cdots\cdots④$

(4)　面 OCA, OAB の重心は，それぞれ R, S なので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

④より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

これより，点 G は線分 BR および線分 CS 上にある。

コメント

空間ベクトルの基本問題です。誘導がくどいと感じられるほど，細かくつけられています。

問　題

四面体 OABC において,

$$OA=1,\ OB=3,\ OC=2,\ \angle AOB=90^\circ,\ \angle AOC=\angle BOC=120^\circ$$

とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 平面 ABC 上に点 H をとり, s, t, u を実数として $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおく。このとき, $s+t+u=1$ となることを示せ。

(2) (1)の $\overrightarrow{OH}$ が平面 ABC に垂直であるとき, s, t, u の値をそれぞれ求めよ。

(3) 平面 OAB 上に点 K をとり, $\overrightarrow{CK}$ が平面 OAB に垂直であるとする。このとき, $\overrightarrow{OK}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表し, $\overrightarrow{CK}$ の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ。 [2012]

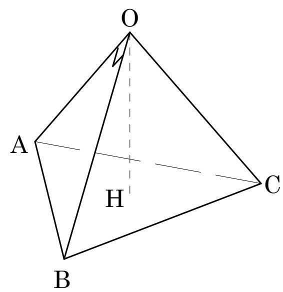
解答例

(1) 点 H が平面 ABC 上にあることより, x, y を実数として,

$$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+y(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

$$=(1-x-y)\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}$$



条件より, $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ なので, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次独立であることから,

$$s=1-x-y,\ t=x,\ u=y$$

よって, $s+t+u=1$ ………①

(2) 条件より, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3\cdot\cos90^\circ=0$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\cdot2\cdot\cos120^\circ=-3,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot1\cdot\cos120^\circ=-1$$

ここで, $\overrightarrow{OH}$ が平面 ABC に垂直なので, $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{BA}$ かつ $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{CA}$ より,

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BA}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\ s-9t+2u=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{CA}=(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0,\ 2s+3t-5u=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $t=\dfrac{3}{7}u$, $s=\dfrac{13}{7}u$ となり, ①に代入すると,

$$\frac{13}{7}u+\frac{3}{7}u+u=1,\ \frac{23}{7}u=1$$

よって, $u=\dfrac{7}{23}$, $t=\dfrac{3}{23}$, $s=\dfrac{13}{23}$

(3) 点 K は平面 OAB 上にあるので, l, m を実数として, $\overrightarrow{OK}=l\vec{a}+m\vec{b}$ と表せ,

$$\overrightarrow{CK}=l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{CK}$ が平面 OAB に垂直なので, $\overrightarrow{CK}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{CK}\perp\overrightarrow{OB}$ より,

$$\overrightarrow{CK}\cdot\vec{a}=(l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0,\ l+1=0$$

$$\overrightarrow{CK}\cdot\vec{b}=(l\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0,\ 9m+3=0$$

すると，$l=-1$，$m=-\dfrac{1}{3}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=-\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}=-\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|^2=|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}=2$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|=\sqrt{2}$ から，四面体 OABC の体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CK}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

コメント

空間ベクトルの基本的な問題です。ただ, (2)と(3)は独立の設問です。

問　題

3 辺の長さが AB＝4，BC＝3，CA＝5である直角三角形 ABC と，その内側にあって 2 辺 AB および AC に接する円 O を考える。この円の半径を r とし，中心 O から AB に引いた垂線と AB との交点を H とする。また，ベクトル$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$と同じ向きで大きさが 1 のベクトルを，それぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$とし，$\overrightarrow{AH}=t\vec{u}\ (t>0)$とする。次の問いに答えよ。

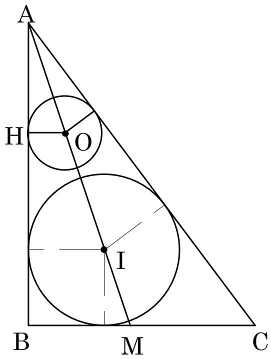
(1) 直線 AO と辺 BC の交点を M とするとき，ベクトル$\overrightarrow{AM}$を$\vec{u}$と$\vec{v}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$の内積$\vec{u}\cdot\vec{v}$を求め，ベクトル$\overrightarrow{AO}$と$\overrightarrow{HO}$を，それぞれ$\vec{u}$，$\vec{v}$および t を用いて表せ。また，円 O の半径 r を t で表せ。

(3) 円 O が辺 BC にも接するとき，その中心を I とする。すなわち，I は三角形 ABC の内心である。そのときの t の値と，内接円 I の半径を求めよ。

(4) 円 O と内接円 I が共有点をもたないような t の範囲を求めよ。　[2011]

解答例



(1) ∠BAC の二等分線 AM は，$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$ より，k を定数として，

$$\overrightarrow{AM}=k(\vec{u}+\vec{v})=\frac{k}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{5}\overrightarrow{AC}$$

また, M は BC 上の点なので，$\dfrac{k}{4}+\dfrac{k}{5}=1$，$k=\dfrac{20}{9}$

よって，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})=\dfrac{20}{9}\vec{u}+\dfrac{20}{9}\vec{v}$

(2) $\cos\angle BAC=\dfrac{4}{5}$ より，$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times1\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}$

ここで，AO : AM＝AH : AB＝t : 4 より，

$$\overrightarrow{AO}=\frac{t}{4}\overrightarrow{AM}=\frac{t}{4}\cdot\frac{20}{9}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{5}{9}t(\vec{u}+\vec{v})\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\overrightarrow{HO}=\dfrac{5}{9}t(\vec{u}+\vec{v})-t\vec{u}=-\dfrac{4}{9}t\vec{u}+\dfrac{5}{9}t\vec{v}$ から，

$$|\overrightarrow{HO}|^2=\left(\frac{t}{9}\right)^2|-4\vec{u}+5\vec{v}|^2=\left(\frac{t}{9}\right)^2\left(16-40\times\frac{4}{5}+25\right)=\frac{t^2}{9}$$

すると，$t>0$ から，$r=|\overrightarrow{HO}|=\sqrt{\dfrac{t^2}{9}}=\dfrac{t}{3}$

(3) 内接円の半径を r とおくと，$(3-r)+(4-r)=5$ より，$r=1$ となる。

すると, (2)から，$\dfrac{t}{3}=1$ となり，$t=3$ である。

(4) $(*)$から，$\overrightarrow{AI}=\dfrac{5}{9}\times3(\vec{u}+\vec{v})=\dfrac{5}{3}(\vec{u}+\vec{v})$ となり，$\overrightarrow{OI}=\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{9}t\right)(\vec{u}+\vec{v})$ より，

$$|\overrightarrow{OI}|^2=\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{9}t\right)^2|\vec{u}+\vec{v}|^2=\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{9}t\right)^2\left(1+2\times\frac{4}{5}+1\right)=\frac{10}{9}(3-t)^2$$

すると，$t<3$ なので，$\mathrm{OI}=\dfrac{\sqrt{3}}{10}(3-t)$ となる。

これより，円 O と内接円 I が共有点をもたない条件は,

$$\frac{\sqrt{10}}{3}(3-t)>\frac{t}{3}+1,\ (\sqrt{10}+1)t<3\sqrt{10}-3,\ t<\frac{3(\sqrt{10}-1)}{\sqrt{10}+1}=\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$$

よって，$t>0$ と合わせて，$0<t<\dfrac{11-2\sqrt{10}}{3}$ である。

コメント

丁寧な誘導のついた平面ベクトルの問題です。ただ，(3)はあまりにも有名なので，誘導とは異なる解法になっています。

問　題

数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和をS_nとする。$S_n = 6n - 2a_n$　$(n = 1,\ 2,\ \cdots)$が成り立つとき，初項a_1および一般項a_nを求めよ。 [2018]

解答例

$S_n = 6n - 2a_n$に対し，$S_1 = a_1$なので，$a_1 = 6\cdot 1 - 2a_1$から$a_1 = 2$

また，$n \geqq 2$のとき，$a_n = S_n - S_{n-1}$より，

$$a_n = (6n - 2a_n) - \{6(n-1) - 2a_{n-1}\} = -2a_n + 2a_{n-1} + 6$$

すると，$a_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1} + 2$となり，$a_n - 6 = \dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 6)$から，

$$a_n - 6 = (a_1 - 6)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$a_n = 6 - 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$となり，この式は$n = 1$のときも成り立つ。

コメント

和と一般項との関係についての基本題です。

問　題

数列$\{a_n\}$の一般項が，$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$であるとき，$a_{n+1}-a_n$を n の式で表し，a_nが最大となる正の整数nをすべて求めよ。　[2017]

解答例

$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n n(n-1)$のとき，$a_{n+1}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}(n+1)n$となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n n\left\{\frac{3}{4}(n+1)-(n-1)\right\}=-\left(\frac{3}{4}\right)^n n\left(\frac{1}{4}n-\frac{7}{4}\right)$$

すると，$n\leqq 6$のとき$a_{n+1}>a_n$，$n=7$のとき$a_{n+1}=a_n$，$n\geqq 8$のとき$a_{n+1}<a_n$となるので，a_nが最大となる正の整数nは，$n=7$，8である。

コメント

階差数列を利用した数列の増減について，基本を確認する問題です。

問　題

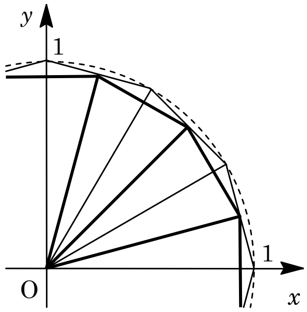
半径 1 の円に内接する正十二角形 D がある。その面積を S とする。D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる。さらに，D_1 の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_2 をつくる。このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる $(n \geqq 2)$。D_n の面積を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) S と S_1 を求めよ。

(2) S_n を n の式で表せ $(n \geqq 1)$。

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ。ただし，$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$ である。 [2016]

解答例



(1) 半径 1 の円に内接する正十二角形 D の面積 S は，

$$S = \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)\times 12 = 3$$

また，D の各辺の中点を順に結んでできる正十二角形 D_1 の面積 S_1 は，

$$S_1 = \left\{\frac{1}{2}\left(1\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)^2\sin\frac{\pi}{6}\right\}\times 12 = \cos^2\frac{\pi}{12}\cdot S$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)S = \frac{2+\sqrt{3}}{4}S = \frac{3(2+\sqrt{3})}{4}$$

(2) (1)と同様に考えると，$S_{n+1} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}S_n \quad (n \geqq 1)$ より，

$$S_n = S_1\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n$$

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ とすると，$3\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \dfrac{3}{2}$ となり，$2(2+\sqrt{3})^n \leqq 4^n$ から，

$$\log_2 2 + n\log_2(2+\sqrt{3}) \leqq n\log_2 2^2,\quad 1 + n\log_2(2+\sqrt{3}) \leqq 2n$$

すると，$\{2-\log_2(2+\sqrt{3})\}n \geqq 1$ となり，$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$ から，

$$0.1 < 2-\log_2(2+\sqrt{3}) < 0.11$$

よって，$n \geqq \dfrac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})}$ となるので，$9.09 < \dfrac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})} < 10$ から，求める最小の整数 n は 10 である。

コメント

図形と数列の基本的な融合問題です。最後の対数計算も複雑ではありません。