2020 入試対策
過去問ライブラリー

名古屋大学
文系数学22か年

1998－2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された名古屋大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
　　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された問題は，その解答例の映像解説を YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 次の問いに答えよ。

(1) $\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2$ を計算し，2 重根号を用いない形で表せ。

(2) $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(3) 8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ （ただし，複号±はすべての可能性にわたる）の中で，(2)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求めよ。 [2015]

2 p を実数とする。方程式 $x^4+(8-2p)x^2+p=0$ が相異なる 4 個の実数解をもち，これらの解を小さい順に並べたとき，それらは等差数列をなすとする。この p を求めよ。 [2007]

3 (1) 複素数 z を未知数とする方程式 $z^6=64$ の解をすべて求めよ。

(2) (1)で求めた解 $z=p+qi$ （p，q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式 $x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$ が，整数の解を少なくとも 1 つもつ。 [2005]

4 関数 $f(x)=-|2x-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を用いて，関数 $g(x)=-|2f(x)-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を考える。$0<c<1$ のとき，$g(x)=c$ を満たす x を求めよ。 [2001]

■ 微分と積分

1 a を実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax-a$ と $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ を考える。関数 $y=F(x)-f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ。

[2019]

2　a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2)　2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3)　2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。　[2017]

3　平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり，C_1 の周上に定点 A がある。点 P, Q はそれぞれ C_1，C_2 の周上を反時計回りに動き，ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む。時刻 $t=0$ において，P は A の位置にあって O, P, Q はこの順に同一直線上に並んでいる。$0\leqq t\leqq 4\pi$ のとき△APQ の面積の 2 乗の最大値を求めよ。　[2013]

4　(1)　関数 $y=x^3-x^2$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ の接線で，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ。

(3)　p を定数とする。x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ。　[2011]

5　関数 $f(x)$ を，$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ により定める。

(1)　a, b は実数とする。 $y=ax+b$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点をもつための a, b に対する条件を求めよ。

(2)　p, q は実数で $p>0$ とする。 $y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつための p，q に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ。　[2010]

6　2 つの放物線 $C:y=\dfrac{1}{2}x^2$，$D:y=-(x-a)^2$ を考える。a は正の実数である。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ における C の接線 l を求めよ。

(2)　l がさらに D と接するとき，l を C と D の共通接線という。2 本の（C と D の）共通接線 l_1，l_2 を求めよ。

(3)　共通接線 l_1，l_2 と C で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2007]

7　$0 \leqq k \leqq 1$ を満たす実数 k に対して，xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \leqq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leqq x^2$，$y \geqq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leqq -x^2 + 2x$，$y \geqq kx$ で表される領域

(1)　領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と，その最小値を求めよ。　[2006]

8　放物線 $R: y = -x^2 + 6$ と直線 $l: y = x$ との交点を A, B とする。直線 $y = x + t$ $(t > 0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 $\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$ で交わるものとする。

(1)　放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2)　4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t) = \dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。　[2005]

9　a を実数とする。$f(x) = x^3 + ax^2 + (3a-6)x + 5$ について以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ。

(2)　関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a に対して，関数 $y = f(x)$ は $x = p$ で極大値，$x = q$ で極小値をとるとする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ。　[2004]

10　放物線 $C: y = ax^2$ $(a > 0)$ を考える。放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p \neq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とする。直線 l と放物線 C で囲まれる図形の面積を $S(\mathrm{P})$ とする。

(1)　直線 l の方程式を求めよ。

(2)　点 P を $p > 0$ の範囲で動かす。$S(\mathrm{P})$ が最小となるときの，直線 l の傾き m と $S(\mathrm{P})$ を求めよ。　[2003]

11　a, b, c は定数とし，$a > 0$ とする。

(1)　曲線 $y = -ax^3 + bx + c$ の接線で，点 $(0,\ t)$ (t は実数)を通るものがただ 1 本存在することを示せ。

(2)　(1)の接線が正の傾きをもつための t の範囲を求めよ。　[2001]

12　$a,\ b$ を実数とする。xy 平面上で，直線 $l: y=ax+b$ は曲線 $C: y=(x+1)(2-x)$ と, x 座標が $0 \leqq x \leqq 2$ を満たす点で接しているとする。

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め, ab 平面上に図示せよ。

(2)　曲線 C および 3 つの直線 $l,\ x=0,\ x=2$ で囲まれた図形の面積を最小にする $a,\ b$ の値と，このときの面積を求めよ。　[2000]

13　曲線 $C: y=x|x-1|$ と，直線 $l: y=kx$ に関して，以下の問いに答えよ。

(1)　C と l が $x>0$ で 2 つの交点をもつような k の範囲を求めよ。

(2)　k が(1)で求めた範囲を動くとき，C と l によって囲まれる図形全体の面積を最小にする k の値を求めよ。　[1999]

14　座標平面上に放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $l: y=x+k$ を考える。

(1)　放物線と直線 l が異なる 2 個の共有点をもつような k の範囲を求めよ。

(2)　k は(1)で求めた条件をみたすとして，さらに $k>0$ とする。(1)の 2 つの共有点を P, Q とし，O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　$a,\ b$ を実数とし，少なくとも一方は 0 でないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　連立不等式 $3x+2y+4 \geqq 0$，$x-2y+4 \geqq 0$，$ax+by \geqq 0$ の表す領域，または連立不等式 $3x+2y+4 \geqq 0$，$x-2y+4 \geqq 0$，$ax+by \leqq 0$ の表す領域が三角形であるために $a,\ b$ が満たすべき条件を求めよ。さらに，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の三角形の面積を S とするとき，S を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　$S \geqq 4$ を示せ。　[2018]

2　曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-1$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件：$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，$\angle \mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

3 座標平面上の円$C: x^2+(y-1)^2=1$と，x 軸上の 2 点$P(-a,\ 0)$，$Q(b,\ 0)$を考える。ただし，$a>0$，$b>0$，$ab\neq 1$とする。点 P, Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その 2 つの接線の交点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 QR の方程式を求めよ。

(2) R の座標を a, b で表せ。

(3) R の y 座標が正であるとき，△PQR の周の長さを T とする。T を a, b で表せ。

(4) 2 点 P, Q が，条件「$PQ=4$ であり，R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ。　[2015]

4 原点を中心とする半径 1 の円を C とし，x 軸上に点$P(a,\ 0)$をとる。ただし $a>1$とする。P から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする。

(1) Q の x 座標を求めよ。

(2) 点 R が C 上にあるとき，$\dfrac{PR}{QR}$ が R によらず一定であることを示し，その値を a を用いて表せ。

(3) C 上の点 R が$\angle PRQ=90°$を満たすとする。このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ。　[2014]

5 実数 t に対して 2 点$P(t,\ t^2)$，$Q(t+1,\ (t+1)^2)$を考える。

(1) 2 点 P, Q を通る直線 l の方程式を求めよ。

(2) a を定数とし，直線$x=a$と l の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく。t が$-1\leqq t\leqq 0$の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ。

(3) t が$-1\leqq t\leqq 0$の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。　[2014]

6 xy 平面上に，点$(0,\ 1)$を通り，傾きが h の直線 l がある。

(1) xy 平面において，l に関して点$P(a,\ b)$と対称な点を$Q(s,\ t)$とする。このとき，a, b, h を用いて s, t を表せ。ただし，点$P(a,\ b)$は l 上にないとする。

(2) xy 平面において，l に関して原点$O(0,\ 0)$と対称な点を A とする。h が$-1\leqq h\leqq 1$の範囲を動くとき，線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ。

(3) h が$-1\leqq h\leqq 1$の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする。C と直線$y=1$で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2012]

7　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。

(1)　$a>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>1>b>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための $a,\ b$ に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。　[2011]

8　xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件(a), (b), (c)を満たしているとする。

(a)　対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(b)　直線 AB の傾きは 2 である。

(c)　A の y 座標は，B, C, D の y 座標より大きい。

このとき，$a>0$, $b>0$ として，辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$，BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく。

(1)　A, B, C, D の座標を $a,\ b$ で表せ。

(2)　長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2\leqq 100$ に含まれるための $a,\ b$ に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。　[2010]

9　放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ と円 $(x-b)^2+(y-1)^2=1$ $(b>0)$ が，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接しているとする。ただし，$0<p<b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき，$\angle\mathrm{PQR}=120^\circ$ であるとする。ここで，放物線と円が点 P で接するとは，P が放物線と円の共有点であり，かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　$a,\ b$ の値を求めよ。

(2)　点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸，および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2009]

10　2 つの円 $x^2+(y-2)^2=9$ と $(x-4)^2+(y+4)^2=1$ に外接し，直線 $x=6$ に接する円を求めよ。ただし，2 つの円がただ 1 点を共有し，互いに外部にあるとき，外接するという。　[2008]

11　次の不等式の表す領域を D とする。　$(x-2)^2+|2x+3y-1|\leqq 4$

(1)　D の概形を描き，その面積を求めよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ が D 内を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値およびそれらの値をとる点の座標を求めよ。　[2008]

12 xy 平面上に点 $\mathrm{A}(2,\ 4)$ がある。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が x 軸上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006]

13 O を原点とする座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上の 2 点 A，B に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = t$ とおく。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $t = 2$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 P の軌跡を求め，図示せよ。 [2002]

14 a, b を正定数とし，平面ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2a,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ 2b)$ を考える。線分 OB の中点を C とする。直線 OA，OB 上にない平面上の点 P に対し，点 P を通り，直線 OB に平行な直線と直線 OA との交点を Q とし，点 P を通り，直線 OA に平行な直線と直線 OB との交点を R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される。ただし，s，t は実数である。

(1) k を正定数とするとき，$t = (s-k)^2$ を満たす点 P のなす曲線 F の方程式を求めよ。

(2) 直線 AC が F と接するとき，k の値を求めよ。 [2001]

■ 図形と計量

1 辺の長さがそれぞれ $\mathrm{AB} = 10$，$\mathrm{BC} = 6$，$\mathrm{AC} = 8$ の△ABC がある。辺 AB 上に点 P，辺 AC 上の点 Q を，△APQ の面積が△ABC の面積の $\dfrac{1}{2}$ になるようにとる。

(1) 2 辺の長さの和 $\mathrm{AP} + \mathrm{AQ}$ を u とおく。△APQ の周の長さ l を u を用いて表せ。

(2) l が最小になるときの AP，AQ，l の値を求めよ。 [2002]

■ ベクトル

1　空間のベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$が，条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{6}$$

を満たしているとする。ただし，a, b は正の数とする。

(1)　a, b の値を求めよ。

(2)　三角形 OAB の面積 S を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積 V を求めよ。　[2009]

2　△ABC の辺 AB, BC, CA を2:1に内分する点をそれぞれ A′，B′，C′ とし，△A′B′C′ の辺 A′B′，B′C′，C′A′ を2:1に内分する点をそれぞれ A″，B″，C″ とする。このとき直線 AA″，BB″，CC″ は△ABC の重心で交わることを証明せよ。　[2007]

3　△OAB の頂角 ∠O の二等分線と辺 AB との交点を P，点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする。以下では，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。

(1)　P は線分 AB を$|\vec{a}|:|\vec{b}|$に内分する点であることを証明せよ。

(2)　線分の長さ OQ を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。　[2003]

4　座標空間内に 4 点P(3, 1, 4)，A(1, 2, 3)，B(1, 1, 2)，C(2, 1, 1)がある。直線 PA と xy 平面の交点をA′，直線 PB と xy 平面の交点をB′，直線 PC と xy 平面の交点をC′ とする。

(1)　△ABC の面積を求めよ。

(2)　△A′B′C′ の面積を求めよ。　[2000]

5　(1)　ベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$が次の条件(＊)を満たすとき，点$(a_1,\ a_2)$の存在範囲を図示せよ。

(＊)　あるベクトル$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$が存在して，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$が 任意のベクトル$\vec{p}$に対して成り立つ。

(2)　(1)で求めた$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$に対して，条件(＊)にあるベクトル$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1　非負の整数 n に対して P_n を xy 平面上の点とする。P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし，P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ と P_{n+1} の座標 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ は

$$x_{n+1}=x_n-k(y_n+y_{n+1}),\quad y_{n+1}=y_n+k(x_n+x_{n+1})$$

を満たすとする。ただし k を正の実数とする。

(1)　$k=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とする。ただし $0<\alpha<\pi$ とする。このとき P_1，P_2 の座標 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を α を用いて表せ。

(2)　P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ を(1)の α と n を用いて表せ。

(3)　O を xy 平面の原点とするとき，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を k を用いて表せ。

[2019]

2　次の問いに答えよ。

(1)　整数 α，β の少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ は奇数であることを示せ。

(2)　n を奇数とする。このとき $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$ を満たす整数 α，β は存在しないことを示せ。

(3)　c を実数とする。このとき 3 次方程式 $x^3-2018x+c=0$ の解のうち整数であるものは 1 個以下であることを示せ。　[2018]

3　次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(＊)を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

(＊)　$a<b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　偶数 $2n$ $(n\geqq 1)$ の 3 つの正の約数 $p,\ q,\ r$ で，$p>q>r$ と $p+q+r=n$ を満たす組 $(p,\ q,\ r)$ の個数を $f(n)$ とする。ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする。n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また，$f(n)=M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。　[2017]

4　正の整数 n に対して，その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。

(2)　$s(2016)$ を求めよ。

(3)　2016 の正の約数 n で，$s(n)=2016$ となるものをすべて求めよ。　[2016]

5 　$k,\ m,\ n$ は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\ \ S_k(1)=1\ (k \geqq 0)$$
$$T_m(n)={}_m\mathrm{C}_1\,S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2\,S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3\,S_3(n)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\,S_{m-1}(n)$$
$$=\sum_{k=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_k\,S_k(n)\quad (m \geqq 2)$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 7 以上の素数のとき，$S_1(p-1)$，$S_2(p-1)$，$S_3(p-1)$，$S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ。　[2013]

6 　m を正の奇数とする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　p を正の整数とするとき，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

[2012]

7 　次の問いに答えよ。

(1)　$3x+2y \leqq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。　[2008]

8 　n を自然数とするとき，$m \leqq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする。

(1)　$f(15)$ を求めよ。

(2)　$p,\ q$ を互いに異なる素数とする。このとき $f(pq)$ を求めよ。　[2003]

9　次のように円 C_n を定める。まず，C_0 は $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円，C_1 は $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円とする。次に C_0，C_1 に外接し x 軸に接する円を C_2 とする。さらに，$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ に対し，順に，C_0，C_{n-1} に外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする。C_n $(n\geqq 1)$ の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，2 つの円が外接するとは，中心間の距離がそれぞれ円の半径の和に等しいことをいう。

(1)　$n\geqq 1$ に対し，$b_n=\dfrac{{a_n}^2}{2}$ を示せ。

(2)　a_n を求めよ。　[2002]

10　自然数 n に対して，不等式 $0\leqq a\leqq 2b\leqq c\leqq n$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を $P(n)$ とする。

(1)　$P(5)$ を求めよ。

(2)　奇数 n に対して，$P(n)$ を求めよ。　[2000]

■ 確率

1　1 つのサイコロを 3 回投げる。1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

(1)　2 次方程式 $x^2-bx+c=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ。

(2)　2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ のすべての解が整数である確率を求めよ。

(3)　2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ。

[2019]

2　図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則(a), (b)に従って移動する。

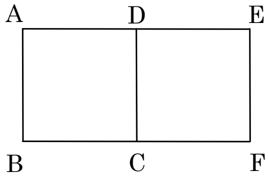


図 1

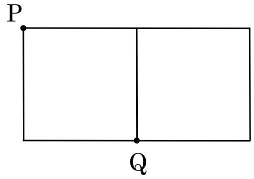


図 2

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

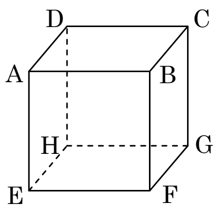
(1)　時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

(2)　a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。　　[2018]

3　右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

[2017]

4　n を正の整数とし，k を $1\leqq k\leqq n+2$ を満たす整数とする。$n+2$ 枚のカードがあり，そのうちの 1 枚には数字 0 が，他の 1 枚には数字 2 が，残りの n 枚には数字 1 が書かれている。この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 1 以上になる確率を求めよ。

(2)　取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 2 となる確率 $Q_n(k)$ を求めよ。

(3)　与えられた n に対して，確率 $Q_n(k)$ が最大となる k の値と，その最大値を求めよ。

[2016]

5　数直線上にある 1，2，3，4，5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点} k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{にあるならば，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点} k-1 \text{に，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点} k+1 \text{に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。試行を n 回繰り返した後に，石が点 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ にある確率を $P_n(k)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n=6$ のときの確率 $P_6(k)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ をそれぞれ求めよ。

(2)　石が移動した先の点に印をつける(点 1 には初めから印がついているものとする)。試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3)　$n\geqq 1$ のとき，$P_n(3)$ を求めよ。　[2015]

6　3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1)　p_1，q_1 を求めよ。

(2)　p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3)　ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。　[2013]

7 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2) $X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ。

(3) $Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4) n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。　[2012]

8 数字の 2 を書いた玉が 1 個，数字の 1 を書いた玉が 3 個，数字の 0 を書いた玉が 4 個あり，これら合計 8 個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて，この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さないものとする。

(1) 玉を 2 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ。

(2) 玉を 4 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ。

(3) 玉を 8 度取り出すとき，次の条件が満たされる確率を求めよ。

条件：すべての $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ に対して，1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。　[2011]

9 はじめに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1) a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3) n が奇数ならば $a_n=b_n>c_n$ が成り立ち，n が偶数ならば $a_n>b_n=c_n$ が成り立つことを示せ。

(4) b_n を求めよ。　[2010]

10 さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。 [2009]

11 袋の中に赤と白の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1) $p_3(m)$ を求めよ。

(2) 一般の N に対し $p_N(m)$ を求めよ。 [2007]

12 正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1:a_2:a_3:a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n\geqq 1)$ で表す。$q_n=p_n(1)+p_n(6)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。

(1) q_1，q_2 を求めよ。

(2) q_n を q_{n-1} で表し，q_n を求めよ。

(3) $p_n(1)$ を求めよ。 [2006]

13 1 から 13 までの数が 1 つ書かれているカードが 52 枚あり，各数について 4 枚ずつある。この 52 枚のカードから，戻さずに続けて 2 枚とりだし，そのカードに書かれた数を順に x, y とする。関数 $f(x,\ y)=\log_3(x+y)-\log_3 x-\log_3 y+1$ を考える。

(1) カードに書かれた数 x, y で，$f(x,\ y)=0$ となるものをすべて求めよ。

(2) $f(x,\ y)=0$ となる確率を求めよ。 [2005]

14　サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし, 8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し, 8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば, 7 の位置で 3 が出た場合, 8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお, サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて, サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_3 を求めよ。

(3)　p_4 を求めよ。　[2004]

15　1 つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている。この箱から k 枚$(3 \leqq k \leqq 12)$のカードを同時に取り出す。このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする。

(1)　$p(k)$ を求めよ。

(2)　$4 \leqq k \leqq 12$ のとき, $f(k) = \dfrac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ。

(3)　$p(k)$ を最大にする k の値を求めよ。　[2003]

16　サイレンを断続的に鳴らして 16 秒の信号を作る。ただし, サイレンは 1 秒または 2 秒鳴り続けて 1 秒休み, これをくり返す。また, 信号はサイレンの音で始まり, サイレンの音で終わるものとする。

(1)　1 秒または 2 秒鳴り続ける回数をそれぞれ m 回, n 回とするとき, m, n の満たす関係式を求めよ。

(2)　信号は何通りできるか。　[2001]

17　A と B がゲームをくり返す。それぞれの最初の持ち点は 2 で, ゲームごとに勝者は敗者から 1 点をもらい, どちらか一方の持ち点が 0 になるまで続ける。ただし, 各ゲームにおいて, A が勝つ確率を p, B が勝つ確率を $1-p$ とする。

(1)　ちょうど 4 回目のゲームでどちらか一方の持ち点が 0 になる確率を求めよ。

(2)　$2n$ 回目までのゲームで, A の持ち点が 0 になる確率を求めよ。　[1999]

18 座標平面上に 4 点 A$(0,\ 1)$, B$(0,\ 0)$, C$(1,\ 0)$, D$(1,\ 1)$ を頂点とする正方形を考え, この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに, 点 Q は, x 軸と平行な方向の移動について確率 p, y 軸と平行な方向の移動について確率$1-p$で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき, n 秒後に頂点 A, C にいる確率をそれぞれ a_n, c_n とする。

(1) a_2, c_2, a_4, c_4 を求めよ。

(2) a_{2n} を求めよ。 [1998]

■ 論証

1 n を自然数とするとき, 3 つの数 $a=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n}}-1$, $b=1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}$, $c=\dfrac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ。 [2002]

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不等式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ ，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$　（a, b, c は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三角形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図形と式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：

   $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベクトル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

（複素数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$(r = |z|,\ \theta = \arg z)$

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対し，

    $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2+px+q=0$ の解が α，β のとき，$\alpha+\beta = -p$，$\alpha\beta = q$

15. $x^3+px^2+qx+r=0$ の解が α, β, γ のとき,

$\alpha+\beta+\gamma=-p$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=-r$

（対　数）

16. $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三角関数）

17. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

20. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

21. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$, $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$, $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

22. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項 a, 公差 d, 項数 n の等差数列の和：

$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$ $(l=a+(n-1)d)$

24. 初項 a, 公比 r, 項数 n の等比数列の和： $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $(r\neq 1)$

25. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　限）

26. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828\cdots\cdots$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（微積分）

28. $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

29. $x=f(y)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x=x(t)$，$y=y(t)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

32. $x=g(t)$ のとき $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)\,dt=\int f(x)\,dx$

33. $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$

35. $\displaystyle\int \log x\,dx=x\log x-x+C$

36. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2$　$(a>0)$，　$\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}$　$(a\neq 0)$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V=\pi\displaystyle\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx$

38. 曲線の長さ：$\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$(x=x(t),\ y=y(t),\ a=x(\alpha),\ b=x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$　$(1\leqq r\leqq n-1)$

40. $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$

（確　率）

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起こる確率：$P_n(r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r q^{n-r}$　$(q=1-p)$

42. 期待値：$E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$

ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ を満たすとする。

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2$ を計算し，2 重根号を用いない形で表せ。

(2)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(3)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$（ただし，複号±はすべての可能性にわたる）の中で，(2)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求めよ。 [2015]

解答例＋映像解説

(1)　$\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2=9+2\sqrt{17}+9-2\sqrt{17}+2\sqrt{9^2-2^2\cdot 17}=18+2\sqrt{13}$

(2)　$\alpha-\sqrt{13}=\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ より，両辺を 2 乗すると，(1)から，

$$\alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13},\ \ \alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$$

さらに，両辺を 2 乗すると，$\alpha^4-10\alpha^2+25=52(\alpha^2+2\alpha+1)$ となり，

$$\alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって，α は 4 次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0$ の解である。

(3)　(2)より，$f(x)=x^4-62x^2-104x-27$ であり，

$$f(x)=(x^2-5)^2-\{2\sqrt{13}(x+1)\}^2$$
$$=\{x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)\}\{x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)\}$$

ここで，$f(x)=0$ とすると，

$$x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)=0\cdots\cdots①,\ \ x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)=0\cdots\cdots②$$

①より，$x^2-2\sqrt{13}x-2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=\sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}=\sqrt{13}\pm\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)$$

②より，$x^2+2\sqrt{13}x+2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=-\sqrt{13}\pm\sqrt{18-2\sqrt{13}}=-\sqrt{13}\pm\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)$$

以上より，方程式 $f(x)=0$ の解は，

$$\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ \ \sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$
$$-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ \ -\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

コメント

高次方程式の問題です。(2)はよくみかけるものですが，そのプロセスを誘導として(3)に適用させるところが，問題のねらいになっています。

問　題

p を実数とする。方程式 $x^4+(8-2p)x^2+p=0$ が相異なる 4 個の実数解をもち，これらの解を小さい順に並べたとき，それらは等差数列をなすとする。この p を求めよ。 [2007]

解答例

方程式 $x^4+(8-2p)x^2+p=0$ ……①に対し，$x^2=t$ とおくと，

$$t^2+(8-2p)t+p=0 \cdots\cdots\text{②}$$

①が相異なる 4 個の実数解をもつ条件は，②が異なる 2 つの正の解をもつことに対応する。この解を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$D/4=(4-p)^2-p>0 \cdots\cdots\text{③}$$

$$\alpha+\beta=-(8-2p)>0 \cdots\cdots\text{④},\quad \alpha\beta=p>0 \cdots\cdots\text{⑤}$$

③より，$p^2-9p+16>0$ となり，$p<\dfrac{9-\sqrt{17}}{2}$，$\dfrac{9+\sqrt{17}}{2}<p$

④より $p>4$ となり，③④⑤をまとめると，$p>\dfrac{9+\sqrt{17}}{2}$ ……⑥

このとき，①の解は，$\pm\sqrt{\alpha}$，$\pm\sqrt{\beta}$ となり，$-\sqrt{\beta}$，$-\sqrt{\alpha}$，$\sqrt{\alpha}$，$\sqrt{\beta}$ が等差数列をなすことより，

$$\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=2\sqrt{\alpha},\quad \sqrt{\beta}=3\sqrt{\alpha}$$

よって，$\beta=9\alpha$ となり，④⑤から，

$$\alpha+9\alpha=-(8-2p) \cdots\cdots\text{⑦},\quad \alpha\cdot 9\alpha=p \cdots\cdots\text{⑧}$$

⑦⑧より，$10\alpha=-8+18\alpha^2$，$9\alpha^2-5\alpha-4=0$，$(9\alpha+4)(\alpha-1)=0$

$\alpha>0$ より $\alpha=1$ となり，⑧から $p=9$ である。

なお，この値は⑥を満たしている。

コメント

複 2 次方程式の解の条件についての問題です。なお，⑦⑧から α を消去して p の 2 次方程式をつくると，因数分解に時間がかかってしまいます。

問　題

(1)　複素数 z を未知数とする方程式 $z^6=64$ の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解 $z=p+qi$（p, q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式 $x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$ が，整数の解を少なくとも 1 つもつ。 [2005]

解答例

(1)　$z^6=64$ より，$z^6-8^2=0$ から，

$$(z^3-8)(z^3+8)=0,\ (z-2)(z+2)(z^2+2z+4)(z^2-2z+4)=0$$

よって，$z=\pm 2,\ -1\pm\sqrt{3}i,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(2)　(i)　$z=\pm 2$ のとき

複号同順で，$x^3\mp 2=0$ となり，整数解は存在しない。

(ii)　$z=-1+\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3+3x+4=0,\ (x+1)(x^2-x+4)=0$$

よって，整数解 $x=-1$ をもつ。

(iii)　$z=-1-\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3-3x+4=0,\ x(3-x^2)=4\cdots\cdots\cdots①$$

これより，①が整数解をもつならば 4 の約数となり，整数解として $x=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$ の場合を調べればよい。ここで，$f(x)=x^3-3x+4$ とおくと，

$$f(1)=2,\ f(-1)=6,\ f(2)=6,\ f(-2)=2,\ f(4)=56,\ f(-4)=-48$$

よって，$f(x)=0$ は整数解をもたない。

(iv)　$z=1+\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3+3x+2=0,\ x(-3-x^2)=2\cdots\cdots\cdots②$$

これより，②が整数解をもつならば 2 の約数となり，整数解として $x=\pm 1,\ \pm 2$ の場合を調べればよい。ここで，$g(x)=x^3+3x+2$ とおくと，

$$g(1)=6,\ g(-1)=-2,\ g(2)=16,\ g(-2)=-12$$

よって，$g(x)=0$ は整数解をもたない。

(v)　$z=1-\sqrt{3}i$ のとき

$$x^3-3x+2=0,\ (x-1)^2(x+2)=0$$

よって，整数解 $x=1,\ -2$ をもつ。

(i)～(v)より，求める z は，$z=-1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$

コメント

すべての場合をチェックするのは面倒です。しかし，時間の問題にすぎません。

問　題

関数 $f(x)=-|2x-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を用いて，関数 $g(x)=-|2f(x)-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を考える。$0<c<1$ のとき，$g(x)=c$ を満たす x を求めよ。　[2001]

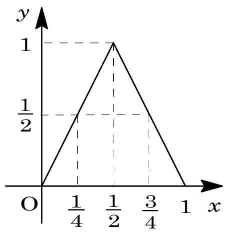
解答例

$f(x)=-|2x-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ から，

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)=(2x-1)+1=2x$

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき，$f(x)=-(2x-1)+1=-2x+2$

よって，$y=f(x)$ を図示すると，右図のようになる。



次に，$g(x)=-|2f(x)-1|+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ に対して，

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき，$f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$ より，

$$g(x)=2f(x)=2\cdot 2x=4x$$

$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)\geqq\dfrac{1}{2}$ より，

$$g(x)=-2f(x)+2=-2\cdot 2x+2=-4x+2$$

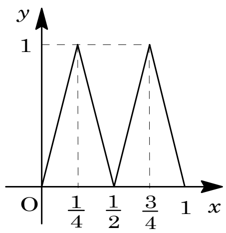
$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ のとき，$f(x)\geqq\dfrac{1}{2}$ より，

$$g(x)=-2f(x)+2=-2(-2x+2)+2=4x-2$$

$\dfrac{3}{4}\leqq x\leqq 1$ のとき，$f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$ より，

$$g(x)=2f(x)=2(-2x+2)=-4x+4$$

以上より，$y=g(x)$ を図示すると，右図のようになる。



すると，$0<c<1$ のとき $g(x)=c$ の解は，$4x=c$，$-4x+2=c$，$4x-2=c$，$-4x+4=c$ より，

$$x=\frac{c}{4},\ -\frac{c-2}{4},\ \frac{c+2}{4},\ -\frac{c-4}{4}$$

コメント

合成関数についての頻出問題です。内容的には数Ⅲなのですが。

問　題

a を実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax-a$ と $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ を考える。関数 $y=F(x)-f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ。

[2019]

解答例＋映像解説

a を実数とするとき，$f(x)=x^2+ax-a$ に対して，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ より，

$$F(x)=\int_0^x (t^2+at-a)dt=\Big[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2-at\Big]_0^x=\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2-ax$$

ここで，$g(x)=F(x)-f(x)$ とおくと，

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2-ax-(x^2+ax-a)=\frac{x^3}{3}+\Big(\frac{a}{2}-1\Big)x^2-2ax+a$$

さて，$y=g(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わる条件を求めるために，

$$g'(x)=x^2+(a-2)x-2a=(x+a)(x-2)$$

(i)　$-a=2\ (a=-2)$ のとき

$g'(x)=(x-2)^2\geqq 0$ より $g(x)$ は単調に増加するので，$y=g(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わる場合はない。

(ii)　$-a\neq 2\ (a\neq -2)$ のとき

$g'(x)=0$ の解は $x=-a$，2 となるので，$g(x)$ は $-a<2\ (a>-2)$ のとき極大値 $g(-a)$，極小値 $g(2)$ をもつ。また，$-a>2\ (a<-2)$ のとき極大値 $g(2)$，極小値 $g(-a)$ をもつ。

すると，$y=g(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わる条件は，極大値と極小値が異符号，すなわち $g(-a)\cdot g(2)<0$ ……(＊)であり，

$$g(-a)=-\frac{a^3}{3}+\Big(\frac{a}{2}-1\Big)a^2+2a^2+a=\frac{a^3}{6}+a^2+a=\frac{1}{6}a(a^2+6a+6)$$

$$=\frac{1}{6}a\{a-(-3+\sqrt{3})\}\{a-(-3-\sqrt{3})\}$$

$$g(2)=\frac{8}{3}+4\Big(\frac{a}{2}-1\Big)-4a+a=-a-\frac{4}{3}=-\Big(a+\frac{4}{3}\Big)$$

(＊)から，$a\{a-(-3+\sqrt{3})\}\{a-(-3-\sqrt{3})\}\Big(a+\frac{4}{3}\Big)>0$ となり，

$$a<-3-\sqrt{3},\ -\frac{4}{3}<a<-3+\sqrt{3},\ 0<a$$

そして，この不等式は $a\neq -2$ を満たす。

(i)(ii)より，求める a の条件は，$a<-3-\sqrt{3}$，$-\frac{4}{3}<a<-3+\sqrt{3}$，$0<a$ である。

コメント

微分の応用に関する基本的な問題で，複雑な計算はありません。

問　題

a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

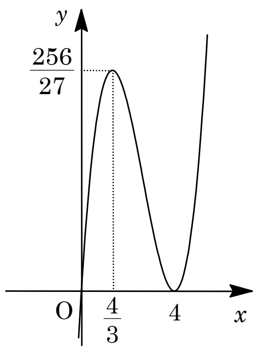
(1) $g(x)=x(x-4)^2$ に対して，

$$g'(x)=(x-4)^2+2x(x-4)$$
$$=(x-4)(3x-4)$$

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $\frac{256}{27}$ $\left(x=\frac{4}{3}\right)$，極小値は 0 $(x=4)$ である。

また，グラフの概形は右図のようになる。



(2) $f(x)=ax^2$ $(a>0)$ に対し，$g(x)=f(x)$ とおくと，

$$x(x-4)^2=ax^2,\quad x\{x^2-(a+8)x+16\}=0$$

これより，$x=0$，$x^2-(a+8)x+16=0$ ……①となる。

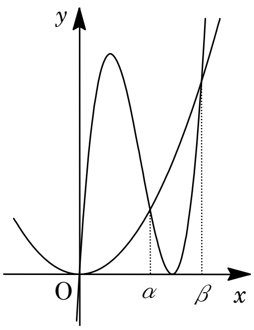
ここで，$x=0$ は①を満たさず，判別式 D は，

$$D=(a+8)^2-64=a(a+16)>0$$

したがって，$g(x)=f(x)$ は異なる 3 つの実数解をもつ。すなわち，2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる。

(3) ①の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha+\beta=a+8\cdots\cdots②,\quad \alpha\beta=16\cdots\cdots③$$



ここで，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるので，

$$\int_0^\alpha\{g(x)-f(x)\}dx=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\int_0^\alpha\{g(x)-f(x)\}dx+\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx=0$$

よって，$\displaystyle\int_0^\beta\{g(x)-f(x)\}dx=0$ ……④となり，④の左辺を I とおくと，

$$I=\int_0^{\beta}\{x^3-(a+8)x^2+16x\}dx=\Big[\,\frac{x^4}{4}-\frac{a+8}{3}x^3+8x^2\,\Big]_0^{\beta}$$

$$=\frac{\beta^4}{4}-\frac{a+8}{3}\beta^3+8\beta^2=\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-4(a+8)\beta+96\}$$

すると，$\beta>0$ なので，④から，$3\beta^2-4(a+8)\beta+96=0$ ………⑤

そこで，②⑤から $3\beta^2-4(\alpha+\beta)\beta+96=0$ となり，$-\beta^2-4\alpha\beta+96=0$

③を代入すると $-\beta^2-64+96=0$ となり，$\beta^2=32$ から $\beta=4\sqrt{2}$ である。

そして，③から $\alpha=\dfrac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ なので，②から，

$$a=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8=6\sqrt{2}-8$$

このとき，2 つの曲線の交点の x 座標は，$x=0$，α，β から，

$$x=0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}$$

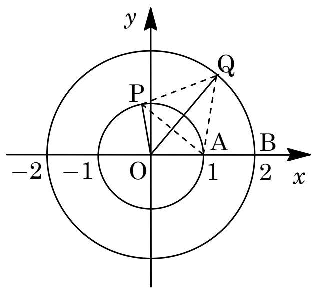
コメント

定積分と面積に関する有名な設定が題材になっています。ポイントは④式を導くところで，それ以降は②③⑤の連立方程式を解いているにすぎません。

問　題

平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり，C_1 の周上に定点 A がある。点 P, Q はそれぞれ C_1，C_2 の周上を反時計回りに動き，ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む。時刻 $t=0$ において，P は A の位置にあって O, P, Q はこの順に同一直線上に並んでいる。$0\leqq t\leqq 4\pi$ のとき△APQ の面積の 2 乗の最大値を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説



右図のように，点 O を原点とし，A$(1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$とおくと，弧 AP, BQ の長さがともに t より，OP, OQ を x 軸の正の部分から測った角は，それぞれ t, $\dfrac{t}{2}$ である。

すると，P$(\cos t,\ \sin t)$，Q$\left(2\cos\dfrac{t}{2},\ 2\sin\dfrac{t}{2}\right)$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos t-1,\ \sin t)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(2\cos\frac{t}{2}-1,\ 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

さて，△APQ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left|(\cos t-1)\cdot 2\sin\frac{t}{2}-\sin t\cdot\left(2\cos\frac{t}{2}-1\right)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|2\cos t\sin\frac{t}{2}-2\sin t\cos\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}+\sin t\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|-2\sin\left(t-\frac{t}{2}\right)-2\sin\frac{t}{2}+\sin t\right|=\frac{1}{2}\left|\sin t-4\sin\frac{t}{2}\right|$$
$$S^2=\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}-4\sin\frac{t}{2}\right)^2=\sin^2\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}-2\right)^2$$

$u=\cos\dfrac{t}{2}$ とおくと，$0\leqq t\leqq 4\pi$ から $-1\leqq u\leqq 1$ であり，さらに $f(u)=S^2$ とすると，

$$f(u)=(1-u^2)(u-2)^2=-u^4+4u^3-3u^2-4u+4$$
$$f'(u)=-4u^3+12u^2-6u-4$$
$$=-2(u-2)(2u^2-2u-1)$$

u	-1	$\cdots$	$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		↗		↘	

すると，右表の $f(u)$の増減から，$f(u)$は $u=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ で最大となり，最大値は，

$$f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(1-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-2\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{6+3\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}+9}{4}$$

コメント

三角関数の微分法は利用できないので，S^2 を考えるという誘導をつけて，最大値にアプローチするという形式になっています。

問　題

(1)　関数 $y=x^3-x^2$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ の接線で，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ。

(3)　p を定数とする。x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ。　[2011]

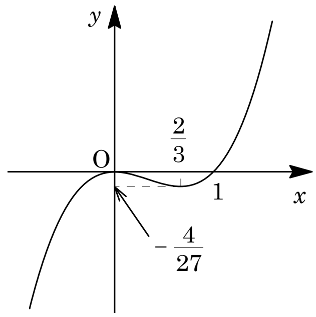
解答例

(1)　$y=x^3-x^2$ ……①に対して，

$$y'=3x^2-2x=x(3x-2)$$

よって，①のグラフは右下図のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$



(2)　接点を $(t,\ t^3-t^2)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^3-t^2)=(3t^2-2t)(x-t)$$
$$y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2 \cdots\cdots\cdots②$$

②が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るので，$\dfrac{3}{2}(3t^2-2t)-2t^3+t^2=0$

$$4t^3-11t^2+6t=0,\ t(4t-3)(t-2)=0$$

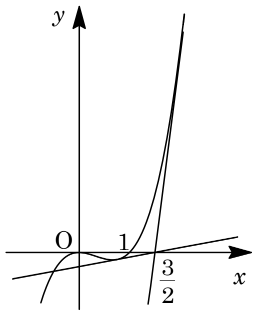
よって，$t=0,\ \dfrac{3}{4},\ 2$ となり，接線の方程式は②から，それぞれ

$$y=0,\ y=\frac{3}{16}x-\frac{9}{32},\ y=8x-12$$

(3)　x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数は，曲線①と点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通る直線 $y=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ ……③の共有点の個数に一致する。

そして，(2)より，$p=0,\ \dfrac{3}{16},\ 8$ のとき，①と③は接する。

よって，求める実数解の個数は，図より $p<0$ のとき 1 個，$p=0$ のとき 2 個，$0<p<\dfrac{3}{16}$ のとき 3 個，$p=\dfrac{3}{16}$ のとき 2 個，$\dfrac{3}{16}<p<8$ のとき 1 個，$p=8$ のとき 2 個，$p>8$ のとき 3 個である。



コメント

方程式の異なる実数解の個数を，対応するグラフの共有点の個数に翻訳して考える頻出の問題です。

問　題

関数$f(x)$を，$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ により定める。

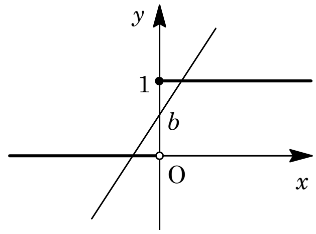
(1)　a, b は実数とする。$y=ax+b$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点をもつための a, b に対する条件を求めよ。

(2)　p, q は実数で $p>0$ とする。$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつための $p,\ q$ に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ。　[2010]

解答例

(1)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$y=ax+b$ のグラフとちょうど 2 つの交点をもつのは，$x<0$，$x\geqq 0$ で 1 回ずつ交わる場合より，

$$a>0,\ 0<b\leqq 1$$



(2)　$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ ……(＊)に対して，

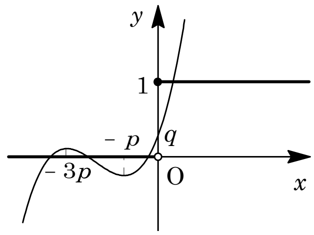
$$y'=3x^2+12px+9p^2$$
$$=3(x+3p)(x+p)$$

$p>0$ から，関数値の増減は右表のようになり，$x\geqq 0$ では単調に増加する。

x	$\cdots$	$-3p$	$\cdots$	$-p$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	q	$\searrow$	$-4p^3+q$	$\nearrow$

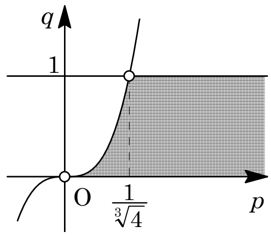
すると，(＊)のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつためには，$x<0$ で 3 回，$x\geqq 0$ で 1 回交わる場合となる。その条件は，$p>0$ のもとで，

$$q>0,\ -4p^3+q<0,\ 0<q\leqq 1$$



まとめると，$p>0$，$q<4p^3$，$0<q\leqq 1$ である。

これを，pq 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，半直線 $q=1\left(p>\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ 以外の境界線は領域に含まない。



コメント

グラフの位置関係の問題ですが，かなり感覚的なものに頼っています。(1)(2)ともに，もう少し詳しく書いた方がよかったかもしれません。

問　題

2 つの放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$，$D: y=-(x-a)^2$ を考える。a は正の実数である。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ における C の接線 l を求めよ。

(2)　l がさらに D と接するとき，l を C と D の共通接線という。2 本の（C と D の）共通接線 l_1，l_2 を求めよ。

(3)　共通接線 l_1，l_2 と C で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2007]

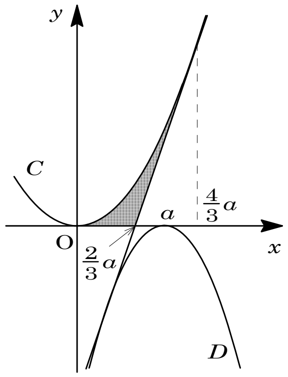
解答例

(1)　$C: y=\frac{1}{2}x^2$ より $y'=x$ となり，$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ における接線 l の方程式は，

$$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t),\quad y=tx-\frac{1}{2}t^2 \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$D: y=-(x-a)^2$ と l の共有点は，$-(x-a)^2=tx-\frac{1}{2}t^2$ から，

$$x^2+(t-2a)x+a^2-\frac{1}{2}t^2=0$$



D と l が接するので，判別式の値が 0 となり，

$$(t-2a)^2-4\left(a^2-\frac{1}{2}t^2\right)=0$$

$$3t^2-4at=0,\quad t=0,\ \frac{4}{3}a$$

よって，共通接線 l_1，l_2 の方程式は，①より，

$$y=0,\quad y=\frac{4}{3}ax-\frac{8}{9}a^2 \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　②と x 軸との交点は，$\frac{4}{3}ax-\frac{8}{9}a^2=0$ から，$x=\frac{2}{3}a$

すると，l_1，l_2 と C で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{4}{3}a}x^2\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}a\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a\right)^2=\frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^{\frac{4}{3}a}-\frac{8}{27}a^3$$

$$=\frac{32}{81}a^3-\frac{8}{27}a^3=\frac{8}{81}a^3$$

コメント

微積分の頻出問題です。形式を変えて，センター試験にそのまま出題されても，違和感はありません。

問　題

$0 \leqq k \leqq 1$ を満たす実数 k に対して，xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \leqq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leqq x^2$，$y \geqq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leqq -x^2 + 2x$，$y \geqq kx$ で表される領域

(1) 領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2) (1)で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と，その最小値を求めよ。　[2006]

解答例

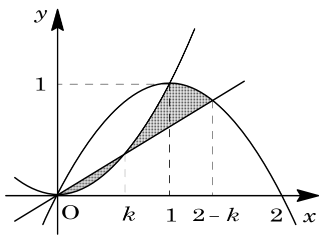
(1) $D : y \geqq x^2$，$y \leqq kx$，$E : y \geqq x^2$，$y \geqq kx$，$F : y \leqq -x^2 + 2x$，$y \geqq kx$ より，これらの 3 つの領域の境界線は，$y = x^2$ ……①，$y = kx$ ……②，$y = -x^2 + 2x$ ……③ である。

①と②の交点は，$x^2 = kx$ より，$x = 0,\ k$

①と③の交点は，$x^2 = -x^2 + 2x$ より，$x = 0,\ 1$

②と③の交点は，$kx = -x^2 + 2x$ より，

$x = 0,\ 2 - k$



これより，領域 $D \cup (E \cap F)$ を図示すると，右図の網点部となり，その面積 $m(k)$ は，

$$m(k) = \int_0^{2-k}(-x^2 + 2x - kx)\,dx - \int_0^1(-x^2 + 2x - x^2)\,dx + 2\int_0^k(kx - x^2)\,dx$$

$$= -\int_0^{2-k} x(x - 2 + k)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx - 2\int_0^k x(x-k)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot\frac{1}{6}k^3 = \frac{1}{6}(k^3 + 6k^2 - 12k + 6)$$

$$= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1$$

(2) (1)より，$m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2 + 4k - 4)$

$m'(k) = 0$ とすると，$k = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leqq k \leqq 1$ より，$m(k)$ の値の変化は右表のようになり，$k = -2 + 2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

k	0	…	$-2+2\sqrt{2}$	…	1
$m'(k)$		$-$	0	$+$	
$m(k)$		↘		↗	

ここで，$k^3 + 6k^2 - 12k + 6$ を $k^2 + 4k - 4$ で割ると，

$$k^3 + 6k^2 - 12k + 6 = (k^2 + 4k - 4)(k + 2) - 16k + 14$$

これより，最小値$m(-2+2\sqrt{2})$は,

$$m(-2+2\sqrt{2})=\frac{1}{6}\left\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\right\}=\frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

コメント

1999 年に続き，いわゆる$\frac{1}{6}$公式の適用パズルが出題されました。ただ，本年の問題は，ひねりが加わっています。

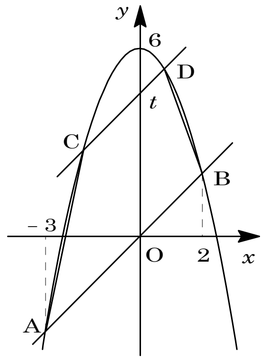
問　題

放物線 $R: y=-x^2+6$ と直線 $l: y=x$ との交点を A, B とする。直線 $y=x+t$ $(t>0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$ で交わるものとする。

(1) 放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2) 4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。　[2005]

解答例



(1) $R: y=-x^2+6$ ……①, $l: y=x$ ……②の交点は,

$$-x^2+6=x,\ x^2+x-6=0$$

よって，$x=-3,\ 2$ となり，

$$T=\int_{-3}^{2}(-x^2+6-x)\,dx=\int_{-3}^{2}-(x+3)(x-2)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2+3)^3=\frac{125}{6}$$

(2) 直線 $y=x+t$ ……③と①が異なる 2 点で交わる条件は，

$$-x^2+6=x+t,\ x^2+x+t-6=0 \text{……④}$$

④の判別式 $D=1-4(t-6)>0$, $t<\dfrac{25}{4}$

$t>0$ と合わせて，$0<t<\dfrac{25}{4}$

このとき④の解は，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-4t+25}}{2}$ となる。これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$\mathrm{C}(\alpha,\ \alpha+t)$, $\mathrm{D}(\beta,\ \beta+t)$ となることより，

$$\mathrm{CD}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta+t-\alpha-t)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4t+25}$$

直線②と直線③の距離は，原点と直線③の距離に等しく，$\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ となるので，

$$S=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4t+25}+5\sqrt{2})\cdot\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}t(\sqrt{-4t+25}+5)$$

すると，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}=\dfrac{6}{125}\cdot\dfrac{1}{2}t(\sqrt{-4t+25}+5)=\dfrac{3}{125}t(\sqrt{-4t+25}+5)$

ここで，$s=\sqrt{-4t+25}$ とおくと，$0<t<\dfrac{25}{4}$ から $0<s<5$ であり，

$$s^2=-4t+5,\ t=\frac{25-s^2}{4}$$

さらに，$f(t)=g(s)$ とおくと，

$$g(s)=\frac{3}{125}\cdot\frac{25-s^2}{4}(s+5)=\frac{3}{500}(-s^3-5s^2+25s+125)$$

$$g'(s)=\frac{3}{500}(-3s^2-10s+25)$$
$$=-\frac{3}{500}(3s-5)(s+5)$$

s	0	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	5
$g'(s)$		$+$	0	$-$	
$g(s)$		$\nearrow$	$\frac{8}{9}$	$\searrow$	

右表より，$s=\dfrac{5}{3}$ のとき，$g(s)=f(t)$ は最大となり，最大値 $\dfrac{8}{9}$ をとる。

コメント

文系問題なので，置きかえをしなくては範囲外になってしまいます。

問　題

a を実数とする。$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ について以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極値をもつ a に対して，関数 $y=f(x)$ は $x=p$ で極大値，$x=q$ で極小値をとるとする。関数 $y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ。　[2004]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+(3a-6)x+5$ より，$f'(x)=3x^2+2ax+(3a-6)$

$y=f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことなので，

$$D/4=a^2-3(3a-6)=a^2-9a+18>0$$

$(a-3)(a-6)>0$ より，$a<3$，$6<a$

(2)　$f'(x)=0$ の異なる 2 実数解が $x=p$，q $(p<q)$ なので，

$$p+q=-\frac{2}{3}a,\ pq=\frac{3a-6}{3}=a-2\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ を結ぶ直線の傾きが m より, (*)から,

$$m=\frac{f(p)-f(q)}{p-q}=\frac{(p^3-q^3)+a(p^2-q^2)+(3a-6)(p-q)}{p-q}$$
$$=(p^2+pq+q^2)+a(p+q)+(3a-6)$$
$$=(p+q)^2-pq+a(p+q)+(3a-6)$$
$$=\frac{4}{9}a^2-a+2-\frac{2}{3}a^2+3a-6=-\frac{2}{9}a^2+2a-4$$

コメント

定積分を利用する有名な解法もありますが，ここでは普通に解きました。

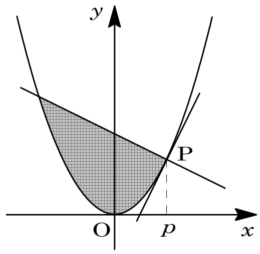
問　題

放物線$C: y = ax^2$ $(a>0)$を考える。放物線 C 上の点$\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p \neq 0)$における C の接線と直交し，P を通る直線を l とする。直線 l と放物線 C で囲まれる図形の面積を$S(\mathrm{P})$とする。

(1)　直線 l の方程式を求めよ。

(2)　点 P を $p>0$ の範囲で動かす。$S(\mathrm{P})$が最小となるときの，直線 l の傾き m と $S(\mathrm{P})$を求めよ。　[2003]

解答例



(1)　$y = ax^2$ ……①より，$y' = 2ax$

点$\mathrm{P}(p,\ ap^2)$における接線の傾きは$y' = 2ap$より，直線 l は傾きが$-\dfrac{1}{2ap}$となり，その方程式は，

$$y - ap^2 = -\frac{1}{2ap}(x-p)$$

$$y = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2 \text{ ………②}$$

(2)　①②の交点は，$ax^2 = -\dfrac{1}{2ap}x + \dfrac{1}{2a} + ap^2$

$$ax^2 + \frac{1}{2ap}x - p\left(\frac{1}{2ap} + ap\right) = 0,\ (x-p)\left(ax + \frac{1}{2ap} + ap\right) = 0$$

$x = p$，$-\dfrac{1}{2a^2p} - p$となり，$-\dfrac{1}{2a^2p} - p = \alpha$とおくと，$p>0$から$\alpha<p$であり，

$$S(\mathrm{P}) = \int_\alpha^p\left(-\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2 - ax^2\right)dx = -a\int_\alpha^p(x-\alpha)(x-p)\,dx$$

$$= \frac{a}{6}(p-\alpha)^3 = \frac{a}{6}\left(2p + \frac{1}{2a^2p}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$2p + \frac{1}{2a^2p} \geqq 2\sqrt{2p\cdot\frac{1}{2a^2p}} = \frac{2}{a}$$

なお，等号は$2p = \dfrac{1}{2a^2p}$，$p^2 = \dfrac{1}{4a^2}$，すなわち$p = \dfrac{1}{2a}$のときに成立する。

よって，$S(\mathrm{P})$の最小値は$\dfrac{a}{6}\left(\dfrac{2}{a}\right)^3 = \dfrac{4}{3a^2}$であり，このとき直線 l の傾き m は，

$m = -\dfrac{1}{2a\cdot\dfrac{1}{2a}} = -1$となる。

コメント

面積の最小値を相加平均と相乗平均を用いて求めるという典型問題の 1 つです。

問　題

$a,\ b,\ c$ は定数とし, $a>0$ とする。

(1)　曲線 $y=-ax^3+bx+c$ の接線で，点 $(0,\ t)$ (t は実数)を通るものがただ 1 本存在することを示せ。

(2)　(1)の接線が正の傾きをもつための t の範囲を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$y=-ax^3+bx+c$ より，$y'=-3ax^2+b$

接点 $(k,\ -ak^3+bk+c)$ とおくと，接線の方程式は,

$$y-(-ak^3+bk+c)=(-3ak^2+b)(x-k),\quad y=(-3ak^2+b)x+2ak^3+c$$

点 $(0,\ t)$ を通ることより，$t=2ak^3+c$ ………①

ここで，$f(k)=2ak^3+c$ とおくと，$f'(k)=6ak^2\geqq 0$

よって，$f(k)$ は単調増加となり, ①の実数解はただ 1 つ存在する。すなわち，点 $(0,\ t)$ を通る接線はただ 1 本だけ存在する。

(2)　接線が正の傾きをもつことより，$-3ak^2+b>0$ ………②

ここで, ①と②を満たす k が存在する条件を求める。

①より，$k^3=\dfrac{t-c}{2a}$ なので，$k=\sqrt[3]{\dfrac{t-c}{2a}}$

②に代入して，$-3a\sqrt[3]{\left(\dfrac{t-c}{2a}\right)^2}+b>0$，$\sqrt[3]{\left(\dfrac{t-c}{2a}\right)^2}<\dfrac{b}{3a}$

$$\left(\frac{t-c}{2a}\right)^2<\left(\frac{b}{3a}\right)^3,\quad (t-c)^2<\frac{4b^3}{27a}$$

$a>0$ なので, $b\leqq 0$ のときは満たす t は存在しない。

$b>0$ のときは，$-\sqrt{\dfrac{4b^3}{27a}}<t-c<\sqrt{\dfrac{4b^3}{27a}}$，$c-\dfrac{2b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{3a}}<t<c+\dfrac{2b}{3}\sqrt{\dfrac{b}{3a}}$

コメント

(1)は 3 次曲線の接線の本数という頻出題ですが, (2)は t の存在しない場合があったりして，後味がスッキリしません。

問　題

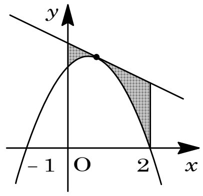
a, b を実数とする。xy 平面上で，直線 $l: y = ax + b$ は曲線 $C: y = (x+1)(2-x)$ と，x 座標が $0 \leqq x \leqq 2$ を満たす点で接しているとする。

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め, ab 平面上に図示せよ。

(2)　曲線 C および 3 つの直線 l, $x=0$, $x=2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a, b の値と，このときの面積を求めよ。 [2000]

解答例

(1)　$l: y = ax + b$ ………①，$C: y = (x+1)(2-x)$ ………②



②より，$y = -x^2 + x + 2$，$y' = -2x + 1$

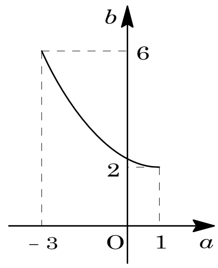
接点 $(t,\ -t^2 + t + 2)$ とすると，条件より $0 \leqq t \leqq 2$………③

接線の方程式は，$y = (-2t+1)(x-t) + (-t^2+t+2)$

$$= (-2t+1)x + t^2 + 2$$

これが①と一致するので，

$$a = -2t + 1 \text{ ………④},\quad b = t^2 + 2 \text{ ………⑤}$$



④より，$t = -\dfrac{1}{2}(a-1)$

⑤に代入して，$b = \dfrac{1}{4}(a-1)^2 + 2$

③より，$-3 \leqq -2t + 1 \leqq 1$ から $-3 \leqq a \leqq 1$

以上より，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図のようになる。

(2)　④⑤を①に代入して，$y = (-2t+1)x + (t^2+2)$

右上図の網点部の面積を S とすると，

$$S = \int_0^2 \left\{ (-2t+1)x + (t^2+2) - (-x^2+x+2) \right\} dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 2tx + t^2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2x \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 4t + 2t^2 = 2(t-1)^2 + \frac{2}{3}$$

③より，$t = 1$ のとき S は最小値 $\dfrac{2}{3}$ をとる。

このとき，④⑤より，$a = -1$，$b = 3$

コメント

微積分の基本題です。特に工夫もせず，普通に解きました。

問　題

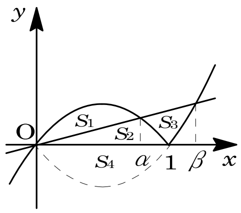
曲線$C: y = x|x-1|$と，直線$l: y = kx$に関して，以下の問いに答えよ。

(1)　Cとlが$x>0$で2つの交点をもつようなkの範囲を求めよ。

(2)　kが(1)で求めた範囲を動くとき，Cとlによって囲まれる図形全体の面積を最小にするkの値を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$y = x|x-1|$………①，$y = kx$………②



①より，$x<1$で$y = -x(x-1)$………③，また$x \geqq 1$で$y = x(x-1)$………④

③より$y' = -2x+1$なので，$x = 0$における微分係数は，$y' = 1$となる。

右図より，①と②が$x>0$で2つの交点をもつ条件は，$0<k<1$となる。

(2)　②と③の$x \neq 0$の交点$x = \alpha$は，$-x(x-1) = kx$より$x = \alpha = 1-k$

②と④の$x \neq 0$の交点$x = \beta$は，$x(x-1) = kx$より$x = \beta = 1+k$

Cとlによって囲まれる面積をS，上図の各領域の面積をS_1，S_2，S_3，S_4とおくと，$S_3 = S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4$より，

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 + \{S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4\} \\
&= 2S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4 \\
&= 2\int_0^{\alpha} -x(x-\alpha)\,dx + \int_0^{\beta} -x(x-\beta)\,dx - 2\int_0^1 -x(x-1)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{6}\beta^3 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}(1-k)^3 + \frac{1}{6}(1+k)^3 - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

すると，$S' = -(1-k)^2 + \dfrac{1}{2}(1+k)^2$

$$= -\frac{1}{2}(k^2 - 6k + 1)$$

k	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

右表より，$k = 3-2\sqrt{2}$のとき，Sは最小となる。

コメント

毎年，見かける超有名パズルです。パズルとして解かず，普通に積分計算をしてもSは求まりますが，ミスの頻度はかなり高くなるでしょう。

問　題

座標平面上に放物線$y=-x^2+4$と直線$l: y=x+k$を考える。

(1)　放物線と直線lが異なる2個の共有点をもつようなkの範囲を求めよ。

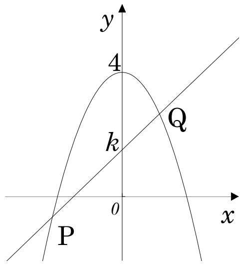
(2)　kは(1)で求めた条件をみたすとして，さらに$k>0$とする。(1)の 2 つの共有点をP，Qとし，Oを原点とするとき，三角形OPQの面積を最大にするkの値，およびそのときの面積を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　放物線$y=-x^2+4$と直線$y=x+k$の共有点が2個存在することより，

$$-x^2+4=x+k,\quad x^2+x+k-4=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$D/4=1-4(k-4)>0\text{ から，}\ k<\frac{17}{4}$$



(2)　P, Qのx座標をそれぞれp, qとすると，p, qは①の異なる実数解となる。

$$p+q=-1,\quad pq=k-4\cdots\cdots\cdots②$$

△OPQの面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}k|p-q|=\frac{1}{2}k\sqrt{(p+q)^2-4pq}=\frac{1}{2}k\sqrt{1-4(k-4)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{-4k^3+17k^2}$$

ここで，$f(k)=-4k^3+17k^2$とおくと，

$f'(k)=-12k^2+34k=-2k(6k-17)$

よって，$k=\frac{17}{6}$のとき$f(k)$は最大，すなわちSは最大となる。

k	0	$\cdots$	$\frac{17}{6}$	$\cdots$	$\frac{17}{4}$
$f'(k)$	0	＋	0	－	
$f(k)$		↗		↘	

最大値は，$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{17}{6}\sqrt{17-4\cdot\frac{17}{6}}=\frac{17}{36}\sqrt{51}$

コメント

センター試験レベルの基本的な問題です。

問　題

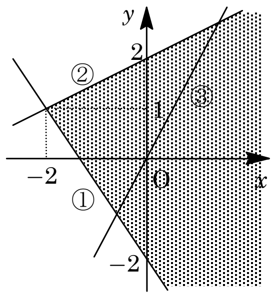
a, b を実数とし，少なくとも一方は 0 でないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　連立不等式 $3x+2y+4\geqq 0$，$x-2y+4\geqq 0$，$ax+by\geqq 0$ の表す領域，または連立不等式 $3x+2y+4\geqq 0$，$x-2y+4\geqq 0$，$ax+by\leqq 0$ の表す領域が三角形であるために a, b が満たすべき条件を求めよ。さらに，その条件を満たす点$(a,\ b)$の範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の三角形の面積を S とするとき，S を a, b を用いて表せ。

(3)　$S\geqq 4$ を示せ。　[2018]

解答例＋映像解説



(1)　連立不等式 $3x+2y+4\geqq 0$，$x-2y+4\geqq 0$ の表す領域を D とする。ここで，境界線 $3x+2y+4=0$ ……①と $x-2y+4=0$ ……②の交点は，$(x,\ y)=(-2,\ 1)$ であることより，領域 D は右図の網点部となる。

さて，この領域 D と，$ax+by\geqq 0$ または $ax+by\leqq 0$ の表す領域の共通部分が三角形である条件は，境界線①と境界線 $ax+by=0$ ……③，および境界線②と境界線③が，ともに $x>-2$ に交点をもつことである。

ここで①③を連立すると，$2a-3b\neq 0$ のもとで $(x,\ y)=\left(\dfrac{4b}{2a-3b},\ \dfrac{-4a}{2a-3b}\right)$ となり，また②③を連立すると，$2a+b\neq 0$ のもとで $(x,\ y)=\left(\dfrac{-4b}{2a+b},\ \dfrac{4a}{2a+b}\right)$ から，

$$\frac{4b}{2a-3b}>-2\ \cdots\cdots④,\quad \frac{-4b}{2a+b}>-2\ \cdots\cdots⑤$$

④より，$4b(2a-3b)>-2(2a-3b)^2$ となり，$(2a-3b)(2a-b)>0$ ………⑥

⑤より，$-4b(2a+b)>-2(2a+b)^2$ となり，$(2a+b)(2a-b)>0$ ………⑦

よって，a, b が満たすべき条件は⑥かつ⑦であり，$2a-b$ の符号で場合分けして，

(i)　$2a-b>0$ $(b<2a)$ のとき

⑥より $2a-3b>0$，⑦より $2a+b>0$ となり，

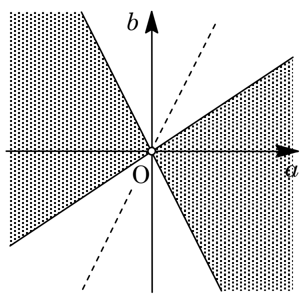
$$-2a<b<\frac{2}{3}a$$

(ii)　$2a-b<0$ $(b>2a)$ のとき

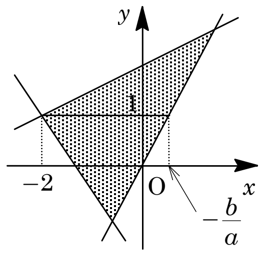
⑥より $2a-3b<0$，⑦より $2a+b<0$ となり，

$$\frac{2}{3}a<b<-2a$$

以上より，点$(a,\ b)$の範囲を座標平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



(2)　境界線③と直線 $y=1$ の交点は，(1)から $a\neq 0$ なので $(x,\ y)=\left(-\dfrac{b}{a},\ 1\right)$，また④⑤から $\dfrac{-4a}{2a-3b}<1<\dfrac{4a}{2a+b}$ なので，右図の三角形の面積 S は,



$$S=\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{4a}{2a+b}+\frac{4a}{2a-3b}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a-b}{a}\cdot 4a\cdot\frac{4a-2b}{(2a+b)(2a-3b)}$$
$$=\frac{2(2a-b)(4a-2b)}{(2a+b)(2a-3b)}=\frac{4(2a-b)^2}{(2a+b)(2a-3b)}$$

(3)　(2)より，$\dfrac{S-4}{4}=\dfrac{(2a-b)^2}{(2a+b)(2a-3b)}-1=\dfrac{4b^2}{(2a+b)(2a-3b)}\geqq 0$

よって，$S-4\geqq 0$ より，$S\geqq 4$ である。

コメント

領域を題材とした問題です。内容は基本レベルですが，丁寧に解いていくには時間が必要です。なお，式変形の過程など，省略気味に記しています。

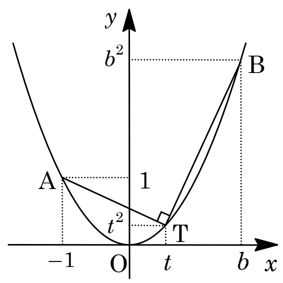
問　題

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-1$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

解答例＋映像解説



$\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+1,\ t^2-1)=(t+1)(1,\ t-1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，ある t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\ 1+(t-1)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-1)t-b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たす t が $-1<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\dfrac{b-1}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+2b-3}{4}$ とおくと，

$$f(-1)=-2b+3,\ f(b)=2b^2-2b+1=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

(i)　$-2b+3\geqq 0$ $\left(-1<b\leqq\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

$(*)$を満たす t が $-1<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件は，$f(-1)\geqq 0$ かつ $f(b)>0$ より，

$$-1<-\frac{b-1}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+2b-3}{4}\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-1<2$ となり，$\dfrac{1}{3}<b<3$

②より，$(b+3)(b-1)\geqq 0$ となり，$b\leqq -3,\ 1\leqq b$

よって，$-1<b\leqq\dfrac{3}{2}$ と合わせると，$1\leqq b\leqq\dfrac{3}{2}$ となる。

(ii)　$-2b+3<0$ $\left(b>\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

$f(-1)<0$ かつ $f(b)>0$ より，$(*)$を満たす t が $-1<t<b$ に存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b\geqq 1$ である。

コメント

図形的な条件を数式化した後は，2 次方程式の解の配置の問題になります。ここでは，$f(b)>0$ を見つけることがポイントとなっています。

問　題

座標平面上の円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ と，x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(-a,\ 0)$，$\mathrm{Q}(b,\ 0)$ を考える。ただし，$a>0$，$b>0$，$ab\neq 1$ とする。点 P, Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その 2 つの接線の交点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

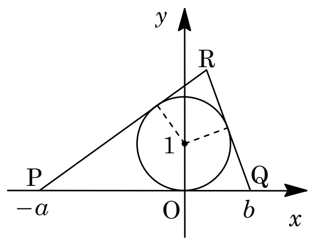
(1)　直線 QR の方程式を求めよ。

(2)　R の座標を a, b で表せ。

(3)　R の y 座標が正であるとき，△PQR の周の長さを T とする。T を a, b で表せ。

(4)　2 点 P, Q が，条件「$\mathrm{PQ}=4$ であり，R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説



(1)　直線 QR は x 軸に平行でないので，その法線ベクトルの成分を $(1,\ m)$ とおくと，その方程式は，

$$(x-b)+my=0,\ \ x+my-b=0 \cdots\cdots\text{①}$$

①は，円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ に接することより，

$$\frac{|m-b|}{\sqrt{1+m^2}}=1,\ \ (m-b)^2=1+m^2$$

よって，$2bm=b^2-1$ より，$m=\dfrac{b^2-1}{2b}$ となり，①に代入すると，

$$x+\frac{b^2-1}{2b}y-b=0,\ \ 2bx+(b^2-1)y-2b^2=0 \cdots\cdots\text{②}$$

(2)　直線 PR の方程式は，(1)の結果から，$-2ax+(a^2-1)y-2a^2=0 \cdots\cdots$③

②③を連立すると，$\{a(b^2-1)+b(a^2-1)\}y=2ab^2+2a^2b$ となり，

$$\{ab(a+b)-(a+b)\}y=2ab(a+b),\ \ y=\frac{2ab}{ab-1}\ \ (ab\neq 1,\ a+b>0)$$

②に代入すると，$2bx+\dfrac{2ab}{ab-1}(b^2-1)-2b^2=0$ となり，

$$x+\frac{a}{ab-1}(b^2-1)-b=0,\ \ x=-\frac{a}{ab-1}(b^2-1)+b=\frac{a-b}{ab-1}$$

これより，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\right)$ である。

(3)　R の y 座標が正より，$\dfrac{2ab}{ab-1}>0$ すなわち $ab>1$ であり，このとき，

$$\mathrm{QR}^2=\left(\frac{a-b}{ab-1}-b\right)^2+\left(\frac{2ab}{ab-1}\right)^2=\frac{a^2(1-b^2)^2+4a^2b^2}{(ab-1)^2}=\frac{a^2(1+b^2)^2}{(ab-1)^2}$$

よって，$\mathrm{QR}=\dfrac{a(1+b^2)}{ab-1}$ となり，同様にすると $\mathrm{PR}=\dfrac{b(1+a^2)}{ab-1}$ となる。

そこで，$\triangle$PQR の周の長さを T とすると，$\mathrm{PQ}=a+b$ より，

$$T=a+b+\frac{a(1+b^2)}{ab-1}+\frac{b(1+a^2)}{ab-1}=\frac{2ab(a+b)}{ab-1}\cdots\cdots\cdots④$$

(4)　$\mathrm{PQ}=4$ で R の y 座標が正より，$a+b=4$，$ab>1$ である。

ここで，$\sqrt{ab}\leqq\dfrac{a+b}{2}=2$ より $ab\leqq4$ となり，$1<ab\leqq4$ である。すると，④から，

$$T=\frac{8ab}{ab-1}=\frac{8}{1-\dfrac{1}{ab}}\geqq\frac{8}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{32}{3}$$

これより，$ab=4$ $(a=b=2)$ のとき T は最小値 $\dfrac{32}{3}$ をとる。

コメント

別解もいろいろ可能な円と直線に関する標準的な問題です。特に(3)は……。

問　題

原点を中心とする半径 1 の円を C とし，x 軸上に点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ をとる。ただし $a>1$ とする。P から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする。

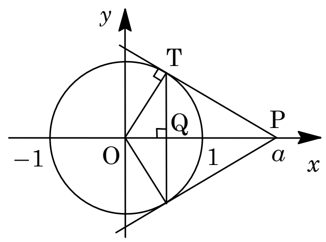
(1) Q の x 座標を求めよ。

(2) 点 R が C 上にあるとき，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}$ が R によらず一定であることを示し，その値を a を用いて表せ。

(3) C 上の点 R が $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たすとする。このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1) 2 つの接点は x 軸対称の位置にあり，その一方を T とおくと，



$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OT}}=\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OP}},\ \ \mathrm{OQ}=\frac{\mathrm{OT}^2}{\mathrm{OP}}=\frac{1}{a}$$

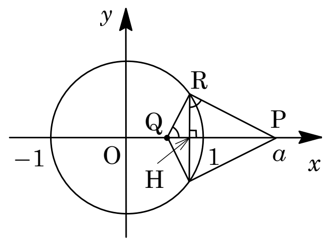
よって，Q の x 座標は $\dfrac{1}{a}$ である。

(2) $\mathrm{R}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$$\left(\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}\right)^2=\frac{(\cos\theta-a)^2+\sin^2\theta}{\left(\cos\theta-\dfrac{1}{a}\right)^2+\sin^2\theta}=\frac{1-2a\cos\theta+a^2}{1-\dfrac{2}{a}\cos\theta+\dfrac{1}{a^2}}=\frac{a^2(1-2a\cos\theta+a^2)}{a^2-2a\cos\theta+1}$$
$$=a^2$$

よって，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=a$ である。

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たす C 上の点 R は 2 つあり，x 軸対称となっている。また，R から x 軸に垂線 RH を引く。



ここで，$\angle\mathrm{PQR}=\varphi$ とおくと $\angle\mathrm{PRH}=\varphi$ となり，(2)から $\tan\varphi=a$ より，

$$\mathrm{RH}=\mathrm{QH}\tan\varphi=a\mathrm{QH},\ \ \mathrm{PH}=\mathrm{RH}\tan\varphi=a^2\mathrm{QH}$$

$\mathrm{QH}+\mathrm{PH}=\mathrm{PQ}$ より，$(a^2+1)\mathrm{QH}=a-\dfrac{1}{a}$ となり，

$$\mathrm{QH}=\frac{a^2-1}{a(a^2+1)},\ \ \mathrm{RH}=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

また，$\mathrm{OH}=\mathrm{OQ}+\mathrm{QH}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{a^2-1}{a(a^2+1)}=\dfrac{2a^2}{a(a^2+1)}=\dfrac{2a}{a^2+1}$ から，R の座標は，

$$\left(\frac{2a}{a^2+1},\ \frac{a^2-1}{a^2+1}\right),\ \left(\frac{2a}{a^2+1},\ -\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$$

さらに，$\mathrm{QR}=\sqrt{\mathrm{QH}^2+a^2\mathrm{QH}^2}=\sqrt{a^2+1}\,\mathrm{QH}=\dfrac{a^2-1}{a\sqrt{a^2+1}}$ より，

$$\mathrm{PR}=a\mathrm{QR}=\frac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$$

コメント

円と直線に関する問題ですが，位置関係がはっきりしているため，平面図形の知識が援用できます。なお，どの設問もいろいろな方法が考えられます。

問　題

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。

(1)　2 点 P, Q を通る直線 l の方程式を求めよ。

(2)　a を定数とし，直線 $x=a$ と l の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ。

(3)　t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線 l の方程式は,

$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t),\ \ y=(2t+1)x-t^2-t\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$(*)$に $x=a$ を代入し，$y=f(t)$ とおくと,

$$f(t)=(2t+1)a-t^2-t=-t^2+(2a-1)t+a=-\left(t-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4}$$

すると，t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を求めると,

(i)　$\dfrac{2a-1}{2}\leqq -1\ \left(a\leqq -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　最大値は，$f(-1)=-a$

(ii)　$-1\leqq\dfrac{2a-1}{2}\leqq 0\ \left(-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　最大値は，$f\left(\dfrac{2a-1}{2}\right)=a^2+\dfrac{1}{4}$

(iii)　$\dfrac{2a-1}{2}\geqq 0\ \left(a\geqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　最大値は，$f(0)=a$

(3)　線分 PQ が通過してできる図形は，直線 l が通過してできる領域の放物線 $y=x^2$ の上側にある部分である。さて，(2)から,

(i)　$a\leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f(-1)=-a$

(ii-i)　$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f\left(\dfrac{2a-1}{2}\right)=a^2+\dfrac{1}{4}$

(ii-ii)　$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f\left(\dfrac{2a-1}{2}\right)=a^2+\dfrac{1}{4}$

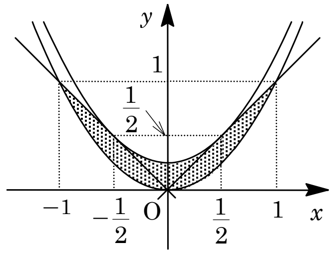
(iii)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f(0)=a$

(i)～(iii)より，直線 l が通過してできる領域は,

$$x\leqq y\leqq -x\ \ \left(x\leqq -\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \ \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0\text{のとき}\right)$$

$$-x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \ \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ -x\leqq y\leqq x\ \ \left(x\geqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

以上より，線分 PQ が通過してできる図形は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。この図形の面積を S とすると，y 軸に関する対称性より，



$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x^2\right)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

コメント

線分の通過領域の問題です。誘導の付け方が，今年の東大のほぼ文理共通題と同じようになっています。

問　題

xy 平面上に，点 $(0,\ 1)$ を通り，傾きが h の直線 l がある。

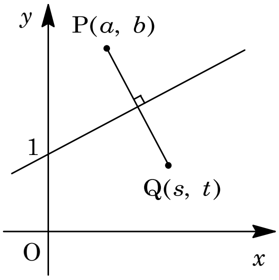
(1) xy 平面において，l に関して点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(s,\ t)$ とする。このとき，a, b, h を用いて s, t を表せ。ただし，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は l 上にないとする。

(2) xy 平面において，l に関して原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と対称な点を A とする。h が $-1\leqq h\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ。

(3) h が $-1\leqq h\leqq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする。C と直線 $y=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2012]

解答例

(1) 直線 $l: y=hx+1$ から，$hx-y+1=0$ となり，法線ベクトルの成分が $(h,\ -1)$ となる。



ここで，条件より，線分 PQ の垂直二等分線が l なので，k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k(h,\ -1)$ から，

$$s=a+kh\ \cdots\cdots\text{①},\quad t=b-k\ \cdots\cdots\text{②}$$

また，線分 PQ の中点 $\left(a+\frac{k}{2}h,\ b-\frac{k}{2}\right)$ が l 上にあるので，

$$h\left(a+\frac{k}{2}h\right)-\left(b-\frac{k}{2}\right)+1=0,\quad (h^2+1)k+2ah-2b+2=0$$

よって，$k=\dfrac{-2ah+2b-2}{h^2+1}$ となり，①，②に代入すると，

$$s=a+\frac{-2ah+2b-2}{h^2+1}h=\frac{-ah^2+(2b-2)h+a}{h^2+1}\ \cdots\cdots\text{③}$$

$$t=b-\frac{-2ah+2b-2}{h^2+1}=\frac{bh^2+2ah-b+2}{h^2+1}\ \cdots\cdots\text{④}$$

(2) $\mathrm{A}(x,\ y)$ とすると，③④において $a=b=0$，$x=s$，$y=t$ となり，

$$x=\frac{-2h}{h^2+1}\ \cdots\cdots\text{⑤},\quad y=\frac{2}{h^2+1}\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

これより，$\mathrm{OA}^2=\left(\dfrac{-2h}{h^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{2}{h^2+1}\right)^2=\dfrac{4(h^2+1)}{(h^2+1)^2}=\dfrac{4}{h^2+1}$

ここで，$-1\leqq h\leqq 1$ から $1\leqq h^2+1\leqq 2$ となるので，$2\leqq \mathrm{OA}^2\leqq 4$ となり，OA の最大値は 2，最小値は $\sqrt{2}$ である。

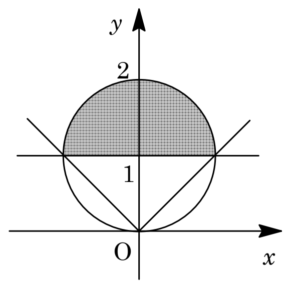
(3) ⑤⑥より，$x=-hy$ となり，$y>0$ から，$h=-\dfrac{x}{y}\ \cdots\cdots$⑦

⑦を⑥に代入すると，$y\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right)=2$ から，$x^2+y^2=2y$ となり，

$$x^2+(y-1)^2=1$$

また，$-1\leqq h\leqq 1$ から，⑦に代入すると，$-1\leqq -\dfrac{x}{y}\leqq 1$

よって，$y\geqq x$ かつ $y\geqq -x$ となり，点 A の軌跡 C と直線 $y=1$ に囲まれた図形は右図の網点部となり，その面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\times\pi\cdot 1^2=\dfrac{\pi}{2}$ である。



コメント

線対称移動を題材にした頻出問題です。ただ，計算が繁雑という(1)の印象が，(2)と(3)で一変しました。

問　題

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。

(1)　$a>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>1>b>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための $a,\ b$ に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。　[2011]

解答例

(1)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ に対し，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$\mathrm{AP}=a\mathrm{OP}$，$\mathrm{AP}^2=a^2\mathrm{OP}^2$ より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\ (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(i)　$a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　$a\neq 1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2)　(1)より，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡は，$a>1$ から，中心$\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径$\dfrac{a}{a^2-1}$の円である。また，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ に対し，$\mathrm{OP}:\mathrm{BP}=1:b$ を満たす点 P の軌跡は，$0<b<1$ から，中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径$\dfrac{b}{1-b^2}$の円である。

よって，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は，

$$\left|\frac{a}{a^2-1}-\frac{b}{1-b^2}\right|\leqq\sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{1-b^2}$$

$$|a(1-b^2)-b(a^2-1)|\leqq\sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2}\leqq a(1-b^2)+b(a^2-1)$$

$a>1>b>0\cdots\cdots$②のもとで，この不等式を変形していくと，

$$\{a(1-b^2)-b(a^2-1)\}^2\leqq(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\leqq\{a(1-b^2)+b(a^2-1)\}^2\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③より，$(a^2-1)(1-b^2)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab(a^2-1)(1-b^2)\leqq 0$

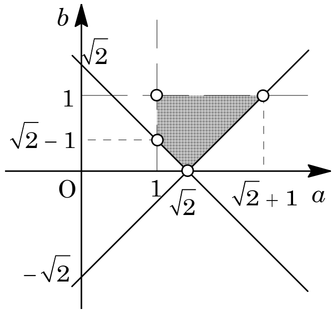
$$(1-b^2)-(a^2-1)-2ab\leqq 0,\ a^2+b^2+2ab\geqq 2,\ a+b\geqq\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④より，$(a^2-1)(1-b^2)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab(a^2-1)(1-b^2)\geqq 0$

$$(1-b^2)-(a^2-1)+2ab\geqq 0,\ a^2+b^2-2ab\leqq 2,\ a-b\leqq\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

以上より，求める条件は②⑤⑥であり，これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。

ただし，破線の境界線および白丸は領域に含まない。



コメント

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に工夫が必要な問題です。

問　題

xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件(a), (b), (c)を満たしているとする。

(a)　対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(b)　直線 AB の傾きは 2 である。

(c)　A の y 座標は, B, C, D の y 座標より大きい。

このとき, $a>0$, $b>0$ として, 辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$, BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく。

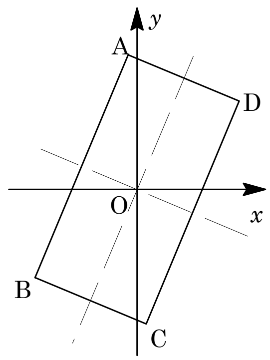
(1)　A, B, C, D の座標を a, b で表せ。

(2)　長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2 \leqq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。　[2010]

解答例

(1)　まず, 条件(a)(c)から, 頂点の y 座標は, A が最大, C が最小である。

さて, 条件(b)より, 直線 AB の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きの方向ベクトルの成分は $(-1,\ -2)$ とおくことができ,



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{5}a \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ -2) = -2a(1,\ 2)$$

ここで, $\mathrm{A}(p,\ q)$ とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (p,\ q) - 2a(1,\ 2) = (p-2a,\ q-4a)$$

次に, 辺 BC は AB と垂直なので, 直線 BC の $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの方向ベクトルの成分は $(2,\ -1)$ とおくことができ,

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{5}b \times \frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ -1) = 2b(2,\ -1)$$

すると, $\mathrm{B}(p-2a,\ q-4a)$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (p-2a,\ q-4a) + 2b(2,\ -1) = (p-2a+4b,\ q-4a-2b)$$

条件(a)から, C は A と原点対称なので,

$$p-2a+4b=-p \cdots\cdots①,\quad q-4a-2b=-q \cdots\cdots②$$

①②より, $p=a-2b$, $q=2a+b$ となり,

$$\mathrm{A}(a-2b,\ 2a+b),\quad \mathrm{C}(-a+2b,\ -2a-b)$$

また, $p-2a=-a-2b$, $q-4a=-2a+b$ であり, D は B と原点対称なので,

$$\mathrm{B}(-a-2b,\ -2a+b),\quad \mathrm{D}(a+2b,\ 2a-b)$$

(2)　$\mathrm{E}(0,\ 5)$ とおくと, E は辺 AD, BC の垂直二等分線 $y=2x$ の上側, 辺 AB, DC の垂直二等分線 $y=-\frac{1}{2}x$ の上側にあることより,

$$\mathrm{EA}<\mathrm{EB}<\mathrm{EC},\quad \mathrm{EA}<\mathrm{ED}<\mathrm{EC}$$

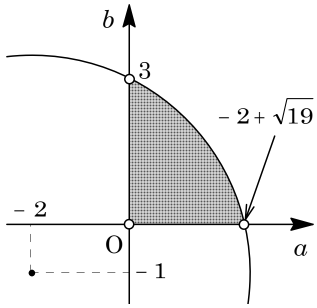
よって，長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2 \leqq 100$ ……③に含まれる条件は，点 C が領域③に含まれる条件に等しく，$(-a+2b)^2+(-2a-b-5)^2 \leqq 100$

$$(-a+2b)^2+(-2a-b)^2-10(-2a-b)+25 \leqq 100$$

$$5a^2+5b^2+20a+10b-75 \leqq 0$$

$$(a+2)^2+(b+1)^2 \leqq 20$$

よって，$a>0$，$b>0$ と合わせて，a，b に対する条件を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，両軸以外の境界線は領域に含む。



コメント

図形の配置が指定されているため，単位ベクトルを利用した解で記しています。