2020 入試対策
過去問ライブラリー

名古屋大学
理系数学22か年

1998－2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された名古屋大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。

「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の 1 ， 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された問題は，その解答例の映像解説を YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

2 実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。 [2014]

3 xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。

(1) $a>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2) $a>0,\ b>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための $a,\ b$ に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。 [2011]

4 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円に，円外の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から 2 本の接線を引く。

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標 $(x_1,\ y_1)$ を点 P の座標 $(x_0,\ y_0)$ を用いて表せ。また $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ であることを示せ。

(2) 点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。 [2007]

5 座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 6)$ とするとき，$p,\ q,\ t$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006]

6 O を原点とする座標平面上の，半径 1 の円周 $A : x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l : y = d$ $(0<d<1)$ との交点を P，Q とする。円周 A 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は $y>d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S，点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき，線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。 [2003]

■ 図形と計量

1 C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a, a, $2a$ の円とする。いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき, a の値を求めよ。

[2004]

2 (1) 平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = a$，$\mathrm{BC} = \mathrm{AD} = b$，$\mathrm{BD} = c$，$\mathrm{AC} = d$ とする。このとき，$a^2 + b^2 = \dfrac{1}{2}(c^2 + d^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 3 つの正数 a, b, $c\,(0<a \leqq b \leqq c)$ が $a^2 + b^2 > c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体が作れることを証明せよ。 [2003]

■ ベクトル

1 空間内に $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B'，C' とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'} + \overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}} = 0$ を示せ。

(2) $\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}' > \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) P 上の三角形 $\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。 [2019]

2 xyz 空間の 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，P$(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を $a,\ b,\ t$ を使って表せ。

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。 [2017]

3 座標空間に 8 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，P$(1,\ 0,\ 0)$，Q$(1,\ 1,\ 0)$，R$(0,\ 1,\ 0)$，A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ 0,\ 1)$，C$(1,\ 1,\ 1)$，D$(0,\ 1,\ 1)$ をとり，線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を N$(0,\ 1,\ t)$ とし，3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

(1) K の座標を t で表せ。

(2) 四面体 OKLP の体積を $V(t)$ とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。 [2010]

4 三角形 ABC で辺 AC を $s:1-s$ に内分する点を P，辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき，

$$\triangle\text{APR の面積}=2\times(\triangle\text{BQR の面積})$$

が成り立っているとする。

(1) s を t を用いて表せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$ を求めよ。ただし，t が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき，$t\to+0$ と表す。 [2008]

5　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，同時に動き出す。

(1)　動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2)　線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　[2005]

6　△ABC の外心（外接円の中心）O が三角形の内部にあるとし，α，β，γ は $\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たす正数であるとする。また，直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A′，B′，C′ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ を表せ。

(2)　△A′B′C′ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ。　[2001]

7　座標空間内の 6 つの平面 $x=0$，$x=1$，$y=0$，$y=1$，$z=0$，$z=1$ で囲まれた立方体を C とする。$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ を $a_1>0$，$a_2>0$，$a_2>0$ を満たし，大きさが 1 のベクトルとする。H を原点 O を通りベクトル $\vec{l}$ に垂直な平面とする。このとき，ベクトル $\vec{l}$ を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を，a_1，a_2，a_3 を用いて表せ。ここに，C の影とは C 内の点から平面 H へひいた垂線の足全体のなす図形である。　[2000]

8　(1)　ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ が次の条件(＊)を満たすとき，点 $(a_1,\ a_2)$ の存在範囲を図示せよ。

　(＊)　あるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ が存在して，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$ が任意のベクトル $\vec{p}$ に対して成り立つ。

(2)　(1)で求めた $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ に対して，条件(＊)にあるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1 　正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1) このような n の中で最小のものを求めよ。

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

[2019]

2 　p を素数，a, b を整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示せ。

(2) $(a+2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ。

(3) $(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。 [2018]

3 　次の問いに答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1) 次の条件(＊)を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(*)\ \begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,\ d \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,\ f \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,\ b \text{ である。} \end{cases}$$

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は，次の条件(＊＊)を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である。

このとき，

(i) 正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ii) 条件(＊＊)を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の組をすべて求めよ。 [2016]

4　負でない整数 N が与えられたとき，$a_1=N$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として数列$\{a_n\}$を定める。ただし$[a]$は，実数 a の整数部分（$k\leqq a<k+1$となる整数 k）を表す。

(1)　$a_3=1$ となるような N をすべて求めよ。

(2)　$0\leqq N<2^{10}$ を満たす整数 N のうちで，N から定まる数列$\{a_n\}$のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3)　0 から $2^{100}-1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び，数列$\{a_n\}$を定める。次の条件(＊)を満たす最小の正の整数 m を求めよ。

　　(＊)　数列$\{a_n\}$のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる。　[2014]

5　$x>0$ とし，$f(x)=\log x^{100}$ とおく。

(1)　次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2)　実数 a の整数部分($k\leqq a<k+1$ となる整数 k)を$[a]$で表す。整数$[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(1000)]$のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば，$\log 10=2.3026$ として計算せよ。　[2013]

6　$k,\ m,\ n$ は整数とし，$n\geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\ \ S_k(1)=1\ (k\geqq 0)$$

$$\begin{aligned}T_m(n)&={}_m\mathrm{C}_1\,S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2\,S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3\,S_3(n)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\,S_{m-1}(n)\\&=\sum_{k=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_k\,S_k(n)\quad (m\geqq 2)\end{aligned}$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。　[2013]

7　$m,\ p$ を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4)　r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

[2012]

8　a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0,\quad y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2011]

9　x, y を正の整数とする。

(1)　$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2)　p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x + 3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。　[2009]

10　次の問いに答えよ。

(1)　$3x + 2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。　[2008]

11　正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x_2 = 1$，$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ で定める。このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ。　[2004]

12　関係式 $x^a = y^b = z^c = xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする。　[2002]

13　n を 2 以上の自然数とする。条件 $k_1 \geqq 1, \cdots\cdots, k_{n-1} \geqq 1, k_n \geqq 0$ を満たす n 個の整数の組 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ に対して，自然数 $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ を次のように定める。

$$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_n} - 2^{k_2+\cdots+k_n} - 2^{k_3+\cdots+k_n} - \cdots - 2^{k_n}$$

(1)　$1999 = m(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ となる $(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ を求めよ。

(2)　$m(k_1,\ k_2) = m(l_1,\ l_2)$ であれば，$k_1 = l_1$，$k_2 = l_2$ が成り立つことを示せ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n)$ であれば，$k_j = l_j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が成り立つことを示せ。　[1999]

■ 確率

1 正の整数 n に対して 1, 2, $\cdots$, n を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ とする。この $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に対し，各添字 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i=j \to a_j=k$ と書くことにする。ここで，$a_i=j \to a_j=k \to a_k=l \to \cdots$ のようにたどり，それを続けていく。

例えば，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)=(2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(i)　$a_1=2 \to a_2=5 \to a_5=4 \to a_4=1 \to a_1=2$

(ii)　$a_3=6 \to a_6=3 \to a_3=6$

(iii)　$a_7=7 \to a_7=7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の(i), (ii), (iii)は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。

(1)　$n=3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2)　$n=4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3)　n 以下の正の整数 k に対して，$\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j} > \log(n+1)-\log k$ を示せ。

(4)　n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は，$p>\log 2$ を満たすことを示せ。　[2019]

2　図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則(a), (b)に従って移動する。

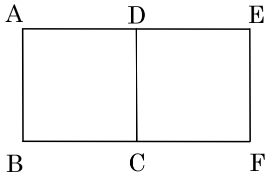


図 1

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

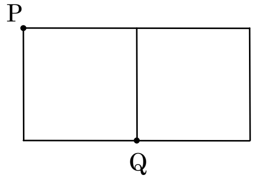


図 2

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

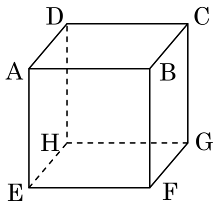
(1)　時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

(2)　a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。　[2018]

3　右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4)　自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。　[2017]

4 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。 [2016]

5 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{ にあるならば，確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に，確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。また，石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回 $(n\geqq 1)$ 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。 [2015]

6 3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。 [2013]

7 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2) $X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ。

(3) $Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4) n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。 [2012]

8 はじめに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1) a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3) a_n，b_n，c_n を求めよ。 [2010]

9 さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

(4) $p_n(5)$ を求めよ。 [2009]

10 袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1) 連比 $p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)$ を求めよ。

(2) 一般の N に対し $p_N(m)$ $(1 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。 [2007]

11　正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n \geqq 1)$ で表す。

(1)　$n \geqq 1$ のとき，$q_n = p_n(1) + p_n(6)$，$r_n = p_n(2) + p_n(5)$，$s_n = p_n(3) + p_n(4)$ を求めよ。

(2)　$p_n(m)$ $(n \geqq 1,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ を求めよ。　[2006]

12　整数に値をとる変数 x の値が，次の規則で変化する。

(i)　ある時刻で $x = m$ $(m \neq 0)$ のとき，1 秒後に $x = m + 1$，$x = m - 1$ である確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　ある時刻で $x = 0$ のとき，1 秒後に $x = 1$ である確率は q，$x = -1$ である確率は $1 - q$ である $(0 \leqq q \leqq 1)$。$x = 0$ から始めて，n 秒後 $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に $x = m$ である確率を $p_n(m)$ とする。

(1)　$p_3(1) + p_3(-1)$ を求めよ。

(2)　すべての自然数 n に対して次が成り立つことを示せ。
どんな整数 m についても $p_n(m) + p_n(-m)$ は q によらない。

(3)　$p_n(0)$ を求めよ。　[2005]

13　サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_3 を求めよ。

(3)　4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。　[2004]

14　サイコロを n 回投げて，3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする。各 n について，$P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする。ただし，このような k が複数あるときは，最も大きいものを $N(n)$ とする。

(1)　$\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{N(n)}{n}$ を最小にする n と，そのときの $\dfrac{N(n)}{n}$ の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}$ を求めよ。　[2003]

15　数直線上の原点 O から出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える。毎回硬貨を投げて表が出れば$+1$，裏が出れば-1，それぞれ駒を進めるとする。ただし，点-1または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする。

(1)　k 回目に硬貨を投げた後，駒が点 1 にある確率を求めよ。

(2)　k 回目に硬貨を投げた後，駒がある点 X_k の期待値 $E[\,X_k\,]$ を求めよ。　[2001]

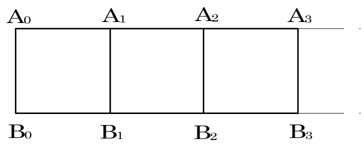
16　図のように，平面上に点 A_0，A_1，A_2，……および B_0，B_1，B_2，……が並んでいる。点 P は A_0 から出発し，次の規則に従いこれらの点の上を移動する。

P が A_n にいるときには 1 秒後に A_{n+1} または B_n に，一方 B_n にいるときには B_{n+1} または A_n に移動する。ただし，前にいた点には戻らない。また, P が移動しうる点が複数あるときには, それぞれの点へ等確率で移動する。

P が A_n へ到る行き方が a_n 通り，B_n へ到る行き方が b_n 通りあるとする。

(1)　a_3，b_3 を求めよ。

(2)　a_n，b_n を求めよ。



(3)　一方，点 Q は A_8 から P と同時に出発し，1 秒ごとに順次 $\mathrm{A}_8 \to \mathrm{A}_7 \to \mathrm{A}_6 \to \cdots\cdots \to \mathrm{A}_0$ と移動し，その後は A_0 にとどまる。P と Q が出会う確率を求めよ。　[2000]

17　座標平面上に 4 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 0)$，C$(1,\ 0)$，D$(1,\ 1)$ を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに，点 Q は, x 軸と平行な方向の移動について確率 p, y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，n 秒後に頂点 A, C にいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする。a_n，c_n を求めよ。　[1998]

■ 論証

1 n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件(I), (II), (III)を満たしている。

(I)　集合 M は n 個の要素からなる。

(II) 集合 M の要素 z に対して, $\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(III) 集合 M の要素 z, w に対して, その積 zw は集合 M の要素である。ただし, $z=w$ の場合も含める。

このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2)　n は偶数であることを示せ。

(3)　$n=4$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

(4)　$n=6$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

[2017]

2 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。

(2)　a, b は実数で $a\neq 0$ とする。$y=ax^2+bx$ のグラフ上に, 点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば, 無限個存在することを示せ。　[2010]

3 a, b, c を実数とし, 実数の組 $(x,\ y,\ z)$ に関する方程式

(i)　$x+y-2z=3a$, $2x-y-z=3b$, $x-5y+4z=3c$

および

(ii)　$x^2+y^2+z^2=1$

を考える。

(1)　方程式(i)が解をもつための a, b, c に対する条件を求めよ。またそのときの方程式(i)の解 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ。

(2)　方程式(i)と(ii)がただ 1 つの共通解をもつとき, その共通解 $(x,\ y,\ z)$ は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ を満たすことを示せ。　[2004]

4　$f(x)$を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で$0<f(x)<1$を満たすものとする。$a_1=1$とし，順に，$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)dx$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$により数列$\{a_m\}$を定める。

(1)　$m \geqq 2$ に対し，$a_m>0$であり，かつ$a_1>a_2>\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots$となることを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{2002}>a_m$となるmが存在することを背理法を用いて示せ。　[2002]

■ 複素数

1　次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式$f(x)$で$f(\alpha)=0$となるもののうち，x^4の係数が 1 であるものを求めよ。

(2)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ （ただし，複号$\pm$はすべての可能性にわたる）の中で，(1)で求めた$f(x)$に対して方程式$f(x)=0$の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3)　(2)で求めた$f(x)=0$の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

[2015]

2　(1)　複素数 z を未知数とする方程式$z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解$z=p+qi$ （p，q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式$x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$が，整数の解を少なくとも 1 つもつ。　[2005]

3　次の問いに答えよ。ただし，偏角θは，$0° \leqq \theta < 360°$の範囲で考えるものとする。

(1)　$|z+i|=|z-i|$を満たす複素数zは，実数に限ることを示せ。

(2)　複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数$z+i$の偏角$\arg(z+i)$の動く範囲を求めよ。

(3)　z を未知数とする方程式$(z+i)^9=(z-i)^9$のすべての解 z について$z+i$の偏角$\arg(z+i)$を求めよ。　[2002]

4　n を 3 以上の自然数とする。有限複素数列 z_1，z_2，…，z_n の各項はいずれも方程式 $z^6=1$ の解の 1 つであり，かつ関係式 $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ を満たしているとする。

(1)　z_1，z_2，…，z_n の中に 1 が含まれ，-1 が含まれていないとすれば，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも z_1，z_2，…，z_n の中に含まれることを示せ。

(2)　$n=6$ のとき，(1)のような複素数列 z_1，z_2，…，z_6 のとり方の個数を求めよ。

[2001]

5　実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，相異なる虚数解 α，β と実数解 γ をもつとする。

(1)　$\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ。ここで，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す。

(2)　α，β，γ が等式 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ を満たし，さらに複素数平面上で α，β，γ を表す 3 点は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすものとする。このとき，実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。　[2000]

6　N を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ をみたすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ。ただし，ここで i は虚数単位（$i^2=-1$）である。

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2(N-1)\theta$　[1998]

■ 曲線 |||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1　$a>0$，$b>0$ とする。点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$，$\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし，$s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　r, s, t を，a と b を用いて表せ。

(2)　△ABC が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ。

[2009]

2 　$a,\ b$ を正数とし，xy 平面で不等式 $\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ の表す領域 D と，不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ の表す領域 E を考える。

(1)　$a=2,\ b=1$ の場合に，領域 D を図示せよ。

(2)　D が E に含まれるための $a,\ b$ の条件を求め，ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ。　[2002]

3 　座標平面上に，双曲線 $C: x^2-y^2=1$ と点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ がある。

(1)　点 A を通り双曲線 C と 1 点のみで交わる直線を求めよ。

(2)　直線 l が点 A を通り双曲線 C と相異なる 2 点で交わるように動くとき，この 2 点の中点は，あるひとつの双曲線上にあることを示せ。　[2000]

4 　平面上に楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ と直線 $l: y=x+k$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　この楕円と直線 l が 2 つの共有点をもつために k がみたすべき条件を求めよ。

(2)　k は(1)の条件をみたすとし，さらに $k\neq 0$ とする。(1)における 2 つの共有点を P, Q とし，O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ。　[1998]

■ 極限 ||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1 　自然数 n に対し，定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(2)　$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI_n$ を求めよ。

(4)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。　[2018]

2　e を自然対数の底とし, t を $t > e$ となる実数とする。このとき, 曲線 $C : y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる 2 点で交わるので, 交点のうち x 座標が小さいものを P, 大きいものを Q とし, P, Q の x 座標をそれぞれ α , β $(\alpha < \beta)$ とする。また, P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし, 曲線 C, x 軸および 2 つの直線 $x = \alpha$, $x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1 , 曲線 C および 2 つの直線 PR, QR で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ。

(2)　$\alpha < \dfrac{e}{t}$, $\beta < 2\log t$ となることを示し, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。必要ならば, $x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい。　[2015]

3　xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり, x 軸に接する円の列 C_1 , C_2 , C_3 , …を次のように定める。

・C_1 と C_2 は半径 1 の円で, 互いに外接する。

・正の整数 n に対し, C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し, C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

(1)　等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2)　すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように, n によらない定数 α , β , s, t の値を一組与えよ。

(3)　$n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め, そのときの極限値を求めよ。　[2014]

4　xy 平面上に曲線 $C : y = \log x$ $(x > 0)$ を考える。

(1)　曲線 C の接線で点 $(0,\ b)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2)　平面上に 2 組の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$, $\{\mathrm{B}_n\}$ を次のように定める。A_1 を $(1,\ 0)$ とする。A_n が定まったとき, A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし, B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき, 2 つの線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで, $|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい。　[2006]

■ 微分法

1 a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。 [2018]

2 2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2) (1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2), (3)においては，3 点 O, P, Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。 [2016]

3 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=x^{-2}2^x \quad (x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2) 方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3) 方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。 [2015]

4 関数 $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，任意の自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1) $y=f(x)$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2) $a>0$ とする。点$(0,\ a)$を通る $y=f(x)$ のグラフの接線が 1 本だけ存在するような a の値を求めよ。また，a がその値をとるとき，$y=f(x)$ のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2010]

5　曲線$C: y=\log x$上の点$\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点$\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$をとる。点 P, Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P, Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

[2008]

6　(1)　関数$f(x)=2x^3-3x^2+1$のグラフをかけ。

(2)　方程式$f(x)=a$（a は実数）が相異なる 3 つの実数解$\alpha<\beta<\gamma$をもつとする。$l=\gamma-\alpha$をβのみを用いて表せ。

(3)　aが(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。　[2007]

7　放物線$R: y=-x^2+3$と直線$l: y=2x$との交点を A, B とする。直線$y=2x+t$ $(t>0)$は放物線 R と相異なる 2 点$\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$で交わるものとする。

(1)　放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2)　4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$を頂点とする台形の面積を$S(t)$とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$とおく。$f(t)$の最大値を求めよ。　[2005]

8　(1)　xを正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$と$\dfrac{1}{x+1}$の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$の大小を比較せよ。　[2002]

9　e を自然対数の底とする。$e\leqq p<q$ のとき不等式$\log(\log q)-\log(\log p)<\dfrac{q-p}{e}$が成り立つことを証明せよ。　[2001]

10　曲線$C: y=x^3$上を動く点$\mathrm{P}(t,\ t^3)$（ただし，$t\neq0$）がある。点 P における C の接線と C とのもう一つの交点を Q とし，点 Q における C の接線と C とのもう一つの交点を R とする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PQR}$のとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

11　平面上に放物線$y=x^2$と直線$l: y=k$を考える。

(1)　放物線上の点$(a,\ a^2)$での法線と直線 l との交点を P とし，その x 座標を b とする。b を a と k で表せ。

(2)　直線 l 上の点$\mathrm{P}(b,\ k)$を放物線の異なる 3 法線が通るような b の範囲を求めよ。

[1998]

■ 積分法

1　$f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，$f_n(x)=\int_{-x}^{x}f_{n-1}(t)\,dt+f_{n-1}{}'(x)$ により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1)　$f_1(x)$ を求めよ。

(2)　$g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt$ とするとき，定積分 $\int_{-c}^{c}g(x)\,dx$ を求めよ。ただし，a，b，c は定数とする。

(3)　正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。　[2012]

2　関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ を求めよ。

(3)　$y=g(\theta)$ のグラフをかけ。　[2009]

3　(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3x}{4-\cos^2x}\,dx$ を求めよ。　[2005]

4　多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

を満たすとする。

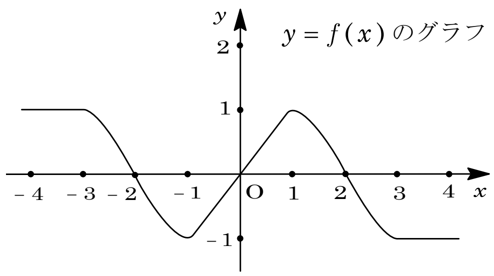
(1)　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2004]

5　各点で微分可能な関数 $y=f(x)$ のグラフが右の図で与えられている。このとき，$y=f'(x)$ と $y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフの概形を描け。また，そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ。

[2003]



6　閉区間 $[0,\ 2\pi]$ 上で定義された x の関数 $f(x)=\int_0^{\pi}\sin\left(|t-x|+\dfrac{\pi}{4}\right)dt$ の最大値および最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。　[2001]

7　N 個（$N \geqq 2$）の箱の中に 1 回に 1 つずつ無作為に玉を入れてゆく。玉が 2 つ入った箱ができたら，そこでその手続きを中止する。ちょうど k 回目で玉が 2 つ入った箱ができる確率を $P(N,\ k)$ とする。

(1)　$2 \leqq k \leqq N+1$ のとき，$P(N,\ k)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)$ を区分求積法を用いて求めよ。　[1999]

■ 積分の応用

1　正の整数 n に対し，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ とする。

(1)　I_1 を求めよ。必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3)　xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする。C を平面 $x=\dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。　[2019]

2 不等式$0<a<1$を満たす定数aに対して，曲線$C: y=a-1-\log x\ (x>0)$を考える。sを正の実数とし，曲線C上の点$\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$における接線が$x$軸，$y$軸と交わる点をそれぞれ$(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$とする。このとき，次の問いに答えよ。必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x=0$を証明なしで使ってよい。

(1) 関数$u(s)$，$v(s)$をsの式で表せ。

(2) 関数$t=u(s)$，$t=v(s)$の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じst平面上に図示せよ。

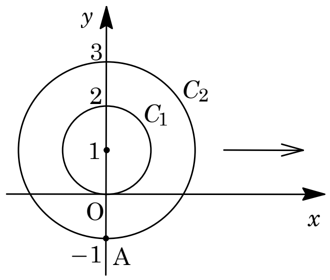
(3) 関数$t=u(s)$，$t=v(s)$の 2 つのグラフで囲まれた図形をt軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2017]

3 空間内にある半径 1 の球（内部を含む）をBとする。直線lとBが交わっており，その交わりは長さ$\sqrt{3}$の線分である。

(1) Bの中心とlとの距離を求めよ。

(2) lのまわりにBを 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2014]

4 半径 1 の円盤C_1が半径 2 の円盤C_2に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する。図のように，時刻$t=0$においてC_1は$\mathrm{O}(0,\ 0)$でx軸に接し，A は座標$(0,\ -1)$の位置にある。2 つの円盤は一体となり，C_1はx軸上をすべることなく転がっていく。時刻tでC_1の中心が点$(t,\ 1)$にあるように転がるとき，$0\leqq t\leqq 2\pi$においてAが描く曲線をCとする。



(1) 時刻tにおけるAの座標を$(x(t),\ y(t))$で表す。$(x(t),\ y(t))$を求めよ。

(2) $x(t)$と$y(t)$のtに関する増減を調べ，$x(t)$あるいは$y(t)$が最大値または最小値をとるときのAの座標をすべて求めよ。

(3) Cとx軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2013]

5　a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1)　C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2)　b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3)　C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。　[2012]

6　$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\left\{(x,\ y,\ 0)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\right\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。　[2011]

7　数列 $\{a_n\}$ $(a_n>0)$ を次の規則によって定める。

$$a_1=1,\ \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ と，x 軸および 2 直線 $x=a_n$，$x=a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n$ を求めよ。　[2007]

8　この問題では, e は自然対数の底, log は自然対数を表す。

実数 $a,\ b$ に対して，直線 $l: y=ax+b$ は曲線 $C: y=\log(x+1)$ と，x 座標が $0\leqq x\leqq e-1$ を満たす点で接しているとする。

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め, ab 平面上に図示せよ。

(2)　曲線 C および 3 つの直線 $l,\ x=0,\ x=e-1$ で囲まれた図形の面積を最小にする $a,\ b$ の値と，このときの面積を求めよ。　[2000]

9　曲線$y=\log x$　($x>0$) 上の点P$(a,\ \log a)$　($a>1$) での接線を l とし，P から x 軸へおろした垂線の足を H とする。さらに，接線 l と x 軸，および曲線$y=\log x$ で囲まれた図形の面積をS_1，曲線と x 軸，および線分 PH で囲まれた図形の面積をS_2 とする。

(1)　S_1，S_2を求めよ。

(2)　$a\to\infty$ のときの$\dfrac{S_1}{S_2\cdot \mathrm{PH}}$の極限を求めよ。　[1998]

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不等式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ ， $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ （a, b, c は正または 0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三角形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図形と式）

6. 数直線上の 2 点 x_1 ，x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：
   $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$ ，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面
   $ax+by+cz+d=0$ との距離：$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベクトル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

（複素数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ （$r = |z|$，$\theta = \arg z$）

12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対し，
    $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2+px+q=0$ の解が α，β のとき，$\alpha+\beta = -p$ ，$\alpha\beta = q$

15. $x^3+px^2+qx+r=0$ の解が α, β, γ のとき，

$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$

（対　数）

16. $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三角関数）

17. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

20. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

21. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$，$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$，$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

22. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$　$\left(\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項 a, 公差 d, 項数 n の等差数列の和：

$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$　$(l=a+(n-1)d)$

24. 初項 a, 公比 r, 項数 n の等比数列の和：$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$　$(r\neq 1)$

25. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　限）

26. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828\cdots\cdots$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（微積分）

28. $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

29. $x=f(y)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x=x(t)$，$y=y(t)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

32. $x=g(t)$ のとき $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)\,dt=\int f(x)\,dx$

33. $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

35. $\displaystyle\int \log x\,dx=x\log x-x+C$

36. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2\quad(a>0)$，$\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}\quad(a\neq 0)$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37. 回転体の体積：$\displaystyle V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$

38. 曲線の長さ：$\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$(x=x(t),\ y=y(t),\ a=x(\alpha),\ b=x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\quad(1\leqq r\leqq n-1)$

40. $\displaystyle(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$

（確　率）

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起こる確率：$P_n(r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^rq^{n-r}\quad(q=1-p)$

42. 期待値：$\displaystyle E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ を満たすとする。

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

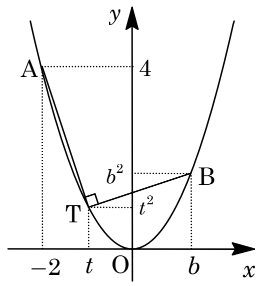
問　題

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

解答例＋映像解説



$\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-2<t<b)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+2,\ t^2-4)=(t+2)(1,\ t-2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，ある t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\ 1+(t-2)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-2)t-2b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たす t が $-2<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\dfrac{b-2}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+4b}{4}$ とおくと，

$$f(-2)=-4b+9,\ f(b)=2b^2-4b+1=2(b-1)^2-1$$

これより，$b>\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)\geqq0$ となり，また $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき $f(b)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b$ のとき $f(b)\geqq0$

(i)　$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)\geqq0$ より，求める条件は，

$$-2<-\frac{b-2}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+4b}{4}\leqq0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-2<4$ となり，$\dfrac{2}{3}<b<6$

②より，$b(b+4)\geqq0$ となり，$b\leqq-4,\ 0\leqq b$

$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ と合わせると，適する b は存在しない。

(ii)　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)<0$ より適する。

(iii)　$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2)\geqq0$ かつ $f(b)\geqq0$ から，(i)と同様である。

求める条件は，①②より $\dfrac{2}{3}<b<6$ かつ $(b\leqq-4,\ 0\leqq b)$ となり，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ と合わせると，適する b は $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ である。

(iv) $b > \dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2) < 0$ かつ $f(b) > 0$ より適する。

(i)～(iv)より，求める条件は，$b > \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ となる。

コメント

図形的な条件を数式化した後は, 2 次方程式の解の配置の問題になります。$f(-2)$, $f(b)$ の符号をもとに場合分けをしています。

問　題

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線 l の方程式は,

$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t),\ \ y=(2t+1)x-t^2-t\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず, $(*)$の x の値を $x=a$ と固定し, y のとり得る値の範囲を求める。

ここで，$y=f(t)$ とおくと,

$$f(t)=(2t+1)a-t^2-t=-t^2+(2a-1)t+a=-\left(t-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4}$$

さて, t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき,

(i)　$a\leqq -\frac{1}{2}$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f(-1)=-a$

(ii)　$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

(iii)　$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

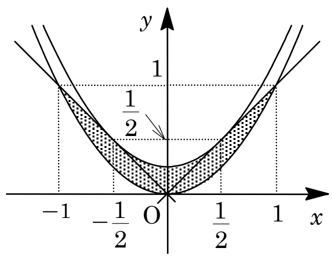
(iv)　$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f(0)=a$

(i)～(iv)より, 直線 l が通過してできる領域は,

$$x\leqq y\leqq -x\ \left(x\leqq -\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0\text{のとき}\right)$$

$$-x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ -x\leqq y\leqq x\ \left(x\geqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

これを利用すると, 線分 PQ が通過してできる図形は, 直線 l が通過してできる領域の放物線 $y=x^2$ の上側にある部分なので, 図示すると右図の網点部である。ただし, 境界は領域に含む。この図形の面積 S は, y 軸に関する対称性より,



$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x^2\right)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

コメント

線分の通過領域についての頻出問題です。文系と異なり，誘導は付いていません。

問　題

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。

(1)　$a>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>0,\ b>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための $a,\ b$ に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。　[2011]

解答例

(1)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ に対し，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$\mathrm{AP}=a\mathrm{OP}$，$\mathrm{AP}^2=a^2\mathrm{OP}^2$ より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\quad (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(i)　$a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　$a\neq 1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2)　$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡は，(1)より，$a=1$ のとき直線 $x=\dfrac{1}{2}$，$a\neq 1$ のとき中心$\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径$\dfrac{a}{|a^2-1|}$ の円である。

また，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ に対し，$\mathrm{OP}:\mathrm{BP}=1:b$ を満たす点 P の軌跡は，$b=1$ のとき直線 $y=\dfrac{1}{2}$，$b\neq 1$ のとき中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径$\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円である。

よって，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は，

(i)　$a=1$ かつ $b=1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ を満たす点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$が存在する。

(ii)　$a=1$ かつ $b\neq 1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$で半径$\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円を満たす点 P が存在するには，

$$\frac{b}{|b^2-1|}\geqq\frac{1}{2},\quad |b^2-1|\leqq 2b$$

$b>0$ から，$-2b\leqq b^2-1\leqq 2b$ となり，$b^2+2b-1\geqq 0$ かつ $b^2-2b-1\leqq 0$ より，

$$-1+\sqrt{2}\leqq b\leqq 1+\sqrt{2}\quad (b\neq 1)$$

(iii)　$a\neq 1$ かつ $b=1$ のとき

(ii)と同様にして，$-1+\sqrt{2}\leqq a\leqq 1+\sqrt{2}\quad (a\neq 1)$

(iv)　$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき

中心$\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$で半径$\dfrac{a}{|a^2-1|}$の円と，中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$で半径$\dfrac{b}{|b^2-1|}$の円を満たす点 P が存在するには，

$$\left|\frac{a}{|a^2-1|}-\frac{b}{|b^2-1|}\right| \leqq \sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2} \leqq \frac{a}{|a^2-1|}+\frac{b}{|b^2-1|}$$

$$\left|a|b^2-1|-b|a^2-1|\right| \leqq \sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2} \leqq a|b^2-1|+b|a^2-1|$$

この不等式の各辺を 2 乗すると，次の連立不等式に等しく，

$$\left\{a|b^2-1|-b|a^2-1|\right\}^2 \leqq (a^2-1)^2+(b^2-1)^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2 \leqq \left\{a|b^2-1|+b|a^2-1|\right\}^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab|a^2-1||b^2-1| \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ④$

③より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab|a^2-1||b^2-1| \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

(iv-i)　($a>1$ かつ $b>1$)または($0<a<1$ かつ $0<b<1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab \leqq 0$ となり，$(a-b)^2 \leqq 2$，$|a-b| \leqq \sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab \geqq 0$ となり，$(a+b)^2 \geqq 2$，$a+b \geqq \sqrt{2}$

(iv-ii)　($a>1$ かつ $0<b<1$)または($0<a<1$ かつ $b>1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab \geqq 0$ となり，$(a+b)^2 \geqq 2$，$a+b \geqq \sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab \leqq 0$ となり，$(a-b)^2 \leqq 2$，$|a-b| \leqq \sqrt{2}$

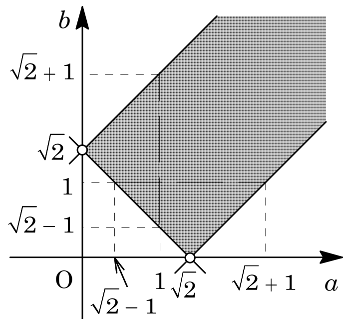
(iv-i) (iv-ii)より，$a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき，

$$|a-b| \leqq \sqrt{2},\ a+b \geqq \sqrt{2}$$

(i)～(iv)をまとめると，求める条件は，

$$a>0,\ b>0,\ |a-b| \leqq \sqrt{2},\ a+b \geqq \sqrt{2}$$

これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含むが，白丸は領域に含まない。



コメント

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に並々ならぬ注意力が必要です。

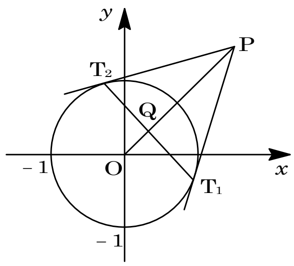
問　題

原点$O(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円に，円外の点$P(x_0,\ y_0)$から 2 本の接線を引く。

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標$(x_1,\ y_1)$を点 P の座標$(x_0,\ y_0)$を用いて表せ。また$OP\cdot OQ=1$であることを示せ。

(2) 点 P が直線$x+y=2$上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。 [2007]

解答例



(1) 2 つの接点を$T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$とおくと，接線の方程式はそれぞれ，

$$s_1x+t_1y=1,\quad s_2x+t_2y=1$$

点$P(x_0,\ y_0)$を通ることより，

$$s_1x_0+t_1y_0=1\cdots\cdots①,\quad s_2x_0+t_2y_0=1\cdots\cdots②$$

ここで，方程式$x_0x+y_0y=1\cdots\cdots③$は直線を表し，①から$T_1(s_1,\ t_1)$，②から$T_2(s_2,\ t_2)$を通過することがわかる。すなわち，③は直線T_1T_2を表す。

さて，直線T_1T_2の法線ベクトルは，$\overrightarrow{OP}=(x_0,\ y_0)$となり，2 直線 OP，$T_1T_2$は直交する。言い換えると，2 点$T_1$，$T_2$の中点 Q は 2 直線 OP，$T_1T_2$の交点である。

ここで，直線 OP は，kを実数として，

$$(x,\ y)=k(x_0,\ y_0),\quad y_0x-x_0y=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$となるので，$Q\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$

$$OP\cdot OQ=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\frac{{x_0}^2}{({x_0}^2+{y_0}^2)^2}+\frac{{y_0}^2}{({x_0}^2+{y_0}^2)^2}}$$

$$=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{{x_0}^2+{y_0}^2}}=1$$

(2) $Q(x_1,\ y_1)$より，$x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdots\cdots\cdots⑤$

(1)から$OP\cdot OQ=1$なので，$({x_0}^2+{y_0}^2)({x_1}^2+{y_1}^2)=1$となり，⑤より，

$$x_0=x_1({x_0}^2+{y_0}^2)=\frac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2},\quad y_0=y_1({x_0}^2+{y_0}^2)=\frac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，条件より，$x_0+y_0=2$なので，⑥より$\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}+\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}=2$

$$2{x_1}^2+2{y_1}^2-x_1-y_1=0,\quad (x_1,\ y_1)\neq(0,\ 0)$$

すると，$\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ から，点 Q の軌跡は円 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ である。ただし，原点は除く。

コメント

有名な頻出問題です。なお，点 Q が 2 直線 OP，T_1T_2 の交点であることは対称性から明らかですが，ここでは二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線の足が，底辺の中点であることを用いています。

問　題

座標平面上に 3 点O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 2)$，B$(6,\ 0)$を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

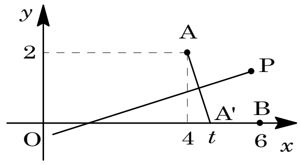
(1) 点P$(p,\ q)$を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を A$'(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 6)$とするとき，$p,\ q,\ t$の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点P$(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形OAB も書いておくこと。

(3) 点P$(p,\ q)$を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点P$(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006]

解答例

(1) ピッタリ直線 l は，線分 AA$'$ の垂直二等分線より，



PA = PA$'$ となり，

$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2) ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点A$'(t,\ 0)$が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

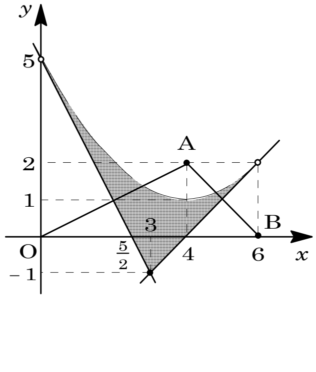
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③$'$

④より $q\geqq -2p+5$ ………④$'$，⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤$'$

さて，領域③$'$ の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③$'$ と領域④$'$ の境界線，領域③$'$ と領域⑤$'$ の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③$'$ ④$'$ ⑤$'$ より，点P$(p,\ q)$の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3) ①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，A$'_1(t_1,\ 0)$，A$'_2(t_2,\ 0)$とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}'_1}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{\mathrm{AA}'_2}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{\mathrm{AA}'_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AA}'_2}=0$ となり，

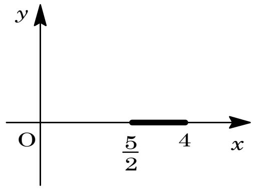
$(t_1-4)(t_2-4)+4=0$，$t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0$ ………⑥

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$t_1+t_2=2p$，$t_1t_2=8p+4q-20$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。



コメント

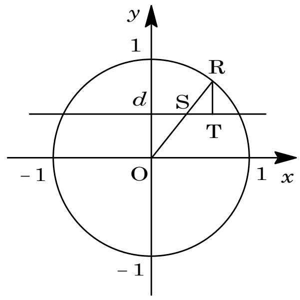
線対称を題材にした問題で，ひとひねりが加えられています。

問　題

O を原点とする座標平面上の，半径 1 の円周 $A : x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l : y = d$ $(0 < d < 1)$ との交点を P，Q とする。円周 A 上の点 R$(x,\ y)$ は $y > d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S，点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき，線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。　[2003]

解答例

点 R が $(0,\ 1)$ のとき，ST $= 0$ であり，y 軸に関する対称性から，点 R が第 1 象限にあると考えても一般性を失わない。



さて，$t > 0$ として，R$(t,\ \sqrt{1-t^2})$ とおくと，T$(t,\ d)$ となり，

$$\sqrt{1-t^2} > d,\ 1-t^2 > d^2,\ 0 < t < \sqrt{1-d^2}$$

直線 OR : $y = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}x$ と直線 $l : y = d$ の交点は，

$$\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x = d,\ x = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

よって，S$\left(\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ d\right)$となり，ST $= t - \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ である。

ここで，$f(t) = t - \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ とおくと，

$$f'(t) = 1 - d\cdot\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}-d}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$$

$f'(t) = 0$ とすると，$(1-t^2)\sqrt{1-t^2} = d$，$(1-t^2)^3 = d^2$ より，

$$1-t^2 = d^{\frac{2}{3}},\ t = \sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$	$\cdots$	$\sqrt{1-d^2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$0 < d < 1$ なので，右の増減表より，$t = \sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$ のとき $f(t) =$ ST は最大となり，その最大値は，

$$\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}} - \frac{d\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}}{d^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}} - d^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}} = (1-d^{\frac{2}{3}})\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$$

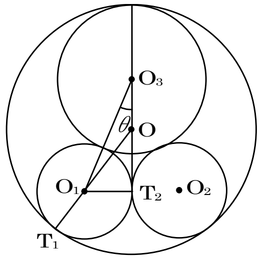
コメント

点 R の x 座標を普通に設定しましたが，微分の計算は繁雑ではありませんでした。最初は, R を媒介変数表示した方がよいのかどうかと迷っていたのですが。

問　題

C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a, a, $2a$ の円とする。いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ。[2004]

解答例



円 C_1，C_2，C_3，C の中心を，それぞれ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_3}$，O とおく。また，C_1 と C，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ $\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$ とおき，$\angle \mathrm{O_1O_3T_2}=\theta$ とすると，

$$\mathrm{OO_3}=1-2a\,,\ \ \mathrm{O_3O_1}=2a+a=3a\,,\ \ \mathrm{OO_1}=1-a$$

また，$\angle \mathrm{O_1T_2O_3}=90^\circ$ より $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{O_1T_2}}{\mathrm{O_1O_3}}=\dfrac{a}{3a}=\dfrac{1}{3}$ となり，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

そこで，$\triangle \mathrm{O_3O_1O}$ に余弦定理を適用すると，

$$(1-a)^2=(3a)^2+(1-2a)^2-2\cdot 3a(1-2a)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(6+4\sqrt{2})a^2-(1+2\sqrt{2})=0$$

$a>0$ から，$a=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}$

コメント

いろいろな解法が考えられますが，いずれにせよ，2 円が接するとき，中心間距離が半径の和や差に等しいことを利用します。

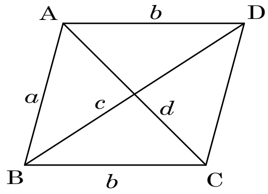
問　題

(1)　平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a$，$\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=b$，$\mathrm{BD}=c$，$\mathrm{AC}=d$ とする。このとき，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　3 つの正数 $a,\ b,\ c\,(0<a\leqq b\leqq c)$ が $a^2+b^2>c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体が作れることを証明せよ。　[2003]

解答例

(1)　$\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ABC}=180°-\theta$ となり，$\triangle\mathrm{ABD}$，$\triangle\mathrm{ABC}$ にそれぞれ余弦定理を適用すると，



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots①$$
$$d^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\theta)$$
$$=a^2+b^2+2ab\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$c^2+d^2=2a^2+2b^2$，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$

(2)　$0<a\leqq b\leqq c$ かつ $a^2+b^2>c^2$ より，3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ の三角形は鋭角三角形であるので,

$$a^2+b^2>c^2,\ b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

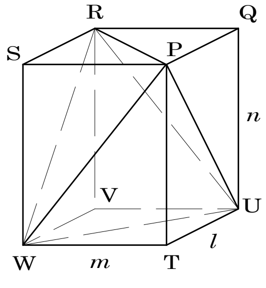
③より, $l>0$, $m>0$, $n>0$ として，l^2，m^2，n^2 を次式で定義することができる。

$$l^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),\ m^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2),\ n^2=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)$$

a^2，b^2，c^2 について解くと，$a^2=l^2+m^2$，$b^2=l^2+n^2$，$c^2=m^2+n^2$

$$a=\sqrt{l^2+m^2},\ b=\sqrt{l^2+n^2},\ c=\sqrt{m^2+n^2}$$

さて，直方体 PQRS-TUVW において，$\mathrm{PQ}=l$，$\mathrm{PS}=m$，$\mathrm{PT}=n$ とすると,



$$\mathrm{PR}=\mathrm{WU}=a,\ \mathrm{PU}=\mathrm{RW}=b,\ \mathrm{PW}=\mathrm{RU}=c$$

よって, 各面の三角形の辺の長さを $a,\ b,\ c$ とする四面体を作ることができる。

コメント

(2)の問題を見て「直方体に埋め込まれた等面四面体」ということに気持ちが集約してしまい, (1)の利用という考えは吹っ飛んでしまいました。。

問　題

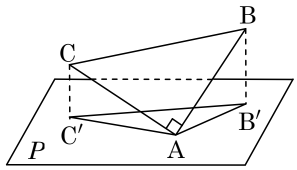
空間内に$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれB'，C'とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=0$を示せ。

(2)　$\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}'>\dfrac{\pi}{2}$を示せ。

(3)　P 上の三角形$\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$の辺の長さは短いものから 4, $\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。　　[2019]

解答例＋映像解説



(1)　空間内に$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，P 上にない点 B, C から P に垂線を下ろし，P との交点をそれぞれB'，C'とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$に注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}'})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}'})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}-\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}$$
$$=2\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}-\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}'}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+\overrightarrow{\mathrm{AC}'}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}'}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC}'}+\overrightarrow{\mathrm{AC}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB}'}$$

すると，線分BB'とCC'はともに平面 P に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CC}'}=\overrightarrow{\mathrm{AC}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BB}'}=0$となり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=0$……(＊)である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}$と$\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}$は同じ向きに平行なので，$k>0$として$\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=k\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}$とおくことができる。すると，(＊)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}=-\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=-k\left|\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\right|^2<0$$

これより，$\cos\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}'}\right|}<0$となり，$\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}'>\dfrac{\pi}{2}$である。

(3)　3 辺の長さが 4, $\sqrt{21}$，7 である$\triangle\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$は，$\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}'>\dfrac{\pi}{2}$から最長辺$\mathrm{B}'\mathrm{C}'=7$であり，また一般性を失うことなく$\mathrm{AB}'=4$，$\mathrm{AC}'=\sqrt{21}$とすることができるので，

$$7^2=4^2+21-2\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}=\frac{16+21-49}{2}=-6$$

すると，(＊)から，$\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=-(-6)=6$となり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}\right|=6$

さて，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=l$とおくと，$\mathrm{B}'\mathrm{B}=\sqrt{l^2-16}$，$\mathrm{C}'\mathrm{C}=\sqrt{l^2-21}$となり，

$$\sqrt{l^2-16}\cdot\sqrt{l^2-21}=6,\quad (l^2-16)(l^2-21)=36$$

これより，$l^4-37l^2+300=0$ となり，$(l^2-25)(l^2-12)=0$

ここで，$l^2>16$ かつ $l^2>21$ なので $l^2=25$ となり，$\mathrm{AB}=l=5$ である。

コメント

空間ベクトルの図形への応用問題です。(1)が(2)へ，そして(1)と(2)が(3)へと，うまく繋がっています。

問　題

xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を $a,\ b,\ t$ を使って表せ。

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

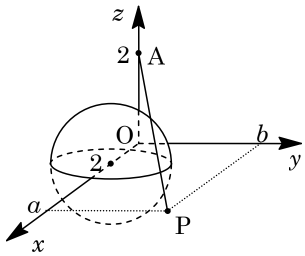
(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。　　[2017]

解答例＋映像解説

(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,\ 0,\ 2)+t(a,\ b,\ -2)$$

よって，$\mathrm{Q}(at,\ bt,\ 2-2t)$ となる。



(2) (1)から，$l:(x,\ y,\ z)=(at,\ bt,\ 2-2t)$ ………①

$$S:(x-2)^2+y^2+z^2=2 \text{ ………②}$$

①②を連立して，$(at-2)^2+b^2t^2+(2-2t)^2=2$

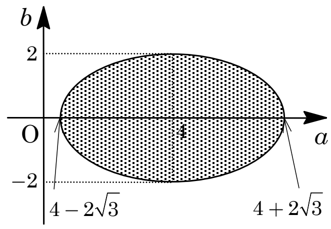
$$(a^2+b^2+4)t^2-4(a+2)t+6=0 \text{ ………③}$$

l が S と相異なる 2 点で交わるので，③から，

$$D/4=4(a+2)^2-6(a^2+b^2+4)>0,\ \ a^2-8a+3b^2+4<0$$

すると，$(a-4)^2+3b^2<12$ となり，

$$\frac{(a-4)^2}{12}+\frac{b^2}{4}<1 \text{ ………④}$$



④を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

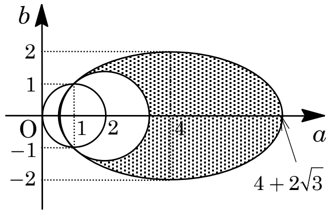
(3) $T:(x-2)^2+y^2+z^2=2$ かつ $z>0$ なので，l が T と相異なる 2 点で交わる条件は，①から $2-2t>0$ すなわち $t<1$ となるので，③が $t<1$ である相異なる 2 解をもつことに対応する。すると，④に加えて，

$$\frac{2(a+2)}{a^2+b^2+4}<1 \text{ ………⑤},\ \ (a^2+b^2+4)-4(a+2)+6>0 \text{ ………⑥}$$

⑤より，$a^2+b^2+4>2(a+2)$ となり，$(a-1)^2+b^2>1$ ………⑦

⑥より，$a^2+b^2-4a+2>0$ となり，$(a-2)^2+b^2>2$ ………⑧

④⑦⑧を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



コメント

空間図形を題材とし，2 次方程式の解の配置を関連させた基本的な問題です。ただ，領域の図示については，時間をかなり費やしてしまいます。

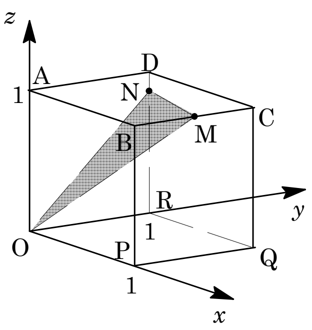
問　題

座標空間に 8 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{D}(0,\ 1,\ 1)$をとり，線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を$\mathrm{N}(0,\ 1,\ t)$とし，3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

(1) K の座標を t で表せ。

(2) 四面体 OKLP の体積を$V(t)$とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき，$V(t)$の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。　[2010]

解答例



(1) まず，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(0,\ 1,\ t)$で，M は線分 BC の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{2}(2,\ 1,\ 2)$$

さて，平面 OMN の法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$\vec{n}$は$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$に垂直なので，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=b+tc=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2a+b+2c=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b=-tc$，$a=\dfrac{t-2}{2}c$

よって，$\vec{n}=\dfrac{c}{2}(t-2,\ -2t,\ 2)$であることより，平面 OMN の方程式は，

$$(t-2)x-2ty+2z=0\cdots\cdots\cdots③$$

また，直線 PD は，u をパラメータとして，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+u\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(1,\ 0,\ 0)+u(-1,\ 1,\ 1)=(1-u,\ u,\ u)\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(t-2)(1-u)-2tu+2u=0$，$(t-2)+(4-3t)u=0$

$0\leqq t\leqq 1$ から $u=\dfrac{2-t}{4-3t}$ となり，④より，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$

よって，平面 OMN と直線 PD の交点 K は，$\mathrm{K}\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$となる。

(2) 平面 OMN と直線PB : $x=1$，$y=0$の交点 L の z 座標は，③より，

$$(t-2)+2z=0,\ z=\frac{2-t}{2}$$

これより，四面体 OKLP の体積$V(t)$は，△OPL を底面と考えて，

$$V(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2-t}{2}\right)\frac{2-t}{4-3t}=\frac{(2-t)^2}{12(4-3t)}$$

$$V'(t)=\frac{-2(2-t)(4-3t)+3(2-t)^2}{12(4-3t)^2}=\frac{(2-t)(3t-2)}{12(4-3t)^2}$$

これより，$V(t)$ は $t=0$ または $t=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{12}$ をとり，$t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{2}{27}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$\dfrac{1}{12}$	$\searrow$	$\dfrac{2}{27}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{12}$

コメント

交点 K, L の座標を求めるとき，計算を単純にするため，平面の方程式を利用しています。配布された公式集にも載っていることですし。

問　題

三角形 ABC で辺 AC を $s:1-s$ に内分する点を P，辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき，

$$\triangle\mathrm{APR}\text{ の面積} = 2\times(\triangle\mathrm{BQR}\text{ の面積})$$

が成り立っているとする。

(1) s を t を用いて表せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$ を求めよ。ただし，t が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき，$t\to+0$ と表す。 [2008]

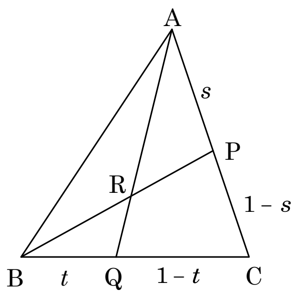
解答例

(1) まず，$\mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=k:1-k$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+kt\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=l:1-l$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+ls\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdots\cdots\cdots②$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$k(1-t)=1-l\cdots\cdots\cdots③,\quad kt=ls\cdots\cdots\cdots④$$

さらに，$\triangle\mathrm{APR}=2\times\triangle\mathrm{BQR}$ より，

$$k(1-l)=2l(1-k),\quad kl+k-2l=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

③より $l=1-k+kt$ となり，④に代入すると，

$$kt=(1-k+kt)s,\quad k(s+t-st)=s$$

よって，$k=\dfrac{s}{s+t-st}\cdots\cdots⑥$ となり，③から，

$$l=1-\frac{s}{s+t-st}+\frac{st}{s+t-st}=\frac{t}{s+t-st}\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦を⑤に代入すると，

$$\frac{st}{(s+t-st)^2}+\frac{s}{s+t-st}-\frac{2t}{s+t-st}=0,\quad st+(s-2t)(s+t-st)=0$$

s についてまとめると，$(1-t)s^2+2t^2s-2t^2=0$ となるので，$s>0$ から，

$$s=\frac{-t^2+\sqrt{t^4+2(1-t)t^2}}{1-t}=\frac{-t^2+t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$$

(2) (1)より，$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{-t+\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}=\sqrt{2}$

コメント

対頂角は等しいことから，三角形の面積比を，隣り合う 2 辺の長さの比の積として表しています。なお，(2)の計算には，唖然としてしまいます。

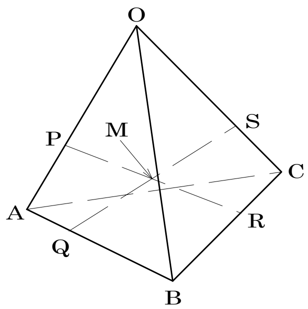
問　題

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，同時に動き出す。

(1) 動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　[2005]

解答例



(1) t 秒後には，$\mathrm{OP}=\mathrm{BR}=t$，$\mathrm{AQ}=\mathrm{CS}=\frac{1}{2}t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

(2) QS と PR の交点が M なので，まず M は QS 上にあることより，k を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OS}}$$
$$=k\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}kt\vec{b}+(1-k)\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

また，M は PR 上にあることより，l を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=l\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=lt\vec{a}+(1-l)(1-t)\vec{b}+(1-l)t\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$k\left(1-\frac{1}{2}t\right)=lt\cdots\cdots\text{①},\quad \frac{1}{2}kt=(1-l)(1-t)\cdots\cdots\text{②}$$

$$(1-k)\left(1-\frac{1}{2}t\right)=(1-l)t\cdots\cdots\text{③}$$

①＋③から，$1-\frac{1}{2}t=t$ より，$t=\frac{2}{3}$

①に代入して $k=l$，②に代入して $k+l=1$ となるので，$k=l=\frac{1}{2}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

コメント

よく見かける空間ベクトルの基本問題です。

問　題

$\triangle$ABC の外心（外接円の中心）O が三角形の内部にあるとし，α，β，γ は $\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たす正数であるとする。また，直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A′，B′，C′ とする。

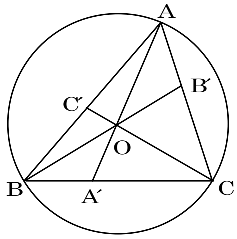
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ を表せ。

(2) $\triangle$A′B′C′ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ。　[2001]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\cdot\frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\alpha}=-k\left(\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$



点 A′ は線分 BC 上にあるので，

$$-k\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=1,\quad k=-\frac{-\alpha}{\beta+\gamma}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ………①

(2) (1)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ………②，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ………③

$\triangle$A′B′C′ の外心が O に一致するとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$

①②③より，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ なので，

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\frac{\beta}{\gamma+\alpha}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\neq0$ なので，$\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$

よって，正の数 l が存在して，$\alpha=l(\beta+\gamma)$，$\beta=l(\gamma+\alpha)$，$\gamma=l(\alpha+\beta)$

$$\alpha+\beta+\gamma=2l(\alpha+\beta+\gamma)$$

$\alpha+\beta+\gamma>0$ より $l=\dfrac{1}{2}$ となるので，

$$2\alpha=\beta+\gamma\ \cdots\cdots\cdots④,\quad 2\beta=\gamma+\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad 2\gamma=\alpha+\beta\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤より $\alpha=\beta$，⑤⑥より $\beta=\gamma$，よって $\alpha=\beta=\gamma$ となる。

コメント

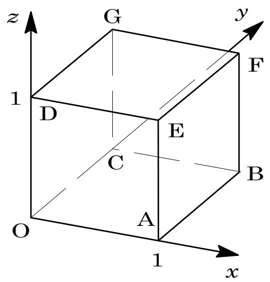
ベクトルの基本問題です。(1)の誘導を利用すると, (2)の結論も簡単に導けます。

問　題

座標空間内の 6 つの平面 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ で囲まれた立方体を C とする。$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ を $a_1>0$, $a_2>0$, $a_2>0$ を満たし，大きさが 1 のベクトルとする。H を原点 O を通りベクトル $\vec{l}$ に垂直な平面とする。このとき，ベクトル $\vec{l}$ を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を，a_1, a_2, a_3 を用いて表せ。ここに，C の影とは C 内の点から平面 H へひいた垂線の足全体のなす図形である。 [2000]

解答例

立方体 C を平面 H へ正射影した図形は，面 OABC，面 OAED，面 OCGD を H へ正射影した図形となる。



まず，面 OABC の法線ベクトルを $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$，また，平面 H の法線ベクトルが $\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ なので，面 OABC と平面 H のなす角を $\theta_1\ (0°\leqq\theta_1\leqq 90°)$ とすると，

$$\cos\theta_1=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_3|}{1\times 1}=a_3$$

すると，面 OABC の面積が 1 より，H へ正射影した図形の面積は，

$$1\times\cos\theta_1=a_3$$

同様にして，面 OAED，面 OCGD は，法線ベクトルがそれぞれ $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ 0)$ となり，平面 H とのなす角を θ_2，$\theta_3\ (0°\leqq\theta_2\leqq 90°,\ 0°\leqq\theta_3\leqq 90°)$ とすると，

$$\cos\theta_2=\frac{|\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_2|}{1\times 1}=a_2,\quad \cos\theta_3=\frac{|\overrightarrow{n_3}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_3}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_1|}{1\times 1}=a_1$$

すると，面 OAED，面 OCGD の面積が 1 より，H へ正射影した図形の面積は，それぞれ，

$$1\times\cos\theta_2=a_2,\ 1\times\cos\theta_3=a_1$$

以上より，求める立方体 C の影の面積は，$a_1+a_2+a_3$ となる。

コメント

この問題を読んだ瞬間，名大の過去問を思い出しました。凸多面体を平面へ正射影する典型題として，よく採用されていたのですが，出題年度を調べたところ 1987 年でした。もう時効でしょうか。

問　題

(1)　ベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$が次の条件(＊)を満たすとき，点$(a_1,\ a_2)$の存在範囲を図示せよ。

(＊)　あるベクトル$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$が存在して，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$が任意のベクトル$\vec{p}$に対して成り立つ。

(2)　(1)で求めた$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$に対して，条件(＊)にあるベクトル$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$を求めよ。 [1999]

解答例

(1)　x,yを任意の実数として，$\vec{p}=(x,\ y)$とおく。

条件より，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$なので，

$$(a_1x+a_2y)^2+(b_1x+b_2y)^2=x^2+y^2\cdots\cdots\cdots①$$

$(x,\ y)=(1,\ 0)$に対して①が成立することより，$a_1{}^2+b_1{}^2=1\cdots\cdots\cdots②$

$(x,\ y)=(0,\ 1)$に対して①が成立することより，$a_2{}^2+b_2{}^2=1\cdots\cdots\cdots③$

$(x,\ y)=(1,\ 1)$に対して①が成立することより，$(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=2$

②③を代入して，$a_1a_2+b_1b_2=0\cdots\cdots\cdots④$

逆に②③④が成立するとき，任意の実数x,yに対して，①は明らかに成立する。

よって，求める条件は，ある$(b_1,\ b_2)$に対して，②③④が成立する条件となる。

まず，②より$a_1=\cos\theta,\ b_1=\sin\theta$，③より$a_2=\cos\varphi,\ b_2=\sin\varphi$とおくことができる。

④に代入して，$\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=0$，$\cos(\theta-\varphi)=0$

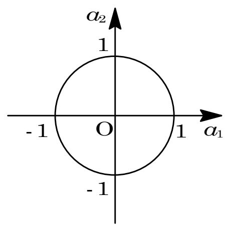
すると$\theta-\varphi=\pm90^\circ$より，$\varphi=\theta\mp90^\circ$となる。

以下，複号同順で，

$$a_1=\cos\theta,\ a_2=\cos(\theta\mp90^\circ)=\pm\sin\theta\cdots\cdots\cdots⑤$$

θは任意より，$a_1{}^2+a_2{}^2=1$

以上より，点$(a_1,\ a_2)$は原点中心の単位円周上に存在し，図示すると右図のようになる。



(2)　(1)より，$b_1=\sin\theta,\ b_2=\sin(\theta\mp90^\circ)=\mp\cos\theta$

⑤より，$b_1=\pm a_2,\ b_2=\mp a_1$

よって，$\vec{b}=(a_2,\ -a_1)$または$\vec{b}=(-a_2,\ a_1)$

コメント

かなり丁寧に解を書きました。任意の$x,\ y$に対し，①が成立する必要十分条件については，もっとあっさり書いても構わないと思います。

問　題

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1)　このような n の中で最小のものを求めよ。

(2)　このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

[2019]

解答例＋映像解説

(1)　$\sqrt{n}$ の整数部分を a とおくと，$\sqrt{n}$ が整数でないことより，

$$a < \sqrt{n} < a+1,\ \ a^2 < n < a^2+2a+1$$

すなわち，$n = a^2 + k\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2a)$ ……①とおくことができる。

ここで，$\sqrt{n}$ の小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数なので，

$$a + \frac{1}{100} \leqq \sqrt{n} < a + \frac{1}{10},\ \ \left(a + \frac{1}{100}\right)^2 \leqq n < \left(a + \frac{1}{10}\right)^2 \text{………②}$$

①②より，$\left(a + \frac{1}{100}\right)^2 \leqq a^2 + k < \left(a + \frac{1}{10}\right)^2$ となり，

$$\frac{a}{50} + \frac{1}{10000} \leqq k < \frac{a}{5} + \frac{1}{100} \text{………③}$$

③を a について解くと，$\frac{a}{50} + \frac{1}{10000} \leqq k$ から $a \leqq 50k - \frac{1}{200}$，$k < \frac{a}{5} + \frac{1}{100}$ から $a > 5k - \frac{1}{20}$ となるので，

$$5k - \frac{1}{20} < a \leqq 50k - \frac{1}{200} \text{………④}$$

さて，a が最小となるのは $k = 1$ のときで，④から $5 - \frac{1}{20} < a \leqq 50 - \frac{1}{200}$ なので，

$$a = 5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 49$$

よって，条件に当てはまる最小の n は，$n = 5^2 + 1 = 26$ である。

(2)　まず，$k = 2$ のとき，④から $10 - \frac{1}{20} < a \leqq 100 - \frac{1}{200}$ なので，

$$a = 10,\ 11,\ 12,\ \cdots,\ 99$$

また，$k = 3$ のとき，④から $15 - \frac{1}{20} < a \leqq 150 - \frac{1}{200}$ なので，

$$a = 15,\ 16,\ 17,\ \cdots,\ 149$$

さらに，$k \geqq 4$ のとき，④より $a \geqq 20$ となる。

以上より，条件に当てはまる n を小さい方から並べていくと，

$$5^2+1,\ 6^2+1,\ 7^2+1,\ 8^2+1,\ 9^2+1,\ 10^2+1,\ 10^2+2,\ 11^2+1,\ 11^2+2,$$
$$12^2+1,\ 12^2+2,\ \cdots\cdots$$

すると，10 番目に小さいものは，$12^2 + 1 = 145$ になる。

コメント

おもしろい整数問題です。条件を満たす n が「平方数＋ちょっと」というのは感覚的にもわかりますが，その「ちょっと」を数式で評価することがポイントです。具体的には，③すなわち④ですが。

問　題

p を素数, a, b を整数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れることを示せ。

(2)　$(a+2)^p-a^p$ は偶数であることを示せ。

(3)　$(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　p を素数, a, b を整数とするとき, 二項定理より,

$$(a+b)^p-a^p-b^p=\sum_{k=0}^{p}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}b^k-a^p-b^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}b^k$$

ここで, $1\leqq k\leqq p-1$ のとき, $k!$ および $(p-k)!$ はともに p で割り切れない。これより, ${}_p\mathrm{C}_k=\dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}$ は p の倍数となる。

よって, $(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れる。

(2)　(1)と同様に, 二項定理より,

$$(a+2)^p-a^p=\sum_{k=1}^{p}{}_p\mathrm{C}_k a^{p-k}\cdot 2^k$$

ここで, $1\leqq k\leqq p$ のとき 2^k は 2 の倍数となるので, $(a+2)^p-a^p$ は偶数である。

(3)　$A=(a+2)^p-a^p$ とおくと, (2)より A は偶数なので, l を整数として,

$$A=2l\ \cdots\cdots\cdots①$$

(1)より, $(a+2)^p-a^p-2^p$ は p で割り切れることより, m を整数として,

$$A-2^p=pm\,,\ \ A=pm+2^p\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて, 2^p を p で割った余りを求めるために, (2)と同様に二項定理を利用すると,

$$2^p=(1+1)^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k+1^p+1^p=2+\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k$$

すると, $1\leqq k\leqq p-1$ のとき ${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数より, 2^p を p で割った余りは 2 を p で割った余りに等しいので, 素数 p を $p=2$ と $p\geqq 3$ で場合分けをする。

(i)　$p=2$ のとき　このとき, $A=(a+2)^2-a^2=4(a+1)$ となる。

これより, A を $2p=4$ で割った余りは 0 である。

(ii)　$p\geqq 3$ のとき　2^p を p で割った余りは 2 より, ②から, n を整数として,

$$A=pm+(pn+2)=p(m+n)+2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より, $2l=p(m+n)+2$ から $2(l-1)=p(m+n)$

2 と p は互いに素なので, i を整数として, $l-1=pi$　$(l=pi+1)$ と表せるので,

$$A=2(pi+1)=2pi+2$$

よって, A を $2p$ で割った余りは 2 である。

コメント

二項定理の絡んだ整数問題です。誘導が細かく付いていますので，それに従って解いていけばよいでしょう。なお，(3)は 2^p を p で割った余りがポイントです。

問　題

次の問いに答えよ。ただし2次方程式の重解は2つと数える。

(1)　次の条件(＊)を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(＊)\begin{cases}2\text{次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の2つの解が } c,\ d \text{ である。}\\ 2\text{次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の2つの解が } e,\ f \text{ である。}\\ 2\text{次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の2つの解が } a,\ b \text{ である。}\end{cases}$$

(2)　2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，次の条件(＊＊)を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の2つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である。

このとき，

(i)　正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ii)　条件(＊＊)を満たす数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の組をすべて求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　整数 a, b, c, d, e, f に対し，2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解が $c,\ d$ より，

$c+d=-a$ ………①，$cd=b$ ………②

また，2次方程式 $x^2+cx+d=0$ の2つの解が $e,\ f$ より，

$e+f=-c$ ………③，$ef=d$ ………④

さらに，2次方程式 $x^2+ex+f=0$ の2つの解が $a,\ b$ より，

$a+b=-e$ ………⑤，$ab=f$ ………⑥

②④⑥より，$abcdef=bdf$，$bdf(ace-1)=0$ ………⑦

(i)　$bdf=0$ のとき

$b=0$ とすると，⑥より $f=0$ となり，④より $d=0$

$d=0$ とすると，②より $b=0$ となり，⑥より $f=0$

$f=0$ とすると，④より $d=0$ となり，②より $b=0$

よって，いずれの場合も $b=d=f=0$ である。

すると，①より $c=-a$，③より $e=-c$，⑤より $a=-e$ から，$a=-e=c=-a$

$a=c=e=0$

(ii)　$bdf\neq 0$ のとき　⑦より $ace=1$ となり，a, c, e は整数より，

(ii-i)　$(a,\ c,\ e)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

①より $1+d=-1$，③より $1+f=-1$，⑤より $1+b=-1$ から，$b=d=f=-2$

なお，この値は②④⑥を満たす。

(ii-ii)　$(a,\ c,\ e)=(1,\ -1,\ -1)$ のとき　①より $-1+d=-1$ から $d=0$ で不適

(ii-iii)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ 1,\ -1)$ のとき　③より $-1+f=-1$ から $f=0$ で不適

(ii-iv)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ -1,\ 1)$のとき　⑤より$-1+b=-1$から$b=0$で不適

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ -2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2)$

(2)　整数a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1}に対し，$x^2+a_nx+b_n=0$の2つの解がa_{n+1}，b_{n+1}より，

$$a_n=-a_{n+1}-b_{n+1}\cdots\cdots\cdots①,\ b_n=a_{n+1}b_{n+1}\cdots\cdots\cdots②$$

(i)　正の整数mで，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$となるものが存在することを示す。

(a)　すべてのnに対して$b_n\neq 0$のとき

②より，$a_{n+1}\neq 0$から$|a_{n+1}|\geqq 1$となり，$|b_n|=|a_{n+1}||b_{n+1}|\geqq|b_{n+1}|$から，

$$|b_1|\geqq|b_2|\geqq\cdots\geqq|b_n|\geqq|b_{n+1}|\geqq\cdots\ \cdots\cdots\cdots③$$

不等式③で等号が成立しない場合は，ある正の整数lに対し$|b_l|<0$となり不適。

これより，ある正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$となるものが存在する。

(b)　ある正の整数kに対して$b_k=0$のとき

①②において，$n=k$とおくと，

$$a_k=-a_{k+1}-b_{k+1}\cdots\cdots\cdots④,\ 0=a_{k+1}b_{k+1}\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$b_{k+1}\neq 0$と仮定すると，⑤より$a_{k+1}=0$，④に代入して$b_{k+1}=-a_k$

すると，$x^2+a_{k+1}x+b_{k+1}=0$すなわち$x^2-a_k=0$の解が整数a_{k+2}，b_{k+2}であることよりa_kは平方数となり，$a_k\neq 0$からαを正の整数として$a_k=\alpha^2$とおくと，

$$(a_{k+2},\ b_{k+2})=(\pm\alpha,\ \mp\alpha)\ （以下，複号同順）$$

さらに，$x^2+a_{k+2}x+b_{k+2}=0$すなわち$x^2\pm\alpha x\mp\alpha=0$の解が整数$a_{k+3}$，$b_{k+3}$であることより，

$$\pm\alpha=-a_{k+3}-b_{k+3}\cdots\cdots\cdots⑥,\ \mp\alpha=a_{k+3}b_{k+3}\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦から，$a_{k+3}b_{k+3}-a_{k+3}-b_{k+3}=0$となり，$(a_{k+3}-1)(b_{k+3}-1)=1$

(b-1)　$(a_{k+3}-1,\ b_{k+3}-1)=(1,\ 1)$のとき

$(a_{k+3},\ b_{k+3})=(2,\ 2)$となり，$x^2+2x+2=0$の解は整数$a_{k+4}$，$b_{k+4}$であるが，$D/4=-1<0$から虚数解となり不適である。

(b-2)　$(a_{k+3}-1,\ b_{k+3}-1)=(-1,\ -1)$のとき

$(a_{k+3},\ b_{k+3})=(0,\ 0)$となり，$\alpha>0$から⑥⑦は成立しない。

したがって，ある k で$b_k=0$のとき$b_{k+1}=0$となる。そして同様に，$b_{k+2}=0$，$b_{k+3}=0$，…となり，kをmに置き換えると，

$$0=b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$$

以上より，(a)(b)のいずれの場合も，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$となる。

(ii)　(i)の場合分けに従って，①②を満たす数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の組を求める。

(a)　すべてのnに対して$b_n\neq 0$のとき

βを正の整数として，(i)から，$\beta=|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots\ \cdots\cdots\cdots⑧$

さて，②で$n=m$とすると，$b_m=a_{m+1}b_{m+1}$となり，$|b_m|=|a_{m+1}||b_{m+1}|$より，

$\beta=|a_{m+1}|\beta$，$|a_{m+1}|=1$

同様にして，$b_{m+1}=a_{m+2}b_{m+2}$ から $|a_{m+2}|=1$ なので，同様に繰り返すと，

$1=|a_{m+1}|=|a_{m+2}|=|a_{m+3}|=\cdots$ ………⑨

さて，⑧より $b_{m+1}=\pm\beta$ であるが，まず $b_{m+1}=\beta$ のときについて調べる。

すると，$x^2+a_{m+1}x+b_{m+1}=0$ すなわち $x^2+a_{m+1}x+\beta=0$ の解は整数 a_{m+2}，b_{m+2} であるが，⑨に注意すると，$D={a_{m+1}}^2-4\beta=|a_{m+1}|^2-4\beta=1-4\beta<0$ より虚数解となり不適である。

よって，$b_{m+1}\neq\beta$ から $b_{m+1}=-\beta$ となる。同様に，$b_{m+2}=-\beta$ となり繰り返すと，

$-\beta=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑩

②から $b_{m+1}=a_{m+2}b_{m+2}$ に⑩を代入すると，$a_{m+2}=1$ となる。同様にすると，$a_{m+3}=1$ となり，繰り返すと，

$1=a_{m+2}=a_{m+3}=a_{m+4}=\cdots$ ………⑪

ここで，①から $a_{m+2}=-a_{m+3}-b_{m+3}$ に代入すると，$1=-1+\beta$，$\beta=2$ となり，

$-2=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑫

さらに，①より，$a_{m+1}=-a_{m+2}-b_{m+2}=-1-(-2)=1$

$a_m=-a_{m+1}-b_{m+1}=-1-(-2)=1$

また，②より，$b_m=a_{m+1}b_{m+1}=1\times(-2)=-2$ となり，同様に繰り返すと，

$a_1=a_2=\cdots=a_m=a_{m+1}=1$，$b_1=b_2=\cdots=b_m=-2$………⑬

以上より，⑪⑫⑬をまとめると，$n\geqq1$ で，$a_n=1$，$b_n=-2$

(b)　ある正の整数 m に対して $b_m=0$ のとき

(i)より，$0=b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑭

ここで，②より，$b_{m-1}=a_mb_m=0$，$b_{m-2}=a_{m-1}b_{m-1}=0$ となり，繰り返すと，

$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{m-2}=b_{m-1}=0$………⑮

⑭⑮をまとめると，$n\geqq1$ で，$b_n=0$

すると，①より，$a_1=-a_2-b_2=-a_2$，$a_2=-a_3-b_3=-a_3$ となり，

$a_n=-a_{n+1}-b_{n+1}=-a_{n+1}$

これより，$a_2=-a_1$，$a_3=-a_2$，…，$a_{n+1}=-a_n$ となり，$n\geqq1$ で，

$a_n=a_1(-1)^{n-1}$

(a)(b)より，$(a_n,\ b_n)=(1,\ -2)$ または $(a_n,\ b_n)=\left(a_1(-1)^{n-1},\ 0\right)$（$a_1$ は整数）

コメント

(1)は整数が絡んだ連立方程式の問題ですが，(2)は整数と漸化式についての時間無制限の難問です。2 次方程式から生成される整数解の数列という，非常にきつい条件が与えられているので，初めのうちはなんとかうまくいっても，そのうち破綻し，そこが付け目という気持ちで考えています。

問　題

負でない整数 N が与えられたとき，$a_1=N$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$として数列$\{a_n\}$を定める。ただし$[a]$は，実数aの整数部分（$k\leqq a<k+1$となる整数k）を表す。

(1)　$a_3=1$となるようなNをすべて求めよ。

(2)　$0\leqq N<2^{10}$を満たす整数Nのうちで，Nから定まる数列$\{a_n\}$のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3)　0 から$2^{100}-1$までの2^{100}個の整数から等しい確率でNを選び，数列$\{a_n\}$を定める。次の条件(＊)を満たす最小の正の整数mを求めよ。

(＊)　数列$\{a_n\}$のある項がmとなる確率が$\dfrac{1}{100}$以下となる。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　$a_1=N\geqq 0$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$に対して，$a_3=1$とすると，$\left[\dfrac{a_2}{2}\right]=1$から$a_2=2,\ 3$

すると，$a_2=2$のとき$\left[\dfrac{a_1}{2}\right]=2$から$a_1=4,\ 5$，$a_2=3$のとき$\left[\dfrac{a_1}{2}\right]=3$から$a_1=6,\ 7$となり，まとめると，$a_1=N=4,\ 5,\ 6,\ 7$である。

(2)　一般的に，負でない整数$i,\ j\ (i<j)$に対して，$i\leqq\left[\dfrac{x}{2}\right]<j$を満たす整数$x$は，

$$x=2i,\ 2i+1,\ 2i+2,\ \cdots,\ 2j-1$$

すなわち，$2i\leqq x<2j$となり，$2j-2i$個のxが存在する。

さて，ある正の整数lに対して，$a_l=2$とすると，$a_{l-1}=4,\ 5$となり，

$$4\leqq a_{l-1}<6,\ 8\leqq a_{l-2}<12,\ 16\leqq a_{l-3}<24,\ \cdots,\ 2^l\leqq a_1<3\cdot 2^{l-1}$$

ここで，条件から$0\leqq N<2^{10}$すなわち$0\leqq a_1<2^{10}$より，$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$

よって，$a_l=2$となる整数Nの個数は，

$$\sum_{l=1}^{9}(3\cdot 2^{l-1}-2^l)=\sum_{l=1}^{9}2^{l-1}=\frac{2^9-1}{2-1}=511$$

(3)　ある正の整数lに対して，$a_l=m$とすると，$a_{l-1}=2m,\ 2m+1$となり，

$$2m\leqq a_{l-1}<2(m+1),\ 4m\leqq a_{l-2}<4(m+1),\ \cdots,\ 2^{l-1}m\leqq a_1<2^{l-1}(m+1)$$

さて，$0\leqq N\leqq 2^{100}-1$において，$2^{l-1}m\leqq 2^{100}-1<2^{l-1}(m+1)-1$と仮定すると，

$$m\leqq 2^{101-l}-\frac{1}{2^{l-1}}<m+1-\frac{1}{2^{l-1}}$$

まとめると，$m\leqq 2^{101-l}-\dfrac{1}{2^{l-1}}$かつ$m>2^{101-l}-1$となり，これを満たす整数$m$は存在しない。

これより，$a_l=m$ となる確率は，整数 N の個数に注目して，

$$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=1}^{l}\{2^{k-1}(m+1)-2^{k-1}m\}=\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=1}^{l}2^{k-1}=\frac{1}{2^{100}}\cdot\frac{2^l-1}{2-1}=\frac{2^l-1}{2^{100}}$$

条件から，$\dfrac{2^l-1}{2^{100}}\leqq\dfrac{1}{100}$ より，$2^l\leqq\dfrac{2^{100}}{100}+1=\dfrac{128}{100}\cdot2^{93}+1=\dfrac{32}{25}\cdot2^{93}+1$ となり，

$$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 93$$

よって，$1\leqq l\leqq93$ のとき $0\leqq N\leqq2^{100}-1$ に含まれ，$l\geqq94$ のとき $N>2^{100}-1$ となることから，求める正の整数 m の条件は，

$$2^{100}-1<2^{93}m$$

すると，m の最小値は $m>2^7-\dfrac{1}{2^{93}}$ より，$m=2^7=128$ である。

コメント

(1)(2)は実験で具体的に計算すればよいだけですが，それをベースにした(3)の設問はかなり難度が高く，記述も容易とはいえないものになっています。

問　題

$x>0$ とし，$f(x)=\log x^{100}$ とおく。

(1) 次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2) 実数 a の整数部分($k\leqq a<k+1$ となる整数 k)を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば，$\log 10=2.3026$ として計算せよ。 [2013]

解答例＋映像解説

(1) $f(x)=\log x^{100}=100\log x$ より，$f'(x)=\dfrac{100}{x}$ となるので，$0<x<c<x+1$ を満たすある c に対して，平均値の定理から，

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\frac{100}{c},\quad f(x+1)-f(x)=\frac{100}{c}$$

すると，$\dfrac{100}{x+1}<\dfrac{100}{c}<\dfrac{100}{x}$ より，$\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2) n を整数とすると，(1)より，$\dfrac{100}{n+1}<f(n+1)-f(n)<\dfrac{100}{n}$

ここで，$\dfrac{100}{n+1}\geqq 1$ とすると $n\leqq 99$ となり，このとき $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が 1 より大となるので，整数 $[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(100)]$ はすべて異なる。

また，$\dfrac{100}{n}\leqq 1$ とすると $n\geqq 100$ であり，このとき $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が 1 より小となり，$[f(100)]$，$[f(101)]$，$[f(102)]$，…，$[f(1000)]$ は，$[f(100)]$ 以上 $[f(1000)]$ 以下のいずれかの整数をもれなくとり，

$$[f(100)]=[100\log 100]=[200\log 10]=[460.52]=460$$
$$[f(1000)]=[100\log 1000]=[300\log 10]=[690.78]=690$$

以上より，$[f(1)]$，$[f(2)]$，…，$[f(1000)]$ のうちで異なるものの個数は，

$$100+(690-460+1)-1=330$$

コメント

(2)では，隣接する $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が，$n=100$ を境に，1 より大から 1 より小に変化するという感覚が，個数を数えるポイントとなっています。

問　題

$k,\ m,\ n$ は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\ S_k(1)=1\ (k \geqq 0)$$

$$T_m(n)={}_m\mathrm{C}_1 S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2 S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3 S_3(n)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n)$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n)\quad (m \geqq 2)$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1)　二項定理を利用すると，$S_k(1)=1$，$S_k(2)=1^k+2^k$ より，

$$T_m(1)={}_m\mathrm{C}_1 S_1(1)+{}_m\mathrm{C}_2 S_2(1)+{}_m\mathrm{C}_3 S_3(1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(1)$$

$$={}_m\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_3+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}=(1+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_m=2^m-2$$

$$T_m(2)={}_m\mathrm{C}_1 S_1(2)+{}_m\mathrm{C}_2 S_2(2)+{}_m\mathrm{C}_3 S_3(2)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(2)$$

$$={}_m\mathrm{C}_1(1+2^1)+{}_m\mathrm{C}_2(1+2^2)+{}_m\mathrm{C}_3(1+2^3)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(1+2^{m-1})$$

$$=T_m(1)+\{(1+2)^m-{}_m\mathrm{C}_0 2^0-{}_m\mathrm{C}_m 2^m\}$$

$$=2^m-2+3^m-1-2^m=3^m-3$$

(2)　$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　(1)より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$T_m(l)=(l+1)^m-(l+1)$ であると仮定すると，条件より，

$$T_m(l+1)={}_m\mathrm{C}_1 S_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2 S_2(l+1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(l+1)$$

$$={}_m\mathrm{C}_1\{1+2+\cdots+l+(l+1)\}+{}_m\mathrm{C}_2\{1^2+2^2+\cdots+l^2+(l+1)^2\}$$

$$+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\{1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+l^{m-1}+(l+1)^{m-1}\}$$

$$=T_m(l)+{}_m\mathrm{C}_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2(l+1)^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(l+1)^{m-1}$$

$$=(l+1)^m-(l+1)+\{(1+l+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0(l+1)^0-{}_m\mathrm{C}_m(l+1)^m\}$$

$$=(l+1)^m-(l+1)+(l+2)^m-1-(l+1)^m=(l+2)^m-(l+2)$$

(i)(ii)より，$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)\cdots\cdots\cdots(*)$

(3)　まず，$p=3$ のときは，$S_1(2)=1+2$ は 3 の倍数となり題意を満たし，$S_k(p-1)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

次に，p が 5 以上の素数のとき，$S_k(p-1)\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$k=1$ のとき

$m=2$，$n=p-1$ とすると，条件より，$T_2(p-1)={}_2\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)$

すると，$(*)$から，$(p-1+1)^2-(p-1+1)=2S_1(p-1)$

$$2S_1(p-1)=p(p-1)$$

p は 5 以上の素数より，$S_1(p-1)$ は p の倍数である。

(ii)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l\ \ (l\leqq p-3)$ のとき

$S_k(p-1)$ が p の倍数であると仮定すると，条件より，

$$T_{l+2}(p-1)={}_{l+2}\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_2\,S_2(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_3\,S_3(p-1)$$
$$+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_l\,S_l(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1}\,S_{l+1}(p-1)$$

$(*)$から，$T_{l+2}(p-1)=p^{l+2}-p=p(p^{l+1}-1)$ となり，

$$(l+2)S_{l+1}(p-1)=p(p^{l+1}-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_2\,S_2(p-1)$$
$$-{}_{l+2}\mathrm{C}_3\,S_3(p-1)-\cdots-{}_{l+2}\mathrm{C}_l\,S_l(p-1)$$

これより，$(l+2)S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数となる。

すると，p は 5 以上の素数で，$l+2\leqq p-1$ から，$l+2$ と p は互いに素となるので，$S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数である。

(i)(ii)より，$S_k(p-1)\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

コメント

二項定理と整数の融合問題です。(3)の証明に対して，巧妙な誘導がつけられています。また，帰納法における $l\leqq p-3$ という条件から，$p=3$ は特別に扱っています。

問　題

m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4)　r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

[2012]

解答例

(1)　二項定理より，$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の係数は,

$$ {}_{101}\mathrm{C}_2\cdot(-1)^{99}=-\frac{101\times100}{2}=-5050 $$

(2)　m, p は 3 以上の奇数から，二項定理を用いると，

$$ (p-1)^m+1=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+1=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+(-1)^m+1 $$

$$ =\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=p\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-1} $$

よって，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れる。

(3)　(2)より，$(p-1)^m+1=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+{}_m\mathrm{C}_1(-1)^{m-1}p$

$$ =p^2\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-2}+mp $$

m は p で割り切れないので，mp は p^2 で割り切れない。すなわち，$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れない。

(4)　r を正の整数，$s=3^{r-1}m$ のとき，2^s+1 は 3^r で割り切れることを，r に関する数学的帰納法で示す。

(i)　$r=1$ のとき

$s=3^0m=m$ となり, (2)の結論に $p=3$ を適用すると，$2^m+1=(3-1)^m+1$ は 3 すなわち 3^1 で割り切れる。よって，$r=1$ のとき成立する。

(ii)　$r=l$ のとき

$2^{3^{l-1}m}+1$ が 3^l で割り切れると仮定し, n を整数として，$2^{3^{l-1}m}+1=3^ln$ とおく。

$$ 2^{3^lm}+1=2^{3^{l-1}\cdot3m}+1=\left(2^{3^{l-1}m}\right)^3+1=(3^ln-1)^3+1 $$

$$ =(3^ln)^3-3(3^ln)^2+3(3^ln)-1+1=3^{l+1}(3^{2l-1}n^3-3^ln^2+n) $$

よって，$2^{3^lm}+1$ は 3^{l+1} で割り切れる。

(i)(ii)より，$s=3^{r-1}m$ のとき，2^s+1 は 3^r で割り切れる。

コメント

二項定理の応用問題です。(4)は数学的帰納法という手段を決めれば，スムーズに論理が展開できます。

問　題

a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし, x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0,\ \ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2011]

解答例

(1)　まず, 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0 \cdots\cdots$①，$y^2 + by + a = 0 \cdots\cdots$②が，それぞれ整数解をもつとき, a, b が整数より，①と②の 2 つの解はともに整数である。

さて，$a = b > 0$ とするとき，②は①に一致し，整数 k, l $(k \leqq l)$ を用いて，①は，

$$(x + k)(x + l) = 0,\ \ x^2 + (k + l)x + kl = 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

①③の係数を比べると，$k + l = a \cdots\cdots$④，$kl = a \cdots\cdots$⑤となり，④⑤より，

$$kl = k + l,\ \ (k - 1)(l - 1) = 1 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

ここで，④⑤から $a > 0$ に注意すると, k, l は自然数となり, $1 \leqq k \leqq l$ である。すると，⑥より，$(k - 1,\ l - 1) = (1,\ 1)$，$(k,\ l) = (2,\ 2)$

よって，$a = 4$ である。

(2)　$a > b > 0$ とするとき, (1)と同様に，整数 k, l $(k \leqq l)$ を用いて，①は，

$$(x + k)(x + l) = 0,\ \ x^2 + (k + l)x + kl = 0$$

よって，$k + l = a \cdots\cdots$⑦，$kl = b \cdots\cdots$⑧となり，$a > b$ と⑦⑧から，

$$kl < k + l,\ \ (k - 1)(l - 1) < 1 \cdots\cdots\cdots ⑨$$

一方，$a > 0$，$b > 0$ から k, l は自然数となり, $1 \leqq k \leqq l$ であることから，

$$(k - 1)(l - 1) \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑩$$

⑨⑩より，$(k - 1)(l - 1) = 0$ となり，$k = 1$ である。

すると，⑦から $a = l + 1$，⑧から $b = l$ となり, 2 次方程式②は,

$$y^2 + ly + (l + 1) = 0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

ここで, (1)と同様にして，整数 m, n $(m \leqq n)$ を用いて，⑪は,

$$(y + m)(y + n) = 0,\ \ y^2 + (m + n)x + mn = 0 \cdots\cdots\cdots ⑫$$

⑪⑫の係数を比べると，$m + n = l \cdots\cdots$⑬，$mn = l + 1 \cdots\cdots$⑭となり，⑬⑭より，

$$mn = m + n + 1,\ \ (m - 1)(n - 1) = 2 \cdots\cdots\cdots ⑮$$

ここで，⑬⑭から $l > 0$ に注意すると, m, n は自然数となり, $1 \leqq m \leqq n$ である。すると，⑮より，$(m - 1,\ n - 1) = (1,\ 2)$，$(m,\ n) = (2,\ 3)$

よって，$l = 5$ から，$a = 6$，$b = 5$ である。

コメント

2 つの自然数の和と積の大小関係を，和と積が等しいのは$2+2=2\times2$，和が積より大きいのは$1+*>1\times*$というイメージを用いて解いています。他の解法もいろいろ考えられそうな，演習に価値ある整数問題です。

問　題

x, y を正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。　[2009]

解答例

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ より，$xy-4x-8y=0$ となり，

$$(x-8)(y-4)=32$$

ここで, x, y は整数であり，$x-8>-8$，$y-4>-4$ から, 32 の約数をとり，

$$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$$

$$(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$$

(2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ より，$xy-px-2py=0$ となり，

$$(x-2p)(y-p)=2p^2$$

ここで，$x-2p>-2p$，$y-p>-p$ であり, p が 3 以上の素数から,

$$(x-2p,\ y-p)=(1,\ 2p^2),\ (2,\ p^2),\ (p,\ 2p),\ (2p,\ p),$$
$$(p^2,\ 2),\ (2p^2,\ 1)$$

さて，$A=2x+3y-7p=2(x-2p)+3(y-p)$ とおくと, A の値は順に,

$$A=2+6p^2,\ 4+3p^2,\ 8p,\ 7p,\ 2p^2+6,\ 4p^2+3$$

ここで, $p\geqq 3$ を用いると,

$$(2+6p^2)-(4+3p^2)=-2+3p^2>0,\ 2+6p^2>4+3p^2$$

$$8p-7p=p>0,\ 8p>7p$$

$$(2p^2+6)-(4p^2+3)=-2p^2+3<0,\ 4p^2+3>2p^2+6$$

さらに，$(4+3p^2)-(2p^2+6)=p^2-2>0$，$4+3p^2>2p^2+6$ ………①

$$(2p^2+6)-7p=(2p-3)(p-2)>0,\ 2p^2+6>7p \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より, A の最小値は $7p$ であり，このとき，$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p)$ となる。

すると，$2x+3y=A+7p$ から，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は,

$$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p),\ (x,\ y)=(4p,\ 2p)$$

コメント

有名な型の不定方程式です。なお, (2)の大小関係については，初めはグラフということも考えましたが，煩雑になりそうなので止めました。そこで，まず似た式どうしの大小を比べ，この予選を通過した式の大小を比べるという方法を採っています。

問　題

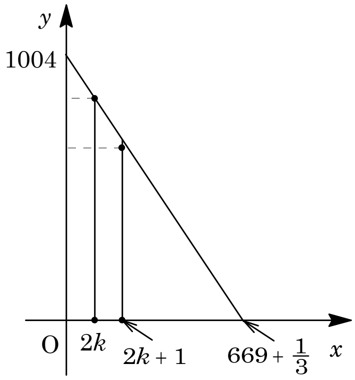
次の問いに答えよ。

(1)　$3x+2y\leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}\leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ で，不等式 $3x+2y\leqq 2008$ を満たす格子点の個数を, x を固定して数える。



(i)　$x=2k\ (0\leqq k\leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}(2008-3\cdot 2k)=1004-3k$$

よって，直線 $x=2k$ 上で，$0\leqq y\leqq 1004-3k$ より，格子点は $1005-3k$ 個ある。

(ii)　$x=2k+1\ (0\leqq k\leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}\{2008-3(2k+1)\}=1004-3k-\frac{3}{2}$$

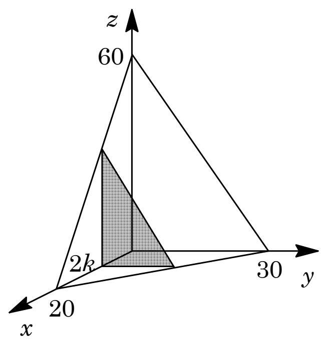
よって，直線 $x=2k+1$ 上で，$0\leqq y\leqq 1004-3k-2=1002-3k$ より，格子点は $1003-3k$ 個ある。

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は,

$$N=\sum_{k=0}^{334}(1005-3k)+\sum_{k=0}^{334}(1003-3k)=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)$$

$$=2008\times 335-6\times\frac{1}{2}\cdot 334\cdot 335=337010$$

(2)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ で，不等式 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}\leqq 10$ すなわち $3x+2y+z\leqq 60$ を満たす格子点の個数 N を，まず x を固定して数える。

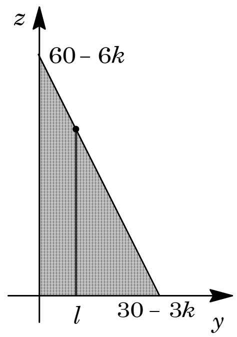


(i)　$x=2k\ (0\leqq k\leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k$ 上の格子点の個数を N_{2k} とおくと，この平面上では,

$$0\leqq z\leqq -2y+60-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y=l\ (0\leqq l\leqq 30-3k)$ 上で, $0\leqq z\leqq -2l+60-6k$ より，格子点は $-2l+61-6k$ 個あるので,



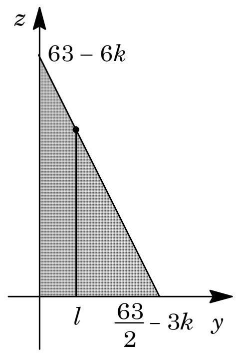
$$N_{2k}=\sum_{k=0}^{30-3k}(-2l+61-6k)$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2}(30-3k)(31-3k)+(61-6k)(31-3k)$$
$$=(31-3k)^2$$

(ii)　$x=2k-1\ (1\leqq k\leqq 10)$のとき

平面$x=2k-1$上の格子点の個数をN_{2k-1}とおくと，この平面上では,

$$0\leqq z\leqq -2y+60-3(2k-1)=-2y+63-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y=l$ $(0\leqq l\leqq 31-3k)$ 上では，$0\leqq z\leqq -2l+63-6k$より，格子点は$-2l+64-6k$個あるので,



$$N_{2k-1}=\sum_{k=0}^{31-3k}(-2l+64-6k)$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2}(31-3k)(32-3k)+(64-6k)(32-3k)$$
$$=(33-3k)(32-3k)$$

(i)(ii)より，求める格子点の個数Nは,

$$N=\sum_{k=0}^{10}N_{2k}+\sum_{k=1}^{10}N_{2k-1}=N_0+\sum_{k=1}^{10}(N_{2k}+N_{2k-1})$$
$$=31^2+\sum_{k=1}^{10}\left\{(31-3k)^2+(33-3k)(32-3k)\right\}$$
$$=31^2+\sum_{k=1}^{10}(2017-381k+18k^2)$$
$$=31\times31+2017\times10-381\times\frac{1}{2}\times10\times11+18\times\frac{1}{6}\times10\times11\times21$$
$$=7106$$

コメント

格子点の個数を数える有名問題です。平面と空間の 2 題が出されましたが，どちらも，かなりの量の計算が要求されます。

問　題

正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x_2 = 1$，$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ で定める。このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ。 [2004]

解答例

まず，x_n と b が互いに素であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 1$，2 のとき　$x_1 = x_2 = 1$ より，x_1 と b，x_2 と b は互いに素である。

(ii)　$n = k$，$k+1$ のとき　x_k と b，x_{k+1} と b は互いに素であるとする。

ここで，x_{k+2} と b に 2 以上の公約数 g の存在を仮定すると，

$$x_{k+2} = gx'_{k+2}\,,\ b = gb'\quad (x'_{k+2} \text{ と } b' \text{ は整数})$$

すると，$x_{k+2} = ax_{k+1} + bx_k$ から，$ax_{k+1} = g(x'_{k+2} - b'x_k)$ ………①

これより，ax_{k+1} は g の倍数となるが，条件より a と b は互いに素，また x_{k+1} と b も互いに素なので，①の成立はありえない。

よって，x_{k+2} と b には 2 以上の公約数 g が存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_n と b は互いに素である。

次に，x_n と b が互いに素であることを利用して，x_{n+1} と x_n が互いに素であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 1$ のとき　$x_1 = x_2 = 1$ より，x_2 と x_1 は互いに素である。

(ii)　$n = l$ のとき　x_{l+1} と x_l が互いに素であるとする。

ここで，x_{l+2} と x_{l+1} に 2 以上の公約数 G の存在を仮定すると，

$$x_{l+2} = Gx''_{l+2}\,,\ x_{l+1} = Gx''_{l+1}\quad (x''_{l+2} \text{ と } x''_{l+1} \text{ は整数})$$

すると，$x_{l+2} = ax_{l+1} + bx_l$ から，$bx_l = G(x''_{l+2} - ax''_{l+1})$ ………②

これより，bx_l は G の倍数となるが，b と x_{l+1} は互いに素，また x_l と x_{l+1} も互いに素なので，②の成立はありえない。

よって，x_{l+2} と x_{l+1} には 2 以上の公約数 G が存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_{n+1} と x_n は互いに素である。

コメント

漸化式 $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ において，a と b が互いに素，しかも x_n と x_{n-1} も互いに素であるとき，x_{n+1} と x_n が互いに素でない例はすぐに見つけられます。たとえば，$33 = 7\times 3 + 6\times 2$ です。ということは，このような例を出現させないためには何を示せばよいのか……，と考えていきました。

問　題

関係式 $x^a = y^b = z^c = xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする。 [2002]

解答例

$x^a = y^b = z^c = xyz$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$ より，$\log x^a = \log y^b = \log z^c = \log xyz$

$$a\log x = b\log y = c\log z = \log x + \log y + \log z$$

ここで，$\log x = X$，$\log y = Y$，$\log z = Z$ とおくと，$x \neq 1$，$y \neq 1$，$z \neq 1$ から，

$$aX = bY = cZ = X + Y + Z \ (X \neq 0,\ Y \neq 0,\ Z \neq 0)$$

$$aX = bY \cdots\cdots①,\ aX = cZ \cdots\cdots②,\ aX = X + Y + Z \cdots\cdots③$$

①より $Y = \frac{a}{b}X$，②より $Z = \frac{a}{c}X$，③に代入して，$aX = X + \frac{a}{b}X + \frac{a}{c}X$

$X \neq 0$ より，$a = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$，$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \cdots\cdots\cdots④$

さて，$1 \leqq a \leqq b \leqq c$ より，$\frac{1}{a} \geqq \frac{1}{b} \geqq \frac{1}{c} > 0$ となり，④から $\frac{3}{a} \geqq 1$，$a \leqq 3$ である。また，$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 - \frac{1}{a} > 0$ より $a > 1$ となる。よって，$a = 2,\ 3$ である。

(i)　$a = 2$ のとき　④より $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{b} \geqq \frac{1}{c} > 0$ より $\frac{2}{b} \geqq \frac{1}{2}$ から $b \leqq 4$ で，$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{b} > 0$ から $b > 2$ となる。

$b = 3$ のとき $\frac{1}{c} = \frac{1}{6}$ より $c = 6$，また $b = 4$ のとき $\frac{1}{c} = \frac{1}{4}$ より $c = 4$ である。

(ii)　$a = 3$ のとき　④より $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{b} \geqq \frac{1}{c} > 0$ より $\frac{2}{b} \geqq \frac{2}{3}$ から $b \leqq 3$ で，$3 = a \leqq b$ より $b = 3$ となる。

このとき，$\frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ より $c = 3$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c) = (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

コメント

対数をとって変形をしていけば，④というよく見かける不定方程式が現れてきます。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。条件$k_1\geqq 1$, ……, $k_{n-1}\geqq 1$, $k_n\geqq 0$を満たす n 個の整数の組$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$に対して，自然数$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$を次のように定める。

$$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)=2^{k_1+k_2+\cdots+k_n}-2^{k_2+\cdots+k_n}-2^{k_3+\cdots+k_n}-\cdots-2^{k_n}$$

(1)　$1999=m(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$となる$(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$を求めよ。

(2)　$m(k_1,\ k_2)=m(l_1,\ l_2)$であれば，$k_1=l_1$，$k_2=l_2$が成り立つことを示せ。

(3)　$n\geqq 3$ のとき，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)=m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n)$ であれば，$k_j=l_j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$が成り立つことを示せ。　[1999]

解答例

(1)　$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_4)=2^{k_1+k_2+k_3+k_4}-2^{k_2+k_3+k_4}-2^{k_3+k_4}-2^{k_4}$

$$=2^{k_4}(2^{k_1+k_2+k_3}-2^{k_2+k_3}-2^{k_3}-1)$$

$k_1\geqq 1$, $k_2\geqq 1$, $k_3\geqq 1$より，$2^{k_1+k_2+k_3}-2^{k_2+k_3}-2^{k_3}-1$は奇数であり，また$k_4=0$のとき$2^{k_4}$は奇数，$k_4\geqq 1$のとき$2^{k_4}$は偶数となる。

1999は奇数より$k_4=0$となり，このとき$2^{k_1+k_2+k_3}-2^{k_2+k_3}-2^{k_3}-1=1999$

$$2^{k_3}(2^{k_1+k_2}-2^{k_2}-1)=2000=2^4\times 125$$

$2^{k_1+k_2}-2^{k_2}-1$は奇数より$k_3=4$となり，このとき$2^{k_1+k_2}-2^{k_2}-1=125$

$$2^{k_2}(2^{k_1}-1)=126=2\times 63$$

$2^{k_1}-1$は奇数より$k_2=1$となり，このとき$2^{k_1}-1=63$

$2^{k_1}=64=2^6$より，$k_1=6$となるので，$(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)=(6,\ 1,\ 4,\ 0)$

(2)　$m(k_1,\ k_2)=m(l_1,\ l_2)=N$とおくと，$2^{k_2}(2^{k_1}-1)=2^{l_2}(2^{l_1}-1)=N$

ただし，$k_1\geqq 1$, $k_2\geqq 0$, $l_1\geqq 1$, $l_2\geqq 0$である。

Nが奇数のとき，$k_2=l_2=0$となり，$2^{k_1}-1=2^{l_1}-1$より$k_1=l_1$

Nが偶数のとき，$N=2^iM$ （iは自然数, Mは奇数）とおくと，

$$2^{k_2}(2^{k_1}-1)=2^{l_2}(2^{l_1}-1)=2^iM$$

よって，$k_2=l_2=i$となり，$2^{k_1}-1=2^{l_1}-1$より$k_1=l_1$

したがって, Nの偶奇にかかわらず, $k_1=l_1$，$k_2=l_2$が成り立つ。

(3)　(2)との結果と合わせて, $n\geqq 2$ において，題意成立を数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$のとき　(2)より成立する。

(ii)　$n=p$のとき　題意の成立を仮定する。

ここで，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p,\ k_{p+1})=m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p,\ l_{p+1})=N$とすると，

$$2^{k_{p+1}}(2^{k_1+\cdots+k_p}-2^{k_2+\cdots+k_p}-\cdots-2^{k_p}-1)=2^{l_{p+1}}(2^{l_1+\cdots+l_p}-2^{l_2+\cdots+l_p}-\cdots-2^{l_p}-1)$$

$$2^{k_{p+1}}\{m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)-1\}=2^{l_{p+1}}\{m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)-1\}=N$$

$k_1 \geqq 1$, ……, $k_p \geqq 1$, $l_1 \geqq 1$, ……, $l_p \geqq 1$ より，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)-1$，$m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)-1$ はともに奇数となる。

すると，N が奇数では $k_{p+1}=l_{p+1}=0$ となり，N が偶数では $k_{p+1}=l_{p+1} \geqq 1$ となることより，N の偶奇にかかわらず，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)=m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)$

仮定より $k_j=l_j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ なので，$n=p+1$ のときも題意が成立する。

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ において，題意が成立する。

コメント

(1)によって(2)(3)の方針が決まります。おもしろい問題です。

問　題

正の整数 n に対して $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ とする。この $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に対し, 各添字 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について, a_i の値が j であるとき, その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i=j\to a_j=k$ と書くことにする。ここで, $a_i=j\to a_j=k\to a_k=l\to\cdots$ のようにたどり, それを続けていく。

例えば, $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)=(2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき,

(i)　$a_1=2\to a_2=5\to a_5=4\to a_4=1\to a_1=2$

(ii)　$a_3=6\to a_6=3\to a_3=6$

(iii)　$a_7=7\to a_7=7$

となり, どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル, 列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の(i), (ii), (iii)は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。

(1)　$n=3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2)　$n=4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3)　n 以下の正の整数 k に対して, $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\log(n+1)-\log k$ を示せ。

(4)　n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は, $p>\log 2$ を満たすことを示せ。　[2019]

解答例＋映像解説

(1)　1, 2, 3 を一列に並べた順列 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は, $3!=6$ 通りあり,

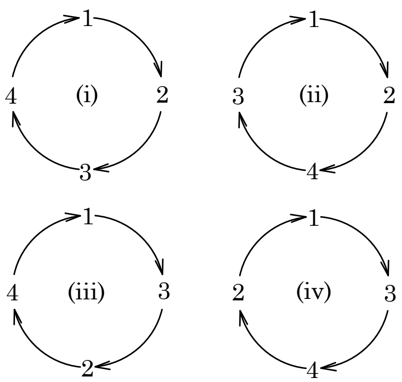
$(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

$a_i=i$ という長さ 1 のサイクルを含むものは,

$(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3),\ (3,\ 2,\ 1)$

これより, その確率は $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ となる。

(2)　1, 2, 3, 4 を一列に並べた順列 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ について, $a_i=j\to a_j=k\to a_k=l\to a_l=i$ という長さ 4 のサイクルを含むものは, 右図のように 1, 2, 3, 4 のすべてをサイクリックに並べて,



(i)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(2,\ 3,\ 4,\ 1)$

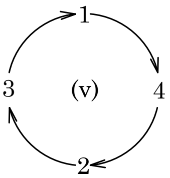
(ii)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(2,\ 4,\ 1,\ 3)$

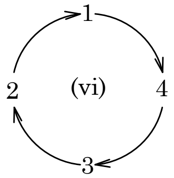
(iii)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(3,\ 4,\ 2,\ 1)$

(iv)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(3,\ 1,\ 4,\ 2)$

(v)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(4,\ 3,\ 1,\ 2)$

(vi)　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(4,\ 1,\ 2,\ 3)$



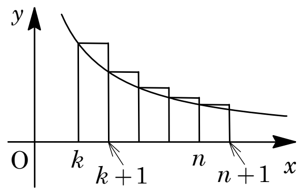


(3)　$x>0$ において $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は単調減少し，n 以下の正の整数 k に対し，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき，

$$f(k)\geqq f(x)\quad（等号は x=k のときのみ）$$

すると，右図から面積を比較して，

$$\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\int_{k}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_{k}^{n+1}=\log(n+1)-\log k$$



(4)　1, 2, $\cdots$, n（n は奇数）を一列に並べた順列が，長さ r $\left(r\geqq\dfrac{n+1}{2}\right)$ のサイクルを含むとき，$n-r\leqq\dfrac{n-1}{2}$ より，選んだ順列 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に含まれる長さ r のサイクルは，ただ 1 つだけ存在する。

さて，$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ が長さ r のサイクルを含むとき，r 個の選び方が ${}_n\mathrm{C}_r$ 通りで，それをサイクリックに並べるのが $(r-1)!$ 通りとなり，また残り $n-r$ 個の並べ方が $(n-r)!$ 通りであるので，このときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_r\cdot(r-1)!\cdot(n-r)!}{n!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(r-1)!\cdot(n-r)!}{n!}=\frac{1}{r}$$

よって，選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は，(3)の結論から，

$$p=\sum_{r=\frac{n+1}{2}}^{n}\frac{1}{r}>\log(n+1)-\log\frac{n+1}{2}=\log\frac{(n+1)\cdot 2}{n+1}=\log 2$$

コメント

確率の総合問題です。具体例の(1)と(2)があるものの，題意を把握するのに時間がかかります。誘導になっている(2)において，円順列との対応を考える点がポイントです。なお，(3)は付加的な設問のため，やや雑に記しています。

問　題

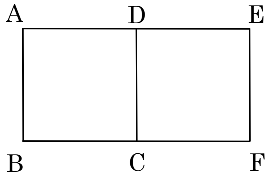


図 1

図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則(a), (b)に従って移動する。

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

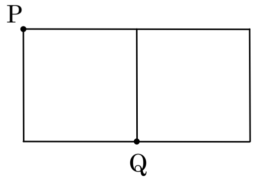


図 2

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

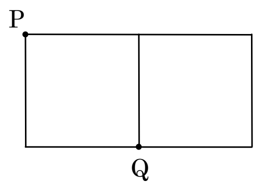
(2)　a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

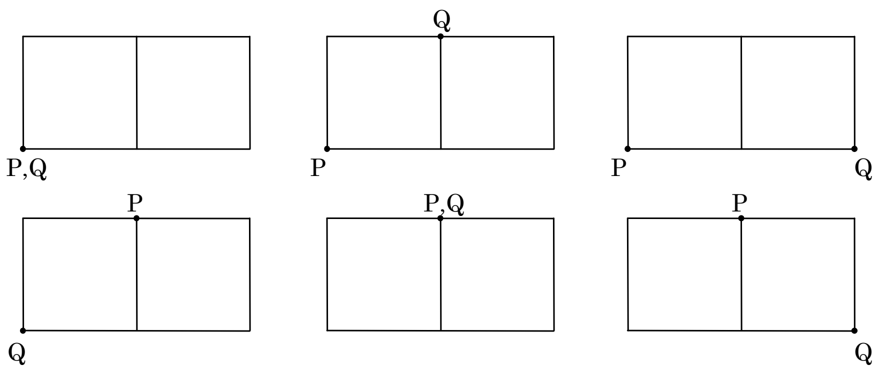
(3)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　条件より，時刻 0 での点 P, Q の配置が右図のとき，点 P, Q は独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動するので，時刻 1 での点 P, Q の可能な配置は，次の 6 パターンである。



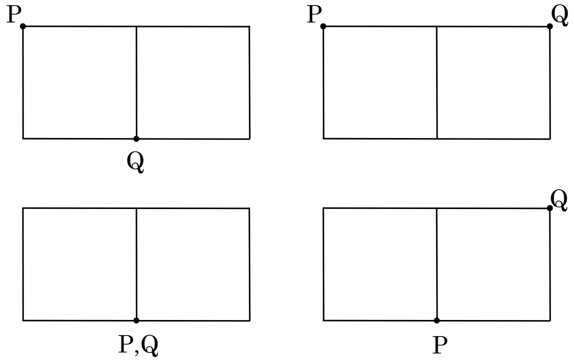


(2)　まず，時刻 1 までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることがなく，かつ時刻 1 に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいるのは，時刻 1 での左下，中上，右下の図の場合より，その確率 a_1 は $a_1 = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ である。

また，時刻 1 までに 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることがなく，かつ時刻 1 に 2 点 P，Q が異なる正方形上にいるのは，時刻 1 での右上の図の場合より，その確率 b_1 は $b_1=\dfrac{1}{6}$ である。

ここで，対称性を考慮すると，一般的に 2 点 P，Q が同じ正方形の異なる頂点にいるのは，その正方形の対角線上に位置する場合であり，これを状態 X とする。また，2 点 P，Q が異なる正方形の頂点にいるのは，辺 CD について対称の位置にある場合であり，これを状態 Y とする。

すると，時刻 0 から時刻 1 への状態から，一般的に $X\to X$ の推移確率は $\dfrac{1}{2}$，$X\to Y$ の推移確率は $\dfrac{1}{6}$ となる。

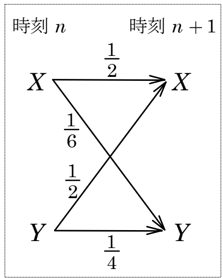


また，時刻 1 での右上図の点 P，Q の配置から，時刻 2 での点 P，Q の可能な配置は，右の 4 パターンである。すると，一般的に $Y\to X$ の推移確率は $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$Y\to Y$ の推移確率は $\dfrac{1}{4}$ となる。

まとめると，状態の推移は右図となり，$n=1$ のときは，

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$b_2=\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{4}b_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$$



(3)　(2)と同様にして，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{4}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

(4)　$p_n\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$p_1=a_1+b_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}\leqq\dfrac{3}{4}$ となり，成り立っている。

(ii)　$n=k$ のとき　$p_k\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$ と仮定すると，①②から，

$$p_{k+1}=a_{k+1}+b_{k+1}=\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}b_k\right)+\left(\frac{1}{6}a_k+\frac{1}{4}b_k\right)=\frac{2}{3}a_k+\frac{3}{4}b_k$$

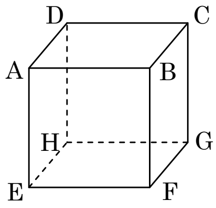
$$\leqq\frac{3}{4}a_k+\frac{3}{4}b_k=\frac{3}{4}(a_k+b_k)=\frac{3}{4}p_k\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

(i)(ii)より，$p_n\leqq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ である。

コメント

確率と漸化式の問題です。読解力と記述力が，かなり要求されます。

問　題



右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。

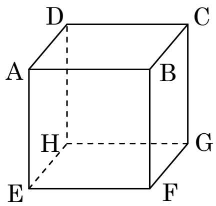
(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4)　自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。　[2017]

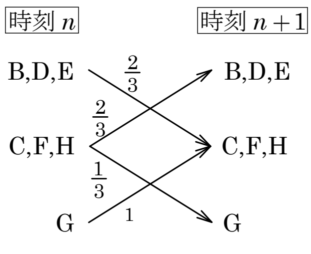
解答例＋映像解説



(1)　時刻 0 で A にいた点 P が，時刻 n において，A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n，A に戻らず C，F，H のいずれかにいる確率 q_n，A に戻らず G にいる確率 r_n について，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n \cdots\cdots\text{①},\quad q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + r_n \cdots\cdots\text{②}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \cdots\cdots\text{③}$$



ここで，$p_1 = 1$，$q_1 = r_1 = 0$ なので，①②③より，

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = 0,\quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \frac{2}{3},\quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = 0$$

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \frac{4}{9},\quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = 0,\quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \frac{2}{9}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，①より $p_n = \frac{2}{3}q_{n-1}$，③より $r_n = \frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると，$q_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1} + \frac{1}{3}q_{n-1}$，$q_{n+1} = \frac{7}{9}q_{n-1} \cdots\cdots$④

さて，④に $n = 2k$ を代入すると $q_{2k+1} = \frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり，$q_{2k-1} = q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1} = 0$

$$p_{2k} = \frac{2}{3}q_{2k-1} = 0,\quad r_{2k} = \frac{1}{3}q_{2k-1} = 0$$

④に$n=2k+1$を代入すると$q_{2k+2}=\dfrac{7}{9}q_{2k}$となり，$q_{2k}=q_2\left(\dfrac{7}{9}\right)^{k-1}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\ r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より，$q_n=0\,(n$が奇数$)$，$q_n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}(n$が偶数$)$

また，$n=2k+1$のとき，$k-1=\dfrac{n-3}{2}$から，

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}(n\text{ が 3 以上の奇数}),\ p_n=0\,(n\text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}(n\text{ が 3 以上の奇数}),\ r_n=0\,(n\text{ が偶数})$$

(3)　時刻$2m$で頂点Aに初めて戻る確率s_mは，$m\geqq 2$のとき，

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお，$m=1$のときは，$s_1=\dfrac{1}{3}p_1=\dfrac{1}{3}$である。

(4)　(3)より，mの値を$m=2$，$m=3$，$m\geqq 4$と場合分けをする。

(i)　$m=2$のとき　$s_2=\dfrac{4}{27}$，$t_2={s_1}^2=\dfrac{1}{9}$となり，$t_2<s_2$である。

(ii)　$m=3$のとき　$s_3=\dfrac{4}{27}\cdot\dfrac{7}{9}=\dfrac{28}{243}$，$t_3=s_1s_2+s_2s_1=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{27}=\dfrac{8}{81}$

これより，$t_3<s_3$である。

(iii)　$m\geqq 4$のとき　$s_m=\dfrac{4}{27}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{m-2}$，$t_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}s_ks_{m-k}=s_1s_{m-1}+s_{m-1}s_1+\sum_{k=2}^{m-2}s_ks_{m-k}$

$$t_m=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}+\sum_{k=2}^{m-2}\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-2}\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-k-2}$$

$$=\frac{4}{27}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}+\frac{4}{27}\sum_{k=2}^{m-2}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}\right\}=\frac{4}{27}\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}+\frac{4}{27}(m-3)\right\}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$$=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$$t_m-s_m=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}-\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

$$=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}-\frac{49}{81}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m-\frac{43}{81}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$m\geqq 4$のとき，$\dfrac{4}{27}m-\dfrac{43}{81}\geqq\dfrac{16}{27}-\dfrac{43}{81}>0$となり，$t_m>s_m$である。

(i)～(iii)より，$t_m<s_m$となるmは，$m=2,\ 3$である。

コメント

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，nを偶奇に分けて記しています。なお，理系単独の(4)については，詰めの数値計算が面倒です。

問　題

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき, 袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ, 次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる, という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個, B に白玉が 2 個入った状態から始め, この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　袋 A に赤玉 2 個, 袋 B に白玉 2 個の状態から始めて, 与えられた操作を 1 回行った後, 袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について, その確率 $P_1(k)$ は,

(i)　$k=0$ のとき　B→A に白, 次に A→B に白の場合より, $P_1(0)=1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

(ii)　$k=1$ のとき　B→A に白, 次に A→B に赤の場合より, $P_1(1)=1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

(iii)　$k=2$ のとき　この場合は起こりえないので, $P_1(2)=0$

(2)　袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について,

(i)　与えられた操作を n 回行った後, $k=0$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(1)から, $k=0$ となる確率は $\dfrac{1}{3}$, $k=1$ となる確率は $\dfrac{2}{3}$

(ii)　与えられた操作を n 回行った後, $k=1$ のときに操作をもう 1 回行うとき
$k=0$ となるのは, B→A に赤, 次に A→B に白の場合より, その確率は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

$k=1$ となるのは, B→A に赤, 次に A→B に赤の場合, もしくは B→A に白, 次に A→B に白の場合より, その確率は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

$k=2$ となるのは, B→A に白, 次に A→B に赤の場合より, その確率は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

(iii)　与えられた操作を n 回行った後, $k=2$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(i)と同様に考えて, $k=2$ となる確率は $\dfrac{1}{3}$, $k=1$ となる確率は $\dfrac{2}{3}$

(i)～(iii)より, $P_n(k)$ と $P_{n+1}(k)$ の関係は, $P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$ に留意すると,

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)=\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より, $P_n(1)=\dfrac{2}{3}$ $(n\geqq 2)$ となり, (1)から $P_1(1)=\dfrac{2}{3}$ なので, $P_n(1)=\dfrac{2}{3}$ $(n\geqq 1)$

①に代入すると，$P_{n+1}(0)=\dfrac{1}{3}P_n(0)+\dfrac{1}{9}$ となり，$P_{n+1}(0)-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\left\{P_n(0)-\dfrac{1}{6}\right\}$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left\{P_1(0)-\frac{1}{6}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，$P_n(0)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ となり，

$$P_n(2)=1-P_n(0)-P_n(1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

コメント

確率と漸化式について，よく見かける頻出問題です。

問　題

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき,

石が点 1 にあるならば, 確率 1 で点 2 に移動する
石が点 k ($k=2,\ 3,\ 4$) にあるならば, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で点 $k-1$ に, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で点 $k+1$ に移動する
石が点 5 にあるならば, 確率 1 で点 4 に移動する

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め, この試行を繰り返す。また, 石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき, 次の問いに答えよ。

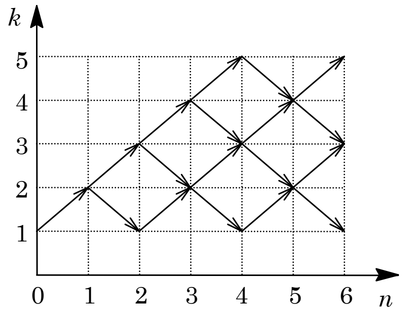
(1) 試行を 6 回繰り返した後に, 石が点 k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$) にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回($n\geqq 1$)繰り返した後に, ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。 [2015]

解答例＋映像解説

(1) 与えられた試行により, 石が点 k にある確率を $P_n(k)$ とすると, 初めは点 1 にあることより, 右図より計算すると,



$P_1(1)=0$, $P_1(2)=1$, $P_1(3)=0$,
$P_1(4)=0$, $P_1(5)=0$
$P_2(1)=\dfrac{1}{2}$, $P_2(2)=0$, $P_2(3)=\dfrac{1}{2}$,
$P_2(4)=0$, $P_2(5)=0$
$P_3(1)=0$, $P_3(2)=\dfrac{3}{4}$, $P_3(3)=0$, $P_3(4)=\dfrac{1}{4}$, $P_3(5)=0$
$P_4(1)=\dfrac{3}{8}$, $P_4(2)=0$, $P_4(3)=\dfrac{1}{2}$, $P_4(4)=0$, $P_4(5)=\dfrac{1}{8}$
$P_5(1)=0$, $P_5(2)=\dfrac{5}{8}$, $P_5(3)=0$, $P_5(4)=\dfrac{3}{8}$, $P_5(5)=0$
$P_6(1)=\dfrac{5}{16}$, $P_6(2)=0$, $P_6(3)=\dfrac{1}{2}$, $P_6(4)=0$, $P_6(5)=\dfrac{3}{16}$

(2) 試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点にすべてに印がついているのは,

(i) 4 回目に 5 のとき　5 回目以降は任意なので, その確率は $P_4(5)\cdot 1=\dfrac{1}{8}$ となる。

(ii)　4 回目に 3 のとき　5 回目に 4 で，6 回目に 5 のときだけなので，その確率は $P_4(3)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　まず，試行を n 回繰り返した後に，印が 3 つの点についているとき，点 1 と 2 は必ず印がつくことより，印のつく 3 つの点は 1 と 2 と 3 である。言い換えると，点 3 に少なくとも 1 回印がつき，点 4 と 5 には印がつかない場合となる。

さて，点 2→点 3→点 2 となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，点 2→点 1→点 2 となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$ である。これより，点 1 と 2 と 3 に印がつく確率は，l を自然数として，

(i)　n が奇数 $(n=2l+1)$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^l-\left(\dfrac{1}{2}\right)^l=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

なお，$n=1$ のときも成立している。

(ii)　n が偶数 $(n=2l)$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^{l-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^l=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

コメント

頻出のランダムウォークが題材になっている確率の問題です。具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。

問　題

3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1)　p_1，q_1 を求めよ。

(2)　p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3)　ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説

(1)　3 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は$3^3=27$通りあり，これらの場合が同様に確からしい。

さて，2 人勝ち残るのは，勝った人の選び方が${}_3\mathrm{C}_2=3$通りで，その手の出方が 3 通りであるので，確率p_1は，$p_1=\dfrac{3\times3}{27}=\dfrac{1}{3}$である。

また，3 人残るのは，3 人とも同じ手を出す 3 通りか，3 人とも異なる手を出す$3!=6$通りのいずれかより，その確率q_1は，$q_1=\dfrac{3+6}{27}=\dfrac{1}{3}$である。

(2)　まず，2 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は$3^2=9$通りあり，これらの場合が同様に確からしい。そこで，2 人残るのは，2 人とも同じ手を出すアイコの 3 通りの場合だけであり，その確率は，$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$である。

さて，$n+1$回目終了時に 2 人が残っているのは，n 回目終了時に 2 人が残ってアイコのときか，n 回目終了時に 3 人が残って 2 人が勝ち残るときのいずれかより，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$回目終了時に 3 人が残っているのは，n 回目終了時に 3 人が残ってアイコのときより，

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$q_n=q_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

①に代入して，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$となり，$3^{n+1}p_{n+1}=3^n p_n+1$と変形すると，

$$3^n p_n=3^1 p_1+(n-1)=1+n-1=n,\quad p_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　$n \geqq 2$ のとき，ちょうど n 回目で 1 人勝ち残りが決まるのは，次の場合である。

(i)　$n-1$ 回目終了時に 2 人が残って n 回目にアイコでないとき

$$p_{n-1} \times \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(ii)　$n-1$ 回目終了時に 3 人が残って n 回目に 1 人勝ち残るとき

$$q_{n-1} \times (1-p_1-q_1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(i)(ii)より，求める確率は，$2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = (2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

なお，この式は $n=1$ のときも成立する。

コメント

有名問題ですが，漸化式を立てるメリットがほとんど感じられないものです。