

2020 入試対策
過去問ライブラリー

新潟大学

医系数学10か年

2010 - 2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には、2010年度以降に出題された新潟大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお、複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

本書の構成

- 1 本書は2部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
 - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
 - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
 - (3) 1つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
 - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
 - (5) 出題の流れをウェブサイトを入試直前に確認する。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF版とKindle版のリンクについて

本書では、対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号、解答編の **問題** の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について、PDF版とKindle版に違いがあります。

- 【PDF版】 リンクが無効の場合、PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。
- 【Kindle版】 現状では、Kindle アプリで、リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	17
図形と式	18
図形と計量	20
ベクトル	22
整数と数列	28
確 率	37
論 証	42
曲 線	45
極 限	46
微分法	48
積分法	56
積分の応用	68

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式 |||

1 座標平面上に点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, 0)$, $P(t, 0)$ がある。ただし, t は正の実数である。また, 線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線 $l: y = ax + b$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 l が正方形 $OABC$ の面積を二等分するとき, a を b を用いて表せ。
- (2) 直線 l が正方形 $OABC$ の面積を二等分し, さらに直角三角形 OAP の面積を二等分するとき, b を t を用いて表せ。
- (3) $t \rightarrow +0$ および $t \rightarrow \infty$ のときの(2)で求めた b の極限値をそれぞれ求めよ。 [2018]

■ 図形と計量 |||

1 平行四辺形 $ABCD$ において, 辺 AB の長さを p , 辺 BC の長さを q とし, $\theta = \angle BAD$ とおく。ただし $p > q$ とする。平行四辺形 $ABCD$ の内部の点 P と 4 本の直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 $ABCD$ の内部を動くときの r の最大値を R とし, 最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形 $ABCD$ 内に L を図示せよ。
- (2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき, 円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。 S を p, q および θ で表せ。
- (3) 平行四辺形 $ABCD$ の面積を T とする。(2)で求めた S に対して $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

[2019]

■ ベクトル |||||

1 座標空間内の次のような4点 A, B, C, D を考える。 A の座標は $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ 、3点 B, C, D は、それぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸上にある。さらに、これらの4点は同一平面上にあり、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3点 B, C, D の座標を求めよ。
- (2) 平行四辺形 $ABCD$ の面積を求めよ。
- (3) 原点 O から平行四辺形 $ABCD$ を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。 [2017]

2 $\triangle OAB$ において、 $OA=5$ 、 $OB=6$ 、 $AB=7$ とする。 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P 、辺 OB を $1:t$ に外分する点を Q 、辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) \overrightarrow{OR} を t 、 \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (3) \overrightarrow{OS} を t 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (4) 線分 OS の長さが4となる t の値を求めよ。 [2016]

3 $\triangle ABC$ の外心を O 、重心を G とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、
 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 5$ 、 $4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = 12\overrightarrow{OG}$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ を示せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ および $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。
- (3) $|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ。 [2015]

4 1辺の長さが1の正四面体 $OABC$ を考える。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし、線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とする。また、直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{OQ} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。さらに、 \overrightarrow{OQ} の大きさ $|\overrightarrow{OQ}|$ を求めよ。
- (2) \overrightarrow{OR} と \overrightarrow{RC} の大きさの比 $|\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RC}|$ を求めよ。
- (3) $\triangle OQR$ の面積を求めよ。 [2014]

5 $\triangle OAB$ において、 $OA = 1$ 、 $OB = AB = 2$ とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) $\angle AOB$ の二等分線上の点 P が $AP = BP$ を満たすとき、線分 AP の長さを求めよ。

[2011]

6 四面体 $OABC$ において、 $OA = OB = OC = 3$ 、 $AB = BC = CA = \sqrt{6}$ である。また、点 P は辺 AB を $x : 1 - x$ に内分し、点 Q は辺 OC を $y : 1 - y$ に内分する ($0 < x < 1$ 、 $0 < y < 1$)。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) \overrightarrow{PQ} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 、 x 、 y で表せ。
- (3) 2 点 P 、 Q の間の距離 PQ の最小値と、そのときの x 、 y の値を求めよ。 [2010]

■ 整数と数列 |||||

1 半径がそれぞれ a 、 b の円を C_a 、 C_b とする。 C_a 上に点 A 、 C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A 、 B を一致させ、 C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで、点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし、必要があれば、自然数 m 、 n の最大公約数を $\gcd(m, n)$ で表せ。

- (1) a 、 b を自然数とする。 C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき、 C_b は何周期回転しているか、 a 、 b を用いて表せ。
- (2) a 、 b を正の有理数とし、 $a = \frac{p}{q}$ 、 $b = \frac{s}{t}$ とおく。ここで p 、 q は互いに素な自然数とし、 s 、 t も互いに素な自然数とする。 C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき、 C_b は何周期回転しているか、 p 、 q 、 s 、 t を用いて表せ。
- (3) a 、 b は互いに素な自然数とする。 $k = 1, 2, \dots, a$ に対して、 C_b が k 周期回転したとき、点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{A_1, A_2, \dots, A_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。 [2019]

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を推測して、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) 不等式 $a_n > 1 - 10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。 [2017]

3 数列 $\{a_n\}$ を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i) $a_1 = 0, a_2 = 3$

(ii) 3 以上の自然数 n に対して、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n = a_{n-1} - 1$ であり、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n = a_{n-1} + 6$ である。

次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。 [2015]

4 実数 a, b, c に対して、3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(-1), f(0), f(1)$ が整数であるならば、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ は整数であることを示せ。
- (2) $f(2010), f(2011), f(2012)$ が整数であるならば、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ は整数であることを示せ。 [2011]

5 次の条件(ア)~(ウ)を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

- (ア) $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$ である。
- (イ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ はどれも自然数である。
- (ウ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ の中にはすべての自然数 k が現れ、その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)~(ウ)を満たし、すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, \overbrace{k, k, \dots, k}^{k \text{ 個}}, \dots$$

を $\{a_n\}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 項数 5 の数列で、数列 $\{p_n\}$ の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。
- (3) $\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。 [2010]

■ 確率 |||||

1 袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個、袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず、袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し、玉の色は確認せず、そのまま袋 B に入れ、よくかき混ぜて、袋 B から 2 個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

- (1) 袋 A から取り出された 3 個の玉が、赤玉 1 個と白玉 2 個である確率、白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。
- (3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき、袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。 [2018]

2 3 が書かれたカードが 10 枚, 5 が書かれたカードが 10 枚, 10 が書かれたカードが 10 枚, 全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき, 取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3, 5, 10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし, 取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

- (1) 操作が終了するまでに, カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。
- (2) 操作が終了するまでに, カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。
- (3) 操作が終了したときに, 取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。 [2016]

3 箱の中に 1 から 9 までの異なる整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚入っている。「箱からカードを 1 枚引き, カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を 3 回繰り返す。記録された 3 つの整数の最小値を m , 最大値を M とする。次の問いに答えよ。

- (1) $5 < m$ となる確率および $M < 5$ となる確率を求めよ。
- (2) $m \leq 5 \leq M$ となる確率を求めよ。
- (3) $k = 1, 2, \dots, 9$ に対して, $m \leq k \leq M$ となる確率を $p(k)$ とする。 $p(k)$ の最大値, 最小値を求めよ。 [2012]

4 数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で指定された長さを移動するものとする。 n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし, n は自然数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき, p_1, p_2 を求めよ。
- (2) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき, p_n を求めよ。
- (3) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 3 または負の向きに 1 移動するとき, p_n を求めよ。 [2011]

■ 論証 |||

1 多項式 $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ について、次の問いに答えよ。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

- (1) $Q(t) = P(t+1)$ とおく。多項式 $Q(t)$ の定数項、 t の係数および t^2 の係数は 0 であることを示せ。
- (2) $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが、 $(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。
- (3) 方程式 $P(x) = 0$ の整数解は 1 および -1 のみであることを示せ。 [2019]

2 次の問いに答えよ。

- (1) k, n は不等式 $k \leq n$ を満たす自然数とする。このとき、

$$2^{k-1} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \leq n^k k!$$
 が成り立つことを示せ。
- (2) 自然数 n に対して、 $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\frac{9}{19} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。 [2012]

■ 曲線 |||

1 t は $t > \frac{1}{2}$ を満たす実数とする。座標平面上に楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ が与えられている。点 $P(-1, -t)$ からこの楕円に引いた接線のうちで y 軸と平行でない接線を l 、その接点を $Q(a, b)$ とする。また、 x 軸、 y 軸および接線 l で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $Q(a, b)$ における接線 l の方程式は、 $ax + 4by = 1$ であることを示せ。
- (2) a, b を、それぞれ t を用いて表せ。
- (3) 面積 $S(t)$ を、 t を用いて表せ。
- (4) 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t}$ を求めよ。 [2017]

■ 極限 |||

1 一般項が $a_n = \frac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。
- (3) 2 以上の整数 k に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。 [2016]

■ 微分法 |||

1 a は $-2 < a < 2$ を満たす定数とし、関数 $f(x)$ を、 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + a \sin x \cos x}$ とす

る。次の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ において、 $f(x)$ を t と a を用いて表せ。また、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。
- (3) $a = -1$ と $a = 1$ の場合に、 $u = \sin x - \cos x$ において、置換積分法により定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を求めよ。 [2019]

2 a を $0 < a < 1$ を満たす実数として x の関数 $f(x) = ax - \log(1 + e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし必要があれば、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ が成り

立つことを用いてよい。

- (1) $M(a)$ を a を用いて表せ。
- (2) a の関数 $y = M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。
- (3) a の関数 $y = M(a)$ のグラフをかけ。 [2016]

3 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は、点 B, C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle CPQ$ の面積 S を、 x を用いて表せ。
- (2) 面積 S の最大値と、そのときの x の値を求めよ。
- (3) 線分 AQ の長さ L の最小値と、そのときの x の値を求めよ。 [2013]

4 平面上の 2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} はそれぞれの大きさが 1 であり、また平行でないとする。次の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ であるような実数 t に対して、不等式 $0 < |\vec{a} + t\vec{b}|^2 \leq (1+t)^2$ が成立することを示せ。
- (2) $t \geq 0$ であるような実数 t に対して $\vec{p} = \frac{2t^2\vec{b}}{|\vec{a} + t\vec{b}|^2}$ とおき、 $f(t) = |\vec{p}|$ とする。このとき、不等式 $f(t) \geq \frac{2t^2}{(1+t)^2}$ が成立することを示せ。
- (3) $f(t) = 1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。 [2013]

5 a を実数とし、 xy 平面上において、2 つの放物線

$$C: y = x^2, \quad D: x = y^2 + a$$

を考える。次の問いに答えよ。

- (1) p, q を実数として、直線 $l: y = px + q$ が C に接するとき、 q を p で表せ。
- (2) (1)において、直線 l がさらに D にも接するとき、 a を p で表せ。
- (3) C と D の両方に接する直線の本数を、 a の値によって場合分けして求めよ。

[2012]

■ 積分法 |||||

1 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x)$$

と定める。ただし、 $(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1}$ を示せ。

(2) $\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right)$ の和を求めよ。 [2018]

2 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x) = 1 - \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば、 $0 < x \leq 1$ のとき $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$ が成り

立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。 $-\frac{x^4}{4!} \leq f_1(x) - \cos x \leq \frac{x^4}{4!}$

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式 $-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leq f_{2m-1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべて

の自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。 [2015]

③ 自然数 n に対して、 $a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して、不等式 $\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| \leq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して、 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。 [2014]

④ 微分可能な関数 $f(x)$ が、すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$$

を満たし、さらに $f'(0) = 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。 [2013]

⑤ 次の問いに答えよ。

(1) 実数 $x \geq 0$ に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x) \leq x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を、 $a_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定めるとき、

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を、 $b_n = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定めるとき、

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。 [2012]

- 6 関数 $f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 2\pi - t & (\pi < t \leq 2\pi) \end{cases}$ に対して、次のように 2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ を $0 \leq x \leq 2\pi$ で定義する。

$$g(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t+x) dt, \quad h(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t+x) dt$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $g(x)$, $h(x)$ を求めよ。
- (2) x が $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲を動くとき、関数 $y = g(x) + h(x)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2011]

- 7 $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+e^{2t}} dt$ とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $\sqrt{1+e^{2t}} = u$ とおいて、 $F(x)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{F(x) - e^x\}$ を求めよ。 [2010]

■ 積分の応用 |||||

- 1 座標平面上の $x > 0$ の領域において、2 つの曲線 $C_1 : y = \frac{\log x}{x}$ と $C_2 : y = \frac{k}{x}$ を考える。ここで、 k は正の実数である。曲線 C_1 と曲線 C_2 はただ 1 つの交点をもつので、その x 座標を a とする。 a が $1 < a < e$ の範囲にあるとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。また、必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてもよい。

- (1) k の値の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C_1 , 曲線 C_2 , 直線 $x = 1$ および直線 $x = e$ によって囲まれる図形の面積 S を k を用いて表せ。
- (3) 面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ。 [2018]

2 $f(x) = xe^{1-x^2}$ とする。2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = x^k$ で囲まれた部分の面積を S_k とする。ただし、 k は自然数とする。次の問いに答えよ。必要があれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x^2} = 0$ が成り立つことを用いてよい。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の極値、グラフの凹凸と変曲点、および漸近線を求め、グラフの概形をかけ。
- (3) S_k を、 k を用いて表せ。
- (4) 次の条件(*)を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(*) すべての自然数 m に対して、 $4S_{2n-1} > 7S_{2m}$ が成り立つ。 [2017]

3 座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点を $A(a, b)$ とし、 $f(x) = (x-a)^2 + b$ とする。点 $B(0, -2)$ から放物線 $y = f(x)$ に引いた接線を l_1, l_2 とし、接点をそれぞれ $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ とする。ただし、 $p < q$ である。放物線 $y = f(x)$ と 2 直線 l_1, l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

- (1) 接線 l_1 の方程式と接点 P の座標、および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) 面積 S を b を用いて表せ。
- (3) 点 A が円周 C 上を動くとき、面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 (a, b) を求めよ。 [2015]

4 関数 $f(x) = (-4x^2 + 2)e^{-x^2}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) a を $a \geq 0$ となる実数とし、 $I(a) = \int_0^a e^{-x^2} dx$ とする。このとき、定積分 $\int_0^a x^2 e^{-x^2} dx$ を $a, I(a)$ を用いて表せ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$, x 軸, y 軸および直線 $x = 5$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2014]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

問題

座標平面上に点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, 0)$, $P(t, 0)$ がある。ただし, t は正の実数である。また, 線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線 $l: y = ax + b$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 l が正方形 $OABC$ の面積を二等分するとき, a を b を用いて表せ。
- (2) 直線 l が正方形 $OABC$ の面積を二等分し, さらに直角三角形 OAP の面積を二等分するとき, b を t を用いて表せ。
- (3) $t \rightarrow +0$ および $t \rightarrow \infty$ のときの(2)で求めた b の極限值をそれぞれ求めよ。[2018]

解答例

- (1) 正方形 $OABC$ の辺 OA , BC と直線 $l: y = ax + b$ との交点をそれぞれ Q, R とおくと, $Q(0, b)$, $R(-1, -a + b)$ となる。

ここで, l が正方形 $OABC$ の面積を二等分することより,

$$\frac{1}{2}(b - a + b) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2$$

すると, $-a + 2b = 1$ より, $a = 2b - 1$ ……①となる。

ただし, $0 \leq b \leq 1$ ……②かつ $0 \leq -a + b \leq 1$ ……③であり, ①③をまとめると②

と一致することより, 求める条件は, ①②より,

$$a = 2b - 1 \quad (0 \leq b \leq 1) \quad \text{……④}$$

- (2) 直線 l が正方形 $OABC$ および直角三角形 OAP の面積を二等分するとき,

- (i) 直角三角形 OAP と l が辺 OP 上で交わる場合

$a < 0$ から, ④より $0 \leq b < \frac{1}{2}$ となり, $OQ < \frac{1}{2}$ から条件に反する。

- (ii) 直角三角形 OAP と l が辺 AP 上で交わる場合

直線 AP の方程式は $x + ty = t$ となり, l と連立して,

$$x + t(ax + b) = t, \quad (at + 1)x = t(1 - b)$$

$at + 1 = 0$ のときは不成立なので, $x = \frac{t(1 - b)}{at + 1}$

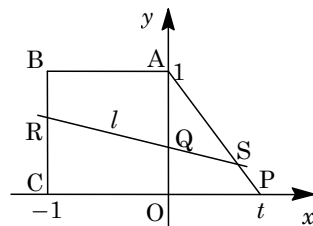
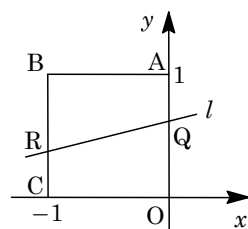
すると, 辺 AP と l の交点を S とおくと, ④より,

$$\triangle AQS = \frac{1}{2}(1 - b) \cdot \frac{t(1 - b)}{at + 1} = \frac{t(1 - b)^2}{2(at + 1)} = \frac{t(1 - b)^2}{2\{(2b - 1)t + 1\}}$$

条件より, $\frac{t(1 - b)^2}{2\{(2b - 1)t + 1\}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t \right)$ から, $2(1 - b)^2 = 2bt - t + 1$ となり,

$$2b^2 - 2(t + 2)b + t + 1 = 0 \quad \text{……⑤}$$

$f(b) = 2b^2 - 2(t + 2)b + t + 1$ とおくと, $f(0) = t + 1 > 0$, $f(1) = -t - 1 < 0$



すると、 $0 \leq b \leq 1$ を満たす⑤の解は、

$$b = \frac{t+2 - \sqrt{(t+2)^2 - 2(t+1)}}{2} = \frac{t+2 - \sqrt{t^2 + 2t + 2}}{2}$$

$$(3) \quad (2) \text{より, } \lim_{t \rightarrow +0} b = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t+2 - \sqrt{t^2 + 2t + 2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t+2)^2 - (t^2 + 2t + 2)}{2(t+2 + \sqrt{t^2 + 2t + 2})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{t+2 + \sqrt{t^2 + 2t + 2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

コメント

xy 平面上の図形に極限を絡めた問題です。詰め部分がやや面倒です。

問題

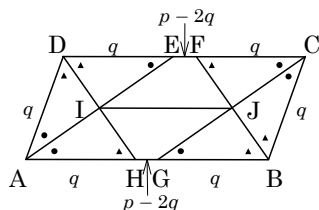
平行四辺形 ABCD において、辺 AB の長さを p 、辺 BC の長さを q とし、 $\theta = \angle BAD$ とおく。ただし $p > q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし、最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。
- (2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき、円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。 S を p, q および θ で表せ。
- (3) 平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2)で求めた S に対して $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

[2019]

解答例

- (1) $AB = p, BC = q (p > q)$ である平行四辺形 ABCD に対し、4 つの内角の二等分線を、AE, BF, CG, DH とする。そして、AE と DH の交点を I, BF と CG の交点を J とおく。すると、 $p \geq 2q$ のときは右上図、 $2q > p > q$ のときは右下図のような位置関係になる。



さて、点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くとき、直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。

- (i) 点 P が台形 ABJI の内部または辺上を動くとき

このとき、 r は P と直線 AB との距離になり、 r の最大値 R は線分 IJ 上の点と直線 AB の距離が対応する。

- (ii) 点 P が $\triangle AID$ の内部または辺上を動くとき

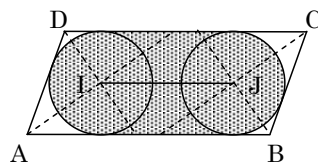
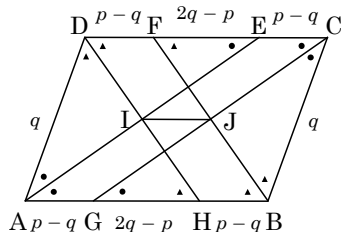
このとき、 r は P と直線 AD との距離となり、 r の最大値 R は点 I と直線 AD の距離が対応する。

(i)(ii)より、対称性を考えると、最大値 R を与える点 P の軌跡 L は線分 IJ である。

- (2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき、この円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。

すると、 $\theta = \angle BAD$ より $2R = q \sin \theta$ すなわち $R = \frac{1}{2}q \sin \theta$ となり、また $IJ = p - q$ から、

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot 2 + 2R \cdot IJ = \frac{1}{4} \pi q^2 \sin^2 \theta + (p - q)q \sin \theta$$



(3) 平行四辺形 ABCD の面積 T は, $T = pq \sin \theta$ となるので,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S}{T} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{4} \pi \cdot \frac{q^2 \sin^2 \theta}{pq \sin \theta} + \frac{(p-q)q \sin \theta}{pq \sin \theta} \right\} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{4} \pi \cdot \frac{q \sin \theta}{p} + \frac{p-q}{p} \right) \\ &= \frac{p-q}{p} \end{aligned}$$

コメント

図形と計量に極限の絡んだ問題です。(1)の設問が答えのみ, すなわち軌跡 L を図示するだけよければ素早くできるのですが, その根拠を丁寧に説明するのは面倒です。その 1 例を上を示しましたが, もっと詳しく書いた方がよかったかもしれません。というのは, (2)と(3)が付録のような感じですので。

問題

座標空間内の次のような4点 A, B, C, D を考える。 A の座標は $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ 、3点 B, C, D は、それぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸上にある。さらに、これらの4点は同一平面上にあり、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3点 B, C, D の座標を求めよ。
- (2) 平行四辺形 $ABCD$ の面積を求めよ。
- (3) 原点 O から平行四辺形 $ABCD$ を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

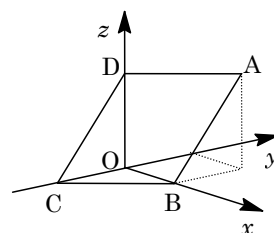
[2017]

解答例

- (1) $A(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ に対して、 $B(b, 0, 0)$ 、 $C(0, c, 0)$ 、 $D(0, 0, d)$ とおくと、四角形 $ABCD$ は平行四辺形より、 $\overline{AB} = \overline{DC}$ となり、

$$(b - \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6}) = (0, c, -d)$$

よって、 $b = \sqrt{2}$ 、 $c = -\sqrt{3}$ 、 $d = \sqrt{6}$ から、 $B(\sqrt{2}, 0, 0)$ 、 $C(0, -\sqrt{3}, 0)$ 、 $D(0, 0, \sqrt{6})$ である。



- (2) (1)から、 $\overline{DA} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$ 、 $\overline{DC} = (0, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$ となり、平行四辺形 $ABCD$ の面積 S は、

$$S = \sqrt{|\overline{DA}|^2 |\overline{DC}|^2 - (\overline{DA} \cdot \overline{DC})^2} = \sqrt{(2+3)(3+6) - (-3)^2} = 6$$

- (3) 点 H は平行四辺形 $ABCD$ を含む平面上にあるので、 s, t を実数として、

$$\overline{OH} = \overline{OD} + s\overline{DA} + t\overline{DC} = (\sqrt{2}s, \sqrt{3}(s-t), \sqrt{6}(1-t))$$

すると、 $\overline{OH} \perp \overline{DA}$ から $\overline{OH} \cdot \overline{DA} = 0$ となり、

$$2s + 3(s-t) = 0, \quad 5s - 3t = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $\overline{OH} \perp \overline{DC}$ から $\overline{OH} \cdot \overline{DC} = 0$ となり、

$$-3(s-t) - 6(1-t) = 0, \quad s - 3t + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より、} s = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{5}{6} \text{ となり、} \overline{OH} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

よって、 $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ となる。

コメント

空間図形の基本問題です。計算も複雑ではありません。

問題

$\triangle OAB$ において、 $OA=5$ 、 $OB=6$ 、 $AB=7$ とする。 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P 、辺 OB を $1:t$ に外分する点を Q 、辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。
- (2) \overrightarrow{OR} を t 、 \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (3) \overrightarrow{OS} を t 、 \vec{b} を用いて表せ。
- (4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。 [2016]

解答例

- (1) $OA=5$ 、 $OB=6$ 、 $AB=7$ である $\triangle OAB$ において、

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると、余弦定理から、

$$5^2 + 6^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 7^2, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{25+36-49}{2} = 6$$

- (2) $\triangle OAB$ と直線 PQ にメネラウスの定理を適用して、

$$\frac{OP}{PA} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BQ}{QO} = 1, \quad \frac{t}{1-t} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{t}{1} = 1$$

よって、 $\frac{AR}{RB} = \frac{1-t}{t^2}$ より、 $\overrightarrow{OR} = \frac{t^2}{t^2-t+1}\vec{a} + \frac{1-t}{t^2-t+1}\vec{b}$

- (3) \overrightarrow{OS} は \overrightarrow{OR} の OB への正射影ベクトルであり、 $|\vec{b}|=6$ から、

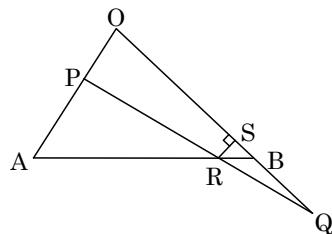
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \left(\overrightarrow{OR} \cdot \frac{\vec{b}}{6} \right) \frac{\vec{b}}{6} = \frac{1}{36(t^2-t+1)} \{ (t^2\vec{a} + (1-t)\vec{b}) \cdot \vec{b} \} \vec{b} \\ &= \frac{1}{36(t^2-t+1)} \{ 6t^2 + 36(1-t) \} \vec{b} = \frac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)} \vec{b} \end{aligned}$$

- (4) $|\overrightarrow{OS}|=4$ なので、(3)の結果から、 $\frac{|t^2-6t+6|}{6|t^2-t+1|} \cdot 6 = 4$ 、 $\frac{|t^2-6t+6|}{|t^2-t+1|} = 4$

$0 < t < 1$ のとき、 $t^2-6t+6 = t^2+6(1-t) > 0$ 、 $t^2-t+1 = t^2+(1-t) > 0$ から、

$$\frac{t^2-6t+6}{t^2-t+1} = 4, \quad t^2-6t+6 = 4(t^2-t+1), \quad 3t^2+2t-2=0$$

すると、 $0 < t < 1$ から、 $t = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$



コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(2)は分点ベクトル表示、(3)は $\overrightarrow{RS}\cdot\vec{b}=0$ を用いる解法でも、少し記述量が多くなるだけです。

問題

$\triangle ABC$ の外心を O , 重心を G とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし,
 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 5$, $4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = 12\overrightarrow{OG}$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ を示せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ および $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。
- (3) $|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ。

[2015]

解答例

- (1) $\triangle ABC$ の重心 G に対して $\overrightarrow{OG} = \vec{g}$ とおくと, $4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = 12\overrightarrow{OG}$ から,

$$4(\vec{g} - \vec{a}) + 3(\vec{g} - \vec{b}) + 5(\vec{g} - \vec{c}) = 12\vec{g}$$

よって, $4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ となる。

- (2) (1)から, $4\vec{a} + 3\vec{b} = -5\vec{c}$ となり, $|4\vec{a} + 3\vec{b}| = |5\vec{c}|$ から,

$$16|\vec{a}|^2 + 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 25|\vec{c}|^2$$

すると, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 5$ より, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{24}(25 - 16 - 9) \cdot 5^2 = 0$

同様にして, $3\vec{b} + 5\vec{c} = -4\vec{a}$ より, $9|\vec{b}|^2 + 30\vec{b} \cdot \vec{c} + 25|\vec{c}|^2 = 16|\vec{a}|^2$ となり,

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{30}(16 - 9 - 25) \cdot 5^2 = -15$$

また, $4\vec{a} + 5\vec{c} = -3\vec{b}$ より, $16|\vec{a}|^2 + 40\vec{c} \cdot \vec{a} + 25|\vec{c}|^2 = 9|\vec{b}|^2$ となり,

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{40}(9 - 16 - 25) \cdot 5^2 = -20$$

- (3) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ なので, (2)から,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OG}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{9}(25 + 25 + 25 + 0 - 30 - 40) = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

よって, $|\overrightarrow{OG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$ である。

コメント

数分程度で片付く平面ベクトルの基本問題です。

問題

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし、線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とする。また、直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{OQ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。さらに、 \overrightarrow{OQ} の大きさ $|\overrightarrow{OQ}|$ を求めよ。

(2) \overrightarrow{OR} と \overrightarrow{RC} の大きさの比 $|\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RC}|$ を求めよ。

(3) $\triangle OQR$ の面積を求めよ。

[2014]

解答例

(1) 辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし、線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とすることより、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1^2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

から、

$$|\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}|^2 = 1^2 + 4 \cdot 1^2 + 1^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 11$$

$$\text{よって、} |\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{4}|\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}| = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

(2) k を実数として、 $\overrightarrow{OR} = k\vec{c}$ とおくと、

$$\overrightarrow{QR} = k\vec{c} - \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{4}\{-\vec{a} - 2\vec{b} + (4k-1)\vec{c}\}$$

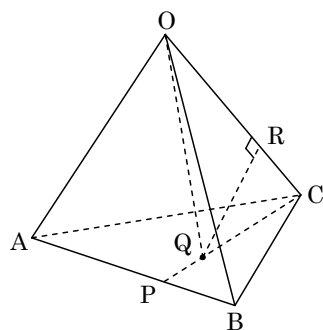
$$\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC} \text{ より、} \overrightarrow{QR} \cdot \vec{c} = 0 \text{ となり、} -\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + (4k-1) \cdot 1^2 = 0$$

すると、 $k = \frac{5}{8}$ より、 $|\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RC}| = k : 1-k = 5 : 3$ となる。

(3) (2) より、 $|\overrightarrow{OR}| = \frac{5}{8}|\vec{c}| = \frac{5}{8}$ となり、 $|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 - |\overrightarrow{OR}|^2} = \sqrt{\frac{11}{16} - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{19}}{8}$

ここで、 $\triangle OQR$ の面積を S とおくと、

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OR}| |\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{\sqrt{19}}{8} = \frac{5}{128}\sqrt{19}$$



コメント

正四面体を題材にした頻出パターンの問題です。計算量も少なめです。

問題

$\triangle OAB$ において、 $OA=1$ 、 $OB=AB=2$ とし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。
- (2) $\angle AOB$ の二等分線上の点 P が $AP=BP$ を満たすとき、線分 AP の長さを求めよ。

[2011]

解答例

- (1) $OA=1$ 、 $OB=AB=2$ から、余弦定理より、

$$2^2 = 1^2 + 2^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}$$

- (2) $OA:OB=1:2$ より、 AB と OP の交点は辺 AB を $1:2$ に内分することより、 k を定数として、

$$\overrightarrow{OP} = k(2\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{すると、} \overrightarrow{AP} = (2k-1)\vec{a} + k\vec{b}, \quad \overrightarrow{BP} = 2k\vec{a} + (k-1)\vec{b}$$

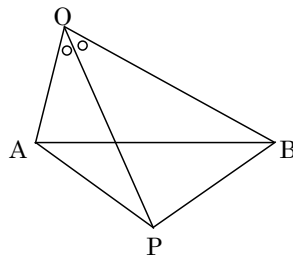
ここで、 $|\vec{a}|=1$ 、 $|\vec{b}|=2$ 、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$ なので、

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = (2k-1)^2 + k(2k-1) + 4k^2 = 10k^2 - 5k + 1$$

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = 4k^2 + 2k(k-1) + 4(k-1)^2 = 10k^2 - 10k + 4$$

条件より、 $AP=BP$ なので、 $10k^2 - 5k + 1 = 10k^2 - 10k + 4$ となり、 $k = \frac{3}{5}$

よって、 $|\overrightarrow{AP}|^2 = 10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 5 \cdot \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$ から、 $AP = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$



コメント

平面ベクトルに関するセンターレベルの計算問題です。

問題

四面体 $OABC$ において、 $OA = OB = OC = 3$ 、 $AB = BC = CA = \sqrt{6}$ である。また、点 P は辺 AB を $x : 1-x$ に内分し、点 Q は辺 OC を $y : 1-y$ に内分する ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$)。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) \overrightarrow{PQ} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 、 x 、 y で表せ。
- (3) 2点 P 、 Q の間の距離 PQ の最小値と、そのときの x 、 y の値を求めよ。 [2010]

解答例

- (1) 条件より、 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$ なので、 $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 6$

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 6$$

すると、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ から、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$

- (2) $AP : PB = x : 1-x$ 、 $OQ : QC = y : 1-y$ より、

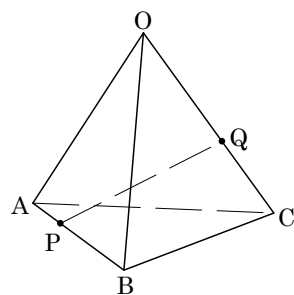
$$\overrightarrow{PQ} = y\vec{c} - \{x\vec{b} + (1-x)\vec{a}\} = (x-1)\vec{a} - x\vec{b} + y\vec{c}$$

- (3) 条件より $|\vec{c}| = 3$ 、(1)と同様にすると、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 6$

となり、これらの条件を(2)の結果に適用して、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= 9(x-1)^2 + 9x^2 + 9y^2 - 12x(x-1) - 12xy + 12y(x-1) \\ &= 6x^2 + 9y^2 - 6x - 12y + 9 \\ &= 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

よって、 $x = \frac{1}{2}$ 、 $y = \frac{2}{3}$ のとき、 PQ は最小値 $\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ をとる。



コメント

空間ベクトルの基本問題ですので、計算ミスは厳禁です。

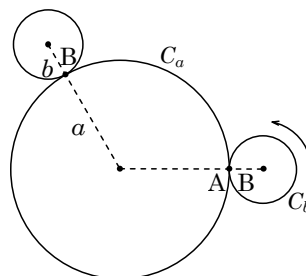
問題

半径がそれぞれ a, b の円を C_a, C_b とする。 C_a 上に点 A, C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A, B を一致させ、 C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで、点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし、必要があれば、自然数 m, n の最大公約数を $\text{gcd}(m, n)$ で表せ。

- (1) a, b を自然数とする。 C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき、 C_b は何周期回転しているか、 a, b を用いて表せ。
- (2) a, b を正の有理数とし、 $a = \frac{p}{q}, b = \frac{s}{t}$ とおく。ここで p, q は互いに素な自然数とし、 s, t も互いに素な自然数とする。 C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき、 C_b は何周期回転しているか、 p, q, s, t を用いて表せ。
- (3) a, b は互いに素な自然数とする。 $k = 1, 2, \dots, a$ に対して、 C_b が k 周期回転したとき、点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{A_1, A_2, \dots, A_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。 [2019]

解答例

- (1) まず、半径が a の円 C_a 上に点 A 、半径が b の円 C_b 上に点 B をとる。はじめに点 A と点 B を一致させ、 C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。そして、点 B が点 A に再び一致するとき、 C_b は m 周期回転し、同時に C_a のまわりを n 回転したとすると、



$$2\pi b \cdot m = 2\pi a \cdot n, \quad bm = an \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで、 a, b が自然数なので、 $g = \text{gcd}(a, b)$ として、
 $a = ga', b = gb'$ とおくと、 a' と b' は互いに素となり、 $\textcircled{1}$ より、

$$gb'm = ga'n, \quad b'm = a'n$$

すると、 m は a' の倍数となり、その最小数は $m = a' = \frac{a}{g} = \frac{a}{\text{gcd}(a, b)}$ である。

- (2) a, b が正の有理数のとき、既約分数で $a = \frac{p}{q}, b = \frac{s}{t}$ とおくと、 $\textcircled{1}$ より、

$$\frac{s}{t}m = \frac{p}{q}n, \quad qsm = ptn \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

ここで、 $g_1 = \text{gcd}(p, s), g_2 = \text{gcd}(q, t)$ とおくと、

$$p = g_1p', \quad s = g_1s', \quad q = g_2q', \quad t = g_2t'$$

そして、 p' と s' は互いに素、 q' と t' は互いに素となり、 $\textcircled{2}$ より、

$$g_1g_2q's'm = g_1g_2p't'n, \quad q's'm = p't'n$$

すると、 p' と q' も互いに素、 s' と t' も互いに素なので、 m は $p't'$ の倍数となり、その最小数は $m = p't' = \frac{pt}{g_1 g_2} = \frac{pt}{\gcd(p, s) \cdot \gcd(q, t)}$ である。

- (3) a, b が互いに素な自然数の場合、点 B が点 A に再び一致するとき、(1)より、 C_b は a 周期回転し、同時に C_a のまわりを b 回転している。

ここで、 $k=1, 2, \dots, a$ として、 C_b が k 周期回転したとき、点 B が一致する C_a 上の点を A_k とし、CA から測った CA_k への角を θ_k とおくと、

$$2\pi b \cdot k = a\theta_k, \quad \theta_k = 2\pi \cdot \frac{bk}{a}$$

さて、 bk ($k=1, 2, \dots, a$) を a で割った商を q_k 、余りを r_k とおくと、 $bk = aq_k + r_k$ ($0 \leq r_k \leq a-1$) となり、

$$\theta_k = 2\pi \cdot \frac{aq_k + r_k}{a} = 2\pi q_k + 2\pi \cdot \frac{r_k}{a} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

このとき、 $1 \leq i < j \leq a$ において、 $r_i = r_j$ と仮定すると、

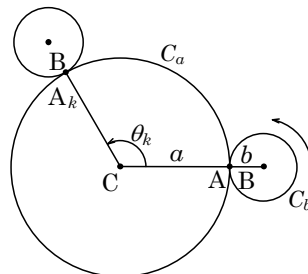
$$b(j-i) = a(q_j - q_i) + (r_k - r_j) = a(q_j - q_i)$$

すると、 $j-i$ は a の倍数となるが、 $1 \leq j-i \leq a-1$ より不適である。

よって、 $1 \leq i < j \leq a$ のとき、 $r_i \neq r_j$ となり、これより、

$$\{r_1, r_1, \dots, r_a\} = \{0, 1, \dots, a-1\}$$

したがって、 $\textcircled{3}$ から、 $\{A_1, A_2, \dots, A_a\}$ は C_a をちょうど a 等分する。



コメント

図形の絡んだ整数問題です。題材は有名な外サイクロイドです。ただ、(3)の後半の余りででの評価は、経験がないと難しいでしょう。

問題

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を推測して、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) 不等式 $a_n > 1 - 10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。 [2017]

解答例

- (1) $a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して、

$$a_2 = \frac{\frac{3}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 3} = \frac{3}{5}, \quad a_3 = \frac{\frac{9}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 3} = \frac{7}{9}, \quad a_4 = \frac{\frac{21}{9} + 1}{\frac{7}{9} + 3} = \frac{15}{17}, \quad a_5 = \frac{\frac{45}{17} + 1}{\frac{15}{17} + 3} = \frac{31}{33}$$

- (2) (1)より、 $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ と推測でき、この式を数学的帰納法によって証明する。

(i) $n = 1$ のとき $a_n = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$ より成立する。

(ii) $n = k$ のとき $a_k = \frac{2^k - 1}{2^k + 1}$ と仮定すると、

$$a_{n+1} = \frac{\frac{3(2^k - 1)}{2^k + 1} + 1}{\frac{2^k - 1}{2^k + 1} + 3} = \frac{3 \cdot 2^k - 3 + 2^k + 1}{2^k - 1 + 3 \cdot 2^k + 3} = \frac{4 \cdot 2^k - 2}{4 \cdot 2^k + 2} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1} + 1}$$

よって、 $n = k + 1$ のときも成立している。

(i)(ii)より、 $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ である。

- (3) $a_n > 1 - 10^{-18}$ とすると、 $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = 1 - \frac{2}{2^n + 1}$ より、

$$-\frac{2}{2^n + 1} > -10^{-18}, \quad 2^n + 1 > 2 \cdot 10^{18} \dots\dots\dots (*)$$

さて、自然数 n に対し $2^n = 2 \cdot 10^{18}$ となる場合はなく、(*)を $2^n > 2 \cdot 10^{18}$ として、

$$2^{n-1} > 10^{18}, \quad (n-1)\log_{10} 2 > 18, \quad n > \frac{18}{\log_{10} 2} + 1 = \frac{18}{0.3010} + 1 > 60.8$$

よって、求める最小の n は 61 である。

コメント

漸化式の基本問題です。推測→帰納法での証明という方針も問題文中に示されています。なお, (2)の推測に時間がかかるときは, たとえば分母だけを取り出した数列の階差数列が等比数列ということに着目する手もあります。

問題

数列 $\{a_n\}$ を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

- (i) $a_1 = 0, a_2 = 3$
- (ii) 3 以上の自然数 n に対して、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n = a_{n-1} - 1$ であり、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n = a_{n-1} + 6$ である。

次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。 [2015]

解答例

- (1) 条件より、 $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 3 - 1 = 2, a_4 = 2 - 1 = 1, a_5 = 1 - 1 = 0, a_6 = 0 + 6 = 6, a_7 = 6 - 1 = 5, a_8 = 5 - 1 = 4, a_9 = 4 - 1 = 3, a_{10} = 3 + 6 = 9$
- (2) (1)の結果から、 $a_1 = 0$ で、 k を自然数とし、以下のように推測できる。

$$a_{4k-2} = 3k, a_{4k-1} = 3k - 1, a_{4k} = 3k - 2, a_{4k+1} = 3k - 3 \dots\dots (*)$$

推測(*)が正しいことを、数学的帰納法を用いて証明する。

- (i) $k = 1$ のとき (1)より、成立している。
- (ii) $k \leq l$ のとき (*)が成立していると仮定する。

このとき、 $a_1 = 0$ から $a_{4l+1} = 3l - 3$ までの値は、 $3l$ 以下であり、しかも a_{4l+1} は $a_{4l-6} = a_{4(l-1)-2} = 3(l-1)$ と等しいので、

$$\begin{aligned} a_{4l+2} &= 3l - 3 + 6 = 3l + 3, & a_{4(l+1)-2} &= 3(l+1) \\ a_{4l+3} &= 3l + 3 - 1 = 3l + 2, & a_{4(l+1)-1} &= 3(l+1) - 1 \\ a_{4l+4} &= 3l + 2 - 1 = 3l + 1, & a_{4(l+1)} &= 3(l+1) - 2 \\ a_{4l+5} &= 3l + 1 - 1 = 3l, & a_{4(l+1)+1} &= 3(l+1) - 3 \end{aligned}$$

よって、 $k = l + 1$ のときも成立している。

- (i)(ii)より、すべての自然数 k に対して(*)は成立している。

したがって、 $a_{2015} = a_{4 \times 504 - 1} = 3 \times 504 - 1 = 1511$

- (3) 初項から第 201 項までの和を S_{201} とおくと、 $201 = 1 + 4 \times 50$ から、

$$\begin{aligned} S_{201} &= a_1 + \sum_{k=1}^{50} (a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} + a_{4k+1}) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{50} (3k + 3k - 1 + 3k - 2 + 3k - 3) = \sum_{k=1}^{50} (12k - 6) = 6 \sum_{k=1}^{50} (2k - 1) \\ &= 6 \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 - 50 \right) = 6 \cdot 50^2 = 15000 \end{aligned}$$

コメント

群数列の絡んだ漸化式の問題です。 a_1 を特別扱いして, a_2 から4項ずつのグループで考えていくところが複雑です。

問題

実数 a, b, c に対して、3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(-1), f(0), f(1)$ が整数であるならば、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ は整数であることを示せ。
- (2) $f(2010), f(2011), f(2012)$ が整数であるならば、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ は整数であることを示せ。 [2011]

解答例

- (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ に対して、条件より、 $f(0) = c$ は整数である。

また、条件より、 $f(1) = 1 + a + b + c$ 、 $f(-1) = -1 + a - b + c$ がともに整数なので、 k と l を整数として、

$$a + b = k \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad a - b = l \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } a = \frac{k+l}{2}, \quad b = \frac{k-l}{2} \text{ となり,}$$

$$f(x) = x^3 + \frac{k+l}{2}x^2 + \frac{k-l}{2}x + c = x^3 + \frac{k}{2}x(x+1) + \frac{l}{2}x(x-1) + c$$

これより、整数 n に対して、 $f(n) = n^3 + \frac{k}{2}n(n+1) + \frac{l}{2}n(n-1) + c$ と表すことができ、 $n(n+1)$ 、 $n(n-1)$ はともに連続する 2 整数の積となり、偶数である。

よって、すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数である。

- (2) まず、 $g(x) = f(x+2011)$ とおくと、

$$g(x) = (x+2011)^3 + a(x+2011)^2 + b(x+2011) + c$$

これより、 $g(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次関数となり、

$$g(-1) = f(2010), \quad g(0) = f(2011), \quad g(1) = f(2012)$$

すると、条件より、 $g(-1)$ 、 $g(0)$ 、 $g(1)$ が整数なので、(1) から、すべての整数 n に対して、 $g(n)$ は整数である。

ここで、 $x+2011=t$ とおくと、 $f(t) = g(t-2011)$ となる。

したがって、すべての整数 n に対して、 $g(n-2011)$ も整数となることから、 $f(n) = g(n-2011)$ は整数である。

コメント

(1) は有名問題です。次数下げという方法もありますが、上の解答例では、連立方程式の処理で証明しています。(2) は(1)の利用がポイントです。

問題

次の条件(ア)~(ウ)を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

- (ア) $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$ である。
 (イ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ はどれも自然数である。
 (ウ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ 中にはすべての自然数 k が現れ、その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)~(ウ)を満たし、すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, \overbrace{k, k, \dots, k}^{k \text{ 個}}, \dots$$

を $\{a_n\}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 項数 5 の数列で、数列 $\{p_n\}$ の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。

(3) $\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。

[2010]

解答例

(1) 条件より、数列 $\{p_n\}$ の各項は、 $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5$ を満たす自然数、さらにすべての自然数が現れ、1 の個数は 1 以上 3 以下、2 の個数は 2 以上 4 以下、3 の個数は 3 以上 5 以下、……である。

すると、この条件を満たす $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ は、

$$(1, 1, 1, 2, 2), (1, 1, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 2), \\ (1, 2, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 3, 3)$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を下のように群に分ける。

$$1 \mid 2, 2 \mid 3, 3, 3 \mid \dots \mid k, k, \dots, k \mid \dots$$

すると、第 n 群の末項までの項数は、 $1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

ここで、 $210 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21$ から、 a_{210} は第 20 群の末項となり、 $a_{210} = 20$ である。

(3) $\sum_{i=1}^{50} p_i$ が最小の値をとるのは、 $50 = 3+4+5+6+7+8+9+8$ より、数列 $\{p_n\}$ は、

p_1 から順に、1 が 3 個、2 が 4 個、3 が 5 個、4 が 6 個、5 が 7 個、6 が 8 個、7 が 9 個、そして 8 が 8 個並んだものである。すると、その和は、

$$\sum_{i=1}^{50} p_i = \sum_{k=1}^7 k(k+2) + 8 \times 8 = \sum_{k=1}^7 (k^2 + 2k) + 64 \\ = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 + 64 = 260$$

コメント

題意が把握しにくい問題です。上の解は、設定された 2 つの数列の関係を考えることなく、単に解いただけです。

問題

袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個、袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず、袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し、玉の色は確認せず、そのまま袋 B に入れ、よくかき混ぜて、袋 B から 2 個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

- (1) 袋 A から取り出された 3 個の玉が、赤玉 1 個と白玉 2 個である確率、白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。
- (3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき、袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。 [2018]

解答例

- (1) 赤玉 2 個と白玉 5 個が入っている袋 A から 3 個の玉を同時に取り出したとき、赤玉 1 個と白玉 2 個である確率を p_2 、白玉 3 個である確率を p_3 とすると、

$$p_2 = \frac{{}_2C_1 \times {}_5C_2}{{}_7C_3} = \frac{4}{7}, \quad p_3 = \frac{{}_5C_3}{{}_7C_3} = \frac{2}{7}$$

- (2) 袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し、赤玉が 2 個入っている袋 B に入れた後、袋 B から 2 個の玉を取り出したとき、それが 2 個とも白玉である確率を q とする。

このとき、袋 A から袋 B には、赤玉 1 個と白玉 2 個、または白玉 3 個を取り出して入れた場合しかないので、

$$q = p_2 \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} + p_3 \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{2}{35} + \frac{3}{35} = \frac{1}{7}$$

- (3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であり、しかも袋 B に白玉が残っているのは、袋 A から白玉 3 個を取り出し袋 B に入れた場合なので、その確率は、

$$p_3 \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{35}$$

これより、袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき、袋 B に白玉が残っている条件付き確率は、(2)から、

$$\frac{3}{35} \div \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

コメント

基本的な確率の問題です。ミスに注意するだけです。

問題

3 が書かれたカードが 10 枚, 5 が書かれたカードが 10 枚, 10 が書かれたカードが 10 枚, 全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき, 取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3, 5, 10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし, 取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

- (1) 操作が終了するまでに, カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。
- (2) 操作が終了するまでに, カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。
- (3) 操作が終了したときに, 取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。

[2016]

解答例

- (1) 3 のカード, 5 のカード, 10 のカードがそれぞれ 10 枚ずつ, 全部で 30 枚のカードが箱の中にあリ, この中から 1 枚ずつカードを取り出していき, 取り出したカードの数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。

さて, 1 回取り出したとき操作が終了するのは, 10 のカードを取り出した場合だけより, その確率は, $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ である。

- (2) 2 回取り出したとき操作が終了するのは, 次の場合がある。

- (i) 1 回目が 3 のカードで, 2 回目が 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\frac{10}{30} \cdot \frac{10}{29} = \frac{10}{3 \cdot 29}$ である。

- (ii) 1 回目が 5 のカードで, 2 回目が 5 または 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\frac{10}{30} \cdot \frac{9+10}{29} = \frac{19}{3 \cdot 29}$ である。

- (i)(ii)より, 2 回取り出したとき操作が終了する確率は, $\frac{10}{3 \cdot 29} + \frac{19}{3 \cdot 29} = \frac{1}{3}$

- (3) まず, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する場合を考える。

- (i) 数の合計が 10 で操作が終了する場合

1 回目が 10, または 1 回目と 2 回目がともに 5 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30} + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{38}{3 \cdot 29}$$

- (ii) 数の合計が 11 で操作が終了する場合

1 回目, 2 回目, 3 回目の数が, 3→3→5 または 3→5→3 または 5→3→3 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{10}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} = \frac{45}{14 \cdot 29}$$

(i)(ii)より、数の合計が 10 または 11 で操作が終了する確率は、

$$\frac{38}{3 \cdot 29} + \frac{45}{14 \cdot 29} = \frac{667}{3 \cdot 14 \cdot 29} = \frac{23}{42}$$

すると、カードを多くとも 4 回取り出せば、操作は必ず終了するので、操作が終了したときに、取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率は、

$$1 - \frac{23}{42} = \frac{19}{42}$$

コメント

確率の基本的な問題です。(3)は、取り出した回数で場合分けをしても構いませんが、数値計算がややこしくなります。