

2020 入試対策
過去問ライブラリー

岡山大学

文系数学22か年

1998 - 2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には、1998年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお、複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

本書の構成

- 1 本書は2部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
 - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
 - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
 - (3) 1つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
 - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
 - (5) 出題の流れをウェブサイトを入試直前に確認する。

注 「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF版とKindle版のリンクについて

本書では、対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号、解答編の **問題** の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について、PDF版とKindle版に違いがあります。

- 【PDF版】 リンクが無効の場合、PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。
- 【Kindle版】 現状では、Kindle アプリで、リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	25
関 数	26
微分と積分	37
図形と式	63
図形と計量	69
ベクトル	73
整数と数列	86
確 率	107
論 証	122

分野別問題一覧

関数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

■ 関数 |||||

1 角 α は $0 \leq \alpha \leq \pi$ を満たし、 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ とする。角 θ は $\alpha \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くものとする。 $f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta - \cos \theta + 2$ とおく。また、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ。
- (2) t の値の範囲を求めよ。
- (3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。
- (4) $f(\theta)$ の最小値を求めよ。 [2018]

2 k を実数とし、 x についての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。
- (2) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解 α をもち、 α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。 [2018]

3 a を実数とする。 x を 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a - 1 \leq x \leq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。
- (2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。
- (3) a が実数全体を動くとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。 [2017]

4 関数 $f(x)$ を、 $f(x) = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2$ と定める。ここで、 $[x]$ は $n \leq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

- (1) $f(x) \geq x$ であることを示せ。
- (2) $f(x+1) = f(x) + 1$ であることを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq 2$ において $y = f(x)$ のグラフを描け。
- (4) $0 \leq a < 1$ とするとき、 $\int_a^{a+1} f(x) dx$ を求めよ。 [2014]

5 a, b を実数とし, $a \neq 0$ とする。 x についての 3 次方程式

$$ax^3 + (a+1)x^2 + (b+1)x + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。

- (1) $a = b = 1$ のとき, $\textcircled{1}$ の実数解を求めよ。
- (2) $\textcircled{1}$ がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を a, b を用いて表せ。 [2010]

6 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ とする。 次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき, $\cos \theta - \sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき, $2 \cos(2\theta - \frac{\pi}{3})$ の値を求めよ。
- (3) $2 \cos(2\theta - \frac{\pi}{3}) \leq -1$ のとき, $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ の最大値と最小値を求めよ。 [2008]

7 次の問いに答えよ。

- (1) x の方程式 $(x - \frac{1}{x})^2 - 3(x - \frac{1}{x}) + 2 = 0$ の実数解をすべて求めよ。
- (2) $t = x - \frac{1}{x}$ とするとき, $(x - a)^2 + (\frac{1}{x} + a)^2$ を a と t の式で表せ。
- (3) 座標平面上の円 $C_1 : (x - a)^2 + (y + a)^2 = r^2$ と関数 $y = \frac{1}{x}$ のグラフ C_2 が, ちょうど 2 個の共有点をもつとき, 円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。 [2006]

8 xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を, A は点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。 B は点 $(-1, 0)$ を A と同時に出発し, 時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。
- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。
- (3) $n = 7$ とする。 A が, B を通り y 軸に平行な直線の左側 (点 $(-2, 0)$ を含む側) にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。 [2003]

9 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。 x についての 2 次方程式

$$(1 - \cos \theta)x^2 + 4(\sin^2 \theta)x + (1 + \cos \theta) = 0$$

について, 次の問いに答えよ。

- (1) この方程式が, ただ 1 つの解をもつような θ の値と, そのときの解を求めよ。
- (2) この方程式が, -1 以上の解をもつような θ の値の範囲を求めよ。 [1999]

■ 微分と積分 |||||

1 a を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y = 2x^2 + 4x + 3$ と直線 $L: y = -2ax - a^2$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) C と L が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a の値が(1)の範囲にあるとする。 C と L で囲まれる図形の面積 S を最大にする a とそのときの S の値を求めよ。 [2019]

2 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A(t, f(t))$ における接線を L とする。ただし $0 < t < 1$ とする。曲線 C と接線 L の接点 A 以外の共有点を B とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 B の座標を t を用いて表せ。
- (2) 2 点 A, B の y 座標の差の絶対値が最大となる t の値を求めよ。 [2018]

3 a を実数とする。座標平面内の曲線 $C: y = x^3 - ax$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 5$ のとき、 C の接線で点 $(1, 0)$ を通るものの方程式を求めよ。
- (2) C の接線で点 $(1, 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

4 関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
- (3) 不等式 $-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$ を証明せよ。 [2016]

〔5〕 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは、上に凸であり、原点および点 $Q(a, 0)$ を通るものとする。ただし、 $0 < a < 1$ である。関数 $y = x^2$ のグラフを C 、関数 $y = f(x)$ のグラフを D とし、 C と D の共有点のうち、原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m 、 D の接線の傾きを n とするとき、 $(2a-1)m = 2an$ が成り立つとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を x と a の式で表せ。
- (2) $0 \leq x \leq a$ の範囲で、曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ の $0 < a < 1$ における最大値を求めよ。 [2015]

〔6〕 C を xy 平面上の放物線 $y = x^2$ とする。不等式 $y < x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して、それぞれの接点の x 座標を α 、 β ($\alpha < \beta$) とする。また、2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、等式 $\int_p^q (x-p)^2 dx = \frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

- (1) 点 P の座標 (a, b) を α 、 β を用いて表せ。
- (2) $S = \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ。
- (3) 点 P が曲線 $y = x^3 - 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を動くとき、 $(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに、 S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。 [2013]

〔7〕 $0 \leq a \leq 1$ に対して、 $f(a) = \int_0^1 |(x-a)(x-3+a)| dx$ と定める。 $f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

〔8〕 p を定数とする。 $f(x) = x^3 + x^2 + px + 1$ とおく。 $y = f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるといふ。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) p の範囲を求めよ。
- (2) 2 つの接点の x 座標を α 、 β とする。 $(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ。
- (3) 2 つの接線の y 軸との交点を A 、 B とするとき、線分 AB の長さを p を用いて表せ。
- (4) 2 つの接線の間距離が $\frac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。 [2011]

9 a を正の実数とする。放物線 $P: y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線を l_1 とし、点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また、 l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $B(b, b^2)$ とする。さらに、点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし、 l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $C(c, c^2)$ とする。

- (1) $b + c = 2a$ であることを示せ。
 (2) 放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。 S を a を用いて表し、 S が最小となるときの S と a の値を求めよ。 [2010]

10 次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $x \leq 0$ において、つねに $x^3 + 4x^2 \leq ax + 18$ が成り立っているものとする。このとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。
 (2) (1) で求めた範囲にある a のうち、最大のものを a_0 とするとき、不等式

$$x^3 + 4x^2 \leq a_0x + 18$$

を解け。 [2009]

11 xy 平面上に、円 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 、放物線 $C_2: y = x^2 + 5$ がある。また点 $P(x_1, y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。
 (2) 点 $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの、 y_1 の値の範囲を求めよ。
 (3) 円 C_1 の接線で、その接点の y 座標が負であり、放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。
 (4) (3) の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2008]

12 関数 $y = x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $A(\alpha, \alpha^2)$ と $B(\beta, \beta^2)$ をとる。ただし、 $\alpha < \beta$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ であることを示せ。
 (2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは、線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また、その最大値を l を用いて表せ。 [2007]

13 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

と定め、 $g(x) = \int_0^1 f(t-x) dt$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) $g(1)$ の値を求めよ。
- (3) $y = g(x)$ のグラフの概形を描け。 [2006]

14 関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ の極大値が 5、極小値が 1 となるとき、定数 a, b の値を求めよ。 [2005]

15 曲線 $y = x^2$ を C とし、 C 上の異なる 2 点を $A(a, a^2)$ 、 $B(b, b^2)$ とする。A を通り、A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り、B における C の接線と直交する直線を m とする。

- (1) l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。
- (2) l と m が直交するように点 A, B が動くとき、交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。 [2003]

16 座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y = \sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ $(2, 0)$ を P とし、他の 1 つを Q とする。

- (1) 点 Q の座標を求めよ。
- (2) 円 C の劣弧 PQ と放物線 $y = \sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。
ただし、劣弧 PQ とは、点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち、長さが短い方の弧である。 [2002]

17 関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 7x + 4 & (x \leq 1 \text{ の場合}) \\ x & (x > 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) 実数 t に対して $F(t)$ を、 $F(t) = \int_t^{t+1} f(x) dx$ で定義するとき、関数 $F(t)$ の増減を調べ、そのグラフの概形を描け。また、 $F(t)$ の最小値を求めよ。 [2001]

18 xy 平面上の曲線 $C: y = |2x - 1| - x^2 + 2x + 1$ について次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の概形を描け。
- (2) 直線 $l: y = ax + b$ が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの a, b の値を求めよ。
- (3) (2)の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。 [2000]

19 円 $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ 上の点 P から放物線 $y = \frac{x^2}{2} + 1$ に異なる 2 本の接線を引くことができるものとし、その 2 つの接点を Q, R とする。このとき線分 QR とこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点 P の座標と、そのときの面積を求めよ。 [1999]

20 $f(x) = -ax(x - 2b)$ とする。ただし、 $a > 0, b > 0$ とする。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = ax^2$ とで囲まれた部分の面積 S を a と b で表せ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の頂点 P が直線 $3x + 2y = 6$ の上にあるとき、面積 S の最大値を求めよ。 [1998]

21 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x$ とする。ただし a は定数とする。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) $x \geq 0$ のとき、常に $f(x) \geq 0$ となるような a の範囲を求めよ。 [1998]

■ 図形と式 |||||

1 等式 $|x - 3| + |y| = 2(|x + 3| + |y|)$ を満たす xy 平面上の点 (x, y) からなる図形を T とする。

- (1) 点 (a, b) が T 上にあれば、点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ。
- (2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。 [2013]

2 a を正の定数とし、 x, y に関する次の不等式を考える。

$3y \geq 5x \cdots \cdots \textcircled{1}, 4y \geq 7a \cdots \cdots \textcircled{2}, x - y \geq 3 - a \cdots \cdots \textcircled{3}$

- (1) $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を同時に満たす点 (x, y) のなす領域を xy 平面上に図示せよ。
- (2) $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ を同時に満たす実数の組 (x, y) が存在するような a の範囲を求めよ。 [2012]

3 三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は、1点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま、座標平面上の曲線 $K: y = \frac{1}{x}$ 上に3つの頂点 $A(a, \frac{1}{a})$, $B(b, \frac{1}{b})$, $C(c, \frac{1}{c})$ をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 三角形 ABC の垂心は、曲線 K 上にあることを示せ。
- (2) 三角形 ABH の垂心は、点 C に一致することを示せ。 [2009]

4 座標平面上に2点 $A(1, 0)$, $B(-b, 0)$ をとる。ただし、 $b > 0$ とする。点 A を中心とし原点 $O(0, 0)$ を通る円 C_1 と、点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く。円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第1象限にあるものを P とし、三角形 POA において $\angle POA$ を θ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の x 座標を b の式で表せ。
- (2) $\sin \theta$ を b の式で表せ。
- (3) 点 B と直線 AP の距離が $\frac{20}{9}$ であるとき、 b の値と $\sin \theta$ の値を求めよ。 [2006]

5 2つの単位ベクトル \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 2次関数 $f(x) = |x\vec{a} + \vec{b}|^2$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ。
- (2) θ が $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲を動くとき、放物線 $y = f(x)$ の頂点が描く軌跡を求めよ。
- (3) (2)で求めた軌跡と x 軸が囲む図形の面積を求めよ。 [2005]

6 放物線 $y = x^2$ 上に2点 $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ をとる。放物線の A における接線を l とする。線分 AB 上に A , B と異なる点 P をとる。 P を通り y 軸に平行な直線が l と交わる点を Q とし、放物線と交わる点を R とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) l の方程式を求めよ。
- (2) $QR : RP = AP : PB$ であることを示せ。 [2004]

■ 図形と計量 |||||

1 x は $0 < x < 1$ を満たす実数とする。三辺の長さが $1, 1, 2x$ の二等辺三角形の内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) r と R を x を用いて表せ。
- (2) $\frac{r}{R}$ を最大にする x とそのときの $\frac{r}{R}$ の値を求めよ。 [2019]

2 3 辺の長さが $AB = 3, BC = 5, CA = 7$ の三角形 ABC がある。辺 AB, BC, CA 上の点 P, Q, R を, $AP = BQ = CR = x$ となるようにとる。ただし, $0 < x < 3$ である。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\angle ABC$ の値を求めよ。
- (2) 三角形 BPQ の面積を x の式で表せ。
- (3) 三角形 PQR の面積が最小となるときの x の値を求めよ。 [2015]

3 1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある。この板から, 1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし, 板の厚さは無視する。

- (1) 図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり, これを単位として切り出すとする。ただし, 平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき, 正四面体の体積が最大となるような x と, そのときの体積を求めよ。
- (2) 図 2 ように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり, 切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような x を求めよ。

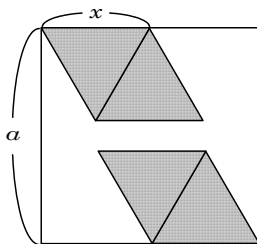


図1

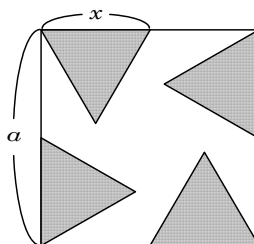


図2

[2001]

■ ベクトル |||||

1 一辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において、辺 OA の中点を D 、辺 OB を $1:3$ に内分する点を E 、辺 OC を $1:3$ に内分する点を F とする。 $\triangle DEF$ の重心を G とし、直線 OG と $\triangle ABC$ の交点を H とする。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \overrightarrow{OG} を \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} 、 \overrightarrow{OC} を用いて表せ。
- (2) 線分 AH の長さを求めよ。 [2019]

2 xyz 空間内に 3 点 $A(2, 0, 1)$ 、 $B(0, 3, -1)$ 、 $C(0, 3, -3)$ がある。線分 BC 上の点を $P(0, 3, s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし、 t は $0 < t < 1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし、球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1 、球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 球面 K の方程式を求めよ。
- (2) S_1 を s と t の式で表せ。
- (3) 点 P は線分 BC 上で固定し、点 Q は線分 AP 上を動くものとする。 $S_1 + S_2$ が最大値をとる t を s の式で表せ。
- (4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに $S_1 + S_2$ が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。 [2018]

3 座標平面の原点を $O(0, 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面上の異なる 3 点 P, Q, R が、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{RQ} + |\overrightarrow{OR}|^2 - \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ を満たしているとする。このとき $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ}$ となることを示せ。
- (2) 点 Q の座標を $(3, 4)$ とし、点 R は $|\overrightarrow{OR}| = 1$ を満たしているとする。さらに、 $|\overrightarrow{OP}| \leq 1$ を満たすすべての点 P に対して、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{RQ} + |\overrightarrow{OR}|^2 - \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$ が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。 [2017]

4 座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ がある。 O と異なる点 $P(s, t, 0)$ に対し、直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u, v, 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 2つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。
- (2) s, t をそれぞれ u, v を用いて表せ。
- (3) 点 P が xy 平面内の直線 $ax + by = 1$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) 上を動くとき、対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。 [2016]

5 四面体 $OABC$ において、 AB の中点を P , PC の中点を Q , OQ を $m:n$ に内分する点を R とする。ただし、 $m > 0$, $n > 0$ とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおいて以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{OR} , \overrightarrow{OS} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , m, n を用いて表せ。
- (3) $\frac{AR}{RS}$ を m, n を用いて表せ。 [2014]

6 四角形 $ABCD$ は平行四辺形ではないとし、辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

- (1) 線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。
- (2) 線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ。 [2012]

7 平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。この平面上の点 P が、 $2|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) P の軌跡が円となることを示せ。
- (2) (1)の円の中心を C とするとき、 \overrightarrow{OC} を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} で表せ。
- (3) O との距離が最小となる(1)の円周上の点を P_0 とする。 A, B が条件

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + 5\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

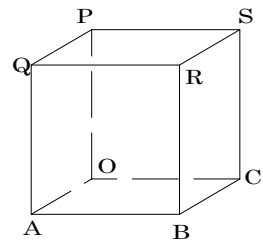
を満たすとき、 $\overrightarrow{OP_0} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ となる s, t の値を求めよ。 [2011]

8 三角錐 ABCD において、 $AB = AC = AD = 3$ 、 $BC = CD = DB = 2$ とする。また、辺 BC を 1:3 に内分する点を E とする。このとき、三角形 ADE に対して次の問いに答えよ。

- (1) 辺 DE, AE の長さを求めよ。
- (2) 三角形 ADE の面積を求めよ。

[2000]

9 辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D、辺 BC の中点を E、辺 CS の中点を F、辺 PS の中点を G、辺 PQ の中点を H とする。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) ベクトル \vec{OE} を 3 つのベクトル \vec{d} , \vec{f} , \vec{g} で表せ。ただし、 $\vec{d} = \vec{OD}$, $\vec{f} = \vec{OF}$, $\vec{g} = \vec{OG}$ とする。
- (2) 5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。
- (3) 五角形 DEFGH の面積を求めよ。
- (4) 辺 BR を 3:1 の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし、五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。

[1999]

■ 整数と数列 |||||

1 a, b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) x_6, x_7 を a, b を用いて表せ。
- (2) $a = 2$ とする。 $x_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ。

[2019]

2 自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3}) = R(2^n)$ となることを示せ。
- (2) $R(2^{2017})$ を求めよ。
- (3) 自然数 m が $R(2^{2017}m + 2^{29}) = 5$ を満たすとき、 $R(m)$ の値を求めよ。

[2017]

3 複素数 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\omega^2 + \omega^4$, $\omega^5 + \omega^{10}$ の値を求めよ。
- (2) n を正の整数とすると、 $\omega^n + \omega^{2n}$ の値を求めよ。
- (3) n を正の整数とすると、 $(\omega + 2)^n + (\omega^2 + 2)^n$ が整数であることを証明せよ。

[2016]

4 数列 $\{a_n\}$ は、関係式 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとする。 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[2015]

5 数列 $\{a_n\}$ が、 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) n に関する数学的帰納法で、 $a_n > 0$ であることを証明せよ。
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) a_n を求めよ。

[2014]

6 以下の問いに答えよ。

- (1) 整数 x, y が $25x - 31y = 1$ を満たすとき、 $x - 5$ は 31 の倍数であることを示せ。
- (2) $1 \leq y \leq 100$ とする。このとき、不等式 $0 \leq 25x - 31y \leq 1$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

[2013]

7 数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている。

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ a_n + 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_{10} を求めよ。
- (2) n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて、 a_{n+4} を a_n で表せ。
- (3) a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ。

[2011]

8 自然数 m, n に対して, 自然数 $m \diamond n$ を次のように定める。

\diamond	1	2	3	4	5	...
1	4	6	8	10	12	...
2	9	13	17	21	25	...
3	16	22	28	34	40	...
4	25	33	41	49	57	...
5	36	46	56	66	76	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

\diamond	n
m	$m \diamond n$

例えば, $1 \diamond 1 = 4$, $1 \diamond 2 = 6$, $2 \diamond 1 = 9$, $4 \diamond 2 = 33$, $5 \diamond 3 = 56$, $1 \diamond 6 = 14$, $6 \diamond 1 = 49$ である。

- (1) 数列 $8 \diamond 1, 8 \diamond 2, 8 \diamond 3, \dots$ の初項 $8 \diamond 1$ から第 25 項 $8 \diamond 25$ までの和を求めよ。
- (2) $m \diamond n = 474$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。 [2010]

9 p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し, その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。 [2008]

10 k が 4 より大きい自然数であるとき, $\triangle OA_0A_1$ を, $\angle O = \left(\frac{360}{k}\right)^\circ$, $\angle A_0 = 90^\circ$ で, 面積が 1 であるような直角三角形とする。また, $n=2, 3, \dots, k$ に対して, 点 A_n を, $\triangle OA_{n-1}A_n$ が $\triangle OA_{n-2}A_{n-1}$ と相似であるように定める。 $r = \cos \angle O$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OA_0A_1, \triangle OA_1A_2, \dots, \triangle OA_{k-1}A_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。
- (2) $\angle O = 45^\circ$ のときの S の値と $\angle O = 30^\circ$ のときの S の値を比較し, どちらが大きいかわか答えよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とする。 [2007]

11 座標平面の原点を O とし、4 点 $(1, 3)$, $(-1, 3)$, $(-1, -3)$, $(1, -3)$ を頂点とする長方形の周を R とする。 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し、 $(1, 0)$ を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置を P_n とし、 OP_n と OP_{n+2} のなす角度を θ_n とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $\cos \theta_0, \cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3$ を求めよ。
- (2) すべての n に対して、 $\cos \theta_{n+k} = \cos \theta_n$ が成り立つような自然数 k のうち、もっとも値が小さいものを求めよ。
- (3) θ_n が最小となるときの P_n の座標をすべて求めよ。 [2007]

12 自然数 n, k が $n \geq k$ を満たすとき、 ${}_nC_k$ は二項係数を表す。次の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $a > b > c$ と等式 ${}_aC_3 + {}_bC_2 + {}_cC_1 = 29$ をともに満たす 3 つの自然数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ。
- (2) n を自然数とする。次の等式を証明せよ。 ${}_{n+3}C_3 = {}_{n+2}C_3 + {}_{n+1}C_2 + {}_nC_1 + 1$
- (3) 自然数 a, b, c, d は $a > b > c > d$ を満たすとする。このとき、次の不等式を証明せよ。 ${}_aC_3 > {}_bC_3 + {}_cC_2 + {}_dC_1$ [2006]

13 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = n^2 + 1$ で定め、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = 3n^2 + 3$ で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を $\{c_n\}$ とする。たとえば、初めの 3 項は、 $c_1 = 2, c_2 = 5, c_3 = 6$ となっている。このうち、 $\{a_n\}$ から来る項は $c_1 = a_1, c_2 = a_2$ 、 $\{b_n\}$ から来る項は $c_3 = b_1$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) c_4, c_5, c_6 を求めよ。
- (2) $n = 3k, 3k - 1, 3k - 2$ (k は自然数) の場合に分けて考えることにより、 a_n は 3 の倍数ではなく、したがって a_n は $\{b_n\}$ のどの項とも一致しないことを示せ。
- (3) $\{c_n\}$ において、 $\{b_n\}$ から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを、背理法を用いて示せ。 [2004]

14 r, s, t は 0 でない定数とする。数列 $\{a_n\}$ は条件 $ra_{n+1} + sa_n + t = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしているとし、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。

- (1) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。
- (2) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_2 < a_3, a_4 = 13 + 3\sqrt{3}$ であるとき、一般項 a_n を求めよ。
- (3) (2) の条件の下で、 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$ を求めよ。 [2003]

15 k を自然数の定数とする。自然数 n に対して、 $S_n = |n-1| + |n-2| + \dots + |n-k|$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) S_n を求めよ。
- (2) S_n の最小値と、そのときの n の値を求めよ。 [2002]

16 n を自然数とする。 $f(x)$ は 2 次関数で、曲線 $y = f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, (n, n) を通るとする。

- (1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。
- (2) この関数 $f(x)$ について、 $S = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ の値を n を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた S の値が整数であるためには、 $n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

17 数列 $\{a_n\}$ は、初項 $a_1 = 6$ で漸化式 $a_{n+1} - a_n = 2n + 4$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たす。また、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{1}{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定める。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の第 $n+1$ 項 b_{n+1} から第 $2n$ 項 b_{2n} までの和を求めよ。 [2000]

18 数列 $\{a_n\}$ は初項と漸化式 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義されている。

- (1) 一般項 a_n を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。 [1998]

■ 確率 |||||

1 1つのサイコロを3回振り、出た目を順に u, v, w とする。そして座標平面上の2点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ を

$$a_1 = u, a_2 = 0, b_1 = v \cos \frac{(w+2)\pi}{12}, b_2 = v \sin \frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点 $(0, 0)$ とする。

- (1) $\triangle OAB$ が正三角形となる確率を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ が大きさ $\frac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。 [2016]

2 n を2以上の自然数とし、1から n までの自然数 k に対して、番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ、箱の中から2枚のカードを同時に引くとき、次の問いに答えよ。

- (1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。
- (2) 引いたカード2枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。
- (3) 引いたカード2枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。
- (4) 引いたカード2枚の番号が異なっている確率を p_n とする。不等式 $p_n \geq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。 [2015]

3 A と B が続けて試合を行い、先に3勝した方が優勝するというゲームを考える。1試合ごとに A が勝つ確率を p, B が勝つ確率を $q, 引き分ける確率を $1-p-q$ とする。$

- (1) 3試合目で優勝が決まる確率を求めよ。
- (2) 5試合目で優勝が決まる確率を求めよ。
- (3) $p = q = \frac{1}{3}$ としたとき、5試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。
- (4) $p = q = \frac{1}{2}$ としたとき、優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。

[2014]

4 正 n 角形の頂点を A_0, A_1, \dots, A_{n-1} とする。頂点 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} から 2 点を取り、それらと A_0 を頂点とする三角形を作る。このようにして得られる三角形の総数を a_n 、そのうちの二等辺三角形の総数を b_n とする。ただし正三角形は二等辺三角形とみなす。このとき以下の問いに答えよ。

(1) a_6 および b_6 を求めよ。

(2) 整数 $m \geq 3$ に対し、 $S = \sum_{k=3}^m a_k$ を求めよ。

(3) b_9 を求めよ。

[2012]

5 空間内に点 $O(0, 0, 0)$ と点 $A(2, 2, 2)$ がある。点 P は O から出発し、1 回につき x 軸, y 軸, z 軸いずれか 1 つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1) P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2) さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し, 4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し, 6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3) (2) と同じルールで、さいころを 6 回投げて P が点 $B(1, 1, 1)$ を通って A に到達する確率を求めよ。

[2011]

6 男性 M_1, \dots, M_4 の 4 人と女性 F_1, \dots, F_4 の 4 人が、横一列に並んだ座席 S_1, \dots, S_8 に座る場合を考える。

(1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2) (1) の座り方の中で、 M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか。

(3) (1) の座り方の中で、 M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか。 [2010]

7 1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき、単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として、次の問いに答えよ。

- (1) さいころを何回か振って、点 P の回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。
 - (2) さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。 $P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。
 - (3) さいころを 2 回振ったところ、1 回目は 4 の目、2 回目は 3 の目が出た。そのとき、三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような、3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。
- [2009]

8 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードを各 1 枚、数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び、左から順に横一列に並べる。このとき、先頭のカードの数字が 0 でなければ、カードの数字の列は、選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について、次の問いに答えよ。

- (1) 0, 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ、計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。
 - (2) 用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。
- [2007]

9 次の問いに答えよ。

- (1) 英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊取り出すとき、英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が、 $\frac{7}{40}$ となる。このとき、日本語の本は何冊あるか答えよ。
 - (2) 各組が 12 枚ずつからなる赤、青、黄色の 3 組のカードがあり、各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき、数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。
- [2005]

10 定数 a は、 $0 < a < 1$ を満たすものとする。空間に、次の 3 つのグループからなる 12 点をとる。

$$X = \{(1, a, 0), (1, -a, 0), (-1, a, 0), (-1, -a, 0)\}$$

$$Y = \{(0, 1, a), (0, 1, -a), (0, -1, a), (0, -1, -a)\}$$

$$Z = \{(a, 0, 1), (-a, 0, 1), (a, 0, -1), (-a, 0, -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は、

(ア) 同一グループ内の 2 点となる場合

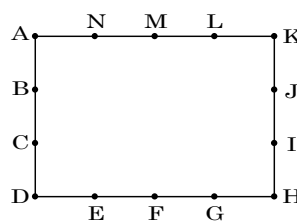
(イ) 異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) (ア), (イ) それぞれの場合の数を求めよ (答のみでよい)。
 - (2) (ア) の場合、2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また、その距離を求めよ。
 - (3) (イ) の場合、2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また、その距離を求めよ。
 - (4) (2) で求めた距離と (3) で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ。また、そのとき選んだ 2 点の位置ベクトルのなす角を θ として、 $\cos \theta$ の値を求めよ。ただし、位置ベクトルは原点 O を基準とする。
- [2004]

11 図のように、A から N までの 14 個の点が、縦の長さが 3、横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか。
- (2) これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか。



[2002]

■ 論証 |||||

1 実数 x_i, a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$) は, 以下の条件(い)~(に)を満たすものとする。

(い) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$

(ろ) $i=1, 2, 3$ に対して $a_i \geq 0, b_i \geq 0, c_i \geq 0$

(は) $i=1, 2, 3$ に対して $a_i + b_i + c_i = 1$

(に) $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 1$

実数 y_i ($i=1, 2, 3$) を

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \quad y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad y_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1) $y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3$ を示せ。

(2) $y_1 \geq x_1$ を示せ。

(3) $y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2$ を示せ。

[2009]

分野別問題と解答例

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

角 α は $0 \leq \alpha \leq \pi$ を満たし、 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ とする。角 θ は $\alpha \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くものとする。 $f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta - \cos \theta + 2$ とおく。また、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ。
- (2) t の値の範囲を求めよ。
- (3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。
- (4) $f(\theta)$ の最小値を求めよ。

[2018]

解答例

(1) $0 \leq \alpha \leq \pi$ のとき、 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ から $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ となるので、

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2) $t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ に対して、 $\alpha \leq \theta \leq \pi$ より、

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで、 $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\cos \frac{\pi}{2} < \cos \alpha < \cos \frac{\pi}{4}$ となり、 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ から、

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①②より、 $\sin \frac{5}{4}\pi \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ となり、(1)から、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad -1 \leq \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

よって、 $-1 \leq t \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} \dots\dots\dots \textcircled{3}$ である。

(3) $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1 = t^2 - 1$ より、

$$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta - \cos \theta + 2 = (t^2 - 1) - t + 2 = t^2 - t + 1$$

(4) (3)より、 $f(\theta)$ を、 $t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ と変形すると、 $t = \frac{1}{2}$ は③を満たす。

よって、 $f(\theta)$ は、 $t = \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。

コメント

基本的な三角関数の計算問題です。

問題

k を実数とし、 x についての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。
 (2) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解 α をもち、 α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。 [2018]

解答例

- (1) 実数 k に対し、2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ ……①が虚数解をもつ条件は、
 $D = k^2 - 4(3k - 4) < 0$, $k^2 - 12k + 16 < 0$

$$\text{よって、} 6 - 2\sqrt{5} < k < 6 + 2\sqrt{5} \text{ ……②}$$

- (2) まず、 x^4 を $x^2 - kx + 3k - 4$ で割り、余りを $r(x)$ とおくと、

$$x^4 = (x^2 - kx + 3k - 4)(x^2 + kx + k^2 - 3k + 4) + r(x)$$

$$\text{ただし、} r(x) = (k^3 - 6k^2 + 8k)x - (3k - 4)(k^2 - 3k + 4)$$

さて、①の虚数解 α に対し、 $\alpha^2 - k\alpha + 3k - 4 = 0$ であることに注意すると、

$$\alpha^4 = r(\alpha) = (k^3 - 6k^2 + 8k)\alpha - (3k - 4)(k^2 - 3k + 4)$$

すると、 α^4 が実数となる条件は、 k が実数であることより、

$$k^3 - 6k^2 + 8k = 0, \quad k(k - 2)(k - 4) = 0$$

よって、求める k の値は、②より、 $k = 2, 4$ である。

コメント

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは、整式の除法の計算だけです。

問 題

a を実数とする。 x を 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a - 1 \leq x \leq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。
- (2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。
- (3) a が実数全体を動くとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。 [2017]

解答例

(1) $f(x) = x^2 + ax + 1 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 1$ の区間 $a - 1 \leq x \leq a + 1$ における最小値を $m(a)$ とすると、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$$

よって、 $m\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{16}$ である。

(2) (i) $-\frac{a}{2} < a - 1$ ($a > \frac{2}{3}$) のとき

$$m(a) = f(a - 1) = (a - 1)^2 + a(a - 1) + 1 = 2a^2 - 3a + 2$$

(ii) $a - 1 \leq -\frac{a}{2} \leq a + 1$ ($-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3}$) のとき

$$m(a) = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + 1$$

(iii) $-\frac{a}{2} > a + 1$ ($a < -\frac{2}{3}$) のとき

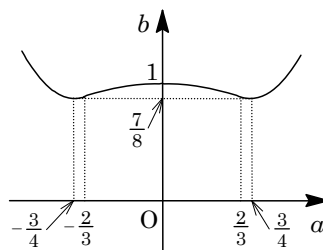
$$m(a) = f(a + 1) = (a + 1)^2 + a(a + 1) + 1 = 2a^2 + 3a + 2$$

(3) (2) より、 $m(a)$ は、 $m(a) = 2\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}$ ($a > \frac{2}{3}$)

$$m(a) = -\frac{a^2}{4} + 1 \quad \left(-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3}\right)$$

$$m(a) = 2\left(a + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \quad \left(a < -\frac{2}{3}\right)$$

これより、 $b = m(a)$ のグラフをかくと右図のようになり、 $m(a)$ の最小値は $m\left(\pm \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}$ である。



コメント

2 次関数の最大・最小に関する基本的な問題です。(2)では図を省きましたが、グラフの軸と区間との位置関係で場合分けをしています。

問題

関数 $f(x)$ を、 $f(x) = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2$ と定める。ここで、 $[x]$ は $n \leq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

- (1) $f(x) \geq x$ であることを示せ。
- (2) $f(x+1) = f(x) + 1$ であることを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq 2$ において $y = f(x)$ のグラフを描け。
- (4) $0 \leq a < 1$ とするとき、 $\int_a^{a+1} f(x) dx$ を求めよ。 [2014]

解答例

(1) $f(x) - x = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2 - x = (x - [x]) - (x - [x])^2$

ここで、 $t = x - [x]$ とおくと、 $0 \leq t < 1$ となり、

$$f(x) - x = t - t^2 = t(1-t) \geq 0$$

よって、 $f(x) \geq x$ (等号は x が整数のとき成立)

(2) $n \leq x < n+1$ のとき、 $[x] = n$ 、 $[x+1] = n+1$ となり、

$$\begin{aligned} f(x+1) &= [x+1] + 2(x+1 - [x+1]) - (x+1 - [x+1])^2 \\ &= n+1 + 2(x+1 - n-1) - (x+1 - n-1)^2 \\ &= n + 2(x-n) - (x-n)^2 + 1 = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2 + 1 \\ &= f(x) + 1 \end{aligned}$$

(3) (i) $0 \leq x < 1$ のとき $[x] = 0$ より、

$$f(x) = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1$$

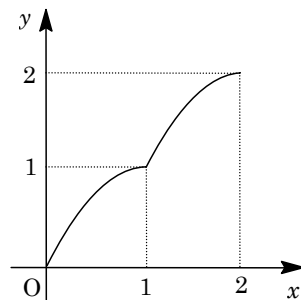
(ii) $1 \leq x < 2$ のとき (2) より、 $f(x) = f(x-1) + 1$

すると、 $0 \leq x-1 < 1$ より、

$$f(x) = -(x-1-1)^2 + 1 + 1 = -(x-2)^2 + 2$$

(iii) $x = 2$ のとき (1) より、 $f(x) = 2$

(i)~(iii) より、 $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(4) $0 \leq a < 1$ のとき、 $\int_1^{a+1} f(x) dx = \int_0^a \{f(x) + 1\} dx = \int_0^a f(x) dx + a$ なので、

$$\begin{aligned} \int_a^{a+1} f(x) dx &= \int_a^1 f(x) dx + \int_1^{a+1} f(x) dx \\ &= \int_a^1 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx + a = \int_0^1 f(x) dx + a \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 + a = a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

コメント

ガウス記号のついた関数が題材で、誘導つきであるものの慣れないとやや難しめと思われます。(4)については、(3)のグラフから面積を対応させて計算していますが、内容的には置換積分となっています。文系では範囲外ですが。

問題

a, b を実数とし、 $a \neq 0$ とする。 x についての 3 次方程式

$$ax^3 + (a+1)x^2 + (b+1)x + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。

- (1) $a = b = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ の実数解を求めよ。
- (2) $\textcircled{1}$ がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を a, b を用いて表せ。 [2010]

解答例

(1) 方程式 $ax^3 + (a+1)x^2 + (b+1)x + b = 0$ ($a \neq 0$) $\cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、 $a = b = 1$ のとき、

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0, (x+1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$x^2 + x + 1 = 0$ は実数解をもたないので、 $\textcircled{1}$ の実数解は $x = -1$ である。

(2) まず、 $\textcircled{1}$ より、 $(x+1)(ax^2 + x + b) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

ここで、 $\textcircled{2}$ より、 $f(x) = ax^2 + x + b$ おくと、 $\textcircled{1}$ がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつのは、次の 2 つの場合がある。

(i) $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち、その一方が $x = -1$ であるとき

$$D = 1 - 4ab > 0, f(-1) = a - 1 + b = 0$$

よって、 $ab < \frac{1}{4}, a + b = 1$

(ii) $f(x) = 0$ が $x \neq -1$ である重解をもつとき

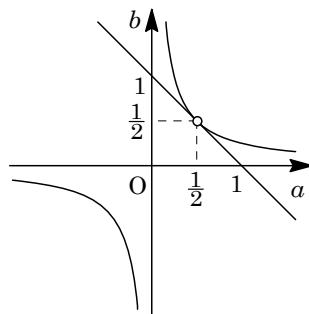
$$D = 1 - 4ab = 0, f(-1) = a - 1 + b \neq 0$$

よって、 $ab = \frac{1}{4}, a + b \neq 1$

(i)(ii) より、 ab 平面上で図示すると、右図のようになる。

よって、求める条件は、 $a \neq 0$ を考え合わせて、

$$a + b = 1, ab = \frac{1}{4}, (a, b) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (a, b) \neq (0, 1)$$



コメント

私大の入試によく見かける問題です。条件がやや複雑なので、まとめる際に、図を用いています。

問題

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、 $\cos \theta - \sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、 $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。
- (3) $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$ のとき、 $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ の最大値と最小値を求めよ。 [2008]

解答例

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、 $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{5}$ より、 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$

さて、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より、 $\cos \theta - \sin \theta < 0$ となり、

$$\cos \theta - \sin \theta = -\sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} = -\sqrt{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

(2) (1)より、 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{5}$ であり、

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = -\frac{3}{5}$$

すると、 $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos 2\theta \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin 2\theta \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{5}$

(3) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より、 $\frac{2}{3}\pi \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi$ のもとで、 $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$ の解は、

$$\frac{2}{3}\pi \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi \dots\dots\dots (*)$$

そこで、 $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ と変形すると、(*)のとき、最大値は $\sqrt{3}$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$)、最小値は 0 ($\theta = \frac{5}{6}\pi$) となる。

コメント

三角関数の式変形の問題です。なお、3つの問いの関係は考えずに解きました。

問題

次の問いに答えよ。

- (1) x の方程式 $(x - \frac{1}{x})^2 - 3(x - \frac{1}{x}) + 2 = 0$ の実数解をすべて求めよ。
- (2) $t = x - \frac{1}{x}$ とするとき、 $(x - a)^2 + (\frac{1}{x} + a)^2$ を a と t の式で表せ。
- (3) 座標平面上の円 $C_1 : (x - a)^2 + (y + a)^2 = r^2$ と関数 $y = \frac{1}{x}$ のグラフ C_2 が、ちょうど 2 個の共有点をもつとき、円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。 [2006]

解答例

(1) $(x - \frac{1}{x})^2 - 3(x - \frac{1}{x}) + 2 = 0$ より、 $(x - \frac{1}{x} - 1)(x - \frac{1}{x} - 2) = 0$
 $x - \frac{1}{x} - 1 = 0, x - \frac{1}{x} - 2 = 0$

よって、 $x^2 - x - 1 = 0, x^2 - 2x - 1 = 0$ から、 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 1 \pm \sqrt{2}$

(2) $(x - a)^2 + (\frac{1}{x} + a)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a(x - \frac{1}{x}) + 2a^2$
 $= (x - \frac{1}{x})^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} - 2a(x - \frac{1}{x}) + 2a^2$
 $= t^2 - 2at + 2a^2 + 2$

(3) $C_1 : (x - a)^2 + (y + a)^2 = r^2 \dots\dots ①$ と $C_2 : y = \frac{1}{x} \dots\dots ②$ の共有点の x 座標は、

$$(x - a)^2 + (\frac{1}{x} + a)^2 = r^2$$

(2) より、 $t^2 - 2at + 2a^2 + 2 - r^2 = 0 \dots\dots ③$

ここで、 $t = x - \frac{1}{x}$ から、 $x^2 - tx - 1 = 0$ となり、その判別式は、

$$D = t^2 + 4 > 0$$

よって、どんな t の値に対しても、 $x \neq 0$ は 2 個ずつ対応する。すなわち、①と②が 2 個の共有点をもつ条件は、③が重解をもつことと同値である。③の判別式は、

$$D/4 = a^2 - (2a^2 + 2 - r^2) = 0, r^2 = a^2 + 2$$

よって、 $r > 0$ より、 $r = \sqrt{a^2 + 2}$

コメント

xt 平面上に $t = x - \frac{1}{x}$ のグラフを描くと、1 個の t の値に対して 2 個の x の値が対応することは明らかです。ただし、文系の範囲ではありませんが。

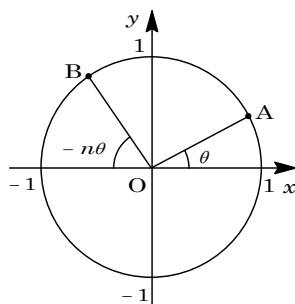
問 題

xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を、 A は点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。 B は点 $(-1, 0)$ を A と同時に出発し、時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。
- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。
- (3) $n = 7$ とする。 A が、 B を通り y 軸に平行な直線の左側 (点 $(-2, 0)$ を含む側) にある範囲を求めて、 C 上に図示せよ。 [2003]

解答例

- (1) A と B が 1 回目に出会う条件は $\theta = \pi - n\theta$, 2 回目に出会う条件は $\theta = \pi - n\theta + 2\pi$ であり、同様に考えると、 k 回目に出会う条件は $\theta = \pi - n\theta + 2(k-1)\pi$, すなわち $2(k-1)\pi = (n+1)\theta - \pi \cdots \cdots \textcircled{1}$ である。



ここで、 $0 < \theta \leq 2\pi$ より、

$$-\pi < (n+1)\theta - \pi \leq (2n+1)\pi$$

$$\textcircled{1} \text{ から、 } -\pi < 2(k-1)\pi \leq (2n+1)\pi, \quad \frac{1}{2} < k \leq n + \frac{3}{2}$$

よって、 $k = 1, 2, \dots, n+1$ より、 A と B は $n+1$ 回出会う。

- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うとき、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ なので、 $\textcircled{1}$ より、

$$2(k-1)\pi = (n+1)\frac{\pi}{2} - \pi, \quad n = 4(k-1) + 1$$

よって、 $n \geq 2$ から、 n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

- (3) $0 < \theta \leq 2\pi$ とし、 $A(\cos \theta, \sin \theta)$, $B(\cos(\pi - 7\theta), \sin(\pi - 7\theta))$ とおくことができ、条件より、 $\cos \theta < \cos(\pi - 7\theta)$ である。

$$\cos \theta < -\cos 7\theta, \quad \cos 7\theta + \cos \theta < 0, \quad 2 \cos 4\theta \cos 3\theta < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $\cos 4\theta = 0$ の解は、

$$\theta = \frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$$

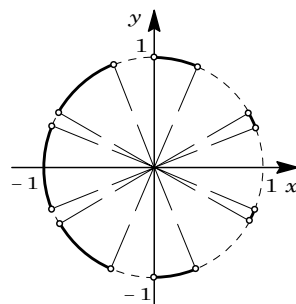
$\cos 3\theta = 0$ の解は、

$$\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

さて、 $\theta = 2\pi$ は②を満たさないことから、不等式②の解は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\pi < \theta < \frac{1}{6}\pi, \quad \frac{3}{8}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{5}{8}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi \\ \frac{7}{8}\pi < \theta < \frac{9}{8}\pi, \quad \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{8}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{13}{8}\pi \\ \frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{15}{8}\pi \end{aligned}$$

以上より、求める点 A の範囲を図示すると、右図の実線部となる。



コメント

(3)は不等式②を解き図示するだけですが、たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが、あまりにも繁雑すぎるため、弧度法に切り換えました。

問 題

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。 x についての 2 次方程式

$$(1 - \cos \theta)x^2 + 4(\sin^2 \theta)x + (1 + \cos \theta) = 0$$

について、次の問いに答えよ。

(1) この方程式が、ただ 1 つの解をもつような θ の値と、そのときの解を求めよ。

(2) この方程式が、 -1 以上の解をもつような θ の値の範囲を求めよ。 [1999]

解答例

(1) $(1 - \cos \theta)x^2 + 4(\sin^2 \theta)x + (1 + \cos \theta) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$

条件より、 $\textcircled{1}$ の判別式 $D/4 = 4\sin^4 \theta - (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) = 0$

$$4\sin^4 \theta - \sin^2 \theta = 0, \quad \sin^2 \theta(2\sin \theta + 1)(2\sin \theta - 1) = 0$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0 < \sin \theta < 1$ なので、 $\sin \theta = \frac{1}{2}$

よって、 $\theta = 30^\circ$

このとき、 $\textcircled{1}$ の重解は、 $x = \frac{-2\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = -2(1 + \cos \theta) = -2 - \sqrt{3}$

(2) $\textcircled{1}$ の左辺を $f(x)$ とおくと、放物線 $y = f(x)$ の軸は、

$$x = \frac{-2\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = -2(1 + \cos \theta)$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0 < \cos \theta < 1$ なので、 $-2(1 + \cos \theta) < -2$

したがって、 $f(x) = 0$ すなわち $\textcircled{1}$ は、 -1 以上に 2 つの解をもつ場合はないので、

$\textcircled{1}$ が -1 以上の解をもつ条件は $f(-1) \leq 0$ となる。

$$(1 - \cos \theta) - 4\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \leq 0, \quad 2\sin^2 \theta - 1 \geq 0$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0 < \sin \theta < 1$ なので、 $\sin \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって、 $45^\circ \leq \theta < 90^\circ$

コメント

(2) の題意は、少なくとも 1 つの解が -1 以上ということなので、解の個数が 1 個のときと 2 個のときで場合分けをしようと、まず考えました。ところが、軸に注目すると、2 個の場合はありませんでした。

問題

a を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y = 2x^2 + 4x + 3$ と直線 $L: y = -2ax - a^2$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) C と L が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a の値が(1)の範囲にあるとする。 C と L で囲まれる図形の面積 S を最大にする a とそのときの S の値を求めよ。 [2019]

解答例

- (1) 放物線 $C: y = 2x^2 + 4x + 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$ と直線 $L: y = -2ax - a^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$ を連立して、
 $2x^2 + 4x + 3 = -2ax - a^2$, $2x^2 + 2(a+2)x + a^2 + 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$

C と L が異なる 2 点で交わることより、 $\textcircled{3}$ の判別式 $D > 0$ となり、

$$(a+2)^2 - 2(a^2 + 3) > 0, \quad a^2 - 4a + 2 < 0$$

よって、 $2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$ となる。

- (2) $\textcircled{3}$ の解 $x = \frac{-a-2 \pm \sqrt{-a^2 + 4a - 2}}{2}$ を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とお

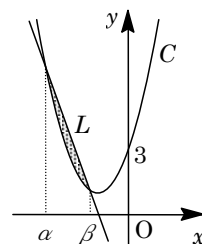
くと、 C と L で囲まれる図形の面積 S は、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{(-2ax - a^2) - (2x^2 + 4x + 3)\} dx$$

$$= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= -2 \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3} (\sqrt{-a^2 + 4a - 2})^3 = \frac{1}{3} (\sqrt{-(a-2)^2 + 2})^3$$

よって、 S は $a = 2$ のとき、最大値 $\frac{1}{3}(\sqrt{2})^3 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。



コメント

定積分と面積についての最頻出の基本問題です。

問題

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A(t, f(t))$ における接線を L とする。ただし $0 < t < 1$ とする。曲線 C と接線 L の接点 A 以外の共有点を B とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 B の座標を t を用いて表せ。
- (2) 2点 A, B の y 座標の差の絶対値が最大となる t の値を求めよ。 [2018]

解答例

(1) $f(x) = x^3 - 3x$ に対して、 $C: y = f(x)$ ……①上の点 $A(t, f(t))$ における接線 L の方程式は、 $f'(x) = 3x^2 - 3$ より、

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t), \quad y = (3t^2 - 3)x - 2t^3 \dots\dots\dots②$$

①②を連立すると、 $x^3 - 3x = (3t^2 - 3)x - 2t^3$ となり、

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0, \quad (x - t)^2(x + 2t) = 0$$

すると、 A 以外の共有点 B の x 座標は $x = -2t$ より、 $B(-2t, -8t^3 + 6t)$ となる。

(2) 2点 A, B の y 座標の差の絶対値を d とおくと、

$$d = |t^3 - 3t - (-8t^3 + 6t)| = |9t^3 - 9t| = 9|t(t+1)(t-1)|$$

$0 < t < 1$ より、 $t(t+1)(t-1) < 0$ となり、

$$d = -9(t^3 - t)$$

すると、 $d' = -9(3t^2 - 1)$ から、 $0 < t < 1$ にお

ける d の増減は右表のようになる。

t	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
d'		+	0	-	
d		↗		↘	

よって、 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき d は最大となる。

コメント

微分の応用についての基本事項の確認問題です。

問題

a を実数とする。座標平面内の曲線 $C: y = x^3 - ax$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 5$ のとき、 C の接線で点 $(1, 0)$ を通るものの方程式を求めよ。
- (2) C の接線で点 $(1, 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

解答例

- (1) $C: y = x^3 - ax$ ……①に対して、 $a = 5$ のとき $y = x^3 - 5x$ となる。

すると、 $y' = 3x^2 - 5$ から、接点 $(t, t^3 - 5t)$ における接線の方程式は、

$$y - (t^3 - 5t) = (3t^2 - 5)(x - t), \quad y = (3t^2 - 5)x - 2t^3 \dots\dots\dots②$$

ここで、②が点 $(1, 0)$ を通ることより、 $0 = 3t^2 - 5 - 2t^3$ となり、

$$2t^3 - 3t^2 + 5 = 0, \quad (t+1)(2t^2 - 5t + 5) = 0$$

ここで、 $2t^2 - 5t + 5 = 0$ は、判別式 $D = -15 < 0$ から実数解をもたない。

よって、 $t = -1$ となり、②に代入すると、接線の方程式は $y = -2x + 2$ である。

- (2) (1)と同様にすると、 $y' = 3x^2 - a$ から、接線の方程式は、

$$y = (3t^2 - a)x - 2t^3$$

点 $(1, 0)$ を通ることより、 $2t^3 - 3t^2 + a = 0, \quad -2t^3 + 3t^2 = a \dots\dots\dots③$

ここで、 $f(t) = -2t^3 + 3t^2$ とおくと、

$$f'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$$

すると、 $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	...	0	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$		↘	0	↗	1
					↘

そこで、点 $(1, 0)$ を通る C の接線が 3 本存

在する条件は、方程式③が異なる 3 つの実数解をもつことに対応するので、求める a の値の範囲は、 $0 < a < 1$ である。

コメント

微分の応用についての基本的で頻出の問題です。

問題

関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
- (3) 不等式 $-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$ を証明せよ。

[2016]

解答例

- (1) $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ に対し、

$$f'(x) = 24x^2 - 6$$

$$= 6(2x+1)(2x-1)$$

これより、 $f(x)$ の増減は右表のようにな

x	...	$-\frac{1}{2}$...	$\frac{1}{2}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

り、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。

したがって、 $f(x) = 0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。

- (2) $\theta = \frac{5\pi}{9}$ とおき、 $a = \cos \theta$ のとき、

$$f(a) = 8a^3 - 6a - 1 = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 1$$

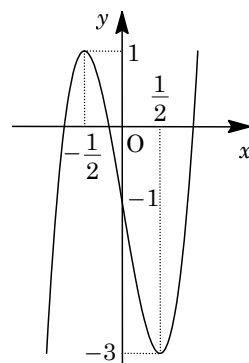
$$= 2\cos 3\theta - 1 = 2\cos \frac{5\pi}{3} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

- (3) $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \frac{2\pi}{3}$ より、 $\cos \frac{\pi}{2} > \cos \frac{5\pi}{9} > \cos \frac{2\pi}{3}$ となり、
- $$-\frac{1}{2} < a < 0$$

すると、(2)より、 a は $f(x) = 0$ の 3 つの解のうち、まん中のものであり、

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{8}{125} + \frac{6}{5} - 1 = \frac{17}{125} > 0, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{27} + 1 - 1 = -\frac{1}{27} < 0$$

よって、 $-\frac{1}{5} < a < -\frac{1}{6}$ 、すなわち $-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$ である。



コメント

微分法の不等式への応用問題です。ここでは、余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

問題

2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは、上に凸であり、原点および点 $Q(a, 0)$ を通るものとする。ただし、 $0 < a < 1$ である。関数 $y = x^2$ のグラフを C 、関数 $y = f(x)$ のグラフを D とし、 C と D の共有点のうち、原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m 、 D の接線の傾きを n とするとき、 $(2a - 1)m = 2an$ が成り立つとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を x と a の式で表せ。
- (2) $0 \leq x \leq a$ の範囲で、曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ の $0 < a < 1$ における最大値を求めよ。 [2015]

解答例

(1) 条件より、 $k < 0$ として、 $f(x) = kx(x - a)$ とおく。

$$C: y = x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad D: y = f(x) = kx(x - a) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を連立すると、

$$x^2 = kx(x - a), \quad (k - 1)x^2 - akx = 0$$

$$\text{よって、} x = 0, \frac{ak}{k - 1} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

C と D の共有点のうち、原点と異なるものを $P(p, p^2)$ とおくと、 $\textcircled{3}$ より、

$$p = \frac{ak}{k - 1} \cdots \cdots \textcircled{4}.$$

ここで、 $\textcircled{1}$ から $y' = 2x$ となり、点 P における C の接線の傾き m は $m = 2p$ 、 $\textcircled{2}$ から $y' = 2kx - ak$ となり、点 P における D の接線の傾き n は、 $n = 2kp - ak$

そこで、条件 $(2a - 1)m = 2an$ に代入すると、

$$(2a - 1)2p = 2a(2kp - ak), \quad (2ak - 2a + 1)p - a^2k = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

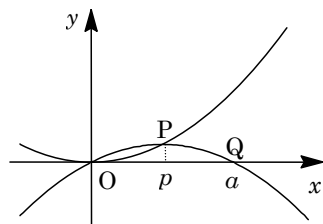
$\textcircled{4}\textcircled{5}$ より、 $(2ak - 2a + 1)ak - a^2k(k - 1) = 0$ となり、

$$(2ak - 2a + 1) - a(k - 1) = 0, \quad ak - a + 1 = 0$$

$$\text{よって、} k = \frac{a - 1}{a} \text{ となり、} f(x) = \frac{a - 1}{a}x(x - a)$$

(2) $0 \leq x \leq a$ の範囲で、曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は、

$$S(a) = \int_0^a \frac{a - 1}{a}x(x - a)dx = -\frac{a - 1}{6a} \cdot a^3 = \frac{a^2(1 - a)}{6}$$



$$(3) \quad S'(a) = \frac{2a - 3a^2}{6} = \frac{-a(3a - 2)}{6}$$

これより、 $0 < a < 1$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。

よって、 $S(a)$ の最大値は $\frac{2}{81}$ である。

a	0	...	$\frac{2}{3}$...	1
$S'(a)$	0	+	0	-	
$S(a)$		↗	$\frac{2}{81}$	↘	

コメント

微積分の総合問題です。(1)の計算はやや量がありますが、その後の設問は基本的なものです。

問題

C を xy 平面上の放物線 $y = x^2$ とする。不等式 $y < x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して、それぞれの接点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。また、2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、等式 $\int_p^q (x-p)^2 dx = \frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

- (1) 点 P の座標 (a, b) を α, β を用いて表せ。
- (2) $S = \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}$ を示せ。
- (3) 点 P が曲線 $y = x^3 - 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を動くとき、 $(\beta - \alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに、 S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。 [2013]

解答例

- (1) $C: y = x^2$ より $y' = 2x$ となり、 C 上の点 (t, t^2) における接線は、 $y - t^2 = 2t(x - t)$, $y = 2tx - t^2$ ……①

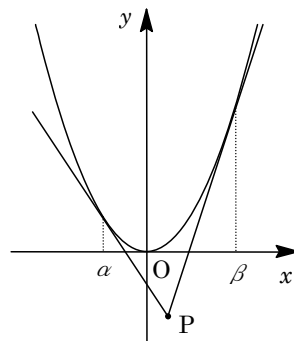
ここで、点 $P(a, b)$ とすると、①が通過することより、

$$b = 2ta - t^2, t^2 - 2at + b = 0 \dots\dots\dots ②$$

点 P は領域 $y < x^2$ にあることより $b < a^2$ であり、これから②の判別式 $D/4 = a^2 - b > 0$ となるので、②は異なる 2 実数解をもつ。これを $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと、

$$\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = b$$

よって、点 P の座標は、 $P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta\right)$ である。



- (2) (1)より、2 つの接線は、 $y = 2\alpha x - \alpha^2$, $y = 2\beta x - \beta^2$ となり、この 2 つの接線と C で囲まれた部分の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2 dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3 = \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} \end{aligned}$$

- (3) 点 $P(a, b)$ が $y = x^3 - 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を動くので、 $b = a^3 - 1$ ($-1 \leq a \leq 1$) となり、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4a^2 - 4b = 4a^2 - 4(a^3 - 1) \\ &= -4a^3 + 4a^2 + 4 \end{aligned}$$

ここで、 $f(a) = -4a^3 + 4a^2 + 4$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(a) &= -4(3a^2 - 2a) \\ &= -4a(3a - 2) \end{aligned}$$

すると、 $-1 \leq a \leq 1$ における $f(a)$ の値の増減は、右表のようになる。

a	-1	…	0	…	$\frac{2}{3}$	…	1
$f'(a)$		-	0	+	0	-	
$f(a)$	12	↘	4	↗	$\frac{124}{27}$	↘	4

これより、 $(\beta - \alpha)^2$ のとりうる値の範囲は、 $4 \leq (\beta - \alpha)^2 \leq 12$ である。

さて、(2)より、 $S = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{12}\{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$ となるので、 S が最大値をとるのは、 $a = -1$ 、 $b = -2$ のときから $P(-1, -2)$ である。

また、 S が最小値をとるのは、 $a = 0$ 、 $b = -1$ または $a = 1$ 、 $b = 0$ のときから $P(0, -1)$ または $P(1, 0)$ である。

コメント

放物線と接線についての超頻出の問題です。誘導も細かく付けられています。

問題

$0 \leq a \leq 1$ に対して、 $f(a) = \int_0^1 |(x-a)(x-3+a)| dx$ と定める。 $f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

解答例

$0 \leq a \leq 1$ に対して、 $2 \leq 3-a \leq 3$ となり、 $0 \leq x \leq 1$ において、

$$|(x-a)(x-3+a)| = \begin{cases} (x-a)(x-3+a) & (0 \leq x \leq a) \\ -(x-a)(x-3+a) & (a \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{これより、} f(a) &= \int_0^1 |(x-a)(x-3+a)| dx \\ &= \int_0^a (x-a)(x-3+a) dx + \int_a^1 -(x-a)(x-3+a) dx \\ &= \int_0^a (x^2 - 3x + 3a - a^2) dx - \int_a^1 (x^2 - 3x + 3a - a^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + (3a - a^2)x \right]_0^a - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + (3a - a^2)x \right]_a^1 \\ &= \frac{a^3}{3} - \frac{3}{2}a^2 + (3a - a^2)a - \frac{1-a^3}{3} + \frac{3}{2}(1-a^2) - (3a - a^2)(1-a) \\ &= -\frac{4}{3}a^3 + 4a^2 - 3a + \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= -4a^2 + 8a - 3 \\ &= -(2a-1)(2a-3) \end{aligned}$$

すると、 $f(a)$ の増減は右表のようになり、 $f(a)$ は最大値 $\frac{7}{6}$ ($a=0$)、最小値 $\frac{1}{2}$ ($a=\frac{1}{2}$) をとる。

a	0	...	$\frac{1}{2}$...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$	$\frac{7}{6}$	\searrow	$\frac{1}{2}$	\nearrow	$\frac{5}{6}$

コメント

微積分の基本的な計算問題です。

問題

p を定数とする。 $f(x) = x^3 + x^2 + px + 1$ とおく。 $y = f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるといふ。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) p の範囲を求めよ。
- (2) 2 つの接点の x 座標を α, β とする。 $(\alpha - \beta)^2$ を p を用いて表せ。
- (3) 2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき、線分 AB の長さを p を用いて表せ。
- (4) 2 つの接線間の距離が $\frac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。 [2011]

解答例

- (1) $f(x) = x^3 + x^2 + px + 1$ より、 $f'(x) = 3x^2 + 2x + p$
 条件から、 $f'(x) = 1$ 、すなわち $3x^2 + 2x + p - 1 = 0 \cdots \cdots (*)$ は、異なる 2 つの実数解をもつことより、

$$D/4 = 1 - 3(p - 1) = -3p + 4 > 0, \quad p < \frac{4}{3}$$

- (2) $(*)$ の実数解が α, β より、 $\alpha + \beta = -\frac{2}{3}$ 、 $\alpha\beta = \frac{p-1}{3}$ となり、

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{4}{9} - \frac{4}{3}(p - 1) = \frac{4(4 - 3p)}{9}$$

- (3) 接線の方程式は、その傾きが 1 より、 $y - f(\alpha) = x - \alpha$ 、 $y - f(\beta) = x - \beta$
 これより、 y 軸との交点は、 $A(0, f(\alpha) - \alpha)$ 、 $B(0, f(\beta) - \beta)$ となり、

$$\begin{aligned} AB &= |(f(\alpha) - \alpha) - (f(\beta) - \beta)| = |\alpha^3 - \beta^3 + \alpha^2 - \beta^2 + (p - 1)(\alpha - \beta)| \\ &= |\alpha - \beta| |(\alpha - \beta)^2 + 3\alpha\beta + (\alpha + \beta) + (p - 1)| \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3p} \left| \frac{4(4 - 3p)}{9} + (p - 1) - \frac{2}{3} + (p - 1) \right| \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3p} \cdot \frac{2}{9} |3p - 4| = \frac{4}{27} (\sqrt{4 - 3p})^3 \end{aligned}$$

- (4) 2 つの接線は、傾きがともに 1 より、その距離は $\frac{AB}{\sqrt{2}}$ となり、条件から、

$$\frac{4}{27\sqrt{2}} (\sqrt{4 - 3p})^3 = \frac{8}{27}, \quad (\sqrt{4 - 3p})^3 = 2\sqrt{2}$$

よって、 $4 - 3p = 2$ から、 $p = \frac{2}{3}$ である。

コメント

接線についての基本題です。丁寧な誘導つきです。

問題

a を正の実数とする。放物線 $P: y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線を l_1 とし、点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また、 l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $B(b, b^2)$ とする。さらに、点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし、 l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $C(c, c^2)$ とする。

- (1) $b + c = 2a$ であることを示せ。
 (2) 放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。 S を a を用いて表し、 S が最小となるときの S と a の値を求めよ。 [2010]

解答例

(1) $P: y = x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、 $y' = 2x$ となり、

$$l_2: y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ を連立して、 $x^2 - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$

$x \neq a$ の解は、 $x + a = -\frac{1}{2a}$ 、 $x = -a - \frac{1}{2a}$ となり、

$$b = -a - \frac{1}{2a} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $l_3: y - b^2 = 2a(x - b)$ より、

$$y = 2ax - 2ab + b^2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}\textcircled{4}$ を連立して、 $x^2 - 2ax + 2ab - b^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{5}$ の解が、 $x = b, c$ より、解と係数の関係を用いると、 $b + c = 2a \cdots \cdots \textcircled{6}$

(2) P と l_3 で囲まれた部分の面積 S は、 $\textcircled{3}\textcircled{6}$ を用いると、

$$S = \int_b^c (2ax - 2ab + b^2 - x^2) dx = -\int_b^c (x - b)(x - c) dx = \frac{1}{6}(c - b)^3$$

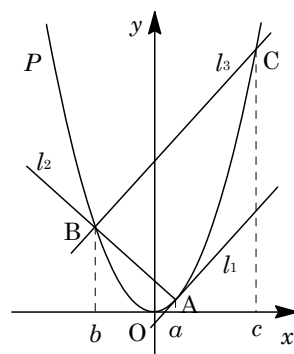
$$= \frac{1}{6}(2a - b - b)^3 = \frac{4}{3}(a - b)^3 = \frac{4}{3}\left(2a + \frac{1}{2a}\right)^3$$

ここで、 $a > 0$ から、相加平均と相乗平均の関係を用いると、

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

なお、等号は $2a = \frac{1}{2a}$ ($a = \frac{1}{2}$) のときに成立する。

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、 S は最小値 $\frac{4}{3} \cdot 2^3 = \frac{32}{3}$ をとる。



コメント

放物線と直線に囲まれた部分の面積を求める典型題です。

問題

次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。 $x \leq 0$ において、つねに $x^3 + 4x^2 \leq ax + 18$ が成り立っているものとする。このとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) で求めた範囲にある a のうち、最大のものを a_0 とするとき、不等式

$$x^3 + 4x^2 \leq a_0x + 18$$

を解け。

[2009]

解答例

(1) $x^3 + 4x^2 \leq ax + 18$ より、

$$x^3 + 4x^2 - 18 \leq ax \cdots \cdots \textcircled{1}$$

さて、 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 18$ とおくと、

$$f'(x) = 3x^2 + 8x = x(3x + 8)$$

x	\cdots	$-\frac{8}{3}$	\cdots	0	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow		\searrow	-18	\nearrow

ここで、 $x \leq 0$ において不等式①が成立する条件は、 $x \leq 0$ のとき曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = ax$ の下方に位置することである。

さて、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax$ が、 $x = \alpha$ で接し、 $x = \beta$ で交わるとすると、

$$x^3 + 4x^2 - ax - 18 = (x - \alpha)^2(x - \beta) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②の係数を比べると、

$$2\alpha + \beta = -4 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta = -a \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\alpha^2\beta = 18 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{5}\text{より}, \quad \alpha^2(-4 - 2\alpha) = 18, \quad \alpha^3 + 2\alpha^2 + 9 = 0$$

すると、 $(\alpha + 3)(\alpha^2 - \alpha + 3) = 0$ となり、 α は実数から、 $\alpha = -3$ であり、

$$\beta = -4 - 2 \cdot (-3) = 2$$

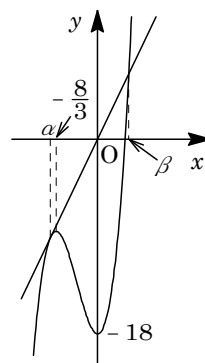
$$\textcircled{4}\text{に代入して}, \quad a = -\alpha^2 - 2\alpha\beta = 3$$

したがって、 $x \leq 0$ において不等式①が成立する条件は、図より、 $a \leq 3$ である。

(2) (1)より、 $a_0 = 3$ となり、このとき不等式①は、

$$x^3 + 4x^2 - 3x - 18 \leq 0, \quad (x + 3)^2(x - 2) \leq 0$$

よって、求める解は、 $x \leq 2$ である。



コメント

3次関数のグラフを対応させて、3次不等式の解を求める基本問題です。

問題

xy 平面上に、円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 、放物線 $C_2 : y = x^2 + 5$ がある。また点 $P(x_1, y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。
- (2) 点 $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの、 y_1 の値の範囲を求めよ。
- (3) 円 C_1 の接線で、その接点の y 座標が負であり、放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。
- (4) (3) の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2008]

解答例

(1) $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線 l の方程式は、

$$x_1x + y_1y = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(2) l と $C_2 : y = x^2 + 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して、

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると、} x_1x + y_1(x^2 + 5) = 1$$

$$y_1x^2 + x_1x + 5y_1 - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i) $y_1 = 0$ のとき $x_1 = \pm 1$ から、 $\textcircled{3}$ は実数解をもつ。

(ii) $y_1 \neq 0$ のとき $\textcircled{3}$ が実数解をもつ条件は、

$$\begin{aligned} D &= x_1^2 - 4y_1(5y_1 - 1) = (1 - y_1^2) - 20y_1^2 + 4y_1 \\ &= -21y_1^2 + 4y_1 + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

よって、 $(3y_1 - 1)(7y_1 + 1) \leq 0$ から、 $-\frac{1}{7} \leq y_1 \leq \frac{1}{3}$ ($y_1 \neq 0$)

(i)(ii) より、 l と C_2 が共有点をもつ条件は、 $-\frac{1}{7} \leq y_1 \leq \frac{1}{3}$ である。

(3) l と C_2 が接するのは、 $\textcircled{3}$ が重解をもつ、すなわち $D = 0$ のときである。

$$\text{このとき、} y_1 < 0 \text{ となるのは } y_1 = -\frac{1}{7} \text{ であり、} x_1 = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \pm \frac{4}{7}\sqrt{3}$$

すると、 $\textcircled{3}$ の重解は、 $x = \frac{-x_1}{2y_1} = \pm 2\sqrt{3}$ となり、このとき、 $\textcircled{2}$ より、

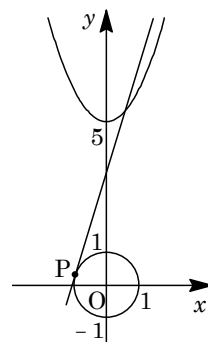
$$y = (\pm 2\sqrt{3})^2 + 5 = 17$$

よって、円 C_1 の接線と放物線 C_2 と接する点の座標は、 $(\pm 2\sqrt{3}, 17)$ である。

(4) (3) より、円 C_1 の接線と C_2 は $x = \pm 2\sqrt{3}$ 接する。

そこで、求める図形の面積を S とおくと、 y 軸に関する対称性より、

$$S = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} (x - 2\sqrt{3})^2 dx = \frac{2}{3} [(x - 2\sqrt{3})^3]_0^{2\sqrt{3}} = -\frac{2}{3} (-2\sqrt{3})^3 = 16\sqrt{3}$$



コメント

微積分の基本問題です。空欄形式にすると、センター数学ⅡBの問題です。

問題

関数 $y = x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $A(\alpha, \alpha^2)$ と $B(\beta, \beta^2)$ をとる。ただし、 $\alpha < \beta$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ であることを示せ。
- (2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは、線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また、その最大値を l を用いて表せ。

[2007]

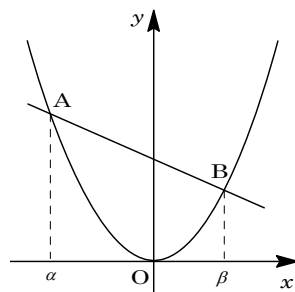
解答例

(1) 直線 AB の方程式は、

$$y - \alpha^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha), \quad y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$$

すると、線分 AB と C で囲まれる部分の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(\alpha + \beta)x - \alpha\beta - x^2\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)\} dx = -\left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \frac{\beta - \alpha}{2}(x - \alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$



- (2) $AB = l$ より、 $\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2} = l$ となり、
 $(\beta - \alpha)\sqrt{1 + (\beta + \alpha)^2} = l, \quad \beta - \alpha = \frac{l}{\sqrt{1 + (\beta + \alpha)^2}}$

すると、(1)より、 $S = \frac{1}{6} \cdot \frac{l^3}{(\sqrt{1 + (\beta + \alpha)^2})^3}$

よって、 S が最大となるのは、 $\beta + \alpha = 0$ のときであり、最大値は $\frac{l^3}{6}$ である。

このとき、線分 AB の方程式は $y = -\alpha\beta$ となり、 x 軸に平行である。

コメント

有名な $\frac{1}{6}$ 公式の証明とその応用です。

問題

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

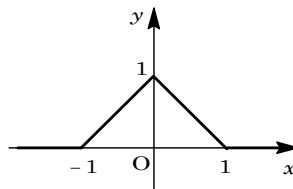
と定め、 $g(x) = \int_0^1 f(t-x) dt$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) $g(1)$ の値を求めよ。
- (3) $y = g(x)$ のグラフの概形を描け。

[2006]

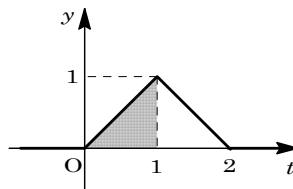
解答例

- (1) $|x| \leq 1$ において $f(x) = 1 - |x|$ より、 $y = f(x)$ のグラフは $y = -|x|$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。



また、 $|x| > 1$ において $f(x) = 0$ より、 $y = f(x)$ のグラフは右図の太線部となる。

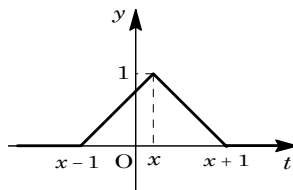
- (2) $y = f(t-1)$ のグラフは、 $y = f(t)$ のグラフを t 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。



すると、 $g(1) = \int_0^1 f(t-1) dt$ より、 $g(1)$ は右図の網点部の面積を表す。

$$g(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

- (3) $y = f(t-x)$ のグラフは、 $y = f(t)$ のグラフを t 軸方向に x だけ平行移動したものである。



また、(2)と同様に考えて、 $g(x)$ は $0 \leq t \leq 1$ の範囲で、 $y = f(t-x)$ のグラフと t 軸にはさまれた部分の面積を表す。

(i) $x+1 \leq 0$ ($x \leq -1$) のとき $g(x) = 0$

(ii) $x \leq 0$, $0 \leq x+1$ ($-1 \leq x \leq 0$) のとき $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$

(iii) $x-1 \leq 0$, $0 \leq x$ ($0 \leq x \leq 1$) のとき

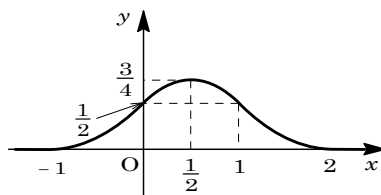
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{2}(x+1-1)^2 \\ &= -x^2 + x + \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(iv) $x - 1 \leq 1, 1 \leq x (1 \leq x \leq 2)$ のとき

$$g(x) = \frac{1}{2}(1 - x + 1)^2 = \frac{1}{2}(x - 2)^2$$

(v) $x - 1 \geq 1 (x \geq 2)$ のとき $g(x) = 0$

以上より, $y = g(x)$ のグラフは右図の太線部となる。



コメント

絶対値付きの関数の積分ですが, 面積を対応させれば, 積分計算を実行するまでもありません。

問題

関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ の極大値が 5, 極小値が 1 となる時, 定数 a, b の値を求めよ。 [2005]

解答例

$f(x) = x^3 - ax^2 + b$ に対し, $f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$

$f'(x) = 0$ の解は, $x = 0, \frac{2}{3}a$ となり, 極値をもつことから $a \neq 0$ である。

(i) $a > 0$ のとき

極大値が 5, 極小値が 1 より,

$f(0) = b = 5 \dots\dots\dots ①$

$f\left(\frac{2}{3}a\right) = -\frac{4}{27}a^3 + b = 1 \dots\dots\dots ②$

①②より, $-\frac{4}{27}a^3 = -4, a = 3$

x	...	0	...	$\frac{2}{3}a$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

(ii) $a < 0$ のとき

極大値が 5, 極小値が 1 より,

$f\left(\frac{2}{3}a\right) = -\frac{4}{27}a^3 + b = 5 \dots\dots\dots ③$

$f(0) = b = 1 \dots\dots\dots ④$

③④より, $-\frac{4}{27}a^3 = 4, a = -3$

x	...	$\frac{2}{3}a$...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

(i)(ii)より, $(a, b) = (3, 5), (-3, 1)$

コメント

3次関数の増減を調べる微分の基本題です。

問 題

曲線 $y = x^2$ を C とし、 C 上の異なる 2 点を $A(a, a^2)$ 、 $B(b, b^2)$ とする。A を通り、A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り、B における C の接線と直交する直線を m とする。

- (1) l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。
- (2) l と m が直交するように点 A 、 B が動くとき、交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。 [2003]

解答例

- (1) $y = x^2$ より $y' = 2x$ なので、点 $A(a, a^2)$ における接線の方
向ベクトル $(1, 2a)$ が、法線 l の法線ベクトルとなるので、
 l の方程式は、

$$x - a + 2a(y - a^2) = 0, \quad x + 2ay = a + 2a^3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

同様にして、法線 m の方程式は、

$$x + 2by = b + 2b^3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } 2(a - b)y = a - b + 2(a^3 - b^3)$$

$$y = \frac{1}{2} + a^2 + ab + b^2, \quad x = a + 2a^3 - 2a\left(\frac{1}{2} + a^2 + ab + b^2\right) = -2ab(a + b)$$

よって、 $P(-2ab(a + b), \frac{1}{2} + a^2 + ab + b^2)$ となる。

- (2) l と m が直交するとき、 l と m の法線ベクトルどうしも直交するので、

$$1 + 2a \cdot 2b = 0, \quad ab = -\frac{1}{4} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

このとき、 $P(x, y)$ とおくと、 $\textcircled{3}$ を代入して、

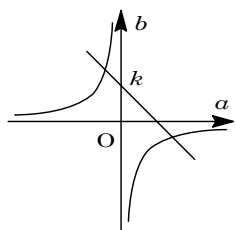
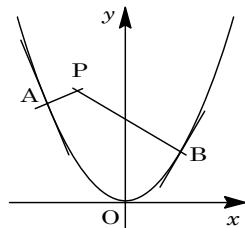
$$x = \frac{1}{2}(a + b) \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad y = \frac{1}{2} + (a + b)^2 - ab = (a + b)^2 + \frac{3}{4} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

さて、 $a + b = k \cdots \cdots \textcircled{6}$ とおくと、 ab 平面上で、どんな k に対しても $\textcircled{3}$ と $\textcircled{6}$ は共有点をもつ。すなわち $a + b$ は任意の値をとり、 $\textcircled{4}$ より $a + b = 2x$ を $\textcircled{5}$ に代入すると、点 P の軌跡の方程式は、 $y = 4x^2 + \frac{3}{4} \cdots \cdots \textcircled{7}$ となる。

- (3) $\textcircled{7}$ より $y' = 8x$ なので、 $\textcircled{7}$ 上の接点を $(t, 4t^2 + \frac{3}{4})$ とおくと、

接線の方程式は、

$$y - \left(4t^2 + \frac{3}{4}\right) = 8t(x - t), \quad y = 8tx - 4t^2 + \frac{3}{4} \cdots \cdots \textcircled{8}$$



$$y = x^2 \text{ と } \textcircled{8} \text{ の交点は, } x^2 - 8tx + 4t^2 - \frac{3}{4} = 0, \quad x = 4t \pm \sqrt{12t^2 + \frac{3}{4}}$$

これを $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと, $y = x^2$ と $\textcircled{8}$ で囲まれた部分の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(8tx - 4t^2 + \frac{3}{4} - x^2 \right) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6} \left(2\sqrt{12t^2 + \frac{3}{4}} \right)^3 \end{aligned}$$

よって, $t = 0$ のとき S は最小値 $\frac{1}{6} \left(2\sqrt{\frac{3}{4}} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

コメント

微積分の総合問題で, しかも超頻出のものです。

問題

座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y = \sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ $(2, 0)$ を P とし、他の 1 つを Q とする。

- (1) 点 Q の座標を求めよ。
 (2) 円 C の劣弧 PQ と放物線 $y = \sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。
 ただし、劣弧 PQ とは、点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち、長さが短い方の弧である。 [2002]

解答例

- (1) 円 $C : x^2 + y^2 = 4$ ……①, 放物線 $y = \sqrt{3}(x-2)^2$ ……②の

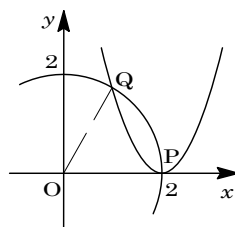
交点は、①②より、

$$x^2 + 3(x-2)^4 - 4 = 0, (x+2)(x-2) + 3(x-2)^4 = 0$$

$$(x-2)\{(x+2) + 3(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)\} = 0$$

$$(x-2)(x-1)(3x^2 - 15x + 22) = 0$$

$x \neq 2$ より $x = 1$, ②より $y = \sqrt{3}$ となり、 $Q(1, \sqrt{3})$ である。



- (2) $\angle QOP = 60^\circ$ より、求める図形の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} - \int_1^2 \sqrt{3}(x-2)^2 dx = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} [(x-2)^3]_1^2 \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{5}{6}\sqrt{3} \end{aligned}$$

コメント

落とせない積分の基本題です。

問題

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

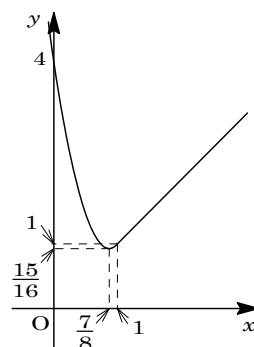
$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 7x + 4 & (x \leq 1 \text{ の場合}) \\ x & (x > 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) 実数 t に対して $F(t)$ を、 $F(t) = \int_t^{t+1} f(x) dx$ で定義するとき、関数 $F(t)$ の増減を調べ、そのグラフの概形を描け。また、 $F(t)$ の最小値を求めよ。 [2001]

解答例

- (1) $x \leq 1$ のとき $f(x) = 4x^2 - 7x + 4 = 4\left(x - \frac{7}{8}\right)^2 + \frac{15}{16}$,
 $x > 1$ のとき $f(x) = x$ より、 $y = f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



- (2) $F(t)$ は、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸、および $x = t$,
 $x = t+1$ によって囲まれた領域の面積を表す。

(i) $t \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^{t+1} (4x^2 - 7x + 4) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x \right]_t^{t+1} \\ &= \frac{4}{3}\{(t+1)^3 - t^3\} - \frac{7}{2}\{(t+1)^2 - t^2\} + 4\{(t+1) - t\} \\ &= 4t^2 - 3t + \frac{11}{6} = 4\left(t - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{61}{48} \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^1 (4x^2 - 7x + 4) dx + \int_1^{t+1} x dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x \right]_t^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^{t+1} \\ &= \frac{4}{3}(1-t^3) - \frac{7}{2}(1-t^2) + 4(1-t) + \frac{1}{2}\{(t+1)^2 - 1\} \\ &= -\frac{4}{3}t^3 + 4t^2 - 3t + \frac{11}{6} \end{aligned}$$

$F'(t) = -4t^2 + 8t - 3 = -(2t-1)(2t-3)$ より、

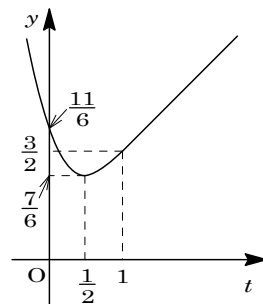
$F(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$...	1
$F'(t)$		-	0	+	
$F(t)$	$\frac{11}{6}$	\searrow	$\frac{7}{6}$	\nearrow	$\frac{3}{2}$

(iii) $t \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^{t+1} x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_t^{t+1} = \frac{1}{2}\{(t+1)^2 - t^2\} \\ &= t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

以上より, $y = F(t)$ のグラフの概形は右図のようになる。
 また, $F(t)$ の最小値は $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$ である。



コメント

$F(t)$ を求めるのに場合分けが必要ですが, (1)の $y = f(x)$ のグラフを利用すれば難しくはありません。

問題

xy 平面上の曲線 $C: y = |2x - 1| - x^2 + 2x + 1$ について次の問いに答えよ。

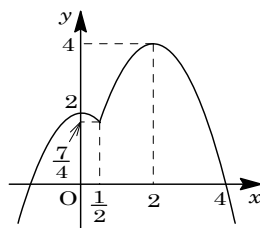
- (1) 曲線 C の概形を描け。
- (2) 直線 $l: y = ax + b$ が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの a, b の値を求めよ。
- (3) (2)の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $C: y = |2x - 1| - x^2 + 2x + 1$ に対して、

(i) $x \geq \frac{1}{2}$ のとき $y = 2x - 1 - x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 4x$
 $= -(x - 2)^2 + 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$

(ii) $x < \frac{1}{2}$ のとき $y = -(2x - 1) - x^2 + 2x + 1$
 $= -x^2 + 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$



(2) ①より、 $y' = -2x + 4$

ここで、 $t > \frac{1}{2}$ として、接点を $(t, -t^2 + 4t)$ とすると、接線の方程式は、

$$y - (-t^2 + 4t) = (-2t + 4)(x - t), \quad y = (-2t + 4)x + t^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②と③の共有点は、 $-x^2 + 2 = (-2t + 4)x + t^2$

$$x^2 - 2(t - 2)x + t^2 - 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

接する場合は、 $D/4 = (t - 2)^2 - (t^2 - 2) = 0$ から、 $t = \frac{3}{2}$

このとき、④の重解は $x = t - 2 = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ となり、題意に適する。

よって、求める接線 l は③より、 $y = x + \frac{9}{4}$ となり、 $a = 1, b = \frac{9}{4}$

(3) $S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ x + \frac{9}{4} - (-x^2 + 2) \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{ x + \frac{9}{4} - (-x^2 + 4x) \right\} dx$
 $= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) dx$
 $= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{3} \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

コメント

微積分の総合問題です。計算ミスに注意して完答しましょう。

問 題

円 $x^2 + (y-1)^2 = 3$ 上の点 P から放物線 $y = \frac{x^2}{2} + 1$ に異なる 2 本の接線を引くことができるものとし、その 2 つの接点を Q, R とする。このとき線分 QR とこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点 P の座標と、そのときの面積を求めよ。

[1999]

解答例

円 $x^2 + (y-1)^2 = 3$ ……①, 放物線 $y = \frac{x^2}{2} + 1$ ……②

①上の点 $P(s, t)$ とおくと, $s^2 + (t-1)^2 = 3$ ……③

②より, $y' = x$ なので, 点 $(u, \frac{1}{2}u^2 + 1)$ における接線は,

$$y = u(x-u) + \frac{1}{2}u^2 + 1 = ux - \frac{1}{2}u^2 + 1$$

$P(s, t)$ を通るので, $t = us - \frac{1}{2}u^2 + 1$

$$u^2 - 2su + 2t - 2 = 0 \dots\dots\dots④$$

④が異なる 2 実数解をもつことより, $D/4 = s^2 - 2t + 2 > 0$

③より, $3 - (t-1)^2 - 2t + 2 > 0, 4 - t^2 > 0$

ここで, ④の解 $u = s \pm \sqrt{s^2 - 2t + 2} = s \pm \sqrt{4 - t^2}$ を $u = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと,

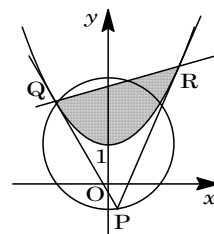
$$\alpha = s - \sqrt{4 - t^2}, \beta = s + \sqrt{4 - t^2}$$

線分 QR を $y = mx + n$ とすると, 線分 QR と放物線で囲まれた部分の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(mx + n - \frac{1}{2}x^2 - 1 \right) dx = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{12} \left(2\sqrt{4 - t^2} \right)^3 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{4 - t^2} \right)^3 \end{aligned}$$

よって, $t = 0$ のとき S は最大値 $\frac{2}{3}(\sqrt{4})^3 = \frac{16}{3}$ をとる。

このとき③より, $P(\pm\sqrt{2}, 0)$ となる。



コメント

よくある構図の問題です。いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式を用いる典型題です。

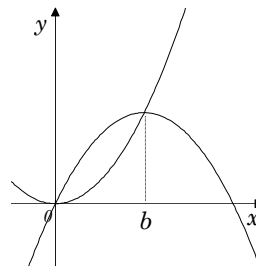
問題

$f(x) = -ax(x - 2b)$ とする。ただし、 $a > 0$ 、 $b > 0$ とする。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = ax^2$ とで囲まれた部分の面積 S を a と b で表せ。
 (2) 曲線 $y = f(x)$ の頂点 P が直線 $3x + 2y = 6$ の上にあるとき、面積 S の最大値を求めよ。 [1998]

解答例

- (1) $y = -ax(x - 2b)$ と $y = ax^2$ の交点は、
 $-ax^2 + 2abx = ax^2$ 、 $2ax^2 - 2abx = 0$ より、 $x = 0$ 、 b
 よって、 $S = \int_0^b -(2ax^2 - 2abx) dx$
 $= -2a \int_0^b x(x - b) dx$
 $= -2a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) b^3 = \frac{1}{3} ab^3 \dots\dots\dots \textcircled{1}$



- (2) $f(x) = -ax(x - 2b) = -a(x - b)^2 + ab^2$
 これより、 $P(b, ab^2)$ となり、点 P が直線 $3x + 2y = 6$ の上にあるので、
 $3b + 2ab^2 = 6 \dots\dots\dots \textcircled{2}$

②より、 $a = \frac{6 - 3b}{2b^2}$ となり、これを①に代入すると、

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 - 3b}{2b^2} \cdot b^3 = -\frac{1}{2}(b^2 - 2b) = -\frac{1}{2}(b - 1)^2 + \frac{1}{2}$$

以上より、 $b = 1$ 、②から $a = \frac{3}{2}$ のとき、 S は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

コメント

数Ⅱの積分の基本題です。

問題

$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x$ とする。ただし a は定数とする。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。
 (2) $x \geq 0$ のとき、常に $f(x) \geq 0$ となるような a の範囲を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x$
 $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3(a^2 - 1)$
 $= 3(x^2 + 2ax + a^2 - 1)$
 $= 3(x + a + 1)(x + a - 1)$

x	...	$-a-1$...	$-a+1$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

極大値 : $f(-a-1) = (-a-1)^2 \{-a-1 + 3a + 3(-a+1)\} = -(a+1)^2(a-2)$

極小値 : $f(-a+1) = (-a+1)^2 \{-a+1 + 3a + 3(-a-1)\} = -(a-1)^2(a+2)$

(2) $x \geq 0$ のとき $f(x) \geq 0$ の条件は、 $f(0) = 0$ から、

(i) $-a+1 \leq 0$ ($a \geq 1$) のとき

$x \geq 0$ のとき $f(x) \geq f(0) = 0$ となり、つねに成立する。

(ii) $-a+1 > 0$ ($a < 1$) のとき

$x \geq 0$ のとき $f(x) \geq f(-a+1) = -(a-1)^2(a+2)$ となる。

よって、 $-(a-1)^2(a+2) \geq 0$

$a+2 \leq 0$ から、 $a \leq -2$ ($a < 1$ をみたとす)

(i)(ii) より、 $a \leq -2, 1 \leq a$

コメント

数Ⅱの微分の基本題です。

問題

等式 $|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ を満たす xy 平面上の点 (x, y) からなる図形を T とする。

(1) 点 (a, b) が T 上にあれば, 点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。

[2013]

解答例

(1) $T : |x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ 上の点 (a, b) があれば,

$$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$$

これより, $|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$ となり, 点 $(a, -b)$ も T 上にある。

(2) (1)より, 図形 T は x 軸対称となるので, 以下, $y \geq 0$ で考えると,

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y), \quad y=|x-3|-2|x+3|$$

(i) $x < -3$ のとき $y = -(x-3) + 2(x+3) = x+9$

すると, $y \geq 0$ より, $-9 \leq x < -3$ となる。

(ii) $-3 \leq x < 3$ のとき $y = -(x-3) - 2(x+3) = -3x-3$

すると, $y \geq 0$ より, $-3 \leq x \leq -1$ となる。

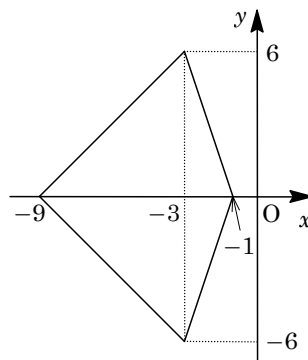
(iii) $x \geq 3$ のとき

$$y = (x-3) - 2(x+3) = -x-9$$

このとき, $y \geq 0$ を満たす x は存在しない。

(i)~(iii)の結果をもとに, x 軸対称すると図形 T は右図のようになり, 囲まれる領域の面積 S は,

$$S = \left\{ \frac{1}{2}(-1+9) \cdot 6 \right\} \cdot 2 = 48$$



コメント

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題です。ていねいな場合分けがすべてです。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

2020 入試対策 岡山大学 文系数学 22 年

2019 年 7 月 1 日 発行

編著者 外林 康治

発行所 電送数学舎

〒651-0096 神戸市中央区雲井通 5-3-1 サンパル 6F 起業プラザひょうご

<https://www.densu.jp/>

製作上の不備がございましたら、電送数学舎のサイト「大学入試数学電子図書館」トップページの「ゲストブック」よりご連絡ください。

本書の無断複製は、著作権上の例外を除き禁じられています。