２０２０ 入試対策
過去問ライブラリー

信州大学
医系数学10か年

２０１０－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された信州大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。
(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。
【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。
【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　次

分 野 別 問 題 一 覧

■ 図形と式

1 　θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点$(x,\ y)$について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。　[2018]

2 　座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$ を考える。さらに，$0 \leqq \theta_1 \leqq \pi$，$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ に対し，$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)$，$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2 - b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2 + b_2\cos\theta_2)$ とおく。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ を示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \neq 0$ であるとする。$\theta_1 = \dfrac{\pi}{7}$ であるとき，θ_2 を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の半径を r_1 とし，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径を r_2 とする。また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とする。$\mathrm{AB}:\mathrm{DE} = 2:3$ であるとき，$\triangle\mathrm{ODE}$ の面積を，S，r_1，r_2 で表せ。なお，3 点 O, A, B は同一直線上にないものとし，3 点 O, D, E も同一直線上にないものとする。　[2017]

3 　次の 3 条件をすべて満たす xy 平面上の円 C が存在するような実数 t を求めよ。

(i) 円 C の半径は 3 である。

(ii) 円 C は x 軸に接する。

(iii) 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は円 C 上にあり，点 P における円 C の接線の方程式は $y=2tx-t^2$ である。　[2012]

4 　$0<p<4$ とし，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の点 $\left(p,\ \dfrac{1}{4}p^2\right)$ を中心にして，半径が $\dfrac{1}{4}p^2$ の円 C をかく。次に，$m>0$ とし，直線 $y=mx$ が円 C に接しているとする。

(1) m を p の式で表せ。

(2) 放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と直線 $y=mx$ によって囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{3}$ のとき，m と p の値を求めよ。　[2010]

■ 図形と計量

1　$0<t<3$ を満たす実数 t に対し，平面上の相異なる 4 点 O, A, B, C を次の条件(a), (b)を満たすようにとる。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，△OCD の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2018]

■ ベクトル

1　3 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ s,\ t)$，$\vec{c}=(p,\ q,\ 2)$ が次の条件を満たすような, s, t, p, q の値を求めよ。

(i)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　(ii)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60°

(iii)　$\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する。　[2014]

2　△ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。$|\vec{a}|=1$ とする。点 O に関する点 P の位置ベクトルが $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ であるとする。

(1)　直線 AP と直線 BC は垂直に交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ とする。OP // AB のとき，$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ となる実数 s, t を求めよ。

[2011]

3　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{OB}\perp\mathrm{CA}$ ならば，$\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$ となることを証明せよ。　[2010]

■ 整数と数列

1　次の問いに答えよ。

(1)　2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2)　n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。　[2019]

2　数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-1}{4a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し，$a_n>\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。　[2018]

3　群に分けられた数列

$$1\ |\ 2,\ 4,\ 2\ |\ 3,\ 6,\ 9,\ 6,\ 3\ |\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4\ |\ \cdots\cdots$$

を，第 n 群が $(2n-1)$ 個の項

$$n,\ 2n,\ \cdots\cdots,\ (n-2)n,\ (n-1)n,\ n^2,\ (n-1)n,\ (n-2)n,\ \cdots\cdots,\ 2n,\ n$$

からなるものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの項数を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる項の総和を求めよ。

(3)　最初に現れる 2016 は，この数列の第何項か。　[2016]

4　n を自然数とする。

(1)　n 以下の非負の整数 k について，関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。　[2015]

5　円 $x^2+(y-1)^2=1$ を C，円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ を C_0 とする。C，C_0，x 軸に接する円を C_1 とする。C，C_1，x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし，これを繰り返して C，C_n，x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の半径を a_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2015]

6 n を 0 以上の整数とする。$n+1$ 個の自然数 2^0，2^1，…，2^n の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか。ただし，x を超えない最大の整数を表す記号 $[x]$ を用いて解答してよい。

注：たとえば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり，14225 の最上位の桁の数字は 1 である。 [2014]

7 (1) 式 $1=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ で，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ となるものをすべて求めよ。

(2) r を正の有理数とする。式 $r=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ で，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ となるものは有限個しかないことを証明せよ。ただし，そのような組が存在しない場合は 0 個とし，有限個であるとみなす。 [2013]

■ 確率

1 n を 3 以上の整数とする。1, 2, …, n の n 個の数から異なる 3 個を選んで，それらを小さい順に a, b, c とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $n=8$ のとき，$a+b=c$ となる 3 個の数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか。

(2) 一般の n について，$a+b=c$ となる 3 個の数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか。

[2019]

2 n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2) 1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3) $n=5$ のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。 [2016]

3　次の問いに答えよ。

(1)　n 個の実数 a_1，a_2，…，a_n に対して，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ が成立することを示せ。

また，等号が成立するための a_1，a_2，…，a_n についての必要十分条件を求めよ。

(2)　偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし，サイコロが偏りをもつとは，1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう。　[2015]

4　3 個の玉が横に 1 列に並んでいる。コインを 1 回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える。また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える。この操作を繰り返す。

(1)　最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ。

(2)　最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ。　[2014]

5　さいころを 1000 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回出る確率を P_k とおく。P_k が最大となる k を求めよ。　[2012]

6　硬貨 1 枚を投げたとき，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点を得るとする。硬貨を繰り返し投げて，合計得点が 10 点以上になったときに終了する。次の確率を求めよ。

(1)　7 回目に合計得点がちょうど 10 点になって終了する確率

(2)　終了時の合計得点が 10 点である確率　[2011]

7　数直線上を動く点 P が，はじめ原点の位置にある。さいころを投げて，偶数の目が出れば P は正の向きに出た目の数だけ進み，奇数の目が出れば P は負の向きに出た目の数だけ進む。さいころを続けて 4 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　少なくとも 2 回は 2 の目が出て，最後に P の座標が 2 になる確率

(2)　最後に P の座標が 2 になる確率　[2010]

■ 論証

1 M は有限個の複素数からなる集合で,

(a)　$1 \in M$, $0 \notin M$

(b)　z, $w \in M$ ならば $zw \in M$

を満たすとする。$\alpha \in M$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha^n = 1$ となる自然数 n が存在することを示せ。

(2)　m を $\alpha^m = 1$ を満たす自然数のうち最小のものとする。このとき

$$\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} \in M$$

であることを示せ。　[2018]

2 すべての実数 x, y に対して不等式 $\dfrac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leqq \dfrac{a}{1+x^2+y^2}$ が成り立つとき, a の値の範囲を求めよ。　[2014]

■ 複素数

1 n を自然数, θ を実数とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\cos(n+2)\theta - 2\cos\theta\cos(n+1)\theta + \cos n\theta = 0$ を示せ。

(2)　$\cos\theta = x$ とおくとき, $\cos 5\theta$ を x の式で表せ。

(3)　$\cos^2\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めよ。　[2019]

2 P_0, Q_0 を複素数平面上の異なる点とする。自然数 k に対して, 平面上の点 P_k, Q_k を以下の条件(i), (ii)を満たすものとして定める。

(i)　線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_{k-1}$ を P_{k-1} を中心として角 θ だけ回転させた線分が $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k$ となる。

(ii)　線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k$ を Q_k を中心として角 θ' だけ回転させた線分が $\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_k$ となる。

以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{Q}_{k+2} = \mathrm{Q}_k$ となるための, θ と θ' に関する条件を求めよ。

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$, $\theta = -\theta'$, $|\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_0| = 1$ とする。Q_0 を中心とし, 半径が r の円を C とする。P_{n-1} は C の内部, Q_n は C の外部にあるという。このとき, r^2 がとり得る値の範囲を n と θ を用いて表せ。　[2016]

■ 極限

1 数列$\{a_n\}$を条件 $a_1=-1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

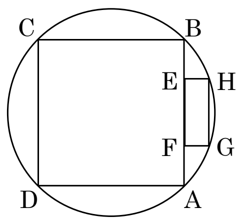
(1) $a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$がすべての n に対して成り立つような p，q を求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) r を正の実数とし，数列$\{b_n\}$を条件 $b_1=r\dfrac{1}{a_1}$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$によって定める。このとき，極限$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$を求めよ。 [2017]

■ 微分法

1 半径が$\sqrt{2}$の円に正方形 ABCD が内接している。辺 AB 上の異なる 2 点 E, F と，短い方の弧 AB 上の異なる 2 点 G, H を，四角形 EFGH が長方形となるようにとる。



(1) 長方形 EFGH が正方形のとき，その 1 辺の長さを求めよ。

(2) 長方形 EFGH の面積が最大になるときの辺 FG の長さを求めよ。 [2017]

2 次の条件(＊)を満たすような実数 a で最大のものを求めよ。

(＊) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して，$\cos x\leqq 1-ax^2$ が成り立つ。

[2015]

3 関数$f(x)$は，$f''(x)<0$ を満たすとする。$t\geqq 0$ のとき，次の(1), (2)の不等式が成り立つことを示せ。

(1) $f(0)+f'(t)t\leqq f(t)\leqq f(0)+f'(0)t$

(2) $\dfrac{f(0)t+f(t)t}{2}\leqq\displaystyle\int_0^t f(u)\,du\leqq f(0)t+\dfrac{f'(0)}{2}t^2$ [2014]

4　(1)　x が $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき，$\sin x + \cos x$ の値の範囲を求めよ。

(2)　x が $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき，$\sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。　[2013]

5　a を定数とする。放物線 $y = a - x^2$ の接線のうち，原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ。またそのときの距離を求めよ。　[2013]

6　実数 a は $a > -1$ とする。関数 $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ に対し，

$$-1 < c < a\,,\quad \frac{f(a) - f(-1)}{a+1} = f'(c)$$

となる c がちょうど 2 つ存在するような a の値の範囲を求めよ。　[2012]

7　次の問いに答えよ。

(1)　$0 < x < \frac{\pi}{2}$ に対し，$x < \tan x$ となることを示せ。

(2)　$x > 0$ に対し，$\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) > \sin x$ となることを示せ。ただし，対数は自然対数である。　[2012]

8　放物線 $C : y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 上にない点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる。放物線 C 上の点 Q に対し直線 PQ が点 Q での C の接線と垂直に交わるとき，直線 PQ を P から C への垂線という。点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C へ 3 本の異なる垂線が引けるための a，b に関する条件を求めよ。　[2011]

9　曲線 $y = e^x$ 上の点 A における接線と法線が x 軸と交わる点を，それぞれ B, C とする。$\triangle$ABC の面積が 5 のとき，$\triangle$ABC の外心の座標を求めよ。　[2011]

10　関数 $y = 2\sin 3x + \cos 2x - 2\sin x + a$ の最小値の絶対値が，最大値と一致するように，定数 a の値を定めよ。　[2010]

11　関数 $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$ $(x>0)$ の極大値を，大きい方から順に，a_1，a_2，a_3，…，a_n，…とする。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。　[2010]

■ 積分法

1　関数 $f(x)$ は，次を満たすとする。

$$f(x)=x^2-\frac{3x}{5}\int_0^1 f(t)\,dt+4$$

曲線 $C: y=f(x)$ と直線 $l: y=mx$ は，x 座標が正の点で接しているとする。

(1)　m の値と接点の座標を求めよ。

(2)　直線 $x=1$，直線 l，および曲線 C で囲まれた領域の面積を求めよ。　[2019]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$a>1$ とする。不等式 $(1+t)^a \leqq K(1+t^a)$ がすべての $t \geqq 0$ に対して成り立つような実数 K の最小値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10}dx<6080$ を示せ。ただし，$\pi<3.15$ であることを用いてよい。　[2019]

3　n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。　[2016]

4　a を正の数とする。このとき，次の関係式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\cos(at-2ax)\,dt+1$$

[2014]

5　次の不定積分を求めよ。　$\displaystyle\int \log(1+\sqrt{x})\,dx$　[2011]

6　不定積分 $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}dx$ を求めよ。　[2010]

7　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2-k^2}$ を求めよ。　[2010]

■ 積分の応用

1　a を実数とする。座標平面上の曲線 $C: y=e^x(x^2+2x)$ と直線 $l: y=a$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C と l がちょうど 2 点を共有するような a が満たす条件を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2+2x)=0$ を用いてよい。

(2)　(1)で求めた条件を満たす a に対し，C と l で囲まれる領域と，不等式 $x\leqq 0$ が表す領域との共通部分の面積を $S(a)$ とおく。$S(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。　[2018]

2　$f(x)=2xe^{-x^2}$ とする。$a>0$ に対し，曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $S(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ が最大値をとる x の値 p を求めよ。

(2)　極限 $k=\displaystyle\lim_{a\to\infty}S(a)$ の値を求めよ。

(3)　(1)で求めた p に対し，$b>p$ が成り立つとする。点 $(b,\ f(b))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と，直線 $x=b$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $T(b)$ とする。(2)で求めた k に対し，$S(b)+T(b)=k$ となるように，b の値を定めよ。　[2017]

3　$0\leqq t\leqq 2\pi$ において，媒介変数 t で表された曲線

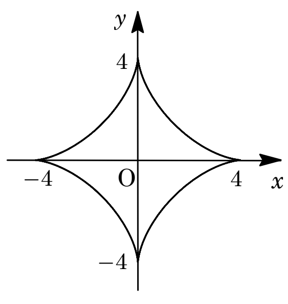
$$x=3\cos t+\cos 3t,\quad y=3\sin t-\sin 3t$$

を C とする。

(1)　C の長さを求めよ。

(2)　C で囲まれた領域の面積を求めよ。

[2017]



4 半直線 $l : y = x\ (x \geqq 0)$，放物線 $C : y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と半直線 l が接する点の座標を求めよ。

(2) $t \geqq 0$ とする。原点からの距離が t である l 上の点を $\mathrm{A}(t)$ とするとき，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線と，放物線 C の共有点の座標を t を用いて表せ。

(3) 放物線 C と半直線 l および y 軸とで囲まれた図形を，半直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2016]

5 放物線 $y = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$ を C とし，直線 $y = 2x - 1$ を l とする。

(1) 放物線 C が点 $(1,\ 1)$ で直線 l と接し，かつ x 軸と共有点をもつための $a,\ b,\ c$ が満たす必要十分条件を求めよ。

(2) $a = \dfrac{8}{9}$ のとき，(1)の条件のもとで，放物線 C と直線 l および x 軸とで囲まれた部分のうち，第 1 象限にある部分の面積を求めよ。 [2015]

6 曲線 $C : y = e^x$ について以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ e^p)$ における接線 l および法線 n の方程式を求めよ。

(2) $p > 0$ とする。C と l および y 軸で囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする。また，C と n および y 軸で囲まれる図形の面積を $T(p)$ とする。このとき極限 $\displaystyle\lim_{p \to \infty} \frac{pT(p)}{S(p)}$ を求めよ。 [2013]

7 点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円と，x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。ただし，回転させる図形は円の中心を含まないものとする。 [2011]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／極　限／微分法

積分法／積分の応用

問　題

θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。　[2018]

解答例

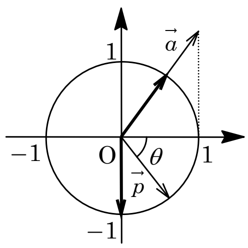
直線 $l: y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ に対し，$\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$l: y=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi=\sqrt{x^2+1}\cos\varphi$（$\varphi$ は $\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角）………(＊)

さて，θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を動くとき，(＊)の y のとりうる値の範囲を考えると，

(i)　$x \geqq 0$ のとき

右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値は，$\vec{p}$ が $\vec{a}$ と同じ向き $(\varphi=0)$ のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ -1)$ のとき最小になるので，

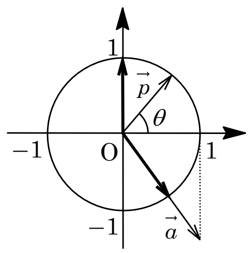


$$1\cdot 0+x\cdot(-1) \leqq \vec{a}\cdot\vec{p} \leqq \sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$-x \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$$

(ii)　$x<0$ のとき

右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値は，$\vec{p}$ が $\vec{a}$ と同じ向き $(\varphi=0)$ のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ 1)$ のとき最小になるので，



$$1\cdot 0+x\cdot 1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{p} \leqq \sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$x \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$$

(i)(ii)より，まとめると，$-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ である。

コメント

直線の通過領域の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここでは $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のセット，およびその係数に文字の入っていることに着目して内積を利用しました。なお，本問は結論が与えられていますので，不等式の証明という形での記述も可能です。

問　題

座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$ を考える。さらに，$0 \leqq \theta_1 \leqq \pi$，$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ に対し，$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)$，$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2 - b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2 + b_2\cos\theta_2)$ とおく。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ を示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \neq 0$ であるとする。$\theta_1 = \dfrac{\pi}{7}$ であるとき，θ_2 を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の半径を r_1 とし，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径を r_2 とする。また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とする。$\mathrm{AB}:\mathrm{DE} = 2:3$ であるとき，$\triangle\mathrm{ODE}$ の面積を，S，r_1，r_2 で表せ。なお，3 点 O, A, B は同一直線上にないものとし，3 点 O, D, E も同一直線上にないものとする。　[2017]

解答例

(1) 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)$ に対し，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 &= (a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1)^2 + (a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)^2\\ &= (a_1{}^2 + a_2{}^2)(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + 2a_1a_2(-\cos\theta_1\sin\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_1)\\ &= a_1{}^2 + a_2{}^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ である。

(2) $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$，$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2 - b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2 + b_2\cos\theta_2)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \neq 0$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= a_1b_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) - a_1b_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2)\\ &\quad - a_2b_1(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2) + a_2b_2(\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2)\\ &= (a_1b_1 + a_2b_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)\sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

すると，$a_1b_1 + a_2b_2 = 2(a_1b_1 + a_2b_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2(a_1b_2 - a_2b_1)\sin(\theta_1 - \theta_2)$ より，

$$(a_1b_1 + a_2b_2)\{2\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\} + 2(a_1b_2 - a_2b_1)\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$(a_1b_1 + a_2b_2)\{2\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\} = 0$ となり，$a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0$ から，

$$2\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 = 0,\ \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{7}$，$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ から，$-\dfrac{6}{7}\pi \leqq \theta_1 - \theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{7}$ となり，③より，

$$\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{3},\ \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{3} = \frac{10}{21}\pi$$

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径をそれぞれ r_1，r_2 とし，さらに $\angle\mathrm{AOB} = \varphi_1$，$\angle\mathrm{DOE} = \varphi_2$ とおくと，正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2r_1\sin\varphi_1\,,\ \ \mathrm{DE}=2r_2\sin\varphi_2$$

条件より $\mathrm{AB}:\mathrm{DE}=2:3$ なので $\mathrm{DE}=\dfrac{3}{2}\mathrm{AB}$ となり，$r_2\sin\varphi_2=\dfrac{3}{2}r_1\sin\varphi_1$ ………④

さて，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{ODE}$ の面積をそれぞれ $S,\ T$ とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\varphi_1\,,\ \ T=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\sin\varphi_2\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，(1)より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ となり，同様にして $\mathrm{OB}=\mathrm{OE}$ となるので，④⑤から，

$$T=\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}S=\frac{3}{2}r_1\cdot\frac{1}{r_2}S=\frac{3r_1}{2r_2}S$$

コメント

点と座標に関する総合問題です。なお，点 D は点 A を原点まわりに θ_1，点 E は点 B を原点まわりに θ_2 だけ回転した点として設定されています。

問　題

次の 3 条件をすべて満たす xy 平面上の円 C が存在するような実数 t を求めよ。

(i)　円 C の半径は 3 である。

(ii)　円 C は x 軸に接する。

(iii) 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は円 C 上にあり，点 P における円 C の接線の方程式は $y=2tx-t^2$ である。 [2012]

解答例

(a)　$t\neq 0$ のとき

条件より，半径 3 の円 C は x 軸に接し，しかも y 座標が正の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通るので，a を定数として，その中心を $\mathrm{A}(a,\ 3)$ とおくことができる。

これより，円 C の方程式は，

$$(x-a)^2+(y-3)^2=9,\ (x-a)^2+y^2-6y=0$$

そして，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通ることより，$(t-a)^2+t^4-6t^2=0$ ………①

また，点 P における円 C の接線の方程式が $y=2tx-t^2$ より，その方向ベクトルを $\vec{u}$ とおくと，$\vec{u}=(1,\ 2t)$ と表せる。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t-a,\ t^2-3)$ と $\vec{u}$ は垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{u}=0$ より，

$$(t-a)+2t(t^2-3)=0 \text{ ………②}$$

①②より，$4t^2(t^2-3)^2+t^4-6t^2=0$ となり，$t^2(4t^4-24t^2+36+t^2-6)=0$ から，

$$t^2(4t^4-23t^2+30)=0,\ t^2(t^2-2)(4t^2-15)=0$$

よって，$t\neq 0$ から $t=\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ である。

なお，それぞれの t の値に対して，②から a の値は 1 つずつ決まる。

(b)　$t=0$ のとき

半径 3 の円 C は x 軸に接し，しかも点 $\mathrm{P}(0,\ 0)$ を通るので，その中心は $(0,\ 3)$ または $(0,\ -3)$ となる。そして，P における C の接線の方程式は，どちらも $y=0$ なので，条件を満たしている。

(a)(b)より，求める t の値は，$t=0,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ である。

コメント

円を題材にした基本的な問題です。①と②の連立方程式を解くことがポイントです。なお，うっかり $t=0$ の場合を失念していましたが……。

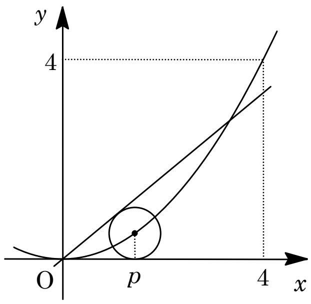
問　題

$0<p<4$ とし，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の点 $\left(p,\ \dfrac{1}{4}p^2\right)$ を中心にして，半径が $\dfrac{1}{4}p^2$ の円 C をかく。次に，$m>0$ とし，直線 $y=mx$ が円 C に接しているとする。

(1) m を p の式で表せ。

(2) 放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と直線 $y=mx$ によって囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{3}$ のとき，m と p の値を求めよ。 [2010]

解答例



(1) $0<p<4$ のとき，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ ……① 上の点 $\left(p,\ \dfrac{1}{4}p^2\right)$ を中心とし，半径が $\dfrac{1}{4}p^2$ の円 C の方程式は，

$$(x-p)^2+\left(y-\frac{1}{4}p^2\right)^2=\frac{1}{16}p^4$$

そして，直線 $y=mx$ $(m>0)$ ……②，すなわち $mx-y=0$ が円 C に接していることより，

$$\frac{\left|mp-\frac{1}{4}p^2\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{4}p^2,\ \left|mp-\frac{1}{4}p^2\right|=\frac{1}{4}p^2\sqrt{m^2+1}$$

$0<p<4$ より，$|4m-p|=p\sqrt{m^2+1}$ となり，

$$(4m-p)^2=p^2(m^2+1),\ 16m^2-8pm=p^2m^2$$

すると，$m>0$ から，$16m-8p=p^2m$ となり，$m=\dfrac{8p}{16-p^2}$ ……③である。

(2) ①②を連立すると，$\dfrac{1}{4}x^2=mx$ から，$x=0,\ 4m$ となる。

そこで，放物線①と直線②によって囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{4m}\left(mx-\frac{1}{4}x^2\right)dx=-\frac{1}{4}\int_0^{4m}x(x-4m)\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)(4m)^3=\frac{8}{3}m^3$$

条件より $S=\dfrac{1}{3}$ なので，$\dfrac{8}{3}m^3=\dfrac{1}{3}$ から $m=\dfrac{1}{2}$ となる。

さらに，③より $\dfrac{1}{2}=\dfrac{8p}{16-p^2}$ となり，$16-p^2=16p$ すなわち $p^2+16p-16=0$

そして，$0<p<4$ から，$p=-8+4\sqrt{5}$ となる。

コメント

円と接線，および定積分と面積に関する基本題です。

問　題

$0<t<3$ を満たす実数 t に対し，平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C を次の条件(a)，(b)を満たすようにとる。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

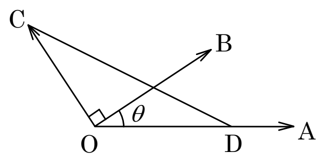
線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，△OCD の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2018]

解答例

条件(a)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ に対し，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$ ………①

条件(b)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$ ……②，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ ……③

ここで，$0<t<3$ より，①から $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，②から $\angle\mathrm{AOC}$ は鈍角となり，③より $\angle\mathrm{BOC}$ は直角なので，



$$\angle\mathrm{AOC}=\theta+\frac{\pi}{2}$$

すると，②より，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=t-3$

$$-\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\theta=t-3,\ \ \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\frac{3-t}{\sin\theta}\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，線分 OA を $t:1$ に内分する点 D に対して，△OCD の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\theta$$

④を代入すると，$S(t)=\dfrac{t}{2(t+1)}\cdot\dfrac{3-t}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\dfrac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}$ となり，①から，

$$S(t)=\frac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot(t+1)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

よって，$S(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

コメント

ベクトルの内積が絡んだ形式をしていますが，内容は三角比の応用です。

問　題

3 つのベクトル$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ s,\ t)$，$\vec{c}=(p,\ q,\ 2)$が次の条件を満たすような，s, t, p, qの値を求めよ。

(i)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　　(ii)　$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角は$60°$

(iii)　$\vec{c}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の両方に直交する。　[2014]

解答例

$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ s,\ t)$，$\vec{c}=(p,\ q,\ 2)$に対し，条件(i)から$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$より，

$$4+1+1=4+s^2+t^2,\ \ s^2+t^2=2 \cdots\cdots\cdots①$$

また，条件(ii)から$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°$より，$4+s+t=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2}$となり，

$$s+t=-1 \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，条件(iii)から$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$かつ$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$より，

$$2p+q+2=0 \cdots\cdots\cdots③,\ \ 2p+sq+2t=0 \cdots\cdots\cdots④$$

①②より，$s^2+(-1-s)^2=2$から，$2s^2+2s-1=0$となり，

$$s=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\ \ t=\frac{-1\mp\sqrt{3}}{2}$$ （以下，複号同順）

③④より，$(s-1)q+2t-2=0$となり，

$$q=\frac{-2t+2}{s-1}=\frac{2(3\pm\sqrt{3})}{-3\pm\sqrt{3}}=-\frac{2(3\pm\sqrt{3})^2}{6}=-4\mp2\sqrt{3}$$

$$p=\frac{1}{2}(4\pm2\sqrt{3}-2)=1\pm\sqrt{3}$$

コメント

ベクトルの成分計算についての基本題です。

問　題

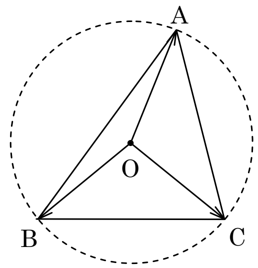
$\triangle$ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。$|\vec{a}|=1$ とする。点 O に関する点 P の位置ベクトルが $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ であるとする。

(1)　直線 AP と直線 BC は垂直に交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ とする。OP // AB のとき，$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ となる実数 s, t を求めよ。

[2011]

解答例



(1)　外心 O の$\triangle$ABC に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{b}+\vec{c}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{b}+\vec{c})=-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=0$$

よって，直線 AP と直線 BC は垂直に交わる。

(2)　まず，OP // AB より，k を定数として，

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=k(\vec{b}-\vec{a})\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}\cdots\cdots②$より，①は$\vec{a}+\vec{b}+(s\vec{a}+t\vec{b})=k\vec{b}-k\vec{a}$ となり，

$$(1+s)\vec{a}+(1+t)\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$$

すると，$\vec{a}$, $\vec{b}$は 1 次独立なので，$1+s=-k$ かつ $1+t=k$ より，

$$(1+s)+(1+t)=0,\ \ s+t=-2\cdots\cdots\cdots③$$

また，②から$|\vec{c}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$ となり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ より，

$$1=s^2-\frac{3}{2}st+t^2,\ \ (s+t)^2-\frac{7}{2}st=1\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$4-\dfrac{7}{2}st=1$，$st=\dfrac{6}{7}\cdots\cdots\cdots⑤$

③⑤より, s, t は 2 次方程式 $x^2+2x+\dfrac{6}{7}=0$ の 2 つの解 $x=-1\pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ となるので，

$$(s,\ t)=\left(-1+\frac{1}{\sqrt{7}},\ -1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\ \left(-1-\frac{1}{\sqrt{7}},\ -1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は「直線 AP」という表現から$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\neq\vec{0}$ のもとで考えています。また，(2)は(1)とは独立に，与えられた 2 つの条件を s と t の連立方程式に翻訳するという方針で解いています。

問　題

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{OB}\perp\mathrm{CA}$ ならば，$\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$ となることを証明せよ。 [2010]

解答例

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{OB}\perp\mathrm{CA}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\ \cdots\cdots\cdots①,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

②より，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

まとめると，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

よって，$\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$ である。

コメント

空間ベクトルの図形への応用について，基本事項の確認問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2)　n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。　[2019]

解答例

(1)　自然数 n に対し，$2^n=(3-1)^n$ に注意して二項定理を適用すると，

$$2^n-1=(3-1)^n-1\equiv(-1)^n-1 \pmod 3$$

そこで，m を自然数とし，n を偶奇に場合分けして，以下，mod 3 で記すと，

(i)　n が偶数 $(n=2m)$ のとき　$2^n-1\equiv(-1)^{2m}-1\equiv 1-1\equiv 0$

(ii)　n が奇数 $(n=2m-1)$ のとき　$2^n-1\equiv(-1)^{2m-1}-1\equiv -1-1\equiv -2\equiv 1$

(i)(ii)より，2^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，$n=2m$ (m は自然数)である。

(2)　k を 0 以上の整数として，n を $n=3k+l$ $(l=1,\ 2,\ 3)$ とおくと，二項定理より，

$$n^n-1=(3k+l)^n-1\equiv l^n-1 \pmod 3$$

そこで，n を $n=3k+l$ $(l=1,\ 2,\ 3)$ に場合分けして，以下，mod 3 で記すと，

(i)　$n=3k+1$ のとき　$n^n-1\equiv 1^n-1\equiv 1-1\equiv 0$

(ii)　$n=3k+2$ のとき　$n^n-1\equiv 2^n-1$ となり，(1)から，

(ii-i)　n が偶数のとき　$2^n-1\equiv 0$

(ii-ii)　n が奇数のとき　$2^n-1\equiv 1$

(iii)　$n=3k+3$ のとき　$n^n-1\equiv 3^n-1\equiv 0^n-1\equiv 0-1\equiv -1\equiv 2$

(i)(ii)より，n^n-1 が 3 で割り切れる自然数 n は，

$$n=3k+1,\quad n=3k+2\ (n\text{ は偶数})$$

そこで，n を自然数 m を用いて表すと，

$$n=3(m-1)+1=3m-2,\quad n=3(2m-2)+2=6m-4$$

コメント

整数問題の定番の 1 つです。類題にかすかな記憶があったので調べたところ，2003 年に一橋大で出題されていました。

問　題

数列$\{a_n\}$は，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-1}{4a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$を満たすとする。

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$に対し，$a_n>\dfrac{1}{2}$であることを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$で定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　数列$\{a_n\}$が$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-1}{4a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$で定義されているとき，すべての自然数nに対して，$a_n>\dfrac{1}{2}$を数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=1>\dfrac{1}{2}$より成立している。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k>\dfrac{1}{2}$と仮定する。

$$a_{k+1}-\frac{1}{2}=\frac{7a_k-1}{4a_k+3}-\frac{1}{2}=\frac{14a_k-2-4a_k-3}{2(4a_k+3)}=\frac{5(2a_k-1)}{2(4a_k+3)}>0$$

$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数nに対して，$a_n>\dfrac{1}{2}$である。

(2)　$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$のとき，$b_1=\dfrac{2}{2a_1-1}=2$である。

さて，(1)から，$\dfrac{2a_{n+1}-1}{2}=\dfrac{5(2a_n-1)}{2(4a_n+3)}$となるので，

$$b_{n+1}=\frac{2}{2a_{n+1}-1}=\frac{2(4a_n+3)}{5(2a_n-1)}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2(2a_n-1)+5}{2a_n-1}=\frac{2}{5}\left(2+\frac{5}{2a_n-1}\right)$$
$$=\frac{4}{5}+\frac{2}{2a_n-1}=\frac{4}{5}+b_n$$

よって，$b_n=b_1+\dfrac{4}{5}(n-1)=2+\dfrac{4}{5}n-\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{5}n+\dfrac{6}{5}$である。

コメント

誘導つきの漸化式の問題です。(2)は(1)のプロセスに注目して式変形をしています。

問　題

群に分けられた数列

$$1 \mid 2, 4, 2 \mid 3, 6, 9, 6, 3 \mid 4, 8, 12, 16, 12, 8, 4 \mid \cdots\cdots$$

を，第 n 群が $(2n-1)$ 個の項

$$n,\ 2n,\ \cdots\cdots,\ (n-2)n,\ (n-1)n,\ n^2,\ (n-1)n,\ (n-2)n,\ \cdots\cdots,\ 2n,\ n$$

からなるものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの項数を求めよ。

(2) 第 n 群に含まれる項の総和を求めよ。

(3) 最初に現れる 2016 は，この数列の第何項か。 [2016]

解答例

(1) 第 n 群が $(2n-1)$ 個の項からなる数列の第 n 群の末項までの項数は,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2$$

(2) 第 n 群に含まれる項の総和は,

$$n+2n+\cdots+(n-1)n+n^2+(n-1)n+\cdots+2n+n$$
$$=2\{1+2+\cdots+(n-1)+n\}n-n^2=n^2(n+1)-n^2=n^3$$

(3) 2016 が第 n 群の前半部にあり，その k 項目であるとすると,

$$kn=2016\cdots\cdots\cdots①,\ \ k\leqq n\cdots\cdots\cdots②$$

①より $k=\dfrac{2016}{n}$ となり，②に代入すると $\dfrac{2016}{n}\leqq n$ から，$n^2\geqq 2016$ となり,

$$n\geqq\sqrt{2016}=\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 7}=12\sqrt{14}\cdots\cdots\cdots③$$

したがって，n は③を満たす $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ の約数である。

ここで，$3.7<\sqrt{14}<3.8$ から，$44.4<12\sqrt{14}<45.6$ となるので，③を満たす 2016 の最小の約数 n は 48 である。

よって，①から $k=42$ となり，最初に現れる 2016 は第 48 群の 42 項目となる。すると，(1)から，与えられた数列の第 (47^2+42) 項，つまり第 2251 項である。

コメント

典型的な群数列の問題ですが，(3)の設問は一癖ありました。

問　題

n を自然数とする。

(1) n 以下の非負の整数 k について，関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。 [2015]

解答例

(1) $f(x)=x(1+x)^n$ とおくと，二項定理から，

$$f(x)={}_n\mathrm{C}_0x+{}_n\mathrm{C}_1x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_kx^{k+1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^{n+1}$$

$$f'(x)={}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+(k+1){}_n\mathrm{C}_kx^k+\cdots+(n+1){}_n\mathrm{C}_nx^n$$

よって，$f'(x)$ の x^k の係数は，$(k+1){}_n\mathrm{C}_k$ である。

(2) $g(x)=xf'(x)$ とおくと，

$$g(x)={}_n\mathrm{C}_0x+2{}_n\mathrm{C}_1x^2+\cdots+(k+1){}_n\mathrm{C}_kx^{k+1}+\cdots+(n+1){}_n\mathrm{C}_nx^{n+1}$$

$$g'(x)={}_n\mathrm{C}_0+2^2{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_kx^k+\cdots+(n+1)^2{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=g'(1)$ ………①

さて，$g'(x)=\big(xf'(x)\big)'=f'(x)+xf''(x)$ となり，

$$f'(x)=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}$$

$$f''(x)=(n+1)(1+x)^{n-1}+(n-1)\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-2}$$

すると，$g'(1)=f'(1)+1\cdot f''(1)$ から，

$$\begin{aligned}g'(1)&=(n+2)2^{n-1}+(n+1)2^{n-1}+(n-1)(n+2)2^{n-2}\\&=(4n+6)2^{n-2}+(n^2+n-2)2^{n-2}=(n^2+5n+4)2^{n-2}\\&=(n+1)(n+4)2^{n-2}\ \cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$

①②より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$

コメント

二項展開の問題です。(2)は $xf'(x)$ を考えるところがポイントですが，(1)を誘導とみると，この着眼は困難ではないでしょう。

問　題

円$x^2+(y-1)^2=1$をC, 円$(x-2)^2+(y-1)^2=1$をC_0とする。C, C_0, x軸に接する円をC_1とする。C, C_1, x 軸に接しC_0と異なる円をC_2とし, これを繰り返して C, C_n, x 軸に接しC_{n-1}と異なる円をC_{n+1}とする。また, 円C_nの半径をa_nとする。このとき, 次の問いに答えよ。

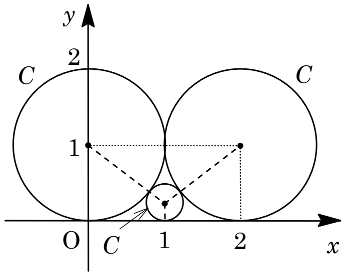
(1)　a_1を求めよ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$とするとき, 数列$\{b_n\}$の満たす漸化式を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　[2015]

解答例

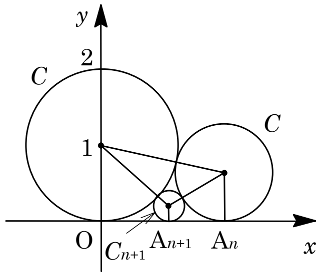
(1)　$C: x^2+(y-1)^2=1$, $C_0:(x-2)^2+(y-1)^2=1$に対し, C, C_0, x軸に接する円C_1とする。C_1は中心のx座標が対称性から 1 となり, その半径をa_1とすると, CとC_1が接することより,



$$\sqrt{(1+a_1)^2-(1-a_1)^2}=1$$

すると, $2\sqrt{a_1}=1$から$\sqrt{a_1}=\dfrac{1}{2}$となり, $a_1=\dfrac{1}{4}$

(2)　C, C_n, x軸に接する円C_{n+1}に対し, C_n, C_{n+1}とx軸との接点をそれぞれA_n, A_{n+1}とおく。またC_n, C_{n+1}の半径がそれぞれa_n, a_{n+1}より,



$$\mathrm{OA}_n=\sqrt{(1+a_n)^2-(1-a_n)^2}=2\sqrt{a_n}$$

$$\mathrm{OA}_{n+1}=\sqrt{(1+a_{n+1})^2-(1-a_{n+1})^2}=2\sqrt{a_{n+1}}$$

$$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}=\sqrt{(a_n+a_{n+1})^2-(a_n-a_{n+1})^2}=2\sqrt{a_na_{n+1}}$$

すると, $\mathrm{OA}_n=\mathrm{OA}_{n+1}+\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$より, $2\sqrt{a_n}=2\sqrt{a_{n+1}}+2\sqrt{a_na_{n+1}}$となり,

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}+1$$

ここで, $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$とすると, $b_1=\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}=2$で, $b_{n+1}=b_n+1$となる。

(3)　(2)より, $b_n=2+(n-1)\cdot 1=n+1$となるので, $a_n=\dfrac{1}{{b_n}^2}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

コメント

図形と漸化式についての超頻出問題です。立式には, 2 円が外接するとき中心間距離が半径の和に等しいことを利用しています。

問　題

n を 0 以上の整数とする。$n+1$ 個の自然数 2^0，2^1，…，2^n の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか。ただし，x を超えない最大の整数を表す記号 $[x]$ を用いて解答してよい。

注：たとえば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり，14225 の最上位の桁の数字は 1 である。 [2014]

解答例

2^n が m 桁の整数で，最上位の桁の数字が 1 であるとすると，

$$10^{m-1} \leqq 2^n < 2\times 10^{m-1} \cdots\cdots\cdots ⓐ$$

ここで，各辺に対数をとると，$\log_2 10^{m-1} \leqq \log_2 2^n < \log_2(2\times 10^{m-1})$

$$(m-1)\log_2 10 \leqq n < 1+(m-1)\log_2 10 \cdots\cdots\cdots ⓑ$$

ⓑより，どんな m に対してもⓐを満たす整数 n が 1 つずつ存在する。

すると，2^0，2^1，…，2^n の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものの個数は，2^n の桁数 m の値に等しくなる。

そこで，2^n が m 桁の整数とすると，ⓐと同様にして，

$$10^{m-1} \leqq 2^n < 10^m,\ m-1 \leqq n\log_{10} 2 < m,\ m \leqq n\log_{10} 2+1 < m+1$$

以上より，2^0，2^1，…，2^n の中で，最上位の桁の数字が 1 であるものの個数は，

$$[\log_{10} 2+1] = [\log_{10} 2]+1$$

コメント

まず具体的に考え，1 桁の数では $2^0=1$ のみ，2 桁の数では $2^4=16$ のみ，3 桁の数では $2^7=128$ のみ，4 桁の数では $2^{10}=1024$ のみ，…と計算していくと，求める個数は 2^n の桁数であると推測できます。

問　題

(1)　式 $1=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$で，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$となるものをすべて求めよ。

(2) rを正の有理数とする。式 $r=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$で，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$となるものは有限個しかないことを証明せよ。ただし，そのような組が存在しない場合は0個とし，有限個であるとみなす。　[2013]

解答例

(1)　自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$に対して，条件より，$1=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$ ………①

ここで，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$より，$1\geqq\dfrac{1}{a_1}\geqq\dfrac{1}{a_2}\geqq\dfrac{1}{a_3}>0$となり，①から，

$$1\leqq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}=\frac{3}{a_1}$$

よって，$a_1\leqq 3$から，$a_1=1,\ 2,\ 3$となる。

(i)　$a_1=1$のとき　①より$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=0$となり，不適である。

(ii)　$a_1=2$のとき　①より$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{2}$となり，

$$a_2a_3=2a_2+2a_3,\ (a_2-2)(a_3-2)=4$$

ここで，$0\leqq a_2-2\leqq a_3-2$から，$(a_2-2,\ a_3-2)=(1,\ 4),\ (2,\ 2)$となり，

$$(a_2,\ a_3)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$$

(iii)　$a_1=3$のとき　①より$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{2}{3}$となり，

$$2a_2a_3=3a_2+3a_3,\ 4a_2a_3=6a_2+6a_3,\ (2a_2-3)(2a_3-3)=9$$

ここで，$3\leqq 2a_2-3\leqq 2a_3-3$から，$(2a_2-3,\ 2a_3-3)=(3,\ 3)$となり，

$$(a_2,\ a_3)=(3,\ 3)$$

(i)～(iii)より，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

(2)　rを正の有理数とし，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$である自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$に対して，

$$r=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(1)と同様にすると，②から，$r\leqq\dfrac{3}{a_1}$となり，$1\leqq a_1\leqq\dfrac{3}{r}$ ………③

すると，$\dfrac{3}{r}<1\ (r>3)$のとき，③を満たす自然数a_1は存在しない。

また，$\dfrac{3}{r}\geqq 1\ (0<r\leqq 3)$のとき，③を満たす自然数$a_1$は有限個存在し，その1つを$a_1=\alpha\ \left(1\leqq\alpha\leqq\dfrac{3}{r}\right)$とおくと，②は$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=r-\dfrac{1}{\alpha}$となる。

さらに，$r-\dfrac{1}{\alpha}=s$ とおきかえると，有理数 s に対して，

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=s\cdots\cdots\cdots④$$

すると，$s\leqq 0$ のとき，④を満たす自然数 a_2，a_3 は存在しない。

また，$s>0$ のとき，p と q を互いに素な自然数として，$s=\dfrac{q}{p}$ とおく。

このとき，④は，$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{q}{p}$ と表せ，

$$qa_2a_3=pa_2+pa_3,\ q^2a_2a_3=pqa_2+pqa_3,\ (qa_2-p)(qa_3-p)=p^2$$

すると，qa_2-p と qa_3-p は p^2 の約数となり，自然数 a_2，a_3 は存在しても有限個である。

以上より，②を満たす自然数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ で，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$ であるものは有限個しかない。

コメント

(1)では，a_1 を求めた後，a_2，a_3 を同時に求めるために，因数分解をもとに約数・倍数の関係を利用しました。(2)も同じ方法で解答例を作りましたが，やや散漫な感じです。そのため，(1)で a_1 を絞り込んだ後も，不等式で評価して a_2 そして a_3 と順に求め，(2)も同じ方法にした方がスッキリしたかもしれません。

問　題

n を 3 以上の整数とする。1, 2, …, n の n 個の数から異なる 3 個を選んで，それらを小さい順に a, b, c とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n=8$ のとき，$a+b=c$ となる 3 個の数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか。

(2)　一般の n について，$a+b=c$ となる 3 個の数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか。

[2019]

解答例

(1)　1, 2, …, 8 の 8 個の数から異なる 3 個を選んで，それらを小さい順に a, b, c とするとき，$a+b=c$ となるのは $3\leqq c\leqq 8$ より，

(i)　$c=3$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 2)$

(ii)　$c=4$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 3)$

(iii)　$c=5$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)$

(iv)　$c=6$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)$

(v)　$c=7$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$

(vi)　$c=8$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5)$

(i)〜(vi)より，$(a,\ b,\ c)$ は $1+1+2+2+3+3=12$ 通りある。

(2)　1, 2, …, n の n 個の数から異なる 3 個を選んで，それらを小さい順に a, b, c とするとき，$a+b=c$ となるのは $3\leqq c\leqq n$ であり，ここで $k\geqq 1$ として，

(i)　$c=2k+1$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 2k),\ (2,\ 2k-1),\ \cdots,\ (k,\ k+1)$

このときの $(a,\ b,\ c)$ の組の数を N_{2k+1} とすると，$N_{2k+1}=k$ である。

(ii)　$c=2k+2$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 2k+1),\ (2,\ 2k),\ \cdots,\ (k,\ k+2)$

このときの $(a,\ b,\ c)$ の組の数を N_{2k+2} とすると，$N_{2k+2}=k$ である。

さて，求める $(a,\ b,\ c)$ の組の数 N について，n を偶奇に分けて調べる。ここで，$m\geqq 1$ として，$n\geqq 3$ に注意すると，

(I)　n が奇数 $(n=2m+1)$ のとき

$$N=\sum_{k=1}^{m}N_{2k+1}+\sum_{k=1}^{m-1}N_{2k+2}=\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m-1}k=m+2\sum_{k=1}^{m-1}k=m+2\cdot\frac{1}{2}(m-1)m$$

$$=m^2=\frac{1}{4}(n-1)^2\quad(m\geqq 2)$$

なお，この式は $m=1\ (n=3)$ のときも成立している。

(II)　n が偶数 $(n=2m+2)$ のとき

$$N=\sum_{k=1}^{m}N_{2k+1}+\sum_{k=1}^{m}N_{2k+2}=\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}k=2\sum_{k=1}^{m}k=2\cdot\frac{1}{2}m(m+1)$$

$$=m(m+1)=\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{1}{4}n(n-2)$$

コメント

数え上げるタイプの場合の数の問題です。(2)については，一般的な解法で記しました。ただ，時間が不足したときは「帰納的な」処理も……。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2) 1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3) $n=5$ のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。　[2016]

解答例

(1) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，勝者がただ 1 人に決まるのは，勝者の選び方が ${}_n\mathrm{C}_1 = n$ 通りで，手の出方が 3 通りである。

これより，この場合の確率は，$\dfrac{n\cdot 3}{3^n} = \dfrac{n}{3^{n-1}}$ である。

(2) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，あいこにならないのは，2 種類の手が出た場合である。このとき，種類の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り，出方が 2^n-2 通りとなり，その確率は，$\dfrac{3(2^n-2)}{3^n} = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$ である。

よって，あいこになる確率は，$1-\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} = \dfrac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$ である。

(3) 5 人でじゃんけんをし，2 回のじゃんけんで勝者がただ 1 人に決まるのは，

(i) 5 人→5 人→1 人のとき

5 人→5 人の確率は(2)より $\dfrac{3^4-2^5+2}{3^4} = \dfrac{17}{3^3}$，5 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{5}{3^4}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{17}{3^3}\cdot\dfrac{5}{3^4} = \dfrac{85}{3^7}$ である。

(ii) 5 人→4 人→1 人のとき

5 人→4 人は敗者がただ 1 人決まると考え，その確率は(1)から $\dfrac{5}{3^4}$，4 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{4}{3^3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{5}{3^4}\cdot\dfrac{4}{3^3} = \dfrac{20}{3^7}$ である。

(iii) 5 人→3 人→1 人のとき

5 人→3 人は勝者の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り，手の出方が 3 通りより，その確率は $\dfrac{10\cdot 3}{3^5} = \dfrac{10}{3^4}$ となる。3 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{3}{3^2}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{3}{3^2} = \dfrac{30}{3^6}$ である。

(iv) 5 人→2 人→1 人のとき

5 人→2 人は敗者が 3 人決まると考え，その確率は(iii)から $\dfrac{10}{3^4}$，2 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{2}{3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{20}{3^5}$ である。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{85}{3^7}+\dfrac{20}{3^7}+\dfrac{30}{3^6}+\dfrac{20}{3^5}=\dfrac{375}{3^7}=\dfrac{125}{729}$

コメント

じゃんけんを題材としたよく見かける確率問題ですが，意外なほど手こずります。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　n 個の実数 a_1，a_2，…，a_n に対して，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ が成立することを示せ。

また，等号が成立するための a_1，a_2，…，a_n についての必要十分条件を求めよ。

(2)　偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\frac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし，サイコロが偏りをもつとは，1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう。　[2015]

解答例

(1)　まず，$n=1$ のときは，$\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2 = 1\cdot\sum_{k=1}^{1} {a_k}^2$ である。

以下，$n \geqq 2$ のとき，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ が成立することを，数学的帰納法で示す。

(i)　$n=2$ のとき

$$2({a_1}^2+{a_2}^2)-(a_1+a_2)^2 = {a_1}^2+{a_2}^2-2a_1a_2 = (a_1-a_2)^2 \geqq 0$$

よって，$\left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right)^2 \leqq 2\sum_{k=1}^{2} {a_k}^2$ が成立する。等号成立は $a_1=a_2$ のときである。

(ii)　$n=k$ のとき

$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2 \leqq k({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2)$ の成立を仮定する。なお，等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_k$ のときとする。

$$(k+1)({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2+{a_{k+1}}^2)-(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2$$
$$\geqq k{a_{k+1}}^2+({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2+{a_{k+1}}^2)-2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}-{a_{k+1}}^2$$
$$=({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2)-2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}+k{a_{k+1}}^2$$
$$=(a_1-a_{k+1})^2+(a_2-a_{k+1})^2+\cdots+(a_k-a_{k+1})^2 \geqq 0$$

等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$ のときである。

(i)(ii)より，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ （等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき）

(2)　偏りをもつサイコロに対して，k の目が出る確率を p_k とする。

すると，$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ で，$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6$ は成り立たない。ここで，このサイコロを 2 回投げ，同じ目が続けて出る確率 P は，

$$P={p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2$$

さて，(1)の不等式より，$\left(\sum_{k=1}^{6} p_k\right)^2 \leqq 6\sum_{k=1}^{6} {p_k}^2$ なので，

$$P \geqq \frac{1}{6}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)^2 = \frac{1}{6}$$

等号は $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ のときのみ成立するので，$P > \frac{1}{6}$ となる。すなわち，同じ目が続けて出る確率は $\frac{1}{6}$ よりも大きい。

コメント

一見，不等式の証明と確率の小問集合の形に見えますが，(1)は(2)の誘導となっていました。なお，(1)は，コーシー・シュワルツの不等式の特別な場合の証明です。

問　題

3 個の玉が横に 1 列に並んでいる。コインを 1 回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える。また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える。この操作を繰り返す。

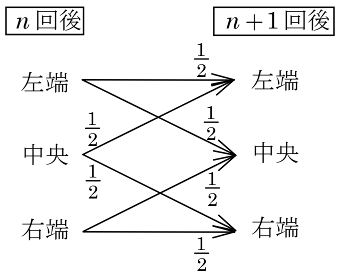
(1)　最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ。

(2)　最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ。　　　　　[2014]

解答例

(1)　最初に中央にあった玉が，与えられた操作を n 回繰り返した後，左端，中央，右端のある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

すると，$a_1 = c_1 = \frac{1}{2}$，$b_1 = 0$ のもとで，



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots\cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$a_n + b_n + c_n = 1$ に注意すると，②から，

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) = \frac{1}{2}(1 - b_n) = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ④$$

④を $b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$ と変形して，

$$b_n - \frac{1}{3} = \left(b_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，n 回後に中央にある確率 b_n は，$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

(2)　最初に右端にあった玉が，与えられた操作を n 回繰り返した後，左端，中央，右端のある確率を，(1)と同様に，それぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

すると，①②③が成り立ち，$a_1 = 0$，$b_1 = c_1 = \frac{1}{2}$ のもとで，④から，

$$b_n - \frac{1}{3} = \left(b_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これより，$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，③に代入すると，

$$c_{n+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで，⑤を満たす 1 つの数列を $c_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$（$\alpha$，$\beta$ は定数）とおくと，

$$\alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{\alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

すると，$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{6}$ かつ $-\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{6}$ となり，$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$ なので，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥から，$c_{n+1}-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=\frac{1}{2}\left[c_n-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\right]$ となるので，

$$c_n-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}=\left[c_1-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1}\right\}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって，n 回後に右端にある確率 c_n は，$c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ である。

コメント

漸化式を立式するのが有効な確率の問題です。なお，漸化式⑤は普通に解いたのですが，両辺に 2^{n+1} をかけるという方法でも構いません。詳しくは「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問　題

さいころを 1000 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回出る確率を P_k とおく。P_k が最大となる k を求めよ。 [2012]

解答例

さいころを 1000 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回出る確率 P_k は,

$$P_k = {}_{1000}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k} = \frac{1000!}{k!\,(1000-k)!}\cdot\frac{5^{1000-k}}{6^{1000}}$$

すると，$P_{k+1} = \dfrac{1000!}{(k+1)!\,(999-k)!}\cdot\dfrac{5^{999-k}}{6^{1000}}$ となり,

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{1000!}{(k+1)!\,(999-k)!}\cdot\frac{5^{999-k}}{6^{1000}}\cdot\frac{k!\,(1000-k)!}{1000!}\cdot\frac{6^{1000}}{5^{1000-k}} = \frac{1000-k}{5(k+1)}$$

ここで，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k} > 1$ とすると，$\dfrac{1000-k}{5(k+1)} > 1$ から $1000-k > 5k+5$ となり,

$$6k < 995,\ \ k < \frac{995}{6} = 165 + \frac{5}{6}$$

これより，$k \leqq 165$ のとき $P_{k+1} > P_k$，$k \geqq 166$ のとき $P_{k+1} < P_k$ となり,

$$P_0 < P_1 < \cdots < P_{165} < P_{166} > P_{167} > \cdots > P_{1000}$$

よって，$k = 166$ のとき P_k は最大となる。

コメント

確率の最大に関する超有名頻出問題です。

問　題

硬貨 1 枚を投げたとき，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点を得るとする。硬貨を繰り返し投げて，合計得点が 10 点以上になったときに終了する。次の確率を求めよ。

(1)　7 回目に合計得点がちょうど 10 点になって終了する確率

(2)　終了時の合計得点が 10 点である確率　[2011]

解答例

(1)　硬貨 1 枚を投げ，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点を得るとするとき，表が a 回，裏が b 回出て，7 回目で合計 10 点になって終了するのは，

$$a+b=7\cdots\cdots\cdots①,\ \ 2a+b=10\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(a,\ b)=(3,\ 4)$となり，その確率は，

$${}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{2^7}=\frac{35}{128}$$

(2)　(1)と同様にして，k 回目で合計 10 点になって終了するのは，$5\leqq k\leqq 10$ として，

$$a+b=k\cdots\cdots\cdots③,\ \ 2a+b=10\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(a,\ b)=(10-k,\ 2k-10)$となり，その確率は，

$${}_k\mathrm{C}_{10-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-10}=\frac{{}_k\mathrm{C}_{10-k}}{2^k}$$

したがって，求める確率は，

$$\sum_{k=5}^{10}\frac{{}_k\mathrm{C}_{10-k}}{2^k}=\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{2^5}+\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{2^6}+\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{2^7}+\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{2^8}+\frac{{}_9\mathrm{C}_1}{2^9}+\frac{{}_{10}\mathrm{C}_{10}}{2^{10}}$$

$$=\frac{1}{2^5}+\frac{15}{2^6}+\frac{35}{2^7}+\frac{28}{2^8}+\frac{9}{2^9}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{683}{1024}$$

コメント

確率の基本的な問題です。

問　題

数直線上を動く点 P が，はじめ原点の位置にある。さいころを投げて，偶数の目が出れば P は正の向きに出た目の数だけ進み，奇数の目が出れば P は負の向きに出た目の数だけ進む。さいころを続けて 4 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　少なくとも 2 回は 2 の目が出て，最後に P の座標が 2 になる確率

(2)　最後に P の座標が 2 になる確率　[2010]

解答例

(1)　さいころを 4 回投げて，1, 3, 5, 4, 6 の目が，それぞれ a 回，b 回，c 回，d 回，e 回出て，題意のように点 P が進む。そして，最後に座標が 2 になる場合を考える。

(i)　2 の目が 4 回出るとき　最後に P の座標は 8 になり不適である。

(ii)　2 の目が 3 回出るとき　2 以外の目は 1 回出るので，

$$a+b+c+d+e=1\cdots\cdots\cdots①,\ \ -a-3b-5c+4d+6e=2-6\cdots\cdots\cdots②$$

①より，a, b, c, d, e はいずれかのみ 1 で，それ以外は 0 であるが，どの場合も②を満たさない。

(iii) 2 の目が 2 回出るとき　2 以外の目は 2 回出るので，

$$a+b+c+d+e=2\cdots\cdots\cdots③,\ \ -a-3b-5c+4d+6e=2-4\cdots\cdots\cdots④$$

④より，$a+3b+5c=4d+6e+2$，$a+b+c+(2b+4c)=4d+6e+2$

すると，$a+b+c$ は偶数になり，③からその値は 0 または 2 である。

(iii-i)　$a+b+c=0$ のとき　$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ となるが，④を満たさない。

(iii-ii)　$a+b+c=2$ のとき　③より $d+e=0$ となり，$(d,\ e)=(0,\ 0)$

④より，$a+3b+5c=2$ となり，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 0,\ 0)$ のみである。

よって，その確率は，$\dfrac{4!}{2!\,2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=6\left(\dfrac{1}{6}\right)^4=\dfrac{6}{6^4}$ である。

(i)～(iii)より，少なくとも 2 回は 2 の目が出て，最後に P の座標が 2 になる確率は，

$$\frac{6}{6^4}=\frac{1}{216}$$

(2)　(1)と同様に設定して，

(iv) 2 の目が 1 回出るとき　2 以外の目は 3 回出るので，

$$a+b+c+d+e=3\cdots\cdots\cdots⑤,\ \ -a-3b-5c+4d+6e=2-2\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑥から $a+b+c$ は偶数になり，⑤からその値は 0 または 2 である。

(iv-i)　$a+b+c=0$ のとき　$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ となるが，⑥を満たさない。

(iv-ii)　$a+b+c=2$ のとき　⑤より $d+e=1$ となり，$(d,\ e)=(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$

$(d,\ e)=(1,\ 0)$ のときは，⑥より $a+3b+5c=4$ となり，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 0)$

$(d,\ e)=(0,\ 1)$ のときは，⑥より $a+3b+5c=6$ となり，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 2,\ 0)$

よって，その確率は，$4!\left(\dfrac{1}{6}\right)^4+4!\left(\dfrac{1}{6}\right)^4+\dfrac{4!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^4=\dfrac{60}{6^4}$ である。

(v)　2 の目が出ないとき　2 以外の目は 4 回出るので，

$a+b+c+d+e=4\cdots\cdots\cdots⑦,\ -a-3b-5c+4d+6e=2\cdots\cdots\cdots⑧$

⑧から $a+b+c$ は偶数になり，⑦からその値は 0 または 2 または 4 である。

(v-i)　$a+b+c=0$ のとき　$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ となるが，⑧を満たさない。

(v-ii)　$a+b+c=2$ のとき　⑦より $d+e=2$ となり，

$(d,\ e)=(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0,\ 2)$

$(d,\ e)=(2,\ 0)$ のときは，⑧より $a+3b+5c=6$ となり，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 2,\ 0)$

$(d,\ e)=(1,\ 1)$ のときは，⑧より $a+3b+5c=8$ となり，$(a,\ b,\ c)=(0,\ 1,\ 1)$

$(d,\ e)=(0,\ 2)$ のときは，⑧より $a+3b+5c=10$ となり，$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 2)$

(v-iii)　$a+b+c=4$ のとき　⑦より $d+e=0$ となるが，⑧を満たさない。

よって，その確率は，$\dfrac{4!}{2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^4+\dfrac{4!}{2!\,2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^4+4!\left(\dfrac{1}{6}\right)^4+\dfrac{4!}{2!\,2!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^4=\dfrac{48}{6^4}$ である。

(i)～(v)より，最後に P の座標が 2 になる確率は，

$$\frac{6}{6^4}+\frac{60}{6^4}+\frac{48}{6^4}=\frac{19}{6^3}=\frac{19}{216}$$

コメント

場合分けを丁寧に行うタイプの確率の問題ですが，かなり面倒です。なお，上の解答例では，(1)を誘導として，2 の目の出る回数で場合分けをしています。そして，$a+b+c$ が偶数という点に着目しました。