

2020 入試対策
過去問ライブラリー

東北大学

文系数学22か年

1998 - 2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には、1998 年度以降に出題された東北大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

本書の構成

- 1 本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
 - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
 - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
 - (3) 1 つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
 - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
 - (5) 出題の流れをウェブサイトを入試直前に確認する。

注 「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では、対応する問題と解答例のページの間にはハイパーリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号、解答編の **問題** の文字がリンク元です。

また、2013 年度以降に出題された問題は、その解答例の映像解説を YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の **解答例＋映像解説** です。

このハイパーリンクの作動状況について、PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

- 【PDF 版】** リンクが無効の場合、PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。
- 【Kindle 版】** 現状では、Kindle アプリで、リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	25
関 数	26
微分と積分	48
図形と式	68
図形と計量	77
ベクトル	84
整数と数列	101
確 率	110
論 証	137

分野別問題一覧

関数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

■ 関数 |||||

1 a を 1 ではない正の実数, n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

- (1) $n=6$ のとき, この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。
 (2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。 [2019]

2 p, q を実数とする。関数 $f(x) = x^2 + px + q$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最小値が 0 以上となる点 (p, q) 全体からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) pq 平面上に領域 D を図示せよ。
 (2) D の点 (p, q) で $q \leq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ。 [2017]

3 放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。
 (2) a, b を実数とする。関数 $y = -2|x-a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 (a, b) 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。
 (3) (2) で求めた領域 D の面積を求めよ。 [2016]

4 実数 x, y に対して, $A = 2\sin x + \sin y, B = 2\cos x + \cos y$ とおく。

- (1) $\cos(x-y)$ を A, B を用いて表せ。
 (2) x, y が $A=1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x, \cos x$ の値を求めよ。 [2014]

5 a を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式 $x^2 - 2(a+1)x + 3a = 0$ が, $-1 \leq x \leq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。
 (2) a が(1)で求めた範囲を動くとき, 放物線 $y = x^2 - 2(a+1)x + 3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ。 [2013]

〔6〕 関数 $f(x)$ を、 $f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right|$ と定める。

以下の問いに答えよ。

- (1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおく。 $f(x)$ を t の関数として表せ。
- (2) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また、 $f(x)$ が最大値をとる x は、 $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ。 [2012]

〔7〕 以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x に関する連立不等式 $x \geq -1$, $2 \cdot 3^x + a \cdot 3^{-x} \leq 1$ が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。
- (2) $x \geq -1$ を満たすすべての実数 x に対し、不等式 $3^x + a \cdot 3^{-x} \geq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。 [2011]

〔8〕 すべての実数 x に対して不等式 $2^{2x+2} + 2^x a + 1 - a > 0$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。 [2009]

〔9〕 a, b, c, d, e を実数とする。多項式 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとき、 a, b, c, d, e の値を求めよ。

$$(i) \quad x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad (ii) \quad f(1-x) = f(x) \quad (iii) \quad f(1) = 1 \quad [2008]$$

〔10〕 定数 a, b, c, p, q を整数とし、次の x と y の3つの多項式

$$P = (x+a)^2 - 9c^2(y+b)^2, \quad Q = (x+11)^2 + 13(x+11)y + 36y^2$$

$$R = x^2 + (p+2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p-14q)y - 77$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 多項式 P, Q, R を因数分解せよ。
- (2) P と Q , Q と R , R と P は、それぞれ x, y の1次式を共通因数としてもっているものとする。このときの整数 a, b, c, p, q を求めよ。 [2006]

〔11〕 複素数 z, w が条件 $\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{1}{w}$ を満たしている。ただし、 $z \neq \pm i$, $w \neq 0$ である。 z の実部、虚部をそれぞれ x, y とし、 w の実部、虚部をそれぞれ u, v とする。

- (1) $(z-w)^2$ を u と v で表せ。
- (2) $u = 0$ ならば、 $x = 0$ であることを示せ。
- (3) $u > 0, v > 0$, かつ w^2 の実部が1となるような x を求め、 u を用いて表せ。 [2004]

12 実数 a に対して、集合 A, B を

$$A = \{x \mid x^2 + (1 - a^2)x + a^3 - 2a^2 + a \leq 0, x \text{ は実数}\}$$

$$B = \{x \mid x^2 + (2a - 7)x + a^2 - 7a + 10 < 0, x \text{ は実数}\}$$

と定める。共通部分 $A \cap B$ が空集合でないための a の範囲を求めよ。 [2003]

13 2つの関数を

$$t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \quad y = -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta$$

とする。

(1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

(2) y を t の関数で表せ。

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 y の最大値、最小値とそのときの θ の値を求めよ。 [2003]

14 a, b は実数であり、方程式 $x^4 + (a+2)x^3 - (2a+2)x^2 + (b+1)x + a^3 = 0$ が解 $x = 1+i$ をもつとする。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする。このとき a, b を求めよ。また、このときの方程式の他の解も求めよ。 [2002]

15 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ として、 x の関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + \frac{2\cos \theta}{\sqrt{3}}x - 2\sin \theta$ と定める。

x が整数を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(\theta)$ とおく。

(1) θ が $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす場合に、 $m(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ。

(2) $m(\theta)$ が最小となる θ の値と、そのときの最小値を求めよ。 [2002]

16 等式 $x^2 + (i-2)x + 2ab + \left(\frac{b}{2} - 2a\right)i = 0$ を満たす実数 a, b が存在するような、実数 x の範囲を求めよ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。 [2000]

17 $|x^2 - 3x + 1| > |x^2 - 1| - |2x - 1|$ を満たす x の範囲を求めよ。 [2000]

18 三つの角 α, β, γ ($-90^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$) が

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

を満たすとき、 $\alpha + \beta + \gamma$ の値をすべて求めよ。 [1999]

19 p を 0 でない実数とし, 2 次方程式 $x^2 - px + 5p = 0$ を考える。

- (1) $x^2 - px + 5p = 0$ の解 α, β が $\alpha^5 + \beta^5 = p^5$ を満たすとする。このときの p の値を求めよ。
- (2) $x^2 - px + 5p = 0$ が虚数解をもち, その 5 乗が実数になるとする。このときの p の値を求めよ。

[1999]

■ 微分と積分 |||

1 実数 a は $0 < a < 4$ を満たすとする。 xy 平面の直線 $l: y = ax$ と曲線

$$C: y = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x < 4 \text{ のとき}) \\ 9a(x-4) & (x \geq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える。 C と l で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく。

- (1) C と l の交点の座標を求めよ。
- (2) $S(a)$ を求めよ。
- (3) $S(a)$ の最小値を求めよ。

[2018]

2 $a > 0$ を実数とする。関数 $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

- (1) $M(a)$ を求めよ。
- (2) 実数 $x > 0$ に対し, $g(x) = M(x)^2$ とおく。 xy 平面において, 関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s, g(s))$ で接する直線が原点を通るとき, 実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3) a が正の実数全体を動くとき, $k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。

[2015]

3 曲線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ における接線を l_1 , 点 $Q(b, b^2)$ における接線を l_2 とする。ただし, $a < b$ とする。 l_1 と l_2 の交点を R とし, 線分 PR , 線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする。

- (1) R の座標を a と b を用いて表せ。
- (2) S を a と b を用いて表せ。
- (3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ。

[2014]

4 t は $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数とする。放物線 $y = x^2$ ，直線 $x = 1$ ，および x 軸とで囲まれた図形を A ，放物線 $y = 4(x-t)^2$ と直線 $y = 1$ とで囲まれた図形を B とする。 A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) $0 \leq t \leq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。 [2013]

5 a を正の実数とし， $a \neq \frac{1}{2}$ とする。曲線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ と $Q(a, a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし，点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。 l と m の交点が C 上にあるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

[2012]

6 放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 l, m は垂直であるとする。

(1) l の接点の座標が (a, a^2) で与えられるとき， l, m の交点の座標を a を用いて表せ。

(2) l, m が y 軸に関して対称なとき， l, m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2011]

7 a を実数とし， $f(x) = x^3 + (2a-4)x^2 + (a^2-4a+4)x$ とおく。方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くとき， $y = f(x)$ の極大値を与える x について，点 $(x, f(x))$ が xy 平面上に描く図形を図示せよ。

[2008]

8 関数 $f(x)$ が， $f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(t)| dt$ を満たしているとする。このとき， $f(x)$ を求めよ。

[2007]

9 連立不等式 $1 \leq x \leq 2, y \leq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また、 a を定数とし、不等式 $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

- (1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。
- (2) (1)の範囲の a に対して、 D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。 [2006]

10 2つの曲線 $C: y = -x^2$ と $D: y = (x-a)^2 + b$ が1点で接している。曲線 D と曲線 $E: y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$ によって囲まれる部分の面積 S が最小となるように実数 a, b を定め、そのときの S を求めよ。 [2005]

11 曲線 $C: y = x^2 - 2$ と直線 $L: y = x$ があり、曲線 $D: y = -(x-a)^2 + b$ が L と接している。 C と L の2つの交点を結ぶ線分上に D と L の接点があるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) b を a で表し、 a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 2つの曲線 C と D によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) a が動くとき、(2)の面積 $S(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2004]

12 $t \geq 1$ において、関数 $f(t) = \int_{-1}^1 |(x-t+2)(x+t)| dx$ を最小にする t の値と、そのときの最小値を求めよ。 [2002]

13 2つの放物線 $C: y = -(x+1)^2$ と $D: y = (x-1)^2 + 1$ の2本の共通接線を求めよ。また、 C, D の2本の共通接線と C の囲む部分の面積を求めよ。 [2001]

14 a を正の定数とする。 $f(x) = ax + \int_0^1 \{f(t)\}^2 dt$ を満たす関数 $f(x)$ がただ一つしか存在しないように定数 a の値を定めよ。また、そのときの $f(x)$ を求めよ。 [1999]

15 2つの曲線 $y = x^2$ と $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ で囲まれた図形を S とする。ただし、 S は境界を含むものとする。

- (1) S の面積を求めよ。
- (2) 直線 $y = x + k$ が、 S と共通部分を持つための k の範囲を求めよ。 [1998]

■ 図形と式 |||||

1 a, b, c を実数とし、 a は 0 でないとする。 xy 平面上の直線 $y = ax$ と放物線 $y = x^2 + a$ が相異なる 2 点 $P(b, ab)$, $Q(c, ac)$ で交わっているとする。 $c = b^2$, $b < 0$ のとき、 a と b を求めよ。 [2019]

2 xy 平面における 2 つの放物線 $C: y = (x - a)^2 + b$, $D: y = -x^2$ を考える。
 (1) C と D が 2 点で交わり、その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき、 C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。
 (2) 実数 a, b が(1)の条件を満たすとき、 C と D の 2 交点を結ぶ直線は、放物線 $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ に接することを示せ。 [2018]

3 放物線 $C: y = x^2$ に対して、以下の問いに答えよ。
 (1) C 上の点 $P(a, a^2)$ を通り、 P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。
 (2) l を(1)で求めた直線とする。 $a \neq 0$ のとき、直線 $x = a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。
 (3) (2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し、 F の座標を求めよ。 [2010]

4 不等式 $2y > x + 1 + 3|x - 1|$ が表す座標平面上の領域を D とする。実数 a に対して、放物線 C を $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ で定める。このとき、 C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ。 [2009]

5 xy 平面の 3 点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, \sqrt{3})$ を頂点とする $\triangle ABC$ に対して以下の問いに答えよ。
 (1) $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して、点 $P(x, a)$ が $\triangle ABC$ に含まれるための x の範囲を求めよ。
 (2) (1)の定数 a に対して、(1)で求められた範囲を x が動くとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。
 (3) 点 $P(x, y)$ が $\triangle ABC$ に含まれるとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と、そのときの点 P の座標 (x, y) を求めよ。 [2007]

6 放物線 $y = (x - p)^2 - 2$ が、3 点 $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$ を頂点とする三角形と交わるような実数 p の範囲を求めよ。 [2001]

7 2 つの正の数 a, b に対し、 xy 平面上の 3 点を $A(-a, 0)$, $B(0, b)$, $C(a, 0)$ とする。 $0 < t < 1$ である各 t に対し、線分 AB と BC を $t : 1 - t$ に内分する点をそれぞれ $P(t)$, $Q(t)$ とし、さらに線分 $P(t)Q(t)$ を $t : 1 - t$ に内分する点を $R(t)$ とし、点 $R(t)$, $0 \leq t \leq 1$ の描く曲線を R とする。ただし、 $R(0) = A$, $R(1) = C$ とする。

- (1) 曲線 R を x と y で表せ。
- (2) 2 点 $P(t)$, $Q(t)$ を結ぶ直線 $l(t)$ の方程式を求め、 $l(t)$ が、点 $R(t)$ で曲線 R に接することを示せ。
- (3) 三角形 ABC 内で直線 $l(t)$, $0 \leq t \leq 1$ が通る点の領域を図示し、その面積 S を求めよ。ただし、 $l(0)$ は点 A, B を通る直線とし、 $l(1)$ は点 B, C を通る直線とする。

[2000]

8 2 点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ を考える。線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が $\angle OPB = \angle QPA$ (O : 原点) をみたしている。直線 OP の傾きを m として、 Q の x 座標を m を用いて表せ。 [1998]

■ 図形と計量 |||||

1 鋭角三角形 $\triangle ABC$ において、頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ。
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。 [2016]

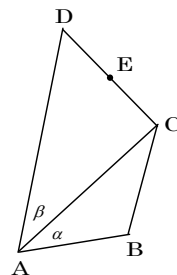
2 $t > 0$ を実数とする。座標平面において、3 点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
- (2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。 t が(1)で求めた範囲を動くとき、三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。 [2015]

3 $\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して、 $\angle A$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また、線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ $5, 3, 4$ とする。 $\angle A = \theta$ とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\theta < \frac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし、 $\sqrt{2} = 1.414\dots$, $\sqrt{3} = 1.732\dots$ を用いてもよい。 [2007]

4 すべての内角が 180° より小さい四角形 $ABCD$ がある。辺の長さが $AB = BC = r$, $AD = 2r$ とする。さらに、辺 CD 上に点 E があり、3 つの三角形 $\triangle ABC$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$ の面積はすべて等しいとする。 $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CAD$ とおく。



- (1) $\alpha = \beta$ を示せ。
- (2) $\cos \angle DAB = \frac{3}{5}$ であるとするとき、 $\sin \angle CAE$ の値を求めよ。

[2005]

5 四角形 $OABC$ は辺 OA を下底、辺 CB を上底とし、 $\angle AOC$ と $\angle OAB$ が等しい等脚台形である。 $a = |\overrightarrow{OA}|$, $c = |\overrightarrow{OC}|$, $m = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ とおく。

- (1) $m < \frac{a^2}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 等脚台形 $OABC$ の面積 S を a, c, m を用いて表せ。
- (3) 対角線 OB と AC の交点を D とするとき、 \overrightarrow{OD} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OC} を用いて表せ。

[2004]

■ ベクトル |||||

1 空間内に四面体 $ABCD$ がある。辺 AB の中点を M , 辺 CD の中点を N とする。 t を 0 でない実数とし、点 G を、 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (t-2)\overrightarrow{GC} + t\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ を満たす点とする。

- (1) \overrightarrow{DG} を \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{DC} で表せ。
- (2) 点 G は点 N と一致しないことを示せ。
- (3) 直線 NG と直線 MC は平行であることを示せ。

[2018]

2 s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において、辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし、辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ とするとき、 α と β を求めよ。
- (2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。 FG の長さが最大となるときの s を求めよ。 [2017]

3 平面上で原点 O と 3 点 $A(3, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-1, 1)$ を考える。実数 s, t に対し、点 P を、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) s, t が条件 $-1 \leq s \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$, $-1 \leq s+t \leq 1$ を満たすとき、点 $P(x, y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。
- (2) 点 P が(1)で求めた範囲 D を動くとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$ の最大値を求め、そのときの P の座標を求めよ。 [2016]

4 t を正の実数とする。三角形 OAB の辺 OA を $2:1$ に内分する点を M 、辺 OB を $t:1$ に内分する点を N とする。線分 AN と線分 BM の交点を P とする。

- (1) \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} および t を用いて表せ。
- (2) 直線 OP は線分 BM と直交し、かつ $\angle AOB$ の二等分線であるとする。このとき、辺 OA と辺 OB の長さの比と t の値を求めよ。 [2014]

5 四面体 $OABC$ において、 $OA = OB = OC = 1$ とする。 $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle BOC = 45^\circ$, $\angle COA = 45^\circ$ とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き、その交点を H とする。

- (1) ベクトル \overrightarrow{OH} を \vec{a} と \vec{b} を用いて表せ。
- (2) CH の長さを求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。 [2013]

6 平面上のベクトル \vec{a} , \vec{b} が、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ を満たすとする。ただし、記号 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は \vec{a} と \vec{b} の内積を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 p, q に対して、 $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく。このとき、次の条件 $|\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $p > 0$ を満たす実数 p, q を求めよ。
- (2) 平面上のベクトル \vec{x} が、 $-1 \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq 1$, $1 \leq \vec{b} \cdot \vec{x} \leq 2$ を満たすとき、 $|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。 [2012]

7 三角形 OAB の辺 AB を 1:2 に内分する点を C とする。動点 D は $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$ ($x \geq 1$) を満たすとし、直線 CD と直線 OB の交点を E とする。

(1) 実数 y を $\overrightarrow{OE} = y\overrightarrow{OB}$ で定めるとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

(2) 三角形 OAB の面積を S 、三角形 ODE の面積を T とするとき、 $\frac{S}{T}$ の最大値と、そのときの x を求めよ。 [2011]

8 四面体 ABCD において、辺 AB の中点を M、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式 $|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$ を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式 $|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$ を満たしながら動くとき、内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

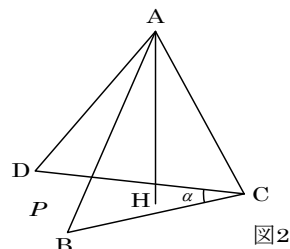
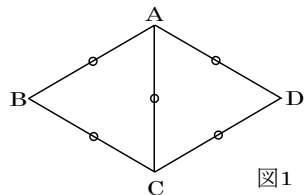
(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。 [2010]

9 辺 AB の長さが 1、 $\angle A$ が直角となる三角形 $\triangle ABC$ がある。辺 BC 上を点 C から点 B まで動く点 D を考え、内積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ を t とおく。以下の問いに答えよ。

(1) t の動く範囲を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$ が成り立つとき、 t の値を求めよ。 [2009]

10 図 1 のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 $ABCD$ を考える。この四角形 $ABCD$ を AC で折り、図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α ($\alpha = \angle BCD$) とし、 $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ とする。以下の問いに答えよ。



- (1) 図 2 において、 A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。 \overrightarrow{AH} を \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{CD} と α とで表せ。
- (2) \overrightarrow{AH} の長さを α を用いて表せ。
- (3) H が図 2 における $\triangle BCD$ の重心となるときの角度 α を求めよ。

[2006]

11 $0 < t < \frac{1}{2}$ とし、平面上のベクトル \vec{a} , \vec{b} と単位ベクトル \vec{e} が

$$(i) (1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e} \quad (ii) (1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e})$$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル \vec{x} があって、 $\vec{x} - \vec{a}$ と $\vec{x} - \vec{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1-t$ となるとする。このとき、内積 $\vec{x} \cdot \vec{e}$ を t で表せ。

[2005]

12 三角形 ABC において、 $AB = 1$, $AC = 2$, $\angle A = 60^\circ$ とする。正の数 m, n に対し、辺 BC, CA, AB を $m : n$ の比に内分する点を順に D, E, F とする。

- (1) \overrightarrow{DE} と \overrightarrow{EF} が垂直であるときの比 $m : n$ を求めよ。
- (2) どのような正の整数 m, n に対しても、 \overrightarrow{AD} と \overrightarrow{EF} は垂直でないことを示せ。

[2003]

13 四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし、 $\vec{p} = \overrightarrow{LP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{MQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{NR}$ とおく。

- (1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。
- (2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ を用いて表せ。
- (3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。 X を $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{LP}$ となる空間の点とするとき、四面体 $XABC$ の体積を $|\vec{p}|, |\vec{q}|, |\vec{r}|$ を用いて表せ。

[2001]

■ 整数と数列 |||||

1 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2}a_n = 2a_{n+1}^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての正の整数 n について, a_n は正であることを示せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。 [2019]

2 a を 3 で割り切れない正の整数とする。 a を 3 で割ったときの商を b , 余りを c とする。次の問いに答えよ。

(1) $c = 2$ のとき, $2a + 1 = as + 3t$ を満たす負でない整数 s, t を b を用いて表せ。

(2) n を $n \geq 2a - 2$ を満たす整数とする。このとき $n = as + 3t$ を満たす負でない整数 s, t が存在することを示せ。 [2017]

3 ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ, ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として, 可能性のある組 (l, m, n) をすべて求めよ。 [2016]

4 次の性質をもつ数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 3, a_{n+1} > a_n, a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $a_n + a_{n+2}$ を a_{n+1} を用いて表せ。

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2015]

5 平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$, $OA_1 = 1$, $OA_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たすとする。

A_2 から OA_1 へ垂線を下ろし, 交点を A_3 とする。 A_3 から OA_2 へ垂線を下ろし, 交点を A_4 とする。以下同様に, $k = 4, 5, \dots$ について, A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし, 交点を A_{k+1} として, 順番に A_5, A_6, \dots を定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $A_k A_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) を求めよ。

(2) $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ とおくととき, 自然数 n に対して $\sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ を求めよ。ただし,

$\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ は \vec{h}_k と \vec{h}_{k+1} の内積を表す。 [2008]

2 n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2) $p(2)$ を求めよ。

(3) $p(n-1)$ を求めよ。 [2018]

3 A 君と B 君はそれぞれ, 0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は, 自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし, 0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して, しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が整数でなく, かつ, B 君の得点より大きい確率を求めよ。 [2017]

4 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし, x の 2 次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0$ ……(*)を考える。

(1) 方程式(*)が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式(*)が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ。 [2015]

5 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ, 合計 10 個ある。

(1) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と, 4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。 [2014]

6 A, B の 2 人が、サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし、その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし、以下の問いに答えよ。

- (1) B がちょうど 1 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。
- (2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。
- (3) B がちょうど 2 回投げて、その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

7 袋 A, 袋 B のそれぞれに、1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

- (1) $N = 4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し、数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし、取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後、数字が一致していた回数を X とする。 $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また、 X の期待値を求めよ。
- (2) $N = 3$ とし、 n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し、カードの数字が一致していたら、そのカードを取り除き、一致していなかったら、元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし、 n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。 p_n と q_n を求めよ。

[2012]

8 先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり、玉の入った箱がある。箱の中には最初、赤玉 3 個、白玉 7 個、全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって、1 の目が出たら A が、2 または 3 の目が出たら B が、その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず、取り出した生徒のものとする。この操作を 2 回続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし、サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし、また、箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

- (1) A が 2 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。
- (2) B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。

[2011]

9 数直線上を動く点 P がある。裏表の出る確率が等しい硬貨を 2 枚投げて、2 枚とも表が出たら P は正の向きに 1 だけ移動し、2 枚とも裏が出たら P は負の向きに 1 だけ移動し、それ以外のときはその位置にとどまるものとする。 P が原点 O を出発点として、このような試行を n 回繰り返して到着した位置を S_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $S_2 = -1$ となる確率を求めよ。
- (2) $S_3 = 1$ となる確率を求めよ。
- (3) 試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とするとき、 S_n を求めよ。
- (4) k を整数とするとき、 $S_n = k$ となる確率を求めよ。 [2010]

10 袋の中に青玉が 7 個、赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。
- (2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。
- (3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。 [2009]

11 点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り、出た目の数を k とする。

P の座標 a について、 $a > 0$ ならば座標 $a - k$ の点へ移動し、 $a < 0$ ならば座標 $a + k$ の点へ移動する。

(ii) 原点に移動したら終了し、そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) P の座標が 1, 2, ..., 6 のいずれかであるとき、ちょうど 2 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。
- (2) P の座標が 1, 2, ..., 6 のいずれかであるとき、ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。
- (3) P の座標が 7 であるとき、ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。 [2008]

12 1 から 6 の番号のつけられた 6 個の箱に、それぞれ 3 枚ずつの皿が重ねて置かれている。白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ 1 個を同時に振って、出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする。2 つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない。2 つのサイコロに異なる目が出たときは、黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿 1 枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す。

- (1) サイコロを 3 回振るとき、皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなる確率を求めよ。
- (2) サイコロを 3 回振るとき、皿が 3 枚の箱が 2 個, 5 枚の箱, 4 枚の箱, 2 枚の箱, 1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率を求めよ。 [2005]

13 A, B, C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは、以後のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんをくり返し、最後に残った者を勝者とする。ただし、あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える。

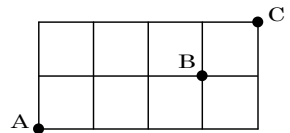
- (1) 1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (2) 2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (3) 3 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (4) $n \geq 4$ とする。 n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。 [2004]

14 ある人がバス停 A で A 発 B 行きのバスに乗り、バス停 B で B 発 C 行きのバスに乗りかえてバス停 C へ向かうものとする。バスの発車時刻、バス停での待ち時間、バスの乗車時間は次の 5 つの条件を満たすものとする。

1. A 発 B 行きおよび B 発 C 行きのバスは同時刻に 3 分おきで発車している。
2. バス停 A での待ち時間は 0 分または 1 分または 2 分で、それぞれの起こる確率は $\frac{1}{3}$ である。
3. バス停 B に到着後、最初に発車する C 行きのバスに乗りかえる。
4. A 発 B 行きのバスの乗車時間は 8 分または 10 分で、それぞれの起こる確率は $\frac{1}{2}$ である。
5. B 発 C 行きのバスの乗車時間は 6 分または 7 分で、それぞれの起こる確率は $\frac{1}{2}$ である。

ただし、条件 2, 4, 5 において、待ち時間、乗車時間の起こり方は独立であるとする。この人がバス停 A に到着後バス停 C へ到着するまでにかかる時間が n 分である確率 $P(n)$ を求めよ。 [2003]

15 右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し、サイコロを繰り返し振り、次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画, 2 の目が出たら右に 1 区画, 3 の目が出たら上に 1 区画進み, その他の場合はそのまま動かない。ただし, 右端で 1 または 2 の目が出たとき, あるいは上端で 3 の目が出たときは, 動かない。また, 右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは, 右端まで進んで止まる。



n を 7 以上の自然数とする。A 地点から出発し, サイコロを n 回振るとき, ちょうど 6 回目に, B 地点に止まらずに B 地点を通り過ぎ, n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし, サイコロのどの目が出るのも, 同様に確からしいものとする。

[2002]

16 袋の中に赤の玉と白の玉が合計 4 個入っている。1 回の試行では袋から 1 個の玉を無作為に取り出し, それが白であれば袋に戻し, 赤の玉の場合は戻さずに別に用意した白の玉 1 個を袋に入れる。

- (1) 最初は赤の玉と白の玉が 2 個ずつであるとして, 3 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。
- (2) 最初は赤の玉が 3 個, 白の玉が 1 個であるとして, 5 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。

[2001]

17 数直線上を, 原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り, その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし, 出た目が 2, 3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし, 出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき, さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

[2000]

18 白玉 3 個, 赤玉 4 個があるとし, 同じ色の玉は区別できないものとする。

- (1) 上の 7 個を 2 つの区別のついた袋 A, B に分けて入れる。入れる方法は何通りあるか。ただし, いずれの袋にも 7 個のうち少なくとも 1 個は入れるものとする。
- (2) 6 段の引き出しのついたタンスが 2 つあり, その中に上記の玉 7 個を分けて入れたい。ただし, どの引き出しにも 1 個しか入れないものとする。各タンスの引き出しは上から何段目か区別がつくが, 2 つのタンスは区別しないものとするれば, 入れる方法は何通りあるか。

[1998]

■ 論証 |||||

1 $f(x) = x^3$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $0 \leq a < x < y$ を満たすすべての a, x, y に対して、 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ が成り立つことを示せ。

(2) $y < x < b$ を満たすすべての x, y に対して、 $f(x) > \frac{(x - y)f(b) + (b - x)f(y)}{b - y}$ が成り立つような b の範囲を求めよ。 [2010]

2 $0 < a < b$ とし、 m, n を自然数とする。

$f(m) = \log \frac{a^m + b^m}{2}$, $g(m) = \frac{\log(a^m) + \log(b^m)}{2}$ とする。このとき、 $f(m + n)$, $f(m) + f(n)$, $g(m + n)$, $g(m) + g(n)$ を大きさの順に並べよ。ただし、対数は常用対数とする。 [1998]

分野別問題と解答例

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

a を 1 ではない正の実数, n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

- (1) $n=6$ のとき, この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。
 (2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。 [2019]

解答例+映像解説

(1) $a > 0, a \neq 1$ のとき, $\log_a(x-6) > \frac{1}{2}\log_a(12-x) \cdots \cdots \textcircled{1}$

$x-6 > 0$ かつ $12-x > 0$, すなわち $6 < x < 12 \cdots \cdots \textcircled{2}$ において,

$$2\log_a(x-6) > \log_a(12-x), \log_a(x-6)^2 > \log_a(12-x) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i) $0 < a < 1$ のとき $\textcircled{3}$ より, $(x-6)^2 < 12-x$ となり,

$$x^2 - 11x + 24 < 0, (x-3)(x-8) < 0$$

すると, $3 < x < 8$ となるが, $\textcircled{2}$ と合わせると $6 < x < 8$ である。

よって, $\textcircled{1}$ を満たす整数 x は $x=7$ となる。

(ii) $a > 1$ のとき $\textcircled{3}$ より, $(x-6)^2 > 12-x$ となり, $(x-3)(x-8) > 0$

すると, $x < 3, 8 < x$ となるが, $\textcircled{2}$ と合わせると $8 < x < 12$ である。

よって, $\textcircled{1}$ を満たす整数 x は $x=9, 10, 11$ となる。

(2) $a > 0, a \neq 1$ のとき, 正の整数 n に対し, $\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x) \cdots \cdots \textcircled{4}$

$x-n > 0$ かつ $2n-x > 0$, すなわち $n < x < 2n \cdots \cdots \textcircled{5}$ において,

$$2\log_a(x-n) > \log_a(2n-x), \log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x) \cdots \cdots \textcircled{6}$$

(i) $0 < a < 1$ のとき $\textcircled{6}$ より, $(x-n)^2 < 2n-x$ となり,

$$(x-n)^2 - (2n-x) < 0, x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n < 0$$

ここで, $f(x) = x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n$ とおくと,

$$f(n) = -n < 0, f(2n) = n^2 > 0$$

$\textcircled{5}$ の $x = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ について, $\textcircled{4}$ を満たす整数 x が存在する条件は,

$$f(n+1) = 1 - (n-1) = 2 - n < 0$$

よって, $n > 2$ から, n は 3 以上の整数である。

(ii) $a > 1$ のとき $\textcircled{6}$ より, $(x-n)^2 > 2n-x$ となり, $x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n > 0$

$f(n) < 0, f(2n) > 0$ に注意し, $\textcircled{5}$ の $x = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ について, $\textcircled{4}$

を満たす整数 x が存在する条件は,

$$f(2n-1) = (n-1)^2 - 1 = n(n-2) > 0, n > 2$$

よって, $n > 2$ から, n は 3 以上の整数である。

(i)(ii)より, ④を満たす整数 x が存在する必要十分条件は, n が 3 以上の整数である。

コメント

対数不等式を題材にした問題です。(2)は 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフを念頭に, 条件を数式化しています。

問題

p, q を実数とする。関数 $f(x) = x^2 + px + q$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最小値が 0 以上となる点 (p, q) 全体からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) pq 平面上に領域 D を図示せよ。
 (2) D の点 (p, q) で $q \leq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ。 [2017]

解答例+映像解説

(1) $f(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$ に対して、 $-1 \leq x \leq 2$ における最小値が 0 以上となる条件は、

(i) $-\frac{p}{2} < -1$ ($p > 2$) のとき $f(-1) = 1 - p + q \geq 0$ より、 $q \geq p - 1$

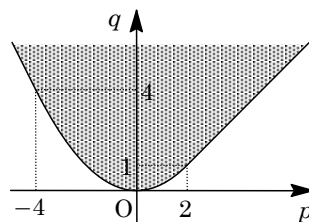
(ii) $-1 \leq -\frac{p}{2} \leq 2$ ($-4 \leq p \leq 2$) のとき $f\left(-\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2}{4} + q \geq 0$ より、 $q \geq \frac{p^2}{4}$

(iii) $-\frac{p}{2} > 2$ ($p < -4$) のとき

$f(2) = 4 + 2p + q \geq 0$ より、 $q \geq -2p - 4$

(i)~(iii)より、領域 D は右図の網点部となる。

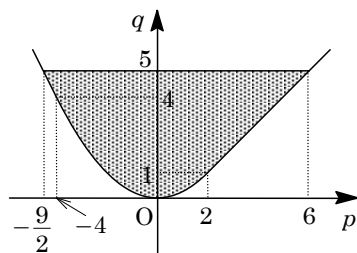
ただし、境界は領域に含まれる。



(2) D の $q \leq 5$ を満たす部分は右図の網点部となり、

その面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \left(6 + \frac{9}{2}\right) \cdot 5 - \frac{1}{2}(4 + 5)\left(-4 + \frac{9}{2}\right) \\ &\quad - \int_{-4}^2 \frac{p^2}{4} dp - \frac{1}{2}(1 + 5)(6 - 2) \\ &= \frac{105}{2} - \frac{9}{4} - \frac{1}{12}[p^3]_{-4}^2 - 12 \\ &= \frac{153}{4} - \frac{72}{12} = \frac{129}{4} \end{aligned}$$



コメント

2 次関数の最大・最小に関する典型問題です。また、(2)の面積計算は、長方形や台形の面積公式を利用しています。

問 題

放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。
- (2) a, b を実数とする。関数 $y = -2|x - a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど4個もつような点 (a, b) 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。
- (3) (2)で求めた領域 D の面積を求めよ。 [2016]

解答例+映像解説

- (1) $C: y = -\frac{1}{2}x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = -2|x| + k \cdots \cdots \textcircled{2}$ を連立すると、

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2|x| + k, \quad -\frac{1}{2}x^2 + 2|x| = k \cdots \cdots \textcircled{3}$$

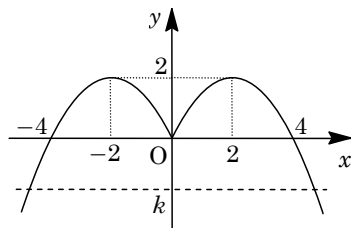
$\textcircled{1}\textcircled{2}$ が共有点をもつ条件は、方程式 $\textcircled{3}$ が実数解をもつ条件に対応し、さらに $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x| \cdots \cdots \textcircled{4}$ と $y = k$ が共有点をもつことに等しいので、 $\textcircled{4}$ より、

- (i) $x \geq 0$ のとき

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

- (ii) $x < 0$ のとき

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$$



したがって、 $\textcircled{4}$ のグラフは右図のようになり、求める条件は、 $k \leq 2$ である。

- (2) $y = -2|x - a| + b \cdots \cdots \textcircled{5}$ に対して、 $\textcircled{1}\textcircled{5}$ を連立すると、

$$-\frac{1}{2}x^2 = -2|x - a| + b, \quad -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a| = b \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{1}\textcircled{5}$ が4個の共有点をもつ条件は、方程式 $\textcircled{6}$ が4個の異なる実数解をもつ条件に対応し、さらに $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x - a| \cdots \cdots \textcircled{7}$ と $y = b$ が4個の共有点をもつことに等しいので、 $\textcircled{7}$ より、

- (i) $x \geq a$ のとき $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2(x - a) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2 - 2a \cdots \cdots \textcircled{8}$

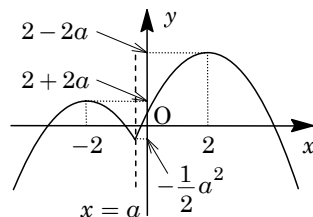
- (ii) $x < a$ のとき $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2(x - a) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2 + 2a \cdots \cdots \textcircled{9}$

すると、 $\textcircled{8}$ と $y = b$ が2個の共有点、 $\textcircled{9}$ と $y = b$ が2個の共有点をもつことになり、 $2 > a$ かつ $-2 < a$ から、 $-2 < a < 2$ であることが必要となる。

(a) $-2 < a < 0$ のとき

$2 - 2a > 2 + 2a$ となり, ⑦のグラフは右図のようになり, 求める条件は,

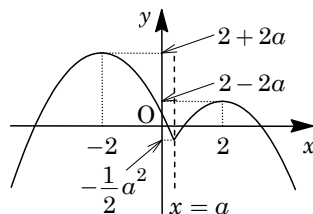
$$-\frac{1}{2}a^2 < b < 2 + 2a$$



(b) $0 \leq a < 2$ のとき

$2 - 2a \leq 2 + 2a$ となり, ⑦のグラフは右図のようになり, 求める条件は,

$$-\frac{1}{2}a^2 < b < 2 - 2a$$

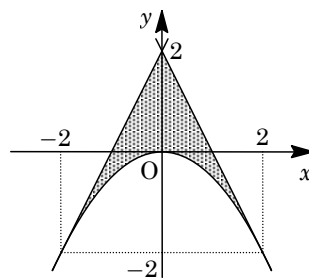


(a)(b)より, 点 (a, b) 全体のなす領域 D は xy 平面上で,

$$-\frac{1}{2}x^2 < y < 2 + 2x \quad (-2 < x < 0)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 < y < 2 - 2x \quad (0 \leq x < 2)$$

よって, D を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。



(3) 領域 D は y 軸対称なので, その面積 S は,

$$S = 2 \int_0^2 \left(2 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{3} \left[(x - 2)^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

コメント

絶対値つき関数を題材とした, グラフの共有点の個数に関する問題です。難しい計算はないものの, 量的にはかなり多めです。

問題

実数 x, y に対して, $A = 2\sin x + \sin y$, $B = 2\cos x + \cos y$ とおく。

- (1) $\cos(x - y)$ を A, B を用いて表せ。
 (2) x, y が $A = 1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x$, $\cos x$ の値を求めよ。 [2014]

解答例+映像解説

(1) $A = 2\sin x + \sin y \cdots \cdots \textcircled{1}$, $B = 2\cos x + \cos y \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して,

$$A^2 + B^2 = 4\sin^2 x + 4\sin x \sin y + \sin^2 y + 4\cos^2 x + 4\cos x \cos y + \cos^2 y$$

$$= 4 + 1 + 4\cos(x - y) = 5 + 4\cos(x - y)$$
 よって, $\cos(x - y) = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - 5) \cdots \cdots \textcircled{3}$

(2) $A = 1$ のとき, $\textcircled{3}$ より, $\cos(x - y) = \frac{1}{4}(1 + B^2 - 5) = \frac{B^2}{4} - 1$
 すると, $-1 \leq \cos(x - y) \leq 1$ より, $-1 \leq \frac{B^2}{4} - 1 \leq 1$ となり,

$$0 \leq B^2 \leq 8, \quad -2\sqrt{2} \leq B \leq 2\sqrt{2}$$
 ここで, $B^2 = 8$ ($B = \pm 2\sqrt{2}$) のとき, $\cos(x - y) = 1$ であり, n を整数として,

$$x - y = 2n\pi, \quad y = x - 2n\pi \cdots \cdots \textcircled{4}$$

(i) $B = 2\sqrt{2}$ のとき
 $\textcircled{1}$ より $2\sin x + \sin y = 1$, $\textcircled{2}$ より $2\cos x + \cos y = 2\sqrt{2}$ となり, $\textcircled{4}$ から,

$$2\sin x + \sin x = 1, \quad 2\cos x + \cos x = 2\sqrt{2}$$
 よって, $\sin x = \frac{1}{3}, \quad \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(ii) $B = -2\sqrt{2}$ のとき
 $\textcircled{1}$ より $2\sin x + \sin y = 1$, $\textcircled{2}$ より $2\cos x + \cos y = -2\sqrt{2}$ となり, $\textcircled{4}$ から,

$$2\sin x + \sin x = 1, \quad 2\cos x + \cos x = -2\sqrt{2}$$
 よって, $\sin x = \frac{1}{3}, \quad \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(i)(ii) より, B は $\sin x = \frac{1}{3}, \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとり, $\sin x = \frac{1}{3}, \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最小値 $-2\sqrt{2}$ をとる。

コメント

三角関数の加法定理についての有名問題の 1 つです。(2)では, 大雑把に評価して, そのあと細部を詰めています。

問題

a を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2次方程式 $x^2 - 2(a+1)x + 3a = 0$ が、 $-1 \leq x \leq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a が(1)で求めた範囲を動くとき、放物線 $y = x^2 - 2(a+1)x + 3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ。 [2013]

解答例+映像解説

- (1) 2次方程式 $x^2 - 2(a+1)x + 3a = 0$ ……①に対して、

$$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 3a = (x - a - 1)^2 - a^2 + a - 1$$

さて、①が $-1 \leq x \leq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつ条件は、

$$-a^2 + a - 1 < 0 \dots\dots\dots②, \quad -1 < a + 1 < 3 \dots\dots\dots③$$

$$f(-1) = 5a + 3 \geq 0 \dots\dots\dots④, \quad f(3) = -3a + 3 \geq 0 \dots\dots\dots⑤$$

②より $a^2 - a + 1 > 0$ となり、 $(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ から、つねに成立する。

③より $-2 < a < 2$ 、④より $a \geq -\frac{3}{5}$ 、⑤より $a \leq 1$ となる。

よって、求める条件は、 $-\frac{3}{5} \leq a \leq 1$

- (2) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標は、

$$y = -a^2 + a - 1 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

すると、 $-\frac{3}{5} \leq a \leq 1$ において、 $a = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $-\frac{3}{4}$ をとり、 $a = -\frac{3}{5}$ のとき最小値 $-\frac{49}{25}$ をとる。

これより、 y の取りうる値の範囲は、 $-\frac{49}{25} \leq y \leq -\frac{3}{4}$ である。

コメント

2次方程式の解の配置の定型的な問題です。なお、(1)は定数分離も考えましたが、(2)の設問から普通に解きました。

問題

関数 $f(x)$ を、 $f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right|$ と定める。以下

の問いに答えよ。

- (1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおく。 $f(x)$ を t の関数として表せ。
- (2) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) x が $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また、 $f(x)$ が最大値をとる x は、 $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ。 [2012]

解答例

- (1) 条件より、 $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおくと、

$$t^2 = \sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1$$

これより、 $f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right|$ に対して、

$$f(x) = \left| t^2 - 1 + t - \frac{5}{4} \right| = \left| t^2 + t - \frac{9}{4} \right|$$

- (2) $t = 2\sin(x+120^\circ)$ なので、 $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ のとき、 $120^\circ \leq x+120^\circ \leq 210^\circ$ から、
 $-1 \leq t \leq \sqrt{3}$

- (3) $f(x) = g(t)$ とおくと、 $g(t) = \left| \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} \right|$

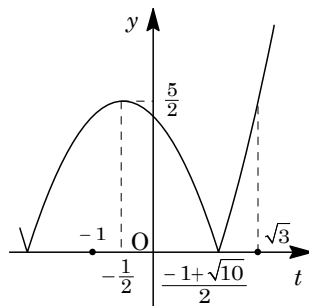
$$g(t) = 0 \text{ となるのは、 } t = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$$

すると、 $y = g(t)$ のグラフは右図のようになり、

$$g(\sqrt{3}) - g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{4}\right) - \frac{5}{2} = \sqrt{3} - \frac{7}{4} < 0$$

よって、 $f(x) = g(t)$ のとりうる値の範囲は、

$$0 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$$



また、 $f(x)$ が最大となるのは、 $t = 2\sin(x+120^\circ) = -\frac{1}{2}$ のとき、すなわち、
 $\sin(x+120^\circ) = -\frac{1}{4}$ ……(*)のときで、加法定理より、

$$\sin 195^\circ = -\sin 15^\circ = -\sin(45^\circ - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

すると、 $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{6 - (\sqrt{2} + 1)^2}{4(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1)} > 0$ より、(*)に対し、

$$-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} < -\frac{1}{4} < 0, \quad \sin 195^\circ < \sin(x+120^\circ) < \sin 180^\circ$$

よって、 $180^\circ < x+120^\circ < 195^\circ$ となり、 $60^\circ < x < 75^\circ$ である。

コメント

置き換えによって最大・最小を求める問題です。ただ、最後の詰めが……。

問題

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x に関する連立不等式 $x \geq -1, 2 \cdot 3^x + a \cdot 3^{-x} \leq 1$ が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。
- (2) $x \geq -1$ を満たすすべての実数 x に対し、不等式 $3^x + a \cdot 3^{-x} \geq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

[2011]

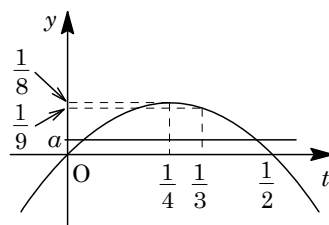
解答例

- (1) 条件より、 $2 \cdot 3^x + a \cdot 3^{-x} \leq 1$ は、 $t = 3^x$ とおくと、 $2t + \frac{a}{t} \leq 1$ となり、

$$a \leq -2t^2 + t, \quad a \leq -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、 $x \geq -1$ から、 $t \geq \frac{1}{3} \dots\dots\dots \textcircled{2}$

すると、連立不等式①②が解をもつ条件は、 $t \geq \frac{1}{3}$ と直線 $y = a$ が $y = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$ のグラフの下側にあ
る t の範囲に共通部分が存在することに対応する。



よって、右図より、 $a \leq \frac{1}{9}$ である。

- (2) (1)と同様にすると、 $3^x + a \cdot 3^{-x} \geq a$ は、 $t + \frac{a}{t} \geq a$ となり、

$$t^2 + a \geq at, \quad t^2 \geq a(t-1) \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

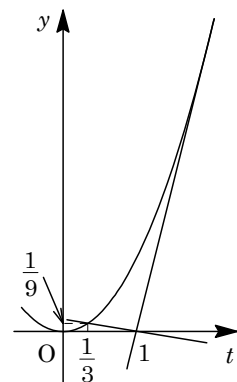
条件より、②のとき③がつねに成立する条件は、 $t \geq \frac{1}{3}$ において、 $y = t^2 \dots\dots\dots \textcircled{4}$ のグラフがつねに直線 $y = a(t-1) \dots\dots\dots \textcircled{5}$ の上側にあることに対応する。

⑤が点 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$ を通るとき、 $\frac{1}{9} = a(\frac{1}{3} - 1)$ から、 $a = -\frac{1}{6}$

④と⑤が接するとき、 $t^2 - a(t-1) = 0$ の判別式が、

$$D = a^2 - 4a = 0, \quad a = 0, 4$$

よって、右図から、求める a の範囲は、 $-\frac{1}{6} \leq a \leq 4$ となる。



コメント

指数不等式が題材ですが、置き換えれば 2 次不等式となります。どちらの設問も、グラフを用いて目で解いています。

問 題

すべての実数 x に対して不等式 $2^{2x+2} + 2^x a + 1 - a > 0$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。 [2009]

解答例

不等式 $2^{2x+2} + 2^x a + 1 - a > 0$ に対して、 $2^x = t > 0$ とおくと、

$$4t^2 + at + 1 - a > 0, \quad 4\left(t + \frac{a}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}a^2 - a + 1 > 0 \cdots \cdots (*)$$

すべての $t > 0$ に対して、 $(*)$ が成立する条件は、

(i) $-\frac{a}{8} > 0$ ($a < 0$) のとき

$$-\frac{1}{16}a^2 - a + 1 > 0 \text{ より, } a^2 + 16a - 16 < 0 \text{ となり, } a < 0 \text{ から,}$$

$$-8 - 4\sqrt{5} < a < 0$$

(ii) $-\frac{a}{8} \leq 0$ ($a \geq 0$) のとき

$$1 - a \geq 0 \text{ より, } a \leq 1 \text{ となり, } a \geq 0 \text{ から,}$$

$$0 \leq a \leq 1$$

(i)(ii) より, $-8 - 4\sqrt{5} < a \leq 1$

コメント

2次不等式の成立条件を、軸の位置で場合分けをするタイプの基本題です。

問題

a, b, c, d, e を実数とする。多項式 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとき, a, b, c, d, e の値を求めよ。

(i) $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ (ii) $f(1-x) = f(x)$ (iii) $f(1) = 1$ [2008]

解答例

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ に対し,

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 \left(\frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + e \right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

条件(i)より, $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ なので,

$$ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

よって, $a = e, b = d$ ……………①

これより, $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ となる。

さらに, 条件(iii)より $f(1) = 1$ なので, $2a + 2b + c = 1$ ……………②

また, 条件(ii)より, $f(1-x) = f(x)$ に $x = 0$ を代入すると, ①と合わせて,

$$f(1) = f(0), a = 1 \text{ ……………③}$$

さらに, 条件(ii)に $x = -1$ を代入すると, $f(2) = f(-1)$ より,

$$16a + 8b + 4c + 2b + a = a - b + c - b + a, 5a + 4b + c = 0 \text{ ……………④}$$

②③④より, $b = -2, c = 3$ となり, ①から,

$$a = 1, b = -2, c = 3, d = -2, e = 1$$

このとき, $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ となり, 条件(i)(ii)(iii)をすべて満たす。

コメント

条件(ii)が計算難なので, 数値代入で係数を決めています。

問題

定数 a, b, c, p, q を整数とし、次の x と y の 3 つの多項式

$$P = (x+a)^2 - 9c^2(y+b)^2, \quad Q = (x+11)^2 + 13(x+11)y + 36y^2$$

$$R = x^2 + (p+2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p-14q)y - 77$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 多項式 P, Q, R を因数分解せよ。
 (2) P と Q, Q と R, R と P は、それぞれ x, y の 1 次式を共通因数としてもっているものとする。このときの整数 a, b, c, p, q を求めよ。 [2006]

解答例

- (1) 多項式 P, Q, R を因数分解すると、

$$\begin{aligned} P &= (x+a)^2 - 9c^2(y+b)^2 = \{x+a+3c(y+b)\}\{x+a-3c(y+b)\} \\ &= (x+3cy+a+3bc)(x-3cy+a-3bc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= (x+11)^2 + 13(x+11)y + 36y^2 = (x+11+9y)(x+11+4y) \\ &= (x+9y+11)(x+4y+11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= x^2 + (p+2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p-14q)y - 77 \\ &= x^2 + (py+2qy+4)x + 2pqy^2 + (11p-14q)y - 77 \\ &= x^2 + (py+2qy+4)x + (py-7)(2qy+11) \\ &= (x+py-7)(x+2qy+11) \end{aligned}$$

- (2) まず、 P と Q が 1 次式を共通因数としてもち、しかも c が整数より、

(i) $3c = 9, a + 3bc = 11$ のとき $c = 3, a + 9b = 11$

(ii) $-3c = 9, a - 3bc = 11$ のとき $c = -3, a + 9b = 11$

(i)(ii)より、 $c = \pm 3, a + 9b = 11 \dots\dots\dots$ ①

また、 Q と R が 1 次式を共通因数としてもち、しかも q が整数より、

$$2q = 4, q = 2 \dots\dots\dots$$
②

①②より、 $P = (x+9y+11)(x-9y+a-9b), R = (x+py-7)(x+4y+11)$

さらに、 R と P が 1 次式を共通因数としてもち、しかも p が整数より、

$$p = -9, a - 9b = -7 \dots\dots\dots$$
③

①③より、 $a = 2, b = 1$

コメント

因数分解を題材とした基本問題です。ただ、注意を怠ると、(2)で(i)と(ii)の場合があるのを忘れてしまいます。

問題

複素数 z, w が条件 $\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{1}{w}$ を満たしている。ただし、 $z \neq \pm i, w \neq 0$ である。

z の実部、虚部をそれぞれ x, y とし、 w の実部、虚部をそれぞれ u, v とする。

- (1) $(z-w)^2$ を u と v で表せ。
- (2) $u = 0$ ならば、 $x = 0$ であることを示せ。
- (3) $u > 0, v > 0$, かつ w^2 の実部が 1 となるような x を求め、 u を用いて表せ。[2004]

解答例

(1) 条件より、 $\frac{1}{w} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{2z}{z^2+1}$

$z = 0$ では成立しないので $z \neq 0$ となり、 $w = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \dots\dots\dots \textcircled{1}$

$(z-w)^2 = \left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2z}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1 = w^2 - 1$

よって、 $(z-w)^2 = (u+vi)^2 - 1 = u^2 - v^2 - 1 + 2uvi \dots\dots\dots \textcircled{2}$

(2) $u = 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $z + \frac{1}{z}$ は純虚数なので、 k を実数として $z + \frac{1}{z} = ki$ となる。

$z^2 - kiz + 1 = 0, z = \frac{ki \pm \sqrt{-k^2 - 4}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}i$

よって、 z は純虚数より、 $x = 0$ である。

(3) $w^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$ の実部が 1 より、 $u^2 - v^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{3}$

このとき、 $\textcircled{2}$ より、 $(z-w)^2 = 2uvi, \{(x-u) + (y-v)i\}^2 = 2uvi$

$(x-u)^2 - (y-v)^2 + 2(x-u)(y-v)i = 2uvi$

x, y, u, v は実数なので、

$(x-u)^2 - (y-v)^2 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{4}, (x-u)(y-v) = uv \dots\dots\dots \textcircled{5}$

$\textcircled{4}$ より $y-v = \pm(x-u)$ となり、 $\textcircled{5}$ に代入すると、 $\pm(x-u)^2 = uv$

$u > 0, v > 0$ より、 $(x-u)^2 = uv, x = u \pm \sqrt{uv}$

$\textcircled{3}$ より $v = \sqrt{u^2 - 1}$ となるので、 $x = u \pm \sqrt{u\sqrt{u^2 - 1}}$

コメント

文字と関係式がたくさん現れ、方針に迷いが生じます。この交通整理の能力が問われます。

問題

実数 a に対して, 集合 A, B を

$$A = \{x \mid x^2 + (1 - a^2)x + a^3 - 2a^2 + a \leq 0, x \text{ は実数}\}$$

$$B = \{x \mid x^2 + (2a - 7)x + a^2 - 7a + 10 < 0, x \text{ は実数}\}$$

と定める。共通部分 $A \cap B$ が空集合でないための a の範囲を求めよ。 [2003]

解答例

まず, $x^2 + (1 - a^2)x + a^3 - 2a^2 + a \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ から,

$$x^2 + (1 - a^2)x + a(a - 1)^2 \leq 0, \{x - (a^2 - a)\}\{x - (a - 1)\} \leq 0$$

ここで, $(a^2 - a) - (a - 1) = (a - 1)^2 \geq 0$ より, $a^2 - a \geq a - 1$ となり, $\textcircled{1}$ の解は, $a - 1 \leq x \leq a^2 - a \cdots \cdots \textcircled{2}$ である。

次に, $x^2 + (2a - 7)x + a^2 - 7a + 10 < 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$ から,

$$x^2 + (2a - 7)x + (a - 2)(a - 5) < 0, (x + a - 2)(x + a - 5) < 0$$

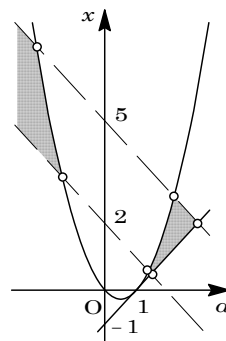
すると, $-a + 2 < -a + 5$ より, $\textcircled{3}$ の解は, $-a + 2 < x < -a + 5 \cdots \cdots \textcircled{4}$ である。

さて, $x = a - 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$, $x = a^2 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdots \cdots \textcircled{6}$,

$x = -a + 2 \cdots \cdots \textcircled{7}$, $x = -a + 5 \cdots \cdots \textcircled{8}$ のグラフをかき, $\textcircled{2}$ と $\textcircled{4}$ をともにみたす (a, x) を図示すると, 右図の網点部となる。

$\textcircled{6}$ と $\textcircled{7}$ の交点は, $a^2 - a = -a + 2$ より $a = \pm\sqrt{2}$, $\textcircled{5}$ と $\textcircled{8}$ の交点は, $a - 1 = -a + 5$ より $a = 3$ である。

以上より, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ をみたす x が存在する条件は, $a < -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a < 3$ である。



コメント

不等式の解が a の値で場合分けということを知覚して臨みましたが, 意外にも, その必要はありませんでした。なお, 後半は, $\textcircled{5} \sim \textcircled{8}$ の大小関係を把握するのにグラフを用いました。

問題

2つの関数を

$$t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \quad y = -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta$$

とする。

- (1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。
- (2) y を t の関数で表せ。
- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 y の最大値、最小値とそのときの θ の値を求めよ。 [2003]

解答例

$$\begin{aligned} (1) \quad t^3 &= (\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta \sin \theta + 9 \cos \theta \sin^2 \theta + 3\sqrt{3} \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta \sin \theta + 9 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + 3\sqrt{3} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= -8 \cos^3 \theta + 9 \cos \theta + 3\sqrt{3} \sin \theta = -2(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + 3 \cos \theta + 3\sqrt{3} \sin \theta \end{aligned}$$

3倍角の公式より、 $t^3 = -2 \cos 3\theta + 3t$ となり、 $\cos 3\theta = \frac{-t^3 + 3t}{2}$ である。

$$\begin{aligned} (2) \quad t^2 &= (\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta \sin \theta + 3 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \sin 2\theta + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta + 2 \end{aligned}$$

$$\text{これより、} \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta = -t^2 + 2$$

$$\begin{aligned} \text{すると、} y &= -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \\ &= -4 \cdot \frac{-t^3 + 3t}{2} - t^2 + 2 + 2t = 2t^3 - t^2 - 4t + 2 \end{aligned}$$

- (3) $t = 2 \sin(\theta + 30^\circ)$ と合成すると、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ から $30^\circ \leq \theta + 30^\circ \leq 210^\circ$ となり、 $-1 \leq t \leq 2$ である。

$$\begin{aligned} (2) \text{より、} y' &= 6t^2 - 2t - 4 \\ &= 2(3t + 2)(t - 1) \end{aligned}$$

右表より、 $t = 2$ のとき最大値 6 をとる。このとき $2 \sin(\theta + 30^\circ) = 2$ より、 $\theta + 30^\circ = 90^\circ$ すなわち $\theta = 60^\circ$ である。

また、 $t = 1$ のとき最小値 -1 をとる。このとき $2 \sin(\theta + 30^\circ) = 1$ より、 $\theta + 30^\circ = 30^\circ, 150^\circ$ すなわち $\theta = 0^\circ, 120^\circ$ である。

t	-1	...	$-\frac{2}{3}$...	1	...	2
y'		+	0	-	0	+	
y	3	↗	$\frac{98}{27}$	↘	-1	↗	6

コメント

(1)は、3倍角の公式が関係するようなので、とりあえず t の3乗を計算しました。すると、予測した通りでした。

問題

a, b は実数であり、方程式 $x^4 + (a+2)x^3 - (2a+2)x^2 + (b+1)x + a^3 = 0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする。このとき a, b を求めよ。また、このときの方程式の他の解も求めよ。 [2002]

解答例

$x^4 + (a+2)x^3 - (2a+2)x^2 + (b+1)x + a^3 = 0$ ……①に対して、 a, b が実数であることより、①が解 $x=1+i$ をもつとき、 $x=1-i$ も解になる。

すると、①の左辺は $x^2 - (1+i+1-i)x + (1+i)(1-i) = x^2 - 2x + 2$ で割り切れる。

そこで、①の左辺を $f(x)$ とおき、 $x^2 - 2x + 2$ で割ると、

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)\{x^2 + (a+4)x + 4\} + (-2a + b + 1)x + a^3 - 8$$

よって、 $-2a + b + 1 = 0$ ……②、 $a^3 - 8 = 0$ ……③

③より $a = 2$ 、②に代入して $b = 3$

このとき、 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 6x + 4)$ となり、 $x=1+i$ 以外の①の解は、 $x=1-i, -3 \pm \sqrt{5}$ である。

コメント

基本題です。計算ミスには注意。

問 題

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ として、 x の関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x - 2\sin\theta$ と定める。 x が整数を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(\theta)$ とおく。

(1) θ が $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす場合に、 $m(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ。

(2) $m(\theta)$ が最小となる θ の値と、そのときの最小値を求めよ。 [2002]

解答例

(1) $f(x) = x^2 + \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x - 2\sin\theta = \left(x + \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{\cos^2\theta}{3} - 2\sin\theta$ として、

$\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフの軸 $x = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}$ は、

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leq -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

x は整数値をとるので、 $x = -1$ のとき $f(x)$ は最小値をとる。

$$m(\theta) = 1 - \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}} - 2\sin\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta + 30^\circ)$$

ここで、 $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ なので、 $30^\circ \leq \theta + 30^\circ \leq 60^\circ$ となり、

$\theta + 30^\circ = 60^\circ$ すなわち $\theta = 30^\circ$ のとき、 $m(\theta)$ は最小値 $1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$ をとる。

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ より、 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

(i) $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leq -\frac{1}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$) のとき

(1)より、 $m(\theta)$ は $\theta = 30^\circ$ のとき最小値 -1 をとる。

(ii) $-\frac{1}{2} \leq -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2}$ ($30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$) のとき

$x = 0$ のとき $f(x)$ は最小値をとり、 $m(\theta) = -2\sin\theta$ となる。

よって、 $m(\theta)$ は $\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -2 をとる。

(iii) $\frac{1}{2} \leq -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) のとき

$x = 1$ のとき $f(x)$ は最小値をとり、

$$m(\theta) = 1 + \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}} - 2\sin\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta - 30^\circ)$$

ここで、 $150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ なので、 $120^\circ \leq \theta - 30^\circ \leq 150^\circ$ となり、 $\theta - 30^\circ = 120^\circ$ すなわち $\theta = 150^\circ$ のとき、 $m(\theta)$ は最小値 $1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$ をとる。

(i)(ii)(iii) より、 $m(\theta)$ は $\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -2 をとる。

コメント

(1)は(2)の 1 つの場合になっています。難しいというよりは繁雑な感じのする問題です。

問 題

等式 $x^2 + (i-2)x + 2ab + \left(\frac{b}{2} - 2a\right)i = 0$ を満たす実数 a, b が存在するような、実数 x の範囲を求めよ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。 [2000]

解答例

$x^2 + (i-2)x + 2ab + \left(\frac{b}{2} - 2a\right)i = 0$ を変形して、

$$(x^2 - 2x + 2ab) + \left(x + \frac{b}{2} - 2a\right)i = 0$$

a, b, x が実数なので、

$$x^2 - 2x + 2ab = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x + \frac{b}{2} - 2a = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②より、 $b = 4a - 2x$

①に代入して、 $x^2 - 2x + 2a(4a - 2x) = 0$

$$8a^2 - 4xa + x^2 - 2x = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

a が実数のとき②より b も実数になるので、求める条件は方程式③が実数解をもつことである。

$$D/4 = 4x^2 - 8(x^2 - 2x) \geq 0$$

まとめて $x^2 - 4x \leq 0$ より、 $0 \leq x \leq 4$ となる。

コメント

①②式を a, b についての方程式として見直し、 x の条件を求める問題です。

問題

$|x^2 - 3x + 1| > |x^2 - 1| - |2x - 1|$ を満たす x の範囲を求めよ。 [2000]

解答例

$|x^2 - 3x + 1| > |x^2 - 1| - |2x - 1|$ に対して、 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の解は $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 、 $x^2 - 1 = 0$ の解は $x = \pm 1$ 、 $2x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{1}{2}$ なので、次の 6 つの場合に分ける。

(i) $x < -1$ のとき $x^2 - 3x + 1 > x^2 - 1 + (2x - 1)$ より $-5x > -3$, $x < \frac{3}{5}$

$x < -1$ と合わせて、 $x < -1$

(ii) $-1 \leq x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ のとき $x^2 - 3x + 1 > -(x^2 - 1) + (2x - 1)$ より、

$$2x^2 - 5x + 1 > 0 \text{ から、 } x < \frac{5 - \sqrt{17}}{4}, \frac{5 + \sqrt{17}}{4} < x$$

$$-1 \leq x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ と合わせて、 } -1 \leq x < \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

(iii) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ のとき $-(x^2 - 3x + 1) > -(x^2 - 1) + (2x - 1)$ より、 $x > 1$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x < \frac{1}{2} \text{ と合わせると、解なし。}$$

(iv) $\frac{1}{2} \leq x < 1$ のとき $-(x^2 - 3x + 1) > -(x^2 - 1) - (2x - 1)$ より $5x > 3$, $x > \frac{3}{5}$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ と合わせて、 } \frac{3}{5} < x < 1$$

(v) $1 \leq x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のとき $-(x^2 - 3x + 1) > x^2 - 1 - (2x - 1)$ より、

$$2x^2 - 5x + 1 < 0 \text{ から、 } \frac{5 - \sqrt{17}}{4} < x < \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

$$1 \leq x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ と合わせて、 } 1 \leq x < \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

(vi) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \leq x$ のとき $x^2 - 3x + 1 > x^2 - 1 - (2x - 1)$ より $-x > -1$, $x < 1$

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \leq x \text{ と合わせると、解なし。}$$

(i)~(vi)より、 $x < \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$, $\frac{3}{5} < x < \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$

コメント

注意力がすべての問題です。

問題

三つの角 α, β, γ ($-90^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$) が

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

を満たすとき、 $\alpha + \beta + \gamma$ の値をすべて求めよ。

[1999]

解答例

$\tan \alpha = a, \tan \beta = b, \tan \gamma = c$ とおく。

条件より、 $a + b + c = abc \dots\dots\dots(*)$

ここで $ab = 1$ とすると、 $(*)$ より $a + b = 0$ となり、 a, b は方程式 $x^2 + 1 = 0$ の 2 つの実数解となるが、 $x = \pm i$ より不適である。よって、 $ab \neq 1$ となる。

すると、加法定理から、
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{a + b}{1 - ab}$$

さらに $\frac{a+b}{1-ab} \cdot c = 1$ 、すなわち $ab + bc + ca = 1$ のとき、 $(*)$ から $a + b + c = abc = k$ とおくと、 a, b, c は方程式 $x^3 - kx^2 + x - k = 0$ の 3 つの実数解となるが、 $x = k, \pm i$ より不適である。よって、 $\frac{a+b}{1-ab} \cdot c \neq 1$ となる。

もう一度、加法定理を用いて、

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \gamma}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \gamma} = \frac{\frac{a+b}{1-ab} + c}{1 - \frac{a+b}{1-ab} \cdot c} = \frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}$$

$(*)$ より、 $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = 0$

ここで、 $-90^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ から、 $-270^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 270^\circ$

よって、 $\alpha + \beta + \gamma = -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ$

コメント

問題文の等式は、相加平均と相乗平均の関係を利用するのではないかと思わせるものです。しかし、各項が正とは限らないので、まず加法定理を利用する普通の考え方で計算したところ、予想以上にうまく事が運びました。と思ったところ、分母が 0 ではないという条件のチェックが必要でした。

問題

p を 0 でない実数とし、2 次方程式 $x^2 - px + 5p = 0$ を考える。

- (1) $x^2 - px + 5p = 0$ の解 α, β が $\alpha^5 + \beta^5 = p^5$ を満たすとする。このときの p の値を求めよ。
- (2) $x^2 - px + 5p = 0$ が虚数解をもち、その 5 乗が実数になるとする。このときの p の値を求めよ。 [1999]

解答例

- (1) $x^2 - px + 5p = 0$ の解が α, β より、 $\alpha + \beta = p, \alpha\beta = 5p$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 10p$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = p^3 - 15p^2$$

$$\begin{aligned} \text{すると、} \alpha^5 + \beta^5 &= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) \\ &= (p^2 - 10p)(p^3 - 15p^2) - 25p^3 \\ &= p^5 - 25p^4 + 125p^3 \end{aligned}$$

$$\text{条件より、} \alpha^5 + \beta^5 = p^5 \text{ なので、} 25p^4 - 125p^3 = 0$$

$$p \neq 0 \text{ より、} p = 5$$

- (2) $x^2 - px + 5p = 0$ が虚数解をもつので、

$$D = p^2 - 20p < 0, \quad 0 < p < 20 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

このとき、虚数解を $\alpha, \bar{\alpha}$ とすると、 $\alpha + \bar{\alpha} = p, \alpha\bar{\alpha} = 5p$

条件より、 α^5 が実数なので、 $\alpha^5 = \bar{\alpha}^5$

$$(\alpha - \bar{\alpha})(\alpha^4 + \alpha^3\bar{\alpha} + \alpha^2\bar{\alpha}^2 + \alpha\bar{\alpha}^3 + \bar{\alpha}^4) = 0$$

α は虚数なので $\alpha \neq \bar{\alpha}$ から、 $\alpha^4 + \alpha^3\bar{\alpha} + \alpha^2\bar{\alpha}^2 + \alpha\bar{\alpha}^3 + \bar{\alpha}^4 = 0$

$$\alpha^4 + \bar{\alpha}^4 + \alpha\bar{\alpha}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) + (\alpha\bar{\alpha})^2 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

ここで、(1)より $\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 = p^2 - 10p$

$$\alpha^4 + \bar{\alpha}^4 = (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2)^2 - 2\alpha^2\bar{\alpha}^2 = (p^2 - 10p)^2 - 50p^2 = p^4 - 20p^3 + 50p^2$$

$$\textcircled{2} \text{ より、} p^4 - 20p^3 + 50p^2 + 5p(p^2 - 10p) + 25p^2 = 0$$

$$p^4 - 15p^3 + 25p^2 = 0$$

$$p \neq 0 \text{ より、} p^2 - 15p + 25 = 0$$

$$\text{よって、} p = \frac{15 \pm 5\sqrt{5}}{2} \text{ (この値はともに} \textcircled{1} \text{を満たす)}$$

コメント

解と係数の関係を利用する問題です。(1)、(2)とも頻出題です。

問題

実数 a は $0 < a < 4$ を満たすとする。 xy 平面の直線 $l: y = ax$ と曲線

$$C: y = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x < 4 \text{ のとき}) \\ 9a(x-4) & (x \geq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える。 C と l で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく。

- (1) C と l の交点の座標を求めよ。
- (2) $S(a)$ を求めよ。
- (3) $S(a)$ の最小値を求めよ。

[2018]

解答例+映像解説

- (1) $x < 4$ のとき、 $l: y = ax$ と $C: y = -x^2 + 4x$ を連立して、

$$ax = -x^2 + 4x, \quad x^2 + (a-4)x = 0$$

よって、 $x = 0, 4-a$ となる。ただし、 $0 < a < 4$ から $0 < 4-a < 4$ である。

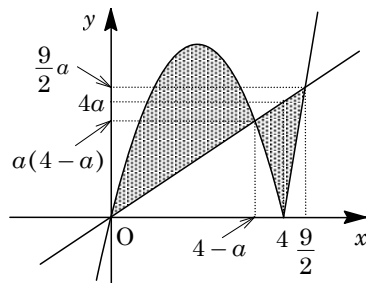
$x \geq 4$ のとき、 $l: y = ax$ と $C: y = 9a(x-4)$ を連立して、

$$ax = 9a(x-4), \quad 8x - 36 = 0$$

よって、 $x = \frac{9}{2}$ となる。

以上より、 C と l の交点の座標は、 $(0, 0), (4-a, a(4-a)), (\frac{9}{2}, \frac{9}{2}a)$ である。

- (2) C と l で囲まれた右図の網点部の面積 $S(a)$ は、
 $0 \leq x \leq 4-a$ の部分の面積 $S_1(a)$ 、 $4-a \leq x \leq 4$
 の部分の面積 $S_2(a)$ 、 さらに $4 \leq x \leq \frac{9}{2}$ の部分の面積 $S_3(a)$ の和となり、



$$S_1(a) = \int_0^{4-a} (-x^2 + 4x - ax) dx$$

$$= -\int_0^{4-a} x(x+a-4) dx = \frac{1}{6}(4-a)^3$$

$$S_2(a) = \frac{1}{2}\{a(4-a) + 4a\}\{4 - (4-a)\} - \int_{4-a}^4 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \frac{1}{2}(8a - a^2)a - \int_{4-a}^4 \{-(x-4)^2 - 4(x-4)\} dx$$

$$= 4a^2 - \frac{1}{2}a^3 + \left[\frac{1}{3}(x-4)^3 + 2(x-4)^2\right]_{4-a}^4 = -\frac{1}{6}a^3 + 2a^2$$

$$S_3(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 4\right) \cdot 4a = a$$

すると、 $S(a) = S_1(a) + S_2(a) + S_3(a)$ より、

$$S(a) = \frac{1}{6}(4-a)^3 - \frac{1}{6}a^3 + 2a^2 + a = -\frac{1}{3}a^3 + 4a^2 - 7a + \frac{32}{3}$$

(3) (2)より, $S'(a) = -a^2 + 8a - 7 = -(a-1)(a-7)$

すると, $0 < a < 4$ における $S(a)$ の増減は右
表のようになり, $S(a)$ の最小値は,

$$S(1) = -\frac{1}{3} + 4 - 7 + \frac{32}{3} = \frac{22}{3}$$

a	0	…	1	…	4
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		↘		↗	

コメント

定積分と面積についての標準的な問題です。ただ, 計算はやや難で, 解答例では小さい工夫をしています。

問題

$a > 0$ を実数とする。関数 $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

- (1) $M(a)$ を求めよ。
- (2) 実数 $x > 0$ に対し、 $g(x) = M(x)^2$ とおく。 xy 平面において、関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s, g(s))$ で接する直線が原点を通るとき、実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ。
- (3) a が正の実数全体を動くとき、 $k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。 [2015]

解答例+映像解説

(1) $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ に対して、 $f'(t) = -12t^2 + a + 3$

$a > 0$ より、 $f'(t) = 0$ の解は $t = \pm \sqrt{\frac{a+3}{12}}$ となる。

(i) $\sqrt{\frac{a+3}{12}} < 1$ ($0 < a < 9$) のとき

$0 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。これより、 $f(t)$ は $t = \sqrt{\frac{a+3}{12}}$ において最大値 $M(a)$ をとり、

t	0	...	$\sqrt{\frac{a+3}{12}}$...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗		↘	

$$M(a) = \sqrt{\frac{a+3}{12}} \left(-4 \cdot \frac{a+3}{12} + a + 3 \right) = \frac{\sqrt{a+3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}(a+3) = \frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii) $\sqrt{\frac{a+3}{12}} \geq 1$ ($a \geq 9$) のとき

$0 \leq t \leq 1$ において $f(t)$ は単調増加するので、 $t = 1$ において最大値 $M(a)$ をとり、
 $M(a) = -4 + (a+3) = a - 1$

(2) $g(x) = M(x)^2$ より、(1)から、

$$g(x) = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}} \right\}^2 = \frac{1}{27}(x+3)^3 \quad (0 < x < 9)$$

$$g(x) = (x-1)^2 \quad (x \geq 9)$$

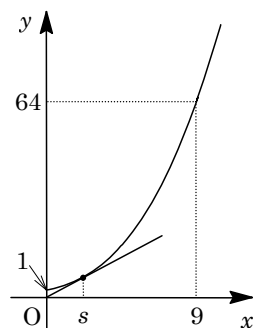
さて、点 $(s, g(s))$ で接する直線が原点を通るより、

$$\frac{g(s)}{s} = g'(s) \dots \dots (*)$$

(i) $0 < s < 9$ のとき

(*)より、 $\frac{1}{27} \cdot \frac{(s+3)^3}{s} = \frac{1}{9}(s+3)^2$ から $s+3 = 3s$ となり、 $s = \frac{3}{2}$

(ii) $s \geq 9$ のとき (*)より、 $\frac{(s-1)^2}{s} = 2(s-1)$ から $s = -1$ となるが、成立しない。



(i)(ii)より, $s = \frac{3}{2}$ となり, このとき接線の傾きは, $\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}+3\right)^2 = \frac{9}{4}$ である。

(3) $k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$ より, $k^2 = \frac{M(a)^2}{a} = \frac{g(a)}{a}$ となり, k^2 は原点 O と点 $(a, g(a))$ を結ぶ直線の傾きとなる。

すると, (2)より k^2 の最小値は $\frac{9}{4}$ となるので, k の最小値は $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ である。

コメント

微分法の総合問題です。(3)の分数関数を直線の傾きとみる方法は必須技法です。

問題

曲線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ における接線を l_1 、点 $Q(b, b^2)$ における接線を l_2 とする。ただし、 $a < b$ とする。 l_1 と l_2 の交点を R とし、線分 PR 、線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする。

- (1) R の座標を a と b を用いて表せ。
- (2) S を a と b を用いて表せ。
- (3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ。 [2014]

解答例+映像解説

- (1) $y = x^2$ より、 $y' = 2x$ となり、点 $P(a, a^2)$ における接線 l_1 は、

$$y - a^2 = 2a(x - a), \quad y = 2ax - a^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

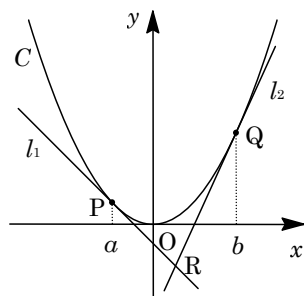
同様に、点 $Q(b, b^2)$ における接線 l_2 は、

$$y = 2bx - b^2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①②を連立して、 $2ax - a^2 = 2bx - b^2$

$$2(b - a)x = b^2 - a^2, \quad x = \frac{a + b}{2}$$

①より $y = 2a \cdot \frac{a + b}{2} - a^2 = ab$ となり、 l_1 と l_2 の交点 R は、 $R\left(\frac{a + b}{2}, ab\right)$ である。



- (2) 線分 PR 、線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x^2 - 2ax + a^2) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x^2 - 2bx + b^2) dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x - a)^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x - b)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x - b)^3 \right]_{\frac{a+b}{2}}^b = \frac{1}{3} \left(\frac{b - a}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{a - b}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{12} (b - a)^3 \end{aligned}$$

- (3) l_1 と l_2 が垂直であるとき、 $2a \cdot 2b = -1$ 、 $a = -\frac{1}{4b}$ である。

すると、 $a < b$ から $a < 0 < b$ となり、相加平均と相乗平均の関係から、

$$S = \frac{1}{12} \left(b + \frac{1}{4b} \right)^3 \geq \frac{1}{12} \left(2\sqrt{b \cdot \frac{1}{4b}} \right)^3 = \frac{1}{12}$$

等号成立は、 $b = \frac{1}{4b}$ ($b = \frac{1}{2}$) のときとなり、このとき S は最小値 $\frac{1}{12}$ をとる。

コメント

センター試験や2次試験、また参考書の例題で、よく見かける超頻出問題です。

問題

t は $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数とする。放物線 $y = x^2$ ，直線 $x = 1$ ，および x 軸とで囲まれた図形を A ，放物線 $y = 4(x-t)^2$ と直線 $y = 1$ とで囲まれた図形を B とする。 A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) $0 \leq t \leq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

[2013]

解答例+映像解説

(1) 放物線 $y = x^2$ と放物線 $y = 4(x-t)^2$ の式を連立して交点の x 座標を求めると、

$$x^2 = 4(x-t)^2, \{x+2(x-t)\}\{x-2(x-t)\} = 0$$

よって、 $x = \frac{2}{3}t, 2t$ となる。

さて、 $0 \leq t \leq 1$ より、 $0 \leq \frac{2}{3}t \leq \frac{2}{3}$ ， $0 \leq 2t \leq 2$ となり、 $2t$ と

1 との大小で場合分けをすると、 $S(t)$ は、

(i) $2t < 1$ ($0 \leq t < \frac{1}{2}$) のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\frac{2}{3}t}^{2t} \{x^2 - 4(x-t)^2\} dx = \int_{\frac{2}{3}t}^{2t} -3\left(x - \frac{2}{3}t\right)(x-2t) dx \\ &= (-3) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \left(2t - \frac{2}{3}t\right)^3 = \frac{32}{27}t^3 \end{aligned}$$

(ii) $2t \geq 1$ ($\frac{1}{2} \leq t \leq 1$) のとき

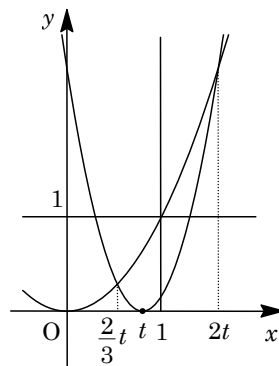
$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\frac{2}{3}t}^1 \{x^2 - 4(x-t)^2\} dx = \int_{\frac{2}{3}t}^1 (-3x^2 + 8tx - 4t^2) dx \\ &= \left[-x^3 + 4tx^2 - 4t^2x\right]_{\frac{2}{3}t}^1 = -\left(1 - \frac{8}{27}t^3\right) + 4t\left(1 - \frac{4}{9}t^2\right) - 4t^2\left(1 - \frac{2}{3}t\right) \\ &= \frac{32}{27}t^3 - 4t^2 + 4t - 1 \end{aligned}$$

(2) (i) $0 \leq t < \frac{1}{2}$ のとき $S(t) = \frac{32}{27}t^3$ より単調に増加する。

(ii) $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき $S(t) = \frac{32}{27}t^3 - 4t^2 + 4t - 1$ より、

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{32}{9}t^2 - 8t + 4 \\ &= \frac{4}{9}(4t-3)(2t-3) \end{aligned}$$

すると、 $S(t)$ の増減は右表のようになり、 $t = \frac{3}{4}$ のとき極大値 $\frac{1}{4}$ をとる。



t	$\frac{1}{2}$...	$\frac{3}{4}$...	1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$	$\frac{4}{27}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	

(i)(ii)より, $S(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ において連続なので, $t = \frac{3}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

コメント

定積分と面積に関する基本的な問題です。場合分けも煩雑ではありません。

問題

a を正の実数とし、 $a \neq \frac{1}{2}$ とする。曲線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ と $Q(a, a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし、点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。 l と m の交点が C 上にあるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

[2012]

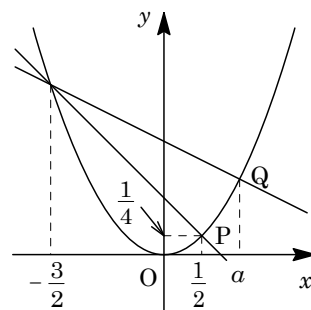
解答例

(1) $C: y = x^2 \dots\dots$ ①に対して、 $y' = 2x$

$P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ における接線の傾きは 1 なので、接線と直交する直線 l は、

$$y - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad y = -x + \frac{3}{4} \dots\dots$$
②

①②の交点は、 $x^2 = -x + \frac{3}{4}$, $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2}) = 0$ となり、 $x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ である。



ここで、 $Q(a, a^2)$ における接線と直交する直線 m は、同様にして、

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a), \quad y = -\frac{1}{2a}x + \frac{1}{2} + a^2 \dots\dots$$
③

また、①③の交点は、 $x^2 = -\frac{1}{2a}x + \frac{1}{2} + a^2$, $(x - a)(x + \frac{1}{2a} + a) = 0$ となり、

$$x = a, -\frac{1}{2a} - a$$

$a > 0$ で、 $a \neq \frac{1}{2}$ から、 $-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2a} - a$ となり、 $2a^2 - 3a + 1 = 0$

よって、 $(2a - 1)(a - 1) = 0$ より、 $a = 1$ である。

(2) $a = 1$ のとき、直線 m は、 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ となる。

2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで $x \geq 0$ の部分の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right) \cdot 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{24}$$

コメント

放物線と直線に囲まれた面積という定番の問題です。(2)では、台形の面積公式を利用しています。

問題

放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 l, m は垂直であるとする。

- (1) l の接点の座標が (a, a^2) で与えられるとき、 l, m の交点の座標を a を用いて表せ。
- (2) l, m が y 軸に関して対称なとき、 l, m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2011]

解答例

- (1) $y = x^2$ より、 $y' = 2x$ となり、点 (a, a^2) における接線 l は、

$$y - a^2 = 2a(x - a), \quad y = 2ax - a^2 \dots\dots\dots ①$$

接線 m は、同様にして接点 (b, b^2) とすると、 $y = 2bx - b^2 \dots\dots\dots ②$

①②の交点は、 $2ax - a^2 = 2bx - b^2$ 、 $2(a - b)x = a^2 - b^2$ から、

$$x = \frac{a + b}{2}, \quad y = 2a \cdot \frac{a + b}{2} - a^2 = ab \dots\dots\dots ③$$

さて、条件より、2本の接線 l, m は直交するので、

$$2a \cdot 2b = -1, \quad b = -\frac{1}{4a} \dots\dots\dots ④$$

$$③④から, \quad x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{4a} \right) = \frac{4a^2 - 1}{8a}, \quad y = -a \cdot \frac{1}{4a} = -\frac{1}{4}$$

よって、 l, m の交点の座標は、 $\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}, -\frac{1}{4} \right)$ となる。

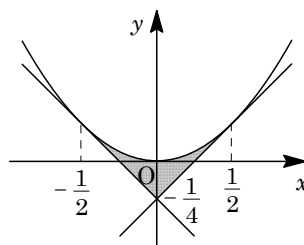
- (2) l, m が y 軸に関して対称なとき、交点は y 軸上にあるので、

$$4a^2 - 1 = 0, \quad a = \pm \frac{1}{2}$$

このとき、接線 l, m は、 $y = x - \frac{1}{4}$ 、 $y = -x - \frac{1}{4}$ となり、

l, m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積 S は、 y 軸対称性を考えて、

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$



コメント

放物線と接線で囲まれた図形が題材のセンター試験でも頻出の基本問題です。

問題

a を実数とし、 $f(x) = x^3 + (2a-4)x^2 + (a^2 - 4a + 4)x$ とおく。方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。
- (3) a が(1)で求めた範囲を動くとき、 $y = f(x)$ の極大値を与える x について、点 $(x, f(x))$ が xy 平面上に描く図形を図示せよ。 [2008]

解答例

(1) $f(x) = x^3 + (2a-4)x^2 + (a^2 - 4a + 4)x$ に対し、 $f(x) = 0 \cdots \cdots (*)$ とすると、

$$x\{x^2 + (2a-4)x + (a-2)^2\} = 0, \quad x(x+a-2)^2 = 0$$

よって、(*)の解は、 $x = 0, -a+2$ となり、異なる 2 つの実数解をもつ条件は、 $-a+2 \neq 0$ より、 $a \neq 2$ である。

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2(2a-4)x + (a-2)^2 = (x+a-2)(3x+a-2)$

これより、 $f'(x) = 0$ の解は、 $x = -a+2, \frac{-a+2}{3}$

(i) $a > 2$ のとき

右表より、極大値は、

$$f(-a+2) = 0$$

また、極小値は、

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right) = \frac{-4(a-2)^3}{27}$$

x	...	$-a+2$...	$\frac{-a+2}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$\frac{-4(a-2)^3}{27}$	↗

(ii) $a < 2$ のとき

右表より、極大値は、

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right) = \frac{-4(a-2)^3}{27}$$

また、極小値は、

$$f(-a+2) = 0$$

x	...	$\frac{-a+2}{3}$...	$-a+2$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{-4(a-2)^3}{27}$	↘	0	↗

(3) $y = f(x)$ の極大値を与える x について、 $(x, y) = (x, f(x))$ とおくと、

(i) $a > 2$ のとき

(2)より、 $(x, y) = (-a+2, 0)$ となるので、その軌跡の方程式は、

$$y = 0 \quad (x < 0)$$

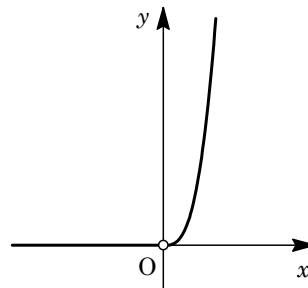
(ii) $a < 2$ のとき

(2)より, $(x, y) = \left(\frac{-a+2}{3}, \frac{-4(a-2)^3}{27} \right)$ となるので,

その軌跡の方程式は,

$$y = -\frac{4}{27}(-3x)^3 = 4x^3 \quad (x > 0)$$

(i)(ii)より, 点 $(x, f(x))$ は, 右図の太線を描く。



コメント

方程式 $f(x) = 0$ の左辺が 1 次式の積として因数分解できるとは, 予想しませんでした。不意を突かれた感じです。

問題

関数 $f(x)$ が、 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(t)| dt$ を満たしているとする。このとき、 $f(x)$ を求めよ。 [2007]

解答例

$f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(t)| dt$ に対し、 $\int_0^2 |f(t)| dt = c \cdots \cdots (*)$ とおくと、 $c \geq 0$ で、

$$f(x) = x^2 - cx$$

(*)に代入して、 $c = \int_0^2 |t^2 - ct| dt$

(i) $0 \leq c < 2$ のとき

$$\begin{aligned} c &= \int_0^c -(t^2 - ct) dt + \int_c^2 (t^2 - ct) dt = -\left[\frac{t^3}{3} - \frac{ct^2}{2}\right]_0^c + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{ct^2}{2}\right]_c^2 \\ &= -\frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{2} + \frac{1}{3}(8 - c^3) - \frac{c}{2}(4 - c^2) = \frac{c^3}{3} - 2c + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって、 $c^3 - 9c + 8 = 0$ 、 $(c - 1)(c^2 + c - 8) = 0$

すると、 $0 \leq c < 2$ より、 $c = 1$ である。

(ii) $c \geq 2$ のとき

$$c = \int_0^2 -(t^2 - ct) dt = -\left[\frac{t^3}{3} - \frac{ct^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 2c$$

よって、 $c = \frac{8}{3}$ となり、この値は $c \geq 2$ を満たす。

(i)(ii)より、 $f(x) = x^2 - x$ 、 $f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x$

コメント

いわゆる置き換え型の積分方程式です。場合分けはあるものの、常套手段だけで $f(x)$ は求まります。

問題

連立不等式 $1 \leq x \leq 2, y \geq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また、 a を定数とし、不等式 $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

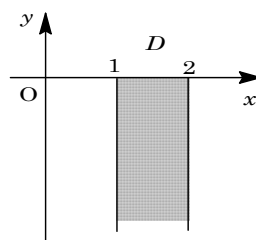
- (1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。
- (2) (1)の範囲の a に対して、 D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。 [2006]

解答例

(1) $D : 1 \leq x \leq 2, y \geq 0, E : y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ に対して、領域 E の境界線は、
 $y = x^2 - 3ax + 2a^2 = (x - a)(x - 2a) \cdots \cdots (*)$

$a \leq 0$ のときは領域 D と E は明らかに共有点をもたない。

そこで、 $a > 0$ のとき、 D と E とが共有点をもつ条件は、
 (*)と x 軸の交点が $x = a, 2a$ より、 $a \leq 2$ かつ $2a \geq 1$ である。
 よって、 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ となる。



(2) (i) $2a \leq 2 \left(\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \right)$ のとき

$$S(a) = \int_1^{2a} -(x^2 - 3ax + 2a^2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3a \cdot \frac{x^2}{2} - 2a^2 x \right]_1^{2a}$$

$$= -\frac{1}{3}(8a^3 - 1) + \frac{3}{2}a(4a^2 - 1) - 2a^2(2a - 1) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3}$$

(ii) $1 \leq a \left(1 \leq a \leq 2 \right)$ のとき

$$S(a) = \int_a^2 -(x^2 - 3ax + 2a^2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3a \cdot \frac{x^2}{2} - 2a^2 x \right]_a^2$$

$$= -\frac{1}{3}(8 - a^3) + \frac{3}{2}a(4 - a^2) - 2a^2(2 - a) = \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3}$$

(3) (i) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$$S'(a) = -2a^2 + 4a - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(2a - 1)(2a - 3)$$

右表より、 $S(a)$ は単調に増加する。

a	$\frac{1}{2}$	\cdots	1
$S'(a)$	0	+	
$S(a)$		\nearrow	$\frac{1}{6}$

(ii) $1 \leq a \leq 2$ のとき

$$S'(a) = \frac{5}{2}a^2 - 8a + 6$$

$$= \frac{1}{2}(5a - 6)(a - 2)$$

$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	1	\cdots	$\frac{6}{5}$	\cdots	2
$S'(a)$		+	0	-	0
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	\nearrow	$\frac{16}{75}$	\searrow	

(i)(ii)より $S(a)$ の最大値は、 $S\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{16}{75}$

コメント

頻出の放物線と面積の問題です。領域で味付けがしてありますが。

問題

2つの曲線 $C: y = -x^2$ と $D: y = (x-a)^2 + b$ が1点で接している。曲線 D と曲線 $E: y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$ によって囲まれる部分の面積 S が最小となるように実数 a, b を定め、そのときの S を求めよ。 [2005]

解答例

まず、 $C: y = -x^2 \dots\dots ①$ と $D: y = (x-a)^2 + b \dots\dots ②$ が接しているので、

$$-x^2 = (x-a)^2 + b, \quad 2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0$$

$$D/4 = a^2 - 2(a^2 + b) = 0$$

よって、 $b = -\frac{1}{2}a^2 \dots\dots ③$ となり、②に代入すると、

$$y = (x-a)^2 - \frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + \frac{1}{2}a^2 \dots\dots ②'$$

ここで、②' と $E: y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1 \dots\dots ④$ の交点は、

$$x^2 - 2ax + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1, \quad \frac{1}{2}x^2 - (2a-1)x + \frac{1}{2}(a^2-3) = 0 \dots\dots ⑤$$

すると、 $D = (2a-1)^2 - (a^2-3) = 3a^2 - 4a + 4 = 3\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0 \dots\dots ⑥$ となる

ことより、⑤はつねに異なる実数解をもち、

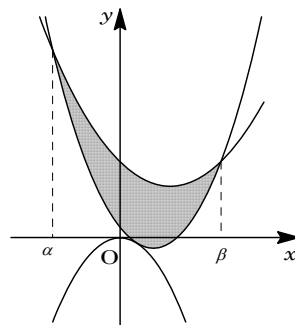
$$x = 2a - 1 \pm \sqrt{3a^2 - 4a + 4}$$

この値を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とすると、②' と④によって囲まれる部分の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} -\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12}\left(2\sqrt{3a^2-4a+4}\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3a^2-4a+4}\right)^3 \end{aligned}$$

よって、 S が最小となるのは、⑥より $a = \frac{2}{3}$ 、③より $b = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = -\frac{2}{9}$ のときであり、

その最小値は、 $S = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^3 = \frac{32}{27}\sqrt{6}$ である。



コメント

いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式を利用する微積分の基本問題です。完答することが望まれます。

問 題

曲線 $C: y = x^2 - 2$ と直線 $L: y = x$ があり、曲線 $D: y = -(x-a)^2 + b$ が L と接している。 C と L の 2 つの交点を結ぶ線分上に D と L の接点があるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) b を a で表し、 a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 2 つの曲線 C と D によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) a が動くとき、(2) の面積 $S(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2004]

解答例

(1) $C: y = x^2 - 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ と $L: y = x \cdots \cdots \textcircled{2}$ の交点は、

$$x^2 - 2 = x, \quad x^2 - x - 2 = 0$$

よって、 $x = -1, 2$

$\textcircled{2}$ と $D: y = -(x-a)^2 + b \cdots \cdots \textcircled{3}$ の共有点は、

$$x = -(x-a)^2 + b, \quad x^2 + (1-2a)x + a^2 - b = 0$$

$\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ が接することより、

$$D = (1-2a)^2 - 4(a^2 - b) = 0, \quad b = a - \frac{1}{4} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

このとき、接点の x 座標は $x = -\frac{1-2a}{2}$ となり、これが

$-1 \leq x \leq 2$ にあることより、

$$-1 \leq -\frac{1-2a}{2} \leq 2, \quad -2 \leq 2a-1 \leq 4, \quad -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}$$

(2) $\textcircled{4}$ を $\textcircled{3}$ に代入して、 $y = -x^2 + 2ax - a^2 + a - \frac{1}{4} \cdots \cdots \textcircled{3}'$

$\textcircled{3}'$ と $\textcircled{1}$ との交点は、 $x^2 - 2 = -x^2 + 2ax - a^2 + a - \frac{1}{4}$

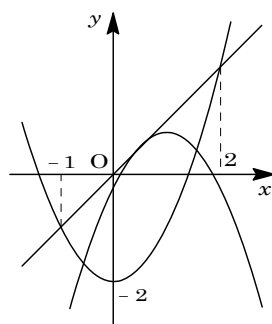
$$2x^2 - 2ax + a^2 - a - \frac{7}{4} = 0, \quad x = \frac{2a \pm \sqrt{-4a^2 + 8a + 14}}{4}$$

これを $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと、 C と D で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} -\left(2x^2 - 2ax + a^2 - a - \frac{7}{4}\right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} -2(x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-4a^2 + 8a + 14}\right)^3 \\ &= \frac{1}{24} \left(\sqrt{-4a^2 + 8a + 14}\right)^3 \end{aligned}$$

(3) $f(a) = -4a^2 + 8a + 14$ とおくと、(2) より、 $S(a) = \frac{1}{24} \left(\sqrt{f(a)}\right)^3$ となり、

$$f(a) = -4(a-1)^2 + 18$$



(1)から $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}$ より, $f(a)$ は最大値 $f(1) = 18$, 最小値 $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{5}{2}) = 9$ をとる。すると, $S(a)$ の最大値は $S(1) = \frac{1}{24}(\sqrt{18})^3 = \frac{9}{4}\sqrt{2}$ となり, 最小値は $S(-\frac{1}{2}) = S(\frac{5}{2}) = \frac{1}{24}(\sqrt{9})^3 = \frac{9}{8}$ となる。

コメント

数Ⅱの微積分の超頻出基本問題です。

問題

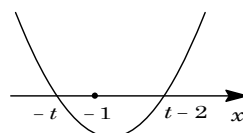
$t \geq 1$ において、関数 $f(t) = \int_{-1}^1 |(x-t+2)(x+t)| dx$ を最小にする t の値と、そのときの最小値を求めよ。 [2002]

解答例

まず、 $g(x) = (x-t+2)(x+t)$ とおくと、

$$f(t) = \int_{-1}^1 |g(x)| dx$$

また、 $g(x) = 0$ の解は、 $x = t-2, -t$ であるが、 $t \geq 1$ より $-t \leq -1 \leq t-2$ となり、 $g(x)$ のグラフは右図のようになる。



(i) $t-2 \geq 1$ ($t \geq 3$) のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-1}^1 -g(x) dx = -\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - t^2 + 2t) dx = -2 \int_0^1 (x^2 - t^2 + 2t) dx \\ &= -2 \left[\frac{x^3}{3} - (t^2 - 2t)x \right]_0^1 = 2t^2 - 4t - \frac{2}{3} = 2(t-1)^2 - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって、 $t \geq 3$ のとき、 $f(t)$ は単調に増加する。

(ii) $t-2 < 1$ ($1 \leq t < 3$) のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-1}^{t-2} -g(x) dx + \int_{t-2}^1 g(x) dx \\ &= -\int_{-1}^{t-2} (x^2 + 2x - t^2 + 2t) dx + \int_{t-2}^1 (x^2 + 2x - t^2 + 2t) dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - (t^2 - 2t)x \right]_{-1}^{t-2} + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - (t^2 - 2t)x \right]_{t-2}^1 \\ &= -\frac{2}{3}(t-2)^3 - 2(t-2)^2 + 2 + 2(t^2 - 2t)(t-2) \\ &= -\frac{2}{3}(t-2)^3 - 2(t-2)^2 + 2 + 2t(t-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2(t-2)^2 - 4(t-2) + 2(3t-2)(t-2) \\ &= (t-2)\{-2(t-2) - 4 + 2(3t-2)\} \\ &= 4(t-2)(t-1) \end{aligned}$$

これより、 $1 \leq t < 3$ のとき、 $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	1	...	2	...	3
$f'(t)$	0	-	0	+	
$f(t)$		↘	2	↗	

(i)(ii)より、 $f(t)$ は連続関数なので、 $t = 2$ のとき最小値 2 をとる。

コメント

$t \geq 1$ という条件のために場合分けは減少しましたが、積分の計算は、簡単とはどうもいえません。

問題

2 つの放物線 $C: y = -(x+1)^2$ と $D: y = (x-1)^2 + 1$ の 2 本の共通接線を求めよ。
 また、 C, D の 2 本の共通接線と C の囲む部分の面積を求めよ。 [2001]

解答例

$C: y = -(x+1)^2 \dots\dots\dots ①$, $D: y = (x-1)^2 + 1 \dots\dots\dots ②$ とする。

まず、①上の点 $(t, -(t+1)^2)$ における接線の方程式は、
 $y' = -2(x+1)$ から、

$$y + (t+1)^2 = -2(t+1)(x-t)$$

$$y = -2(t+1)x + t^2 - 1 \dots\dots\dots ③$$

②と③が接することより、 $(x-1)^2 + 1 = -2(t+1)x + t^2 - 1$

$$x^2 + 2tx - t^2 + 3 = 0$$

$D/4 = t^2 - (-t^2 + 3) = 0$ から、 $2t^2 - 3 = 0$, $t = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

③に代入して、共通接線の方程式は、

$$y = -(\sqrt{6} + 2)x + \frac{1}{2} \dots\dots\dots ④, \quad y = (\sqrt{6} - 2)x + \frac{1}{2} \dots\dots\dots ⑤$$

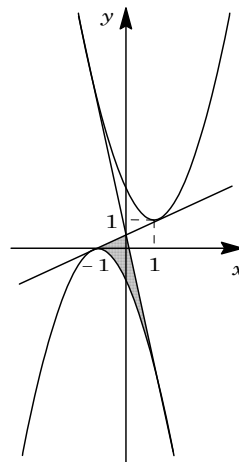
すると、④と⑤の交点は、 $(0, \frac{1}{2})$ となるので、求める網点部の面積 S は、

$$S = \int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^0 \left\{ (\sqrt{6} - 2)x + \frac{1}{2} + (x+1)^2 \right\} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left\{ -(\sqrt{6} + 2)x + \frac{1}{2} + (x+1)^2 \right\} dx$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^0 \left(x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 dx + \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 \right]_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^0 + \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



コメント

2 つの放物線の共通接線を題材にした頻出問題です。

問 題

a を正の定数とする。 $f(x) = ax + \int_0^1 \{f(t)\}^2 dt$ を満たす関数 $f(x)$ がただ一つしか存在しないように定数 a の値を定めよ。また、そのときの $f(x)$ を求めよ。 [1999]

解答例

条件より, $f(x) = ax + \int_0^1 \{f(t)\}^2 dt \cdots \cdots \textcircled{1}$

$\int_0^1 \{f(t)\}^2 dt = c \cdots \cdots \textcircled{2}$ とおくと, $\textcircled{1}$ より $f(x) = ax + c \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}\textcircled{3}$ より, $c = \int_0^1 (at + c)^2 dt = \int_0^1 (a^2 t^2 + 2act + c^2) dt = \frac{a^2}{3} + ac + c^2$

よって, $c^2 + (a-1)c + \frac{a^2}{3} = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{4}$ の解がただ一つしかないことより,

$$D = (a-1)^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{3} = 0, \quad a^2 + 6a - 3 = 0$$

$a > 0$ より, $a = -3 + 2\sqrt{3}$

このとき $\textcircled{4}$ の重解は, $c = -\frac{a-1}{2} = -\frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

以上より, $\textcircled{3}$ から, $f(x) = (-3 + 2\sqrt{3})x + (2 - \sqrt{3})$

コメント

常套手段だけで完答できるものです。気を付けるのは, c の値を計算するときくらいです。

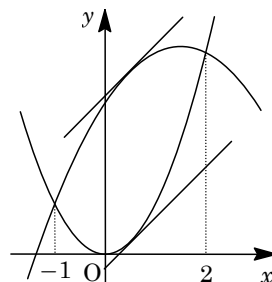
問題

2つの曲線 $y = x^2$ と $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ で囲まれた図形を S とする。ただし、 S は境界を含むものとする。

- (1) S の面積を求めよ。
 (2) 直線 $y = x + k$ が、 S と共通部分を持つための k の範囲を求めよ。 [1998]

解答例

- (1) $y = x^2$ ……①と $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ ……②の交点は、
 $x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$, $x^2 - x - 2 = 0$ より, $x = -1, 2$



S の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 \right) - x^2 \right\} dx \\ &= \int_{-1}^2 -\frac{3}{2}(x-2)(x+1) dx \\ &= -\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{6} \right) (2+1)^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

- (2) ①と $y = x + k$ が接する場合は, $x^2 = x + k$, $x^2 - x - k = 0$ が重解をもつので,

$$D = 1 + 4k = 0, \quad k = -\frac{1}{4}$$

②と $y = x + k$ が接する場合は, $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = x + k$, $x^2 - x + 2k - 6 = 0$ が重解をもつので,

$$D = 1 - 4(2k - 6) = 0, \quad k = \frac{25}{8}$$

求める k の範囲は、図より $-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{25}{8}$

コメント

超基本レベルの問題です。

問題

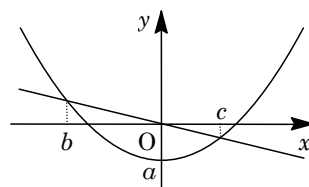
a, b, c を実数とし、 a は 0 でないとする。 xy 平面上の直線 $y = ax$ と放物線 $y = x^2 + a$ が相異なる 2 点 $P(b, ab)$, $Q(c, ac)$ で交わっているとする。 $c = b^2$, $b < 0$ のとき、 a と b を求めよ。 [2019]

解答例+映像解説

直線 $y = ax$ ……①と放物線 $y = x^2 + a$ ……②を連立し、

$$ax = x^2 + a, \quad x^2 - ax + a = 0 \dots\dots\dots③$$

ここで、①と②が相異なる 2 点 $x = b, c$ で交わっている
ので、③の実数解が $x = b, c$ となり、



$$D = a^2 - 4a = a(a - 4) > 0 \dots\dots\dots④$$

$$b + c = a \dots\dots\dots⑤, \quad bc = a \dots\dots\dots⑥$$

さて、条件より $c = b^2$ なので、⑤⑥から、 $b + b^2 = a$, $b^3 = a$ となり、

$$b + b^2 = b^3, \quad b(b^2 - b - 1) = 0$$

さらに、 $b < 0$ なので $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ となり、

$$a = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5}}{8} = 2 - \sqrt{5}$$

なお、この値は④を満たしている。

コメント

放物線と直線についての基本問題です。

問題

xy 平面における 2 つの放物線 $C: y = (x-a)^2 + b$, $D: y = -x^2$ を考える。

- (1) C と D が 2 点で交わり、その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき、 C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。
- (2) 実数 a, b が(1)の条件を満たすとき、 C と D の 2 交点を結ぶ直線は、放物線 $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ に接することを示せ。 [2018]

解答例+映像解説

- (1) $C: y = (x-a)^2 + b$ ……①, $D: y = -x^2$ ……②を連立すると、

$$(x-a)^2 + b = -x^2, \quad 2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0 \quad \text{……③}$$

条件より、 $D/4 = a^2 - 2(a^2 + b) = -a^2 - 2b > 0$ のもとで、③の異なる 2 実数解

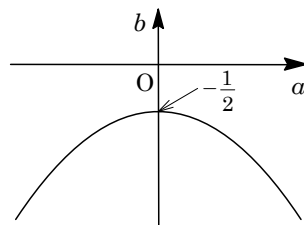
$$x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 - 2b}}{2}$$

の差が 1 から、

$$\frac{\sqrt{-a^2 - 2b}}{2} \cdot 2 = 1, \quad -a^2 - 2b = 1$$

よって、 $b = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$ ……④となり、 C の頂点 (a, b)

の軌跡は右図の放物線となる。



- (2) (1)のとき、 C と D の 2 交点をを結ぶ直線は、①+②より、

$$2y = (x-a)^2 + b - x^2, \quad 2y = -2ax + a^2 + b$$

④を代入すると、 $2y = -2ax + a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$ から、 $y = -ax + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}$ ……⑤

そして、直線⑤と放物線 $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ ……⑥を連立すると、

$$-ax + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4} = -x^2 - \frac{1}{4}, \quad x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

すると、 $(x - \frac{a}{2})^2 = 0$ から重解 $x = \frac{a}{2}$ をもち、直線⑤と放物線⑥は接する。

コメント

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお、(2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は、交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。

問題

放物線 $C: y = x^2$ に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $P(a, a^2)$ を通り、 P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。
- (2) l を(1)で求めた直線とする。 $a \neq 0$ のとき、直線 $x = a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。
- (3) (2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し、 F の座標を求めよ。 [2010]

解答例

- (1) $C: y = x^2$ に対して、 $y' = 2x$

これから、点 $P(a, a^2)$ における C の接線の方角ベクトルの成分を $(1, 2a)$ とおくことができるので、接線に直交する直線 l の方程式は、

$$(x-a) + 2a(y-a^2) = 0, \quad x + 2ay - a - 2a^3 = 0$$

- (2) 点 $A(a, 0)$ の l に関する対称点を $B(b, c)$ とおくと、

$$\overrightarrow{AB} = k(1, 2a), \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + k(1, 2a)$$

よって、 $(b, c) = (a, 0) + k(1, 2a) = (a+k, 2ak) \dots\dots\dots ①$

また、線分 AB の中点 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ が l 上にあることより、

$$\frac{a+b}{2} + 2a \cdot \frac{c}{2} - a - 2a^3 = 0, \quad b + 2ac - a - 4a^3 = 0 \dots\dots\dots ②$$

①②より、 $a+k + 4a^2k - a - 4a^3 = 0, \quad k = \frac{4a^3}{4a^2+1}$

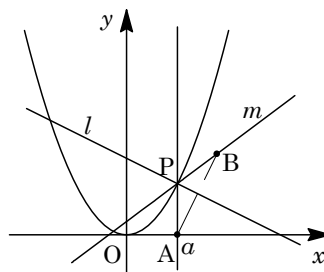
よって、 $(b, c) = (a + \frac{4a^3}{4a^2+1}, \frac{8a^4}{4a^2+1})$ となり、

$$\overrightarrow{PB} = (a + \frac{4a^3}{4a^2+1} - a, \frac{8a^4}{4a^2+1} - a^2) = \frac{a^2}{4a^2+1} (4a, 4a^2-1)$$

$a \neq 0$ のとき、2点 P, B を通る直線 m の方程式は、

$$y - a^2 = \frac{4a^2-1}{4a}(x-a), \quad y = \frac{4a^2-1}{4a}x + \frac{1}{4}$$

- (3) a の値によらず直線 m が通る定点 F の座標は、(2)より、 $F(0, \frac{1}{4})$ である。



コメント

図形と方程式についての基本題です。ただ、(3)については、定点が2点以上存在する可能性はないので、1点を見つけて終了としています。

問題

不等式 $2y > x + 1 + 3|x - 1|$ が表す座標平面上の領域を D とする。実数 a に対して、放物線 C を $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ で定める。このとき、 C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ。 [2009]

解答例

放物線 $C : y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ ，領域 $D : 2y > x + 1 + 3|x - 1|$ に対して、 C 上の点がすべて D の点となる条件は、すべての x について、

$$2(x^2 - 2ax + a^2 + a + 2) > x + 1 + 3|x - 1| \cdots \cdots (*)$$

(*)より、 $x \geq 1$ において、 $2(x^2 - 2ax + a^2 + a + 2) > x + 1 + 3(x - 1)$

$$x^2 - 2(a + 1)x + a^2 + a + 3 > 0, \{x - (a + 1)\}^2 - a + 2 > 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(*)より、 $x < 1$ において、 $2(x^2 - 2ax + a^2 + a + 2) > x + 1 - 3(x - 1)$

$$x^2 - (2a - 1)x + a^2 + a > 0, \left(x - \frac{2a - 1}{2}\right)^2 + 2a - \frac{1}{4} > 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて、 $x \geq 1$ において、 $\textcircled{1}$ が成立する条件は、

(i) $a + 1 \geq 1$ ($a \geq 0$) のとき

$$-a + 2 > 0 \text{ から, } a < 2 \text{ となり, } 0 \leq a < 2$$

(ii) $a + 1 < 1$ ($a < 0$) のとき

$$1 - 2(a + 1) + a^2 + a + 3 > 0, a^2 - a + 2 > 0 \text{ となり, つねに成立するので, } a < 0$$

(i)(ii)より、 $a < 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

次に、 $x < 1$ において、 $\textcircled{2}$ が成立する条件は、

(iii) $\frac{2a - 1}{2} \geq 1$ ($a \geq \frac{3}{2}$) のとき

$$1 - (2a - 1) + a^2 + a \geq 0, a^2 - a + 2 \geq 0 \text{ となり, つねに成立するので, } a \geq \frac{3}{2}$$

(iv) $\frac{2a - 1}{2} < 1$ ($a < \frac{3}{2}$) のとき

$$2a - \frac{1}{4} > 0 \text{ から, } a > \frac{1}{8} \text{ となり, } \frac{1}{8} < a < \frac{3}{2}$$

(iii)(iv)より、 $a > \frac{1}{8} \cdots \cdots \textcircled{4}$

以上より、すべての x について(*)が成立する条件は、 $\textcircled{3}\textcircled{4}$ から $\frac{1}{8} < a < 2$ である。

コメント

数式的な処理で押し通すと、内容は2次不等式の解法になります。

問題

xy 平面の 3 点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, \sqrt{3})$ を頂点とする $\triangle ABC$ に対して以下の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して、点 $P(x, a)$ が $\triangle ABC$ に含まれるための x の範囲を求めよ。
- (2) (1)の定数 a に対して、(1)で求められた範囲を x が動くとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。
- (3) 点 $P(x, y)$ が $\triangle ABC$ に含まれるとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と、そのときの点 P の座標 (x, y) を求めよ。 [2007]

解答例

- (1) 直線 AC , 直線 BC の方程式は、それぞれ、

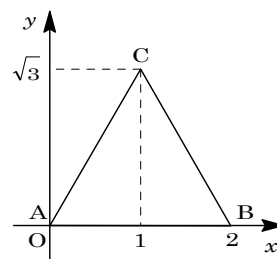
$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}(x-2)$$

点 $P(x, a)$ が $\triangle ABC$ に含まれるための条件は、

$$0 \leq a \leq \sqrt{3} \text{ より,}$$

$$a \leq \sqrt{3}x, \quad a \leq -\sqrt{3}(x-2)$$

$$\text{よって, } \frac{a}{\sqrt{3}} \leq x \leq 2 - \frac{a}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots (*)$$



- (2) $P(x, a)$ に対し、

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= x^2 + a^2 + (x-2)^2 + a^2 + (x-1)^2 + (a-\sqrt{3})^2 \\ &= 3x^2 + 3a^2 - 6x - 2\sqrt{3}a + 8 \\ &= 3(x-1)^2 + 3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5 \end{aligned}$$

(*)から、 $x=1$ のとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ は最小値 $3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5$ をとる。

- (3) (2)より、 $P(x, y)$ に対し、

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3(x-1)^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}y + 5 = 3(x-1)^2 + 3\left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4$$

よって、 $(x, y) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ は $\triangle ABC$ に含まれることより、この点において

$AP^2 + BP^2 + CP^2$ は最小値 4 をとる。

コメント

丁寧すぎると感じるくらいの誘導がついています。(3)だけの出題だったとしても、難しくはありません。