2020 入試対策
過去問ライブラリー

東北大学
理系数学22か年

1998−2019

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された東北大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

また，2013 年度以降に出題された問題は，その解答例の映像解説を YouTube を利用して配信中です。リンク元は解答編の 解答例＋映像解説 です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分野別問題一覧 …… 3

分野別問題と解答例 …… 33

図形と式 …… 34

図形と計量 …… 45

ベクトル …… 59

整数と数列 …… 75

確　率 …… 84

論　証 …… 115

複素数 …… 119

曲　線 …… 134

極　限 …… 138

微分法 …… 155

積分法 …… 181

積分の応用 …… 194

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 xy 平面における 2 つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。 [2018]

2 a, b を実数とする。$y=|x^2-4|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。 [2017]

3 s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s, t が $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。s, t が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。 [2012]

4 実数 a に対し，不等式 $y\leqq 2ax-a^2+2a+2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1\leqq a\leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2) $-1\leqq a\leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。 [2011]

5 連立不等式 $x^2-6x+y^2+5\leqq 0$，$x+y\leqq 5$ の表す領域 D を図示せよ。また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。 [2006]

6　曲線$y=x^2$の点$(a,\ a^2)$での接線をlとする。l上の点でx座標が$a-1$と$a+1$のものをそれぞれPおよびQとする。aが$-1\leqq a\leqq 1$の範囲を動くとき線分PQの動く範囲の面積を求めよ。 [1999]

7　aとbは± 1，0でない実数とする。実数$x,\ y$が，$\dfrac{\sin x}{\sin y}=a$，$\dfrac{\cos x}{\cos y}=b$を満たしているとする。

(1)　$\tan^2 y$を$a,\ b$を用いて表せ。

(2)　点$(a,\ b)$の存在する範囲をab平面に図示せよ。 [1998]

8　xの方程式$x^2+a|x-1|+b=0$が異なる実数解をちょうど2個もつとき，点$(a,\ b)$の存在する範囲をab平面に図示せよ。 [1998]

■ 図形と計量

1　三角形ABCの内接円の半径をr，外接円の半径をRとし，$h=\dfrac{r}{R}$とする。また，$\angle\mathrm{A}=2\alpha$，$\angle\mathrm{B}=2\beta$，$\angle\mathrm{C}=2\gamma$とおく。

(1)　$h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$となることを示せ。

(2)　三角形ABCが直角三角形のとき$h\leqq\sqrt{2}-1$が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(3)　一般の三角形ABCに対して$h\leqq\dfrac{1}{2}$が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。 [2018]

2　鋭角三角形△ABCにおいて，頂点A，B，Cから各対辺に垂線AD，BE，CFを下ろす。これらの垂線は垂心Hで交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四角形BCEFとAFHEが円に内接することを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ADF}$であることを示せ。 [2016]

3　空間内に，直線 l で交わる 2 平面 α，β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに，平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも O を通り l に垂直にとる。m，n 上にそれぞれ点 P, Q があり，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ であるとする。線分 PQ 上の動点 T について，$\mathrm{PT}=t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。

(2)　S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

[2016]

4　$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。　[2015]

5　長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A, B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

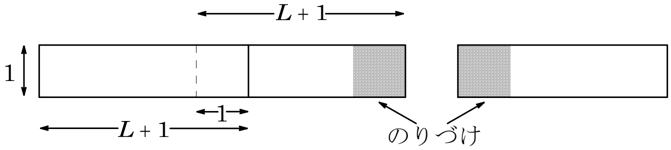
(1)　y を x を用いて表せ。

(2)　点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

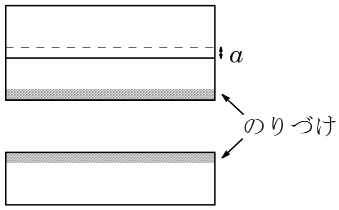
[2012]

6　L を 2 以上の自然数, a を $0<a<1$ を満たす実数とする。縦 1 cm, 横 $(L+1)$ cm の長方形の紙を用いて, 次のように長方形 A, B を作る。

長方形 A の作り方。L 枚の紙を横に並べて, 順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして（隣り合う紙が横 1 cm 重なるように）はり合わせ, 縦 1 cm の横長の長方形を作る。



長方形 B の作り方。L 枚の紙を縦に並べて, 隣り合う紙が縦 $a$cm 重なるようにはり合わせて, 横 $(L+1)$ cm の長方形を作る。



長方形 A, B の面積をそれぞれ S_1 cm^2 および S_2 cm^2 とおくとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 と S_2 を求めよ。

(2)　$L=2$ のとき, $S_1-1<S_2$ となる a の範囲を求めよ。

(3)　$S_1-1<S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ。　[2009]

7　θ を $0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし, 空間の 4 点 O, A, B, C が, OA = OB = OC = 1 かつ ∠AOB = ∠BOC = ∠COA = θ を満たすとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　△ABC の重心を G とするとき, AG と OG をそれぞれ θ で表せ。

(2)　θ を動かしたとき, O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

[2008]

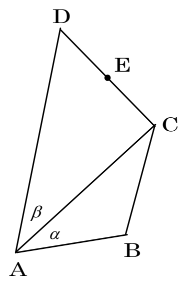
8　∠C を直角とする直角三角形 ABC に対して, ∠A の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また, 線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。∠A = θ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta$ を求めよ。

(2)　$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし, $\sqrt{2}=1.414\cdots$, $\sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。

[2007]

9　すべての内角が$180°$より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが $AB = BC = r$，$AD = 2r$ とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形$\triangle ABC$，$\triangle ACE$，$\triangle ADE$の面積はすべて等しいとする。$\alpha = \angle BAC$，$\beta = \angle CAD$とおく。

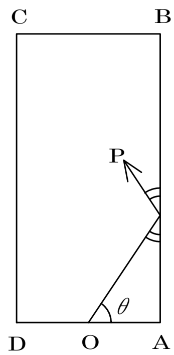


(1)　$\alpha = \beta$を示せ。

(2)　$\cos\angle DAB = \dfrac{3}{5}$であるとするとき，$\sin\angle CAE$の値を求めよ。

[2005]

10　長方形 ABCD 内を減速しながら進む点を考える。時刻$t = 0$に初速 v で発射させた点 P は，時刻 t では速さve^{-t}で直進するとする。ただし，P がいずれかの辺に来たときは等しい入射角と反射角で反射するとし，頂点 A, B, C, D のいずれかに来たときはそこで停止するとする。AB の長さは 4 で AD の長さは 2 とし，出発点は AD の中点 O とする。初速を$v = 14$としたとき，最も長い時間をかけて P をどれかの頂点に到達させるにはどの方向に発射させればよいか。OA との角を$\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$として$\tan\theta$を求めよ。またそのとき，P が頂点に到達する時刻を求めよ。



[1999]

■ ベクトル

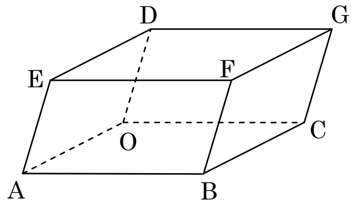
1　s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を$s:1$に内分する点を D とし，辺 BC を$s:3$に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$とするとき，$\alpha$と$\beta$を求めよ。

(2)　F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

[2017]

2 右図のような平行六面体 OABC - DEFG が xyz 空間内にあり，O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，C(0, 3, 0)，D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を MN$=4$ かつ DN$<$GN を満たすように定める。



(1) N の座標を求めよ。

(2) 3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3) 3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC - DEFG の切り口の面積を求めよ。 [2014]

3 四面体 OABC において，OA$=$OB$=$OC$=1$ とする。$\angle$AOB$=60^\circ$，$\angle$BOC$=45^\circ$，$\angle$COA$=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。 [2013]

4 平面上に長さ 3 の線分 OA を考え，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\vec{a}$ で表す。$0<t<1$ を満たす実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ 2 のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 θ $(0<\theta<\pi)$ をなすようにとり，点 B を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ で定める。線分 OB の中点を Q とし，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき，どのように θ をとっても $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。 [2011]

5 四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ。 [2010]

6　図 1 のような $AB=BC=CD=DA=AC=1$ である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α（$\alpha=\angle BCD$）とし，$0°<\alpha<120°$ とする。以下の問いに答えよ。

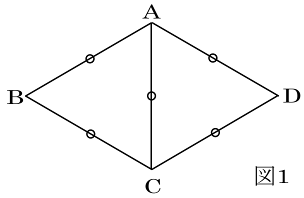


図1

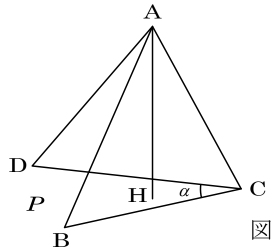


図2

(1)　図 2 において，A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$ と α とで表せ。

(2)　$\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ。

(3)　H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。　[2006]

7　$0<t<\dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i)　$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$　　(ii)　$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x}-\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直で長さの比が $t:1-t$ となるとする。このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を t で表せ。　[2005]

8　平面ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は，$|\vec{a}|^2=1$，$|\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}$ を満たすとする。

(1)　k, l を整数とする。$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ。

(2)　$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=0$ となる整数の組 $(k,\ l)$ をすべて求めよ。

(3)　整数の組 $(k,\ l)$ を条件 $(k,\ l)\neq(0,\ 0)$ のもとで動かすとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ の最小値を与える $(k,\ l)$ をすべて求めよ。　[2004]

9　四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする。

(1)　$\overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$ で与えられる点 P に対し $|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{DP}|$ が成り立つならば，$l=m=n$ であることを示せ。また，このときの $|\overrightarrow{BP}|$ を l を用いて表せ。

(2)　A, B, C, D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を，四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき，$\cos\angle PBQ$ の値を求めよ。

[2002]

10 四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA，OB，OC，BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N，P，Q，R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

(1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3) 直線 LP，MQ，NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積および四面体 OABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。 [2001]

11 空間の点 $(10,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 9 の球面を S_1 とし，点 $(0,\ 10,\ 0)$ を中心とする半径 8 の球面を S_2 とする。S_1 と S_2 に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル $(a,\ b,\ c)$ $(c\geqq 0)$ をすべて求めよ。 [1999]

■ 整数と数列

1 a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n)>\frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1) $n=6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。 [2019]

2 整数 a, b は等式 $3^a-2^b=1$ ……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば, a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。 [2018]

3 以下の問いに答えよ。

(1) 6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n>n^2+7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式 $p^q=q^p+7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。 [2016]

4　$k \geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$ が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1)　n が k-連続和であることは，次の条件(A), (B)の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A)　$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数である。　　(B)　$2n>k^2$ が成り立つ。

(2)　f を自然数とする。$n=2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3)　f を自然数とし，p を 2 でない素数とする。$n=p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ。　[2015]

5　n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1)　a_2，b_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3)　各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。　[2007]

6　数列 $\{\alpha_n\}$ を初項 $\dfrac{4}{5}$，公比 2 の等比数列，数列 $\{\beta_n\}$ を初項 $\dfrac{1}{5}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列とする。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，α_n の小数部分を求めよ。

(2)　$a_n=\alpha_n+\beta_n$ の小数部分 b_n を求めよ。

(3)　数列 $\{b_n\}$ の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ。　[2000]

■ 確率

1　10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ。

(2)　$p(n,\ 1)$ を求めよ。

(3)　$p(n,\ 2)$ を求めよ。　[2019]

2 n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2) $p(2)$ を求めよ。

(3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。 [2018]

3 A 君と B 君はそれぞれ, 0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は, 自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし, 0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して, しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの, A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。 [2017]

4 a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

(2) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。 [2017]

5 サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2) a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。 [2016]

6 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし, x の 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ ……(＊)を考える。

(1) 方程式(＊)が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3) 方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ。 [2015]

7 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ, 合計 10 個ある。

(1) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と, 4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。 [2014]

8 A, B の 2 人が, サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし, その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし, 以下の問いに答えよ。

(1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。

(2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3) B がちょうど 3 回投げて, その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

9 袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1) $N=4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。$X=1$, $X=2$, $X=3$, $X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。

(2) $N=3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, そのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。 [2012]

10 先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり, 玉の入った箱がある。箱の中には最初, 赤玉 3 個, 白玉 7 個, 全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって, 1 の目が出たら A が, 2 または 3 の目が出たら B が, その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず, 取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし, サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし, また, 箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1) 2 回目の操作が終わったとき, A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(2) 2 回目の操作が終わったとき, B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(3) 3 回目の操作で, C が赤玉を取り出す確率を求めよ。 [2011]

11 1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて, 次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を一の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し, 4 枚のカードをよく混ぜて, 再び 1 枚を取り出して現れた数字を十の位とする。このような操作を 5 回繰り返して, 5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。 [2010]

12 袋の中に青玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ。

(1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。

(4) 4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ。

[2009]

13 点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。P の座標 a について, $a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し, $a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii) 原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2) P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3) P の座標が 8 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

[2008]

14 1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し，箱に戻すという操作を繰り返す。ただし，k 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に, k を得点として終了する。

(1) $2 \leqq k \leqq n+1$ を満たす自然数 k について，得点が k となる確率を求めよ。

(2) 得点の期待値を n で表した式を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ および極限値 $\lim_{n\to\infty} f(n)$ を求めよ。

[2005]

15 手作りのサイコロがあり，1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，p_6 で表す。ここで

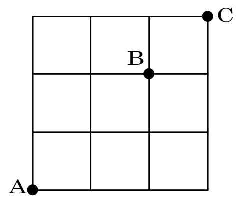
$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1,\ p_1=p_6,\ p_2=p_5,\ p_3=p_4$$

が成り立つとする。このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す。

(1) $Q(5)$ を p_1，p_2 で表せ。

(2) $p_3=\dfrac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする。$Q(7)$ がとり得る最大の値は何か。また，そのときの p_1，p_2 を求めよ。 [2004]

16 右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。



n を 8 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。 [2002]

17 数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2, 3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。 [2000]

18 T, O, H, O, K, U, A, O, B, A の 10 文字をでたらめに 1 列に並べる。

(1) どの 2 つの O も隣り合わない確率を求めよ。

(2) どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ。 [1999]

19　ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている。平面に接する面（底面）の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う。ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする。この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け。

(3)　b_n を n の式で表し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。　[1998]

■ 論証

1　実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す。

(1)　$[2x^2+x+3]$，$[x^5-1]$，$[[2x^2+x+3][x^5-1]]$ をそれぞれ求めよ。

(2)　整式 $A(x)$，$B(x)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)]=[[A(x)][B(x)]]$$

(3)　実数 θ に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]=x\sin 2\theta+\cos 2\theta$$

(4)　次の等式を満たす実数 a, b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

$$[(ax+b)^4]=-1$$

[2019]

2　$f(x)=x^3+3x^2-9x$ とする。$y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。　[2010]

3　a, b, c を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a+b\geqq c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

■ 複素数

1　α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1)　方程式①が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2)　方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。　[2018]

2　α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2)　$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ を仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき，(＊)を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。　[2017]

3　多項式 $P(x)$ を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$ により定める。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数 a_0，…，a_7 をすべて求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3)　(1)で求めた a_1，a_3，a_5，a_7 を用いて，多項式 $Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ。　[2016]

4　k を実数とする。3 次式 $f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする。$g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x)=0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ であるものとする。

(1)　$g(x)$ を k を用いて表せ。

(2)　2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

[2013]

5 aを実数, zを0でない複素数とする。zと共役な複素数を$\overline{z}$で表す。

(1) 次を満たすzを求めよ。$z+1-\dfrac{a}{z}=0$

(2) 次を満たすzが存在するようなaの範囲を求めよ。$\overline{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$

(3) 次を満たすzが存在するようなaの範囲を求めよ。$z(\overline{z})^2+\overline{z}-\dfrac{a}{z}=0$ [2011]

6 多項式$f(x)$について, 次の条件(i), (ii), (iii)を考える。

$$\text{(i)}\quad x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)\qquad \text{(ii)}\quad f(1-x)=f(x)\qquad \text{(iii)}\quad f(1)=1$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 条件(i)を満たす多項式$f(x)$の次数は4以下であることを示せ。

(2) 条件(i), (ii), (iii)をすべて満たす多項式$f(x)$を求めよ。 [2008]

7 zを絶対値が1の複素数とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) z^3-zの実部が0となるようなzをすべて求めよ。

(2) z^5+zの絶対値が1となるようなzをすべて求めよ。

(3) nを自然数とする。z^n+1の絶対値が1となるようなzをすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ。 [2004]

8 複素数平面上で, 相異なる3点1, α, α^2は実軸上に中心をもつ同一円周上にある。このようなαの存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。さらに, この円の半径を$|\alpha|$を用いて表せ。 [2003]

9 a, bは実数であり, 方程式$x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$が解$x=1+i$をもつとする。ただし, $i=\sqrt{-1}$とする。このときa, bを求めよ。また, このときの方程式の他の解も求めよ。 [2002]

10 複素数$z=x+yi$, $w=u+vi$（ただし, x, y, u, vは実数）は$|z|=|w|=1$を満たし, $yv<0$とする。$|1+z+w|<1$となるための必要十分条件をxとuを用いて表せ。

[2001]

11 α, βは$|\alpha+\beta|<2$を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2x^2-\left(|\alpha|+|\beta|\right)x+1$$

の$0\leqq x\leqq 1$における最小値を求めよ。 [2000]

■ 曲線

1 xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする。$x^2+4y^2=1$，$x>0$，$y>0$

Pを C 上の点とする。Pで C に接する直線を l とし，Pを通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。Pが C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときのPの座標を求めよ。 [2015]

2 $a>b>0$ とし，xy 平面の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の第1象限の部分を E とする。ただし，第1象限には x 軸と y 軸は含まれない。E 上の点Pにおける E の接線と法線が y 軸と交わる点の y 座標をそれぞれ h と k とし，$L=h-k$ とおく。点Pが E 上を動くとき，L の最小値が存在するための a と b についての条件と，そのときの L の最小値を求めよ。 [2002]

3 (1) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ と円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ \ (r>0)$ との距離 d とは，Pと C 上の点 $(x,\ y)$ との距離の最小値をいう。Pが C の外部にある場合と内部にある場合に分けて，d を表す式を求めよ。

(2) 2つの円 $C_1:(x+4)^2+y^2=81$ と $C_2:(x-4)^2+y^2=49$ から等距離にある点Pの軌跡の方程式を求めよ。 [1998]

■ 極限

1 a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1=a,\ \ x_{n+1}=x_n+{x_n}^2\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $a>0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。

(2) $-1<a<0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1<x_n<0$ が成り立つことを示せ。

(3) $-1<a<0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。 [2019]

2　$a>0$ を実数とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\ \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\ ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx,\ \ C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。　[2015]

3　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}d\theta,\ \ b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta d\theta\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　一般項 b_n を求めよ。

(2)　すべての n について，$b_n\leqq a_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。　[2013]

4　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n>1$ となることを示せ。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを示せ。

(4)　$0<r<1$ を満たすある実数 r に対して，不等式 $\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2012]

5　n を 2 以上の自然数とする。平面上の△$\mathrm{OA_1A_2}$は$\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90°$，$\mathrm{OA_1} = 1$，$\mathrm{A_1A_2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$を満たすとする。$\mathrm{A_2}$から$\mathrm{OA_1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_3}$とする。$\mathrm{A_3}$から$\mathrm{OA_2}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_4}$とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$について，$\mathrm{A}_k$から$\mathrm{OA}_{k-1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A}_{k+1}$として，順番に$\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，…を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$k = 1,\ 2,\ \cdots$のとき，ベクトル$\overrightarrow{h_k}$と$\overrightarrow{h_{k+1}}$の内積$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$を$n$と$k$で表せ。

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$とおくとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$であることを用いてもよい。　[2008]

6　$a>0$に対し$I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx$，$I_n(a) = \displaystyle\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx$ ($n = 1,\ 2,\ \cdots$)とおく。

(1)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$を求めよ。

(2)　漸化式$I_n(a) = \dfrac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$ ($n = 1,\ 2,\ \cdots$)を示せ。

(3)　自然数nに対して，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$を求めよ。　[2007]

7　関数$f(x) = 4x - x^2$に対し，数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = c,\quad a_{n+1} = \sqrt{f(a_n)}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与える。ただし，cは$0<c<2$を満たす定数である。

(1)　$a_n<2$，$a_n<a_{n+1}$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)を示せ。

(2)　$2 - a_{n+1} < \dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。　[2003]

8　(1)　nを正の整数とする。$t \geqq 0$のとき，不等式$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$が成り立つことを数学的帰納法で示せ。

(2)　極限$I_m = \displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^m e^{-x}dx$ ($m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)を求めよ。　[2001]

9　実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が $ad-bc\neq 0$ を満たすとき，関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　$f^{-1}(x)=f(x)$ を満たし，$f(x)\neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

(3)　$f^{-1}(x)=f(f(x))$ を満たし，$f(x)\neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

[2000]

10　正 n 角形 P_n を次のようにして定義する。

(i)　P_3 は面積が 1 の正三角形である。

(ii)　P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする。P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい正 $n+1$ 角形である。

$n=3,\ 4,\ 5,\cdots$ について P_n の面積を a_n としたとき次の各問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 4$ について $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ を n を用いて表せ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)$ を求めよ。　[1999]

■ 微分法

1　xy 平面における曲線 $y=\sin x$ の 2 つの接線が直交するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ。　[2019]

2　xy 平面において，3 次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式 $x^3-x>y>-x$ の表す領域を D とする。また，P を D の点とする。

(1)　P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。

(2)　P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。　[2015]

3　$x=t+\dfrac{1}{3t}\ \left(0<t\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ とする。

(1)　x のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　x の方程式 $x^2+ax+b=0$ が(1)の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。　[2014]

4 以下の問いに答えよ。

(1) nを自然数，aを正の定数として，

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく。$x>0$における関数$f(x)$の極値を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) nが2以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$ [2014]

5 a，bを正の実数とする。曲線$C: y=x^3-a^2x+a^3$と点$\mathrm{P}(b,\ 0)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点Pから曲線Cに接線がちょうど3本引けるような点$(a,\ b)$の存在する領域を図示せよ。

(2) 点Pから曲線Cに接線がちょうど2本引けるとする。2つの接点をA，Bとしたとき，$\angle\mathrm{APB}$が$90°$より小さくなるためのaとbの条件を求めよ。 [2010]

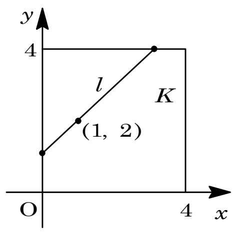
6 実数aに対して，xの方程式$|x(x-2)|+2a|x|-4a|x-2|-1=0$が，相異なる4つの実数解をもつような$a$の範囲を求めよ。 [2009]

7 自然数 n に対し，方程式$\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}=0$を考える。ただし，対数は自然対数であり，$e$はその底とする。

(1) 上の方程式は$x\geqq 1$にただ1つの解をもつことを示せ。

(2) (1)の解をx_nとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$を示せ。 [2007]

8 xy平面上に4点$(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(4,\ 4)$，$(0,\ 4)$を頂点とする正方形Kを考える。点$(1,\ 2)$を通る各直線に対して，そのKに含まれる部分をlとおく。



(1) l の長さの最大値と，それを与える直線の方程式を求めよ。

(2) lの長さの最小値を求めよ。 [2007]

9 $x>0$ において，関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ を考える。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし，以下の問いに答えよ。

(1) $f'(2)$ を求め, $x>2$ のとき $f'(x)<1$ であることを示せ。

(2) k が自然数のとき，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)$ を求めよ。

(3) $f'(x)=1$ となる x を値の大きいものから順に，x_1，x_2，x_3，…とおく。$n\geqq 2$ である自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$ を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ を求めよ。 [2006]

10 a を $0<a<1$ を満たす定数とし，$f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}$ とする。

(1) $f(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。 [2005]

11 2つの関数を

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\quad y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする。

(1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

(2) y を t の関数で表せ。

(3) $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき, y の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。[2003]

12 対数は自然対数であり，e はその底とする。関数 $f(x)=(x+1)\log\dfrac{x+1}{x}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x>0$ で単調減少関数であることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)=2$ を満たす x が $\dfrac{1}{e^2}<x<1$ の範囲に存在することを示せ。 [2003]

13 関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ $(x\neq 0)$ について，$a=\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$，$b=\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x)$ とおく。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) $-\dfrac{1}{2}\leqq x$ の範囲で，3 つの関数 $\sqrt{1+2x}$，$1+ax$，$1+ax+bx^2$ の大小関係を調べ，これらの関数のグラフを同一の xy 平面上に描け。 [2001]

14 $0<t<1$ として，頂点が $O(0,\ 0)$，$A(t,\ 0)$，$B(0,\ 1)$ である三角形と，頂点が O，$P(1-t,\ 0)$，$Q(1-t,\ 1-t)$，$R(0,\ 1-t)$ である正方形の共通部分の面積を S とするとき，S を t の式で表せ。また，S を最大にする t の値を求めよ。 [2000]

15 $x>0$ において関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$ で定める。対数は自然対数である。

(1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ。

(2) $f(x)\geqq 0$ であることを示し，$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(3) 正の実数 $p,\ q$ について不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ。 [1999]

■ 積分法

1 (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=\int_0^1\sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)\,dt$$ [2019]

2 $a,\ b,\ c$ を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos bx\,dx\ ,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}8\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$ [2017]

3 関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\sin(t-x)-\sin 2t\right|dt$ の区間 $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値と最小値を求めよ。 [2016]

4 整数 n に対して，$I_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$ とする。

(1) I_0 を求めよ。

(2) n を正の整数とするとき，I_n-I_{n-1} を求めよ。

(3) I_5 を求めよ。 [2014]

5 $0\leqq x\leqq\pi$ に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$ と定める。$f(x)$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値と最小値を求めよ。 [2012]

6 a を $0\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 θ に対して $\sin\theta$ と $\sin(\theta-2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく。すなわち,

$\sin\theta\geqq\sin(\theta-2a)$ のとき $f(\theta)=\sin\theta$

$\sin\theta<\sin(\theta-2a)$ のとき $f(\theta)=\sin(\theta-2a)$

となる関数 $f(\theta)$ を考える。このとき定積分 $I=\int_0^{\pi}f(\theta)d\theta$ を求めよ。

(2) a を $0\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき, (1)の I の最大値を求めよ。 [2009]

7 n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 x_0，x_1，…，x_n と等比数列 y_0，y_1，…，y_n が，$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$，$1=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=2$ を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$ を次で定める。

$$P(n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad Q(n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$R(n)=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},\quad S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$$

このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}P(n)$，$\lim_{n\to\infty}Q(n)$，$\lim_{n\to\infty}R(n)$，$\lim_{n\to\infty}S(n)$ をそれぞれ求めよ。

[2004]

8 　$f_1(x)$は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数とする。$f_2(x)$, $f_3(x)$, $\cdots$をつぎのように順次定義する。$n=2$, 3, $\cdots$に対し，$F_{n-1}(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$とおいて，$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)F_{n-1}(t)dt$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$のとき，すべてのxに対して$f_n(x) \geqq 0$であることを示せ。

(2) $n \geqq 3$のとき，すべての$x \geqq 0$に対して$f_n{}'(x) \geqq 0$であることを示せ。

(3) $f_4{}'(1)=0$のとき，すべての$0 \leqq x \leqq 1$に対して$f_1(x)=0$であることを示せ。

[2002]

9 　(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$のとき，$y=f(x)$の逆関数$y=g(x)$を求めよ。

(2) (1)の$f(x)$，$g(x)$に対し，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

[1998]

■ 積分の応用

1 　xy平面内の図形

$$S: x+y^2 \leqq 2,\ x+y \geqq 0,\ x-y \leqq 2$$

を考える。図形Sを直線$y=-x$のまわりに1回転して得られる立体の体積をVとする。

(1) Sをxy平面に図示せよ。

(2) Vを求めよ。 [2018]

2 　半径 1 の円を底面とする高さ$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と45°の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分をVとする。

(1) 直径 AB と直交し，O との距離がt $(0 \leqq t \leqq 1)$であるような平面でVを切ったときの断面積$S(t)$を求めよ。

(2) Vの体積を求めよ。 [2013]

3　a を実数とする。円 C は点 $(a,\ -a)$ で直線 $y=-x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする。C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　$X,\,Y$ を a を用いて表せ。

(2)　a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2011]

4　$0<t<3$ のとき，連立不等式 $0\leqq y\leqq \sin x$，$0\leqq x\leqq t-y$ の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。 [2010]

5　$k>1$ として，$f(x)=x^2+2kx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C:x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうちで，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする。点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ に対して，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を α で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。 [2008]

6　xyz 空間において，点 $(1,\ 0,\ 1)$ と点 $(1,\ 0,\ 2)$ を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2007]

7　連立不等式 $1\leqq x\leqq 2$，$y\leqq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また，a を定数とし，不等式 $y\geqq x^2-3ax+2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

(1)　D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲の a に対して，D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。 [2006]

8 aを負の実数とし，放物線$C_1 : y = ax^2 + bx + c$を考える。C_1が曲線

$$C_2 : y = \begin{cases} x^2 - x + \dfrac{3}{4} & (x > 0\text{のとき}) \\ x^2 + 2x + \dfrac{3}{4} & (x \leqq 0\text{のとき}) \end{cases}$$

と 2 点で接するとき，C_1とC_2で囲まれた図形の面積をaで表せ。 [2005]

9 平面上の 3 つの曲線C_1，C_2，C_3を次で定める。

$$C_1 : x = \frac{15}{2}t^4,\ \ y = -3t^5 + 5t^3 \quad \left(0 \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$C_2 : x = \frac{125}{6}\cos^3\left(2\pi\left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right),\ \ y = \frac{125}{6}\sin^3\left(2\pi\left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\right)$$

$$C_3 : x = 0,\ \ y = \frac{125(t-2)}{6\left(\dfrac{7}{4} - \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \leqq t \leqq 2\right)$$

(1) C_1とx軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) 原点 O を出発し，C_1，C_2，C_3を順にたどって O に戻る行程の道のりを求めよ。

[2004]

10 xyz 空間内に 2 点$\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$，$\mathrm{Q}(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2})$を考える。$u$ が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点$(u,\ 0,\ 0)$ $(0 \leqq u \leqq 1)$と線分 PQ の距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。 [2003]

11 xy 平面上に，媒介変数 t により表示された曲線$C : x = e^t - e^{-t}$，$y = e^{3t} + e^{-3t}$がある。

(1) x の関数 y の増減と凹凸を調べ，曲線 C の概形を描け。

(2) 曲線 C, x 軸, 2 直線 $x = \pm 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2002]

12 a, b を正の数とする。2 つの曲線$y = x^3 + bx^2$，$y = ax^2 + abx$によって囲まれる 2 つの部分の面積の和を S とする。

(1) S を a と b で表せ。

(2) $a + b = 1$のとき, S を最小にする a, b の値と，そのときの S の値を求めよ。

[2001]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

xy 平面における 2 つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。 [2018]

解答例＋映像解説

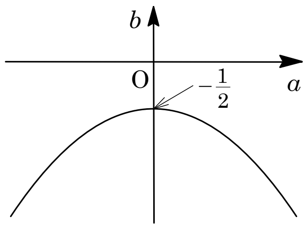
(1) $C: y=(x-a)^2+b$ ……①，$D: y=-x^2$ ……②を連立すると，

$$(x-a)^2+b=-x^2,\ 2x^2-2ax+a^2+b=0 \ \cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$D/4=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b>0$ のもとで，③の異なる 2 実数解 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$ の差が 1 から，

$$\frac{\sqrt{-a^2-2b}}{2}\cdot 2=1,\ -a^2-2b=1$$

よって，$b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ ……④となり，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の放物線となる。



(2) (1)のとき，C と D の 2 交点をを結ぶ直線は，①＋②より，

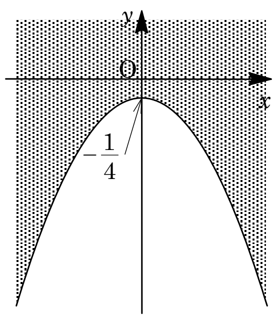
$$2y=(x-a)^2+b-x^2,\ 2y=-2ax+a^2+b$$

④を代入すると，$2y=-2ax+a^2-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ から，$4y=-4ax+a^2-1$ ………⑤

ここで，直線⑤が点 $(x,\ y)$ を通過する条件は，⑤を a についての 2 次方程式 $a^2-4xa-4y-1=0$ ……⑥とみたとき，⑥を満たす実数 a が存在する条件に対応するので，

$$D/4=4x^2-(-4y-1)=4x^2+4y+1\geqq 0$$

まとめると，$y\geqq -x^2-\dfrac{1}{4}$ となり，図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお，(2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は，交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。また，通過領域は実数解条件で処理しています。

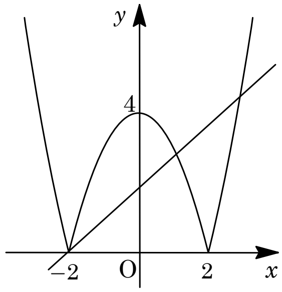
問　題

a, b を実数とする。$y=|x^2-4|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。 [2017]

解答例＋映像解説



(1) $C: y=|x^2-4|$ に対して，

$$y=x^2-4 \quad (x \leqq -2,\ 2 \leqq x) \cdots\cdots\cdots ①$$
$$y=-x^2+4 \quad (-2<x<2) \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$l: y=ax+b \cdots\cdots ③$ が点 $(-2,\ 0)$ を通ることより，

$$-2a+b=0,\ b=2a$$

ここで，②より $y'=-2x$ となり，$x=-2$ のとき $y'=4$ から，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は，$0<a<4$ である。

よって，求める a, b の条件は，$b=2a\ (0<a<4)$ である。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は，l と x 軸の交点に注目して，

(i) l が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき　(1)より，$b=2a\ (0<a<4)$

(ii) l が点 $(2,\ 0)$ を通るとき　(1)と同様に，$2a+b=0$ より $b=-2a$

そして，②より $x=2$ のとき $y'=-4$ から，l の傾き a の範囲が $-4<a<0$ となり，まとめると，$b=-2a\ (-4<a<0)$ である。

(iii) l が点 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ 以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2<x<2$ のときは，l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x<-2,\ 2<x$ のとき，および x 軸と交点をもたないときは，l と C が $-2<x<2$ で接するときである。

②③を連立して，$-x^2+4=ax+b$ より，$x^2+ax+b-4=0 \cdots\cdots\cdots ④$

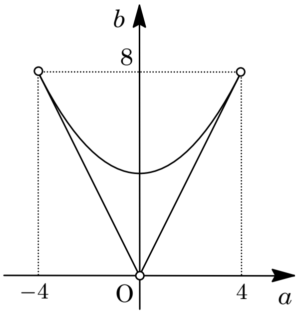
④が $-2<x<2$ に重解をもつことより，

$$D=a^2-4(b-4)=0,\ -2<-\frac{a}{2}<2$$

よって，$b=\dfrac{a^2}{4}+4\ (-4<a<4)$ となる。

このとき，①と③は 2 交点をもつ。

(i)～(iii)より，点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の実線部になる。



ただし，原点と 2 点$(\pm 4,\ 8)$は含まない。

コメント

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き，それをもとに計算をしています。

問　題

s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=s+t+1$, $y=s-t-1$ とおく。s, t が $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

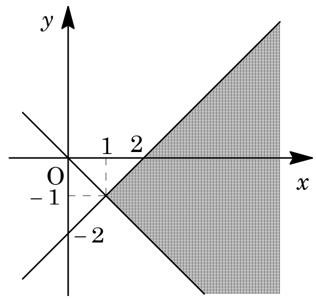
(2) $x=st+s-t+1$, $y=s+t-1$ とおく。s, t が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。 [2012]

解答例

(1) 条件から，$x=s+t+1$ ……①，$y=s-t-1$ ……②に対して，①②より，

$$2s=x+y,\quad s=\frac{1}{2}(x+y)\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$2t+2=x-y,\quad t=\frac{1}{2}(x-y-2)\ \cdots\cdots\cdots④$$



$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ から，③④より，

$$x+y\geqq 0,\quad x-y-2\geqq 0$$

すると，点 $(x,\ y)$ の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

(2) 条件から，$x=st+s-t+1$ ……⑤，$y=s+t-1$ ……⑥に対して，

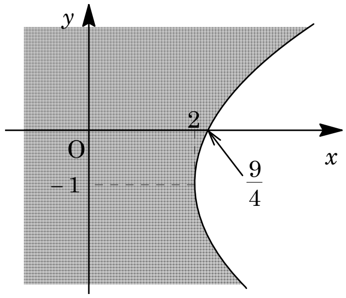
⑤より，$x=(s-1)(t+1)+2$，$(s-1)(t+1)=x-2$ ………⑦

⑥より，$y=(s-1)+(t+1)-1$，$(s-1)+(t+1)=y+1$ …………⑧

⑦⑧から，$s-1$，$t+1$ は u についての 2 次方程式 $u^2-(y+1)u+x-2=0$ の 2 つの解であり，これらが実数であることより，

$$D=(y+1)^2-4(x-2)\geqq 0$$

$$(y+1)^2\geqq 4(x-2)$$



s, t が実数全体を動くとき，$s-1$，$t+1$ も実数全体を動くので，点 $(x,\ y)$ の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

コメント

(2)は，1 文字を消去して実数解条件からも導けますが，少し式計算をして，対称式を持ち出しました。

問　題

実数 a に対し，不等式 $y\leqq 2ax-a^2+2a+2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1\leqq a\leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2) $-1\leqq a\leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。　　[2011]

解答例

(1) 不等式 $y\leqq 2ax-a^2+2a+2$ の表す領域に，点 $(p,\ q)$ が存在しているので，

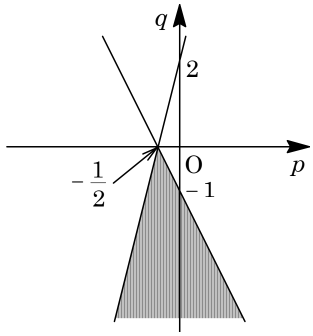
$$q\leqq 2ap-a^2+2a+2,\ \ a^2-2(p+1)a+q-2\leqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2$ とおくと，$(*)$は $f(a)\leqq 0$ となる。

さて，$-1\leqq a\leqq 2$ を満たすすべての a に対し，$f(a)\leqq 0$ である条件は，

$$f(-1)=2p+q+1\leqq 0$$
$$f(2)=-4p+q-2\leqq 0$$

よって，点 $(p,\ q)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2) (1)と同様に，$-1\leqq a\leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し，$f(a)\leqq 0$ である条件は，

(i) $p+1\leqq -1$ $(p\leqq -2)$ のとき

$$f(-1)=2p+q+1\leqq 0$$

(ii) $-1\leqq p+1\leqq 2$ $(-2\leqq p\leqq 1)$ のとき

$f(a)=0$ が実数解をもつことより，

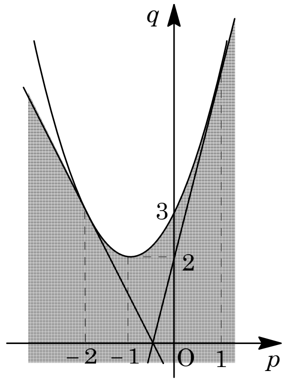
$$D/4=(p+1)^2-q+2\geqq 0,\ \ q\leqq (p+1)^2+2$$

(iii) $p+1\geqq 2$ $(p\geqq 1)$ のとき

$$f(2)=-4p+q-2\leqq 0$$

(i)～(ii)より，点 $(p,\ q)$ の範囲は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含む。



コメント

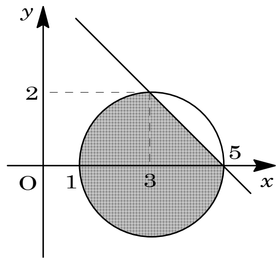
2 次不等式と領域の融合問題です。基本的な内容ですが，時間はかかります。

問　題

連立不等式$x^2-6x+y^2+5\leqq 0$，$x+y\leqq 5$の表す領域 D を図示せよ。また，曲線$x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

[2006]

解答例



領域D：$x^2-6x+y^2+5\leqq 0$，$x+y\leqq 5$より，

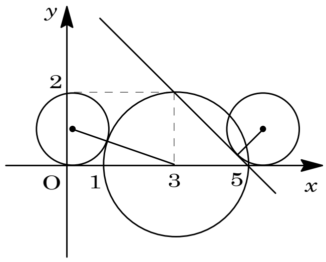
$$(x-3)^2+y^2\leqq 4,\quad y\leqq -x+5$$

領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

また，曲線$x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$に対して，

$$(x-a)^2+(y-1)^2=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，方程式$(*)$は，中心$(a,\ 1)$，半径 1 の円を表す。



右図より，実数 a が最大となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線$x+y-5=0$に接するときなので，

$$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\quad |a-4|=\sqrt{2}$$

$a>4$ より，a の最大値は，$a=4+\sqrt{2}$ である。

また，実数 a が最小となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線$(x-3)^2+y^2=4$に接するときなので，

$$\sqrt{(a-3)^2+1^2}=2+1,\quad (a-3)^2=8$$

$a<3$ より，a の最小値は，$a=3-2\sqrt{2}$ である。

コメント

領域と最大・最小を組み合わせた問題です。円と直線，円と円が接する条件の処理がポイントです。

問　題

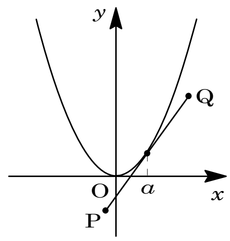
曲線$y=x^2$の点$(a,\ a^2)$での接線を l とする。l 上の点で x 座標が$a-1$と$a+1$のものをそれぞれ P および Q とする。a が$-1\leqq a\leqq 1$の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。 [1999]

解答例

$y=x^2$より，$y'=2x$

点$(a,\ a^2)$での接線は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

よって，線分 PQ は，$y=2ax-a^2\ (a-1\leqq x\leqq a+1)$ ………①



a が$-1\leqq a\leqq 1$の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は，明らかにy軸対称となる。

さて，①において$x=t\ (t\geqq 0)$上での通過領域を考えると，

$$y=2at-a^2=-(a-t)^2+t^2\ (t-1\leqq a\leqq t+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

そこで，②式を$y=f(a)$とおき，a が$-1\leqq a\leqq 1$と$t-1\leqq a\leqq t+1$との共通範囲を動くとき, yの値のとりうる範囲を求める。

ここで，$y=f(a)$のグラフの軸が$a=t$なので, tの値で場合分けをする。

(i)　$t>2$のとき

$-1\leqq a\leqq 1$と$t-1\leqq a\leqq t+1$との共通範囲は存在しない。

(ii)　$1<t\leqq 2$のとき

$-1\leqq a\leqq 1$と$t-1\leqq a\leqq t+1$との共通範囲は$t-1\leqq a\leqq 1$となる。この範囲には，$y=f(a)$の軸は存在しないので，$f(a)$は単調増加となる。

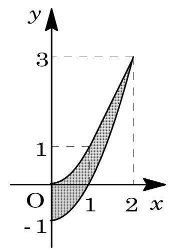
$f(t-1)\leqq y\leqq f(1)$より，$t^2-1\leqq y\leqq 2t-1$

(iii) $0\leqq t\leqq 1$のとき

$-1\leqq a\leqq 1$と$t-1\leqq a\leqq t+1$との共通範囲は$t-1\leqq a\leqq 1$となる。この範囲に$y=f(a)$の軸は存在し，しかも$t-1<\dfrac{(t-1)+1}{2}\leqq t\leqq 1$なので,

$f(t-1)\leqq y\leqq f(t)$より，$t^2-1\leqq y\leqq t^2$

(i)(ii)(iii)より，$x\geqq 0$ で線分 PQ の通過領域を図示すると，右図のようになる。



求める面積をSとおくと，

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\left\{x^2-(x^2-1)\right\}dx+\int_1^2\left\{2x-1-(x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx=\frac{5}{3}$$

よって，$S=\dfrac{10}{3}$

コメント

x を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし，本問では 2 点 P, Q だけの軌跡を求めて，直観的に考えることも可能です。

問　題

a と b は±1, 0でない実数とする。実数 x, y が, $\dfrac{\sin x}{\sin y}=a$, $\dfrac{\cos x}{\cos y}=b$を満たしているとする。

(1)　$\tan^2 y$を a, b を用いて表せ。

(2)　点$(a,\ b)$の存在する範囲を ab 平面に図示せよ。　[1998]

解答例

(1)　条件より, $\sin x=a\sin y$ ………①, $\cos x=b\cos y$ ………②

①②を$\sin^2 x+\cos^2 x=1$に代入して, $a^2\sin^2 y+b^2\cos^2 y=1$

両辺$\div\cos^2 y$より, $a^2\tan^2 y+b^2=\dfrac{1}{\cos^2 y}$

$1+\tan^2 y=\dfrac{1}{\cos^2 y}$なので, $a^2\tan^2 y+b^2=1+\tan^2 y$

よって, $a\neq\pm1$から$\tan^2 y=\dfrac{1-b^2}{a^2-1}$

(2)　$a\neq0$, $b\neq0$なので, ①②より$\tan x=\dfrac{a}{b}\tan y$ ………③

$b\neq\pm1$から, 実数 y の条件は$\tan^2 y=\dfrac{1-b^2}{a^2-1}>0$

このとき, ③から実数 x は存在する。

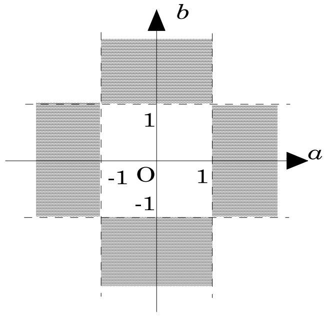
以上より, 求める条件は$\dfrac{1-b^2}{a^2-1}>0$

よって, $(1-b^2)(a^2-1)>0$

$(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)<0$ ………④

境界線は$a=\pm1$, $b=\pm1$で, 点$(2,\ 2)$を④に代入すると不成立なので, 点$(a,\ b)$の存在する範囲は右図のようになる。

ただし, 境界線および座標軸上の点は含まない。



コメント

(2)は2乗が正ということだけですが, これは必要条件だけにすぎないのではないかと不安が頭をよぎってしまいます。そのため十分性についても少し触れておきました。

問　題

x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面に図示せよ。 [1998]

解答例

$x^2+a|x-1|+b=0$ から，$x^2+a|x-1|=-b$ ………①

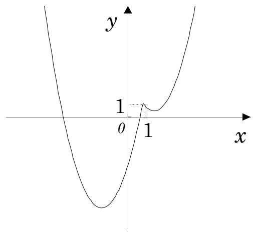
①が異なる実数解をもつ条件は，$y=x^2+a|x-1|$ ……②と $y=-b$ ……③のグラフが異なる共有点を 2 個もつことである。

曲線②は定点 $(1,\ 1)$ を通り，

$x\geqq 1$ のとき，$y=x^2+ax-a=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a$

$x<1$ のとき，$y=x^2-ax+a=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$

(i) $\dfrac{a}{2}<-1$ $(a<-2)$ のとき

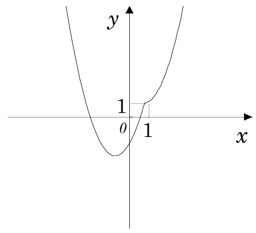


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$-b>1$ または $-\dfrac{a^2}{4}+a<-b<-\dfrac{a^2}{4}-a$

$b<-1$ または $\dfrac{a^2}{4}-a>b>\dfrac{a^2}{4}+a$

(ii) $-1\leqq\dfrac{a}{2}<1$ $(-2\leqq a<2)$ のとき

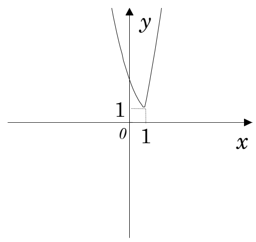


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$-\dfrac{a^2}{4}+a<-b$

$\dfrac{a^2}{4}-a>b$

(iii) $1\leqq\dfrac{a}{2}$ $(2\leqq a)$ のとき

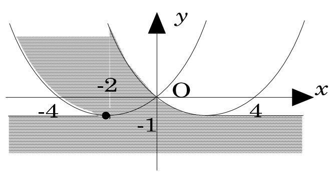


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$1<-b$

$-1>b$

(i)(ii)(iii)より，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は右図のようになる。ただし点 $(-2,\ -1)$ 以外の境界は含まない。



コメント

本来は，(ii)の場合をさらに a の値が正負で細かく分けていたのですが，両者とも同じ条件になるのでまとめてしまいました。もっとも，まとめた最大の理由は，スペースなのですが。

問　題

三角形 ABC の内接円の半径を r, 外接円の半径を R とし，$h=\dfrac{r}{R}$ とする。また，$\angle\mathrm{A}=2\alpha$，$\angle\mathrm{B}=2\beta$，$\angle\mathrm{C}=2\gamma$ とおく。

(1)　$h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

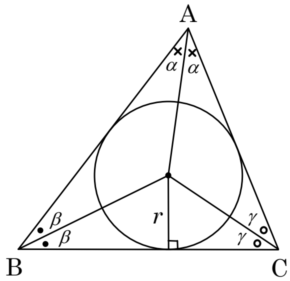
(2)　三角形 ABC が直角三角形のとき $h\leqq\sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(3)　一般の三角形 ABC に対して $h\leqq\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　△ABC において，$\angle\mathrm{A}=2\alpha$，$\angle\mathrm{B}=2\beta$，$\angle\mathrm{C}=2\gamma$ より，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots①$$



ここで，△ABC の内接円の半径 r に対して，

$$\mathrm{BC}=\frac{r}{\tan\beta}+\frac{r}{\tan\gamma}=r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$
$$=r\cdot\frac{\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}=r\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

①より，$\sin(\beta+\gamma)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ となり，$\mathrm{BC}=r\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\cdots\cdots\cdots②$

また，△ABC の外接円の半径 R に対して，正弦定理から，

$$\mathrm{BC}=2R\sin2\alpha=4R\sin\alpha\cos\alpha\cdots\cdots\cdots③$$

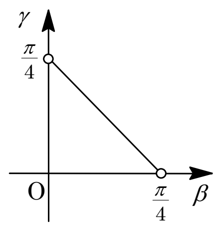
②③から，$r\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=4R\sin\alpha\cos\alpha$ となり，$r=4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ より，

$$h=\frac{r}{R}=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　△ABC が直角三角形のとき，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}\ \left(\alpha=\dfrac{\pi}{4}\right)$ としても一般性を失わない。

このとき，①から $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ となり，④より，

$$h=4\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta\sin\gamma=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\frac{\pi}{4}\right\}=\sqrt{2}\cos(\beta-\gamma)-1$$



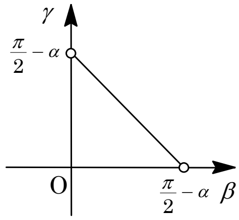
ここで，$-\dfrac{\pi}{4}<\beta-\gamma<\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

$$h\leqq\sqrt{2}\cdot1-1=\sqrt{2}-1$$

等号は $\cos(\beta-\gamma)=1$ すなわち $\beta=\gamma$ のとき成立するので，このとき△ABC は直角二等辺三角形となる。

(3)　まず，α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，①から $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ となり，(2)と同様に，

$$h=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}=2\sin\alpha\Big\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big)\Big\}$$
$$=2\sin\alpha\{\cos(\beta-\gamma)-\sin\alpha\}$$



ここで，$-\Big(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\Big)<\beta-\gamma<\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ なので，

$$\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big)<\cos(\beta-\gamma)\leqq 1$$

すると，$\sin\alpha<\cos(\beta-\gamma)\leqq 1$ から，

$$h\leqq 2\sin\alpha(1-\sin\alpha)=2\sin\alpha-2\sin^2\alpha=-2\Big(\sin\alpha-\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすと，$0<\sin\alpha<1$ から，

$$-2\Big(\sin\alpha-\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$h\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

そして，等号が成立するのは，$\beta=\gamma$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときで，$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$ から，$\triangle$ABC は正三角形となる。

コメント

三角関数の三角形への応用問題です。(3)は 1 文字を固定して最大・最小を考える設問ですが，(2)を誘導としてとらえると，その方針は明快です。

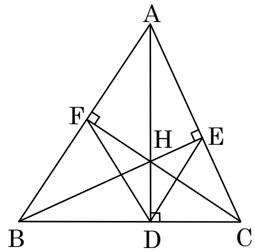
問　題

鋭角三角形△ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2)　$\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。　[2016]

解答例＋映像解説



(1)　垂心が H である右図の△ABC において，

$$\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$$

すると，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する。

また，$\angle AFH = \angle AEH = 90^\circ$ より，

$$\angle AFH + \angle AEH = 180^\circ$$

すると，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する。

(2)　(1)から，四角形 BCEF が円に内接することより，

$\angle ECF = \angle EBF$ ………①

また，$\angle CEH + \angle CDH = 180^\circ$ から，四角形 CEHD が円に内接するので，

$\angle ECH = \angle HDE$，$\angle ECF = \angle ADE$ ………②

さらに，$\angle BDH + \angle BFH = 180^\circ$ から，四角形 BDHF が円に内接するので，

$\angle FBH = \angle HDF$，$\angle EBF = \angle ADF$ ………③

①②③より，$\angle ADE = \angle ADF$

コメント

円に内接する四角形を題材にした，教科書の練習問題に掲載されているような問題です。

問　題

空間内に，直線 l で交わる 2 平面 α，β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに，平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも O を通り l に垂直にとる。m，n 上にそれぞれ点 P, Q があり，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ であるとする。線分 PQ 上の動点 T について，$\mathrm{PT}=t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

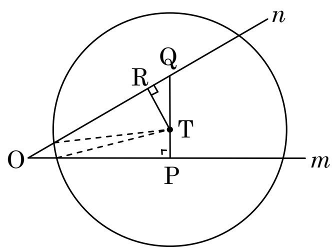
(1)　S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。

(2)　S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

[2016]

解答例＋映像解説

(1)　2 平面 α，β の交線 l 上の点 O を通り l に垂直に，α 上に直線 m，β 上に直線 n がある。そして，m 上に点 P，n 上に点 Q を，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ であるようにとる。すると，点 O を通り l に垂直な平面での位置関係は右図のようになり，$\angle\mathrm{POQ}=30^\circ$，$\angle\mathrm{OPQ}=90^\circ$ である。



さて，線分 PQ 上に $\mathrm{PT}=t$ である点 T をとり，中心が T で半径が $\sqrt{2}$ の球 S の平面 α による切り口は中心 P の円になり，その半径を r_1 とおくと，

$$r_1=\sqrt{(\sqrt{2})^2-t^2}=\sqrt{2-t^2}$$

よって，この円の面積は，$\pi {r_1}^2=\pi(2-t^2)$ である。

(2)　点 T から直線 n に垂線 TR を引くと，$\mathrm{TR}=\mathrm{TQ}\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-t)$

さて，球 S の平面 β による切り口は中心 R の円になり，その半径を r_2 とおくと，

$$r_2=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\right\}^2}=\sqrt{\frac{5+6t-3t^2}{4}}$$

すると，S の α による切り口の面積と β による切り口の面積の和 $f(t)$ は，

$$f(t)=\pi {r_1}^2+\pi {r_2}^2=\pi(2-t^2)+\frac{\pi}{4}(5+6t-3t^2)=\frac{\pi}{4}(-7t^2+6t+13)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{100}{7}\right\}=-\frac{7}{4}\pi\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{25}{7}\pi$$

よって，$0\leqq t\leqq 1$ から，$f(t)$ は $t=\dfrac{3}{7}$ のとき最大値 $\dfrac{25}{7}\pi$ をとる。

コメント

球と平面の交わりについての問題です。問題文の説明は長いですが，位置関係がわかりやすく設定されていますので，方針が混乱することはないと思えます。

問　題

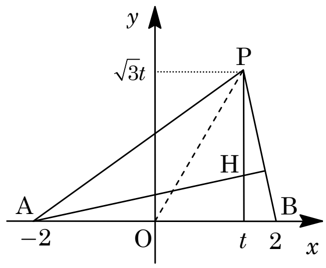
$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$P(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説



(1)　$t>0$ のとき $\angle PAB<\frac{\pi}{2}$ であるので，△APB が鋭角三角形となる条件は $\angle PBA<\frac{\pi}{2}$ かつ $\angle APB<\frac{\pi}{2}$ である。

すると，$t<2$ かつ $OP>2$ $(2t>2)$ となる。

よって，求める t の範囲は，$1<t<2$ である。

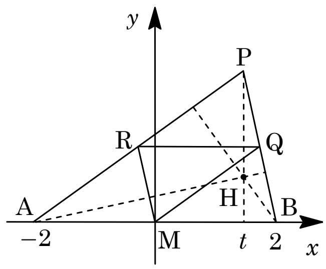
(2)　P から辺 AB に引いた垂線の式は，$x=t$ ………①

また，$\overrightarrow{BP}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ より，A から辺 BP に引いた垂線の式は，

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0 \text{ ………②}$$

①②を連立して，$(t-2)(t+2)+\sqrt{3}ty=0$ より，$y=\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$

よって，△APB の垂心 H の座標は，$\left(t,\ \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。



(3)　M, Q, R は，それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので，

$$RQ /\!/ AB,\ QM /\!/ PA,\ RM /\!/ PB$$

ここで，H は△APB の垂心より，

$$PH\perp RQ,\ BH\perp QM,\ AH\perp RM \text{ ………③}$$

さて，xy 平面に垂直に z 軸をとり，△ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において，P, A, B が重なってできる頂点を C とする。

すると，③より，s を正の実数として，$C\left(t,\ \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ s\right)$ と表せる。

そこで，$CM=2$ から，$t^2+\left(\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+s^2=4$ となり，

$$s^2=4-t^2-\frac{(4-t^2)^2}{3t^2}=\frac{-4t^4+20t^2-16}{3t^2}$$

よって，$s=\dfrac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}$ となり，四面体 CMQR の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABP}\right)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

$1<t<2$ から，$t^2=\dfrac{5}{2}\left(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ のとき，V は最大値 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

コメント

一見，無関係と思える(2)と(3)ですが，(2)は(3)に不可欠な誘導です。なお，直角三角形が題材になっている類題が，北大で 2009 年に出ています。

問　題

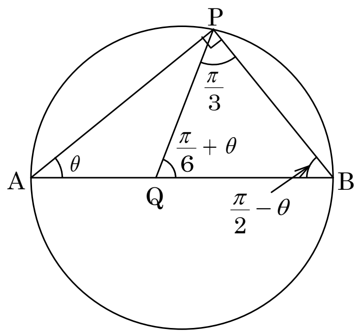
長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A，B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

(1) y を x を用いて表せ。

(2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

[2012]

解答例



(1) $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BP}=x$ に対し，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とおくと，

$$\sin\theta=x\ ,\ \cos\theta=\sqrt{1-x^2}$$

さて，$\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ から，$\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\angle\mathrm{PQB}=\frac{\pi}{6}+\theta,\ \angle\mathrm{PBQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$\mathrm{PQ}=y$ から，$\triangle\mathrm{PQB}$ に正弦定理を適用して，

$$\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

よって，$y=\dfrac{x\cos\theta}{\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta}=\dfrac{2x\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}$

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において, (1)より，$y=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}$

さて，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ とおくと，$y=\dfrac{2}{f(\theta)}$ となり，

$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

ここで，$\sqrt{3}\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$ となる α をとると，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すなわち，$\theta=\alpha$ で, y は最大となる。

このとき，$\sqrt{3}x^3=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$ から，$3x^6=(1-x^2)^3$ となり，

$$\sqrt[3]{3}x^2=1-x^2,\ (1+\sqrt[3]{3})x^2=1$$

したがって, y が最大となる x は，$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$ である。

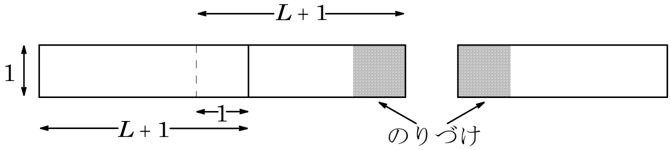
コメント

正弦定理の応用です。ただ，(2)は計算の工夫が必要です。特に，$f(\theta)$ を設定する部分が重要で，何回か微分に詰まって考えつきます。

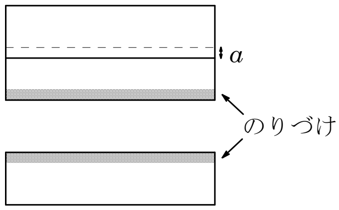
問　題

L を 2 以上の自然数，a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。縦 1 cm，横 $(L+1)$ cm の長方形の紙を用いて，次のように長方形 A, B を作る。

長方形 A の作り方。L 枚の紙を横に並べて，順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして（隣り合う紙が横 1 cm 重なるように）はり合わせ，縦 1 cm の横長の長方形を作る。



長方形 B の作り方。L 枚の紙を縦に並べて，隣り合う紙が縦 $a$cm 重なるようにはり合わせて，横 $(L+1)$ cm の長方形を作る。



長方形 A, B の面積をそれぞれ S_1 cm^2 および S_2 cm^2 とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) S_1 と S_2 を求めよ。

(2) $L=2$ のとき，$S_1-1 < S_2$ となる a の範囲を求めよ。

(3) $S_1-1 < S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ。 [2009]

解答例

(1) のりしろの部分を差し引いた $L-1$ 枚ともとの 1 枚の和で考えると，

$$S_1 = \{L(L-1)+(L+1)\}\times 1 = L^2+1$$

$$S_2 = \{(1-a)(L-1)+1\}\times(L+1) = (1-a)L^2+L+a$$

(2) $L=2$ のとき，$S_1=5$，$S_2=4(1-a)+2+a=-3a+6$ となり，$S_1-1<S_2$ より，

$$4 < -3a+6,\ 3a < 2$$

$0 < a < 1$ より，$0 < a < \dfrac{2}{3}$

(3) $S_1-1 < S_2$ より，$L^2 < (1-a)L^2+L+a$，$aL^2-L-a < 0$

ここで，$f(L)=aL^2-L-a$ とおくと，$f(L)<0$ となる 2 以上の自然数 L が存在する条件は, $0<a<1$，$f(0)=-a<0$ に注意すると，$f(2)=3a-2<0$ であり，

$$0 < a < \frac{2}{3}$$

コメント

仰々しい設定の問題ですが，内容は基本的です。

問　題

θ を $0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし，空間の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\theta$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とするとき, AG と OG をそれぞれ θ で表せ。

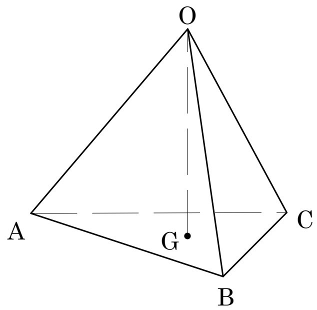
(2) θ を動かしたとき, O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

[2008]

解答例

(1) 条件より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\theta$ なので,

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=2\sin\frac{\theta}{2}$$



これより，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形となり，その重心 G に対して,

$$\mathrm{AG}=\frac{2}{3}\cdot\mathrm{AB}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\theta}{2}$$

また, OG は平面 ABC に垂直となり,

$$\mathrm{OG}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AG}^2}=\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

(2) まず，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ となる。

四面体 OABC の体積を V とすると,

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OG}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{3\sin^4\frac{\theta}{2}-4\sin^6\frac{\theta}{2}}$$

さて，$x=\sin^2\dfrac{\theta}{2}$，$f(x)=3x^2-4x^3$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ より $0<x<\dfrac{3}{4}$ となり,

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{f(x)}$$

すると，$f'(x)=6x-12x^2=6x(1-2x)$ から，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

よって, V の最大値は $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{6}$ である。

コメント

底面の $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となるので，この点を利用すると，計算量が少なくてすみます。

問　題

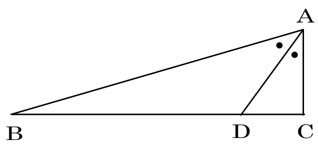
　$\angle$C を直角とする直角三角形 ABC に対して，$\angle$A の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また，線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。$\angle A=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta$ を求めよ。

(2)　$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。

[2007]

解答例



(1)　条件より，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{4}{5}$ より，

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{24}{25}$$

(2)　$\sin\dfrac{5}{12}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

$$>\frac{1.414}{4}(1+1.732)>0.96=\frac{24}{25}$$

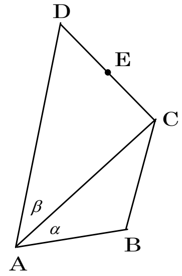
　ここで，関数 $f(\theta)=\sin\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において単調に増加し，$\sin\theta<\sin\dfrac{5}{12}\pi$ となることから，$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ である。

コメント

数値計算はあるものの，さほど面倒でもなく，あっさりと解決する問題です。

問　題

すべての内角が $180°$ より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが $AB = BC = r$，$AD = 2r$ とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形 $\triangle ABC$，$\triangle ACE$，$\triangle ADE$ の面積はすべて等しいとする。$\alpha = \angle BAC$，$\beta = \angle CAD$ とおく。

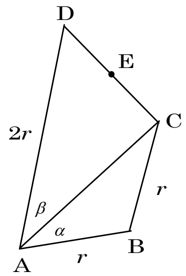


(1)　$\alpha = \beta$ を示せ。

(2)　$\cos\angle DAB = \dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin\angle CAE$ の値を求めよ。

[2005]

解答例



(1)　$\triangle ABC$ は二等辺三角形なので，$AC = 2AB\cos\alpha = 2r\cos\alpha$

そこで，$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}r\cdot 2r\cos\alpha\cdot\sin\alpha = r^2\cos\alpha\sin\alpha$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r\cos\alpha\cdot\sin\beta = 2r^2\cos\alpha\sin\beta$$

条件より，$\triangle ADC = 2\triangle ABC$ なので，

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

よって，$\alpha = \beta$ または $\alpha = 180° - \beta$

すると，条件より $\alpha + \beta < 180°$ なので，$\alpha = \beta$ である。

(2)　$\alpha = \beta$ より，$AC = 2r\cos\beta$ となるので，$\angle ACD = 90°$ であり，

$$CD = 2r\sin\beta = 2r\sin\alpha$$

さて，$\triangle ACE = \triangle ADE$ から，点 E は辺 CD の中点となり，

$$CE = \frac{1}{2}CD = r\sin\alpha$$

ここで，$\angle CAE = \theta$ とおくと，

$$\tan\theta = \frac{CE}{AC} = \frac{r\sin\alpha}{2r\cos\alpha} = \frac{1}{2}\tan\alpha \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より，$\cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$ なので，$2\alpha < 90°$ から $\tan 2\alpha = \dfrac{4}{3}$ となり，

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3},\ 2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2 = 0,\ (2\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 2) = 0$$

$\alpha < 90°$ から $\tan\alpha > 0$ なので，$\tan\alpha = \dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ②$

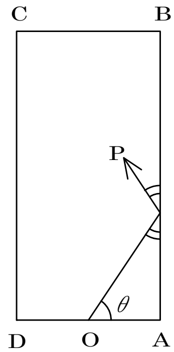
①②より，$\tan\theta = \dfrac{1}{4}$ となり，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ である。

コメント

問題の図からも想像できますが，$\triangle ACD$ は直角三角形です。この発見がポイントになります。

問　題

長方形 ABCD 内を減速しながら進む点を考える。時刻$t=0$に初速 v で発射させた点 P は，時刻 t では速さve^{-t}で直進するとする。ただし，P がいずれかの辺に来たときは等しい入射角と反射角で反射するとし，頂点 A, B, C, D のいずれかに来たときはそこで停止するとする。AB の長さは 4 で AD の長さは 2 とし，出発点は AD の中点 O とする。初速を$v=14$としたとき，最も長い時間をかけて P をどれかの頂点に到達させるにはどの方向に発射させればよいか。OA との角を$\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$として$\tan\theta$を求めよ。またそのとき，P が頂点に到達する時刻を求めよ。 [1999]



解答例

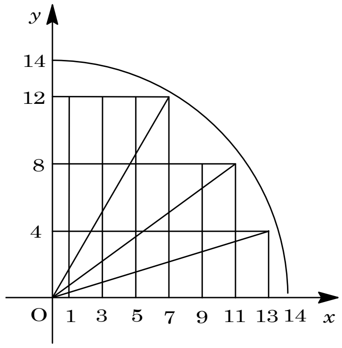
時刻t_0までに点 P が進んだ道のりを L とすると，

$$L=\int_0^{t_0}14e^{-t}dt=-14\Big[e^{-t}\Big]_0^{t_0}=14(1-e^{-t_0})\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず，点 P の軌跡は，反射した辺に関して長方形 ABCD を折り返していくと，直線として表せる。

すると点 O を原点とし，点$\mathrm{A}(1,\ 0)$，点$\mathrm{B}(1,\ 4)$として座標設定をすると，辺に関して折り返していった頂点は，k, l を自然数として，$(2k-1,\ 4l)$と表される。

ここで，最も長い時間をかけて P がどれかの頂点に到達するのは，(*)より L が最も大きいときである。ところが，(*)より $L<14$ なので，原点 O からの距離が 14 より小で，しかも 14 に最も近い頂点が求める頂点となる。



(i)　$l=1\ (y=4)$のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数$(x=2k-1)$は$x=13$であり，このとき$L^2=13^2+4^2=185$となる。

(ii)　$l=2\ (y=8)$のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数$(x=2k-1)$は$x=11$であり，このとき$L^2=11^2+8^2=185$となる。

(iii)　$l=3\ (y=12)$のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数$(x=2k-1)$は$x=7$であり，このとき$L^2=7^2+12^2=193$となる。

(i)(ii)(iii)より，$(x,\ y)=(7,\ 12)$ のとき，L は最大になり，t_0 も最大となる。

このとき，$\tan\theta=\dfrac{12}{7}$ であり，また(＊)より，$\sqrt{193}=14(1-e^{-t_0})$，$e^{-t_0}=1-\dfrac{\sqrt{193}}{14}$

よって，P が頂点に到達する時刻 t_0 は，$t_0=-\log\left(1-\dfrac{\sqrt{193}}{14}\right)$ となる。

コメント

頻出の反射の問題です。反射面に関して折り返して考えるのがポイントです。類題経験がものを言うのではないかと思われます。

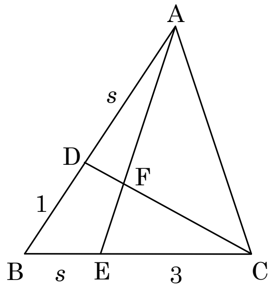
問　題

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。 [2017]

解答例＋映像解説



(1) △ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}$$

条件より，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=s:3$ なので，

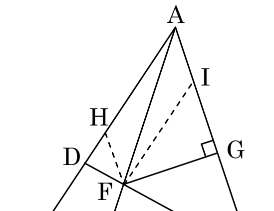
$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}=\frac{s(s+3)}{3}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}=\frac{s}{s^2+3s+3}\left(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

ここで，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，

$$\alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\quad \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，F から辺 AC に垂線 FG を下ろすと，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}$，$\mathrm{FG}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{AC}}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，FG の長さが最大となるのは α が最大となるときで，(1)の結果を $\alpha=\dfrac{3}{s+3+\dfrac{3}{s}}$ と変形すると，相加平均と相乗平均の関係より，

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}$$

ただし，等号は $s=\dfrac{3}{s}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成立し，これより，

$$\alpha=\frac{3}{s+3+\dfrac{3}{s}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{3}-3$$

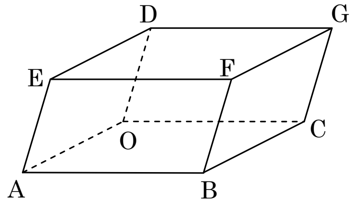
よって，FG の長さが最大となるときの s の値は $s=\sqrt{3}$ である。

コメント

平面ベクトルの三角形への応用問題で，頻出の構図です。解答例では図形的に処理をしましたが，(1)では分点ベクトル，(2)では内積を用いても，記述量はやや増加する程度です。

問　題

右図のような平行六面体 OABC - DEFG が xyz 空間内にあり，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を $\mathrm{MN}=4$ かつ $\mathrm{DN}<\mathrm{GN}$ を満たすように定める。

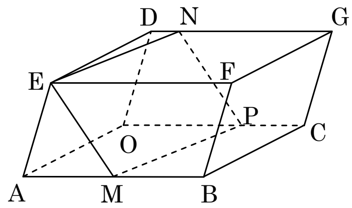


(1) N の座標を求めよ。

(2) 3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3) 3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC - DEFG の切り口の面積を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説



(1) $0\leqq t\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(-1,\ 0,\ \sqrt{6})+t(0,\ 3,\ 0)$$
$$=(-1,\ 3t,\ \sqrt{6})$$

また，$\mathrm{M}\left(2,\ \frac{3}{2},\ 0\right)$ から，$\mathrm{MN}=4$ より，

$$(-3)^2+\left(3t-\frac{3}{2}\right)^2+6=4^2,\ 9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

$\mathrm{DN}<\mathrm{GN}$ より $t<\frac{1}{2}$ となるので，$t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ から，$\mathrm{N}\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{6}\right)$ である。

(2) $\mathrm{E}(1,\ 0,\ \sqrt{6})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\left(1,\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{EN}}=\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ であり，点 P は y 軸上の点から $\mathrm{P}(0,\ p,\ 0)$ とおくと，r, s を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=r\overrightarrow{\mathrm{EM}}+s\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ より，

$$(-1,\ p,\ -\sqrt{6})=r\left(1,\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right)+s\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$-1=r-2s\cdots\cdots①,\ p=\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}s\cdots\cdots②,\ -\sqrt{6}=-\sqrt{6}r\cdots\cdots③$$

①③より $r=s=1$ なので，②から $p=2$ となり，$\mathrm{P}(0,\ 2,\ 0)$ である。

(3) (2)より $\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\overrightarrow{\mathrm{EM}}+\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ から，切り口は平行四辺形となり，その面積 S は，

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EN}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EN}})^2}=\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}+6\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)-\left(-2+\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{629}{4^2}-\frac{25}{4^2}}=\frac{\sqrt{151}}{2}$$

コメント

空間ベクトルの基本問題です。(2)では平面のパラメータ表示を利用していますが，平行六面体の切り口ということに注目して，(2)と(3)を一気に処理するという方法も考えられます。

問　題

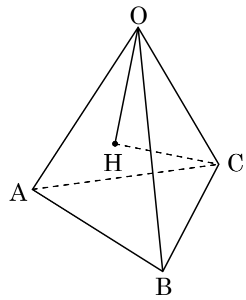
四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　CH の長さを求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。　[2013]

解答例＋映像解説



(1)　条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

さて，点 H は平面 OAB 上にあるので，s, t を実数とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ となり，条件から $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は平面 OAB に垂直なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=s+\frac{1}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}s+t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

これより，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+(-1)^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{CH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より，四面体 OABC の体積 V は，(2)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}$$

コメント

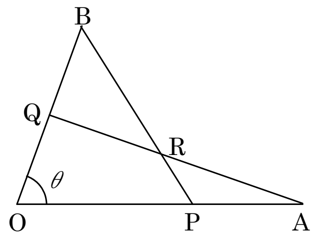
空間ベクトルの図形への応用についての基本題です。詳しすぎるぐらいの誘導がついています。なお，対称性に着目した方法も可能です。

問　題

平面上に長さ 3 の線分 OA を考え，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を$\vec{a}$で表す。$0<t<1$ を満たす実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ 2 のベクトル$\vec{b}$を$\vec{a}$と角 $\theta\ (0<\theta<\pi)$ をなすようにとり，点 B を$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$で定める。線分 OB の中点を Q とし，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき，どのようにθをとっても$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。 [2011]

解答例



△OPB と直線 AQ に対し，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であり，点 Q は線分 OB の中点から，

$$\frac{1}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{1}{1}=1,\ \ \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}=1-t$$

よって，$\mathrm{PR}:\mathrm{RB}=1-t:1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2-t}=\frac{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}{2-t}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が垂直にならない条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq 0$ より，

$$\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\cdot(-\vec{a}+\vec{b})\neq 0$$

条件より，$|\vec{a}|^2=9$，$|\vec{b}|^2=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 2\cos\theta=6\cos\theta$ なので，

$$-9t+6t\cos\theta-6(1-t)\cos\theta+4(1-t)\neq 0$$

$$6(2t-1)\cos\theta-13t+4\neq 0\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$x=\cos\theta$ とおくと，$0<\theta<\pi$ から $-1<x<1$ となり，①より，

$$6(2t-1)x-13t+4\neq 0\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$0<t<1$ のもとで，$-1<x<1$ を満たすどんな x に対しても，②を満たす条件は，$f(x)=6(2t-1)x-13t+4$ とおくと，

$$f(-1)=-25t+10,\ \ f(1)=-t-2<0$$

よって，求める条件は，$f(1)<0$ に注意すると，$f(-1)\leqq 0$ から $\dfrac{2}{5}\leqq t<1$ である。

コメント

ベクトルというよりは，数式処理の問題です。置き換えると，高々1 次の $f(x)$ が現れ，そのグラフのイメージをもとに解いています。

問　題

四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

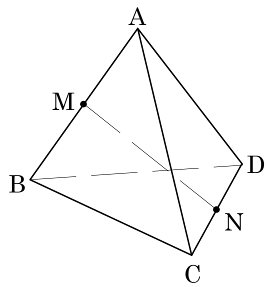
(1)　等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ。　[2010]

解答例



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{PN}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\vec{0}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}=\vec{0}$ となり，題意を満たさない。

よって，点 P は存在しない。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ から，(1)と同様にすると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QN}}|$$

よって，点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

(3)　まず，$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}-2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$$

$$=2|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$$

$$=2|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2$$

同様にして，$|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2=2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{NR}}|^2=2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}-\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2$

$$=2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}+2|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ より，

$$2|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2=2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}+2|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2$$

よって，$2\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}=|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2$ ……(＊)となり，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定である。

(4)　点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は，$|\overrightarrow{\mathrm{RM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{RN}}|$ であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{RM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MN}}-\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2,\ \ |\overrightarrow{\mathrm{RM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}+|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2$$

(＊)を代入して，$|\overrightarrow{\mathrm{RM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|$

よって，$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$から，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$である。

コメント

(4)まで，うまく誘導のついている問題です。ただ，(3)の式変形によっては，不運なケースが出てくる可能性もあります。

問　題

図 1 のような$AB=BC=CD=DA=AC=1$である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角をα（$\alpha=\angle BCD$）とし，$0°<\alpha<120°$とする。以下の問いに答えよ。

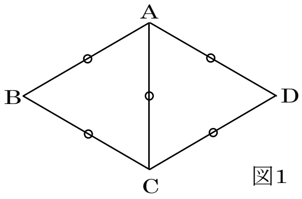


図1

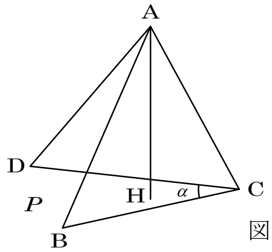


図2

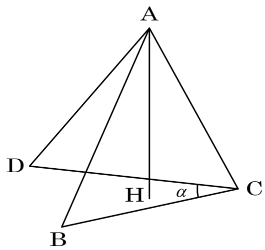
(1) 図 2 において, A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{AH}$を$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$とαとで表せ。

(2) $\overrightarrow{AH}$の長さをαを用いて表せ。

(3) H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度αを求めよ。 [2006]

解答例

(1) x, yを実数として，$\overrightarrow{CH}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}$とおくと，$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$となる。



ここで，条件より，$|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CD}|=1$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1\cdot1\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\cdot1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

まず，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$より，$(x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=0$

$$x|\overrightarrow{CB}|^2+y\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$$

$$x+y\cos\alpha-\frac{1}{2}=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}=0$より，$(x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$$x\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+y|\overrightarrow{CD}|^2-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\quad x\cos\alpha+y-\frac{1}{2}=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(1-\cos^2\alpha)x=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$となり，$\cos\alpha\neq\pm1$から$x=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}$

$$y=-\frac{\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}$$

よって，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$

(2) $|\overrightarrow{AH}|^2=|x\overrightarrow{CB}+x\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}|^2=x^2+x^2+1+2x^2\cos\alpha-2x\cdot\frac{1}{2}-2x\cdot\frac{1}{2}$

$$=2(1+\cos\alpha)x^2-2x+1$$

(1)より，$x = y = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}$ なので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = \frac{1}{2(1+\cos\alpha)} - 2\cdot\frac{1}{2(1+\cos\alpha)} + 1 = \frac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \sqrt{\dfrac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}}$ となる。

(3)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

H が△BCD の重心となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なので,

$$\frac{1}{2(1+\cos\alpha)} = \frac{1}{3},\quad \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

よって，$0^\circ < \alpha < 120^\circ$ から，$\alpha = 60^\circ$

コメント

冒頭の $\overrightarrow{\mathrm{CH}} = x\overrightarrow{\mathrm{CB}} + y\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ がポイントとなります。

問　題

$0<t<\dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i)　$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$　　　(ii)　$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x}-\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直で長さの比が $t:1-t$ となるとする。このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を t で表せ。　[2005]

解答例

まず，条件(i)より，$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$ ………①

また，条件(ii)より，$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$，$(1-t)\vec{a}-t\vec{b}=(2t-1)\vec{e}$ ………②

①②より，$2(1-t)\vec{a}=2t\vec{e}$，$2t\vec{b}=2(1-t)\vec{e}$ となり，

$\vec{a}=\dfrac{t}{1-t}\vec{e}$ ………③，$\vec{b}=\dfrac{1-t}{t}\vec{e}$ ………④

すると，$\vec{x}-\vec{a}=\vec{x}-\dfrac{t}{1-t}\vec{e}=\dfrac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}$ ………⑤

$\vec{x}-\vec{b}=\vec{x}-\dfrac{1-t}{t}\vec{e}=\dfrac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}$ ………⑥

さて，条件 $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ に，⑤⑥を適用すると，

$\{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}\}\cdot\{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}\}=0$

$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+t^2+t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)|\vec{e}|^2=0$

$|\vec{e}|=1$ より，$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ ………⑦

また，条件 $|\vec{x}-\vec{a}|:|\vec{x}-\vec{b}|=t:1-t$ に，⑤⑥を適用すると，

$(1-t)\left|\dfrac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}\right|=t\left|\dfrac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\right|$，$|(1-t)\vec{x}-t\vec{e}|=|t\vec{x}-(1-t)\vec{e}|$

$(1-t)^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+t^2|\vec{e}|^2=t^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+(1-t)^2|\vec{e}|^2$

$|\vec{e}|=1$ より，$(1-2t)|\vec{x}|^2=1-2t$ となり，$0<t<\dfrac{1}{2}$ から $|\vec{x}|^2=1$ ………⑧

⑦⑧より，$t(1-t)-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ となるので，

$$\vec{x}\cdot\vec{e}=\frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2}$$

コメント

文字がたくさん出てくるので，方針を明確にし，交通整理をしながら計算を進めます。ここでは，まず $\vec{a}$，$\vec{b}$ を消去するために，③と④を導きました。

問　題

平面ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は, $|\vec{a}|^2=1$, $|\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}$を満たすとする。

(1) k, l を整数とする。$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ。

(2) $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=0$となる整数の組$(k,\ l)$をすべて求めよ。

(3) 整数の組$(k,\ l)$を条件$(k,\ l)\neq(0,\ 0)$のもとで動かすとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$の最小値を与える$(k,\ l)$をすべて求めよ。　[2004]

解答例

(1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}$より,

$$\frac{1}{2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=\frac{1}{2},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

ここで, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=k^2|\vec{a}|^2+2kl\vec{a}\cdot\vec{b}+l^2|\vec{b}|^2=k^2+kl+\dfrac{1}{2}l^2$

よって, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$が整数である条件は, $\dfrac{1}{2}l^2$が整数すなわちlが偶数である。

(2) $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=0$より, $k^2+kl+\dfrac{1}{2}l^2=0\cdots\cdots\cdots(*)$

(1)より, lは偶数なので, nを整数として, $l=2n$とおくと, $(*)$から,

$$k^2+2kn+2n^2=0,\ (k+n)^2+n^2=0$$

よって, $k+n=n=0$すなわち$(k,\ n)=(0,\ 0)$より, $(k,\ l)=(0,\ 0)$

(3) $F=|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=k^2+kl+\dfrac{1}{2}l^2$とおくと,

(i) lが偶数$(l=2n)$のとき

$F=(k+n)^2+n^2$となり, $(k,\ n)\neq(0,\ 0)$より, Fの最小値は1である。

(ii) lが奇数$(l=2n+1)$のとき

$$F=k^2+k(2n+1)+\frac{1}{2}(2n+1)^2=\left(k+\frac{2n+1}{2}\right)^2+\frac{(2n+1)^2}{4}$$

kは整数より, $k=-n-1$または$k=-n$のとき, Fは最小となり,

$$F=\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{(2n+1)^2}{4}$$

nは整数より, $n=0$または$n=-1$のとき, Fは最小値$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$をとる。

(i)(ii)より, Fの最小値は$\dfrac{1}{2}$である。このとき, $(k,\ l)=(k,\ 2n+1)$の組は,

$$(k,\ l)=(-1,\ 1),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (1,\ -1)$$

コメント

(3)は, いわゆる1文字固定の考え方で, 最小値を求めています。

問　題

四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする。

(1) $\overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$ で与えられる点 P に対し $|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{DP}|$ が成り立つならば，$l=m=n$ であることを示せ。また，このときの $|\overrightarrow{BP}|$ を l を用いて表せ。

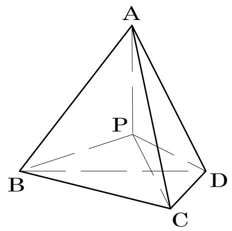
(2) A, B, C, D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を，四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき，$\cos\angle PBQ$ の値を求めよ。

[2002]

解答例

(1) 四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体なので，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=1$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$



ここで，$\overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$ より，

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(l-1)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=l\overrightarrow{AB}+(m-1)\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+(n-1)\overrightarrow{AD}$$

すると，$|\overrightarrow{BP}|^2=|(l-1)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}|^2$

$$=(l-1)^2+m^2+n^2+2(l-1)m\cdot\frac{1}{2}+2mn\cdot\frac{1}{2}+2n(l-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=(l-1)^2+m^2+n^2+(l-1)m+mn+n(l-1)\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，$|\overrightarrow{CP}|^2=l^2+(m-1)^2+n^2+l(m-1)+(m-1)n+nl\cdots\cdots\cdots②$

$$|\overrightarrow{DP}|^2=l^2+m^2+(n-1)^2+lm+m(n-1)+(n-1)l\cdots\cdots\cdots③$$

$|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{CP}|$ なので，①②から，$-2l+1-m-n=-2m+1-l-n$，$m=l$

$|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{DP}|$ なので，②③から，$-2m+1-l-n=-2n+1-m-l$，$n=m$

したがって，$l=m=n$ となり，このとき①より，

$$|\overrightarrow{BP}|^2=(l-1)^2+l^2+l^2+(l-1)l+l^2+l(l-1)=6l^2-4l+1$$

よって，$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{6l^2-4l+1}$

(2) 四面体 PBCD が正四面体より，(1)を用いて，$|\overrightarrow{BP}|^2=6l^2-4l+1=1$

$l\neq0$ から $l=\frac{2}{3}$ なので，$\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

同様にして，四面体 QABC が正四面体なので，$\overrightarrow{DQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}),\ \overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$$

すると，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{7}{18}$$

以上より，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=1$ から，$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|}=-\dfrac{7}{18}$

コメント

空間ベクトルの基本を問う問題ですが，計算量はあります。

問　題

四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$, $\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$, $\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

(1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

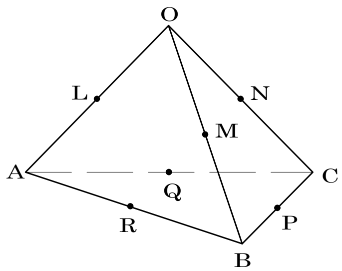
(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ を用いて表せ。

(3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積および四面体 OABC の体積を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$ を用いて表せ。 [2001]

解答例

(1) 線分 LP の中点を S とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$



これから，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と表せ，点 S は線分 MQ の中点に一致する。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ とも表せるので，S は線分 NR の中点にも一致する。

よって，線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わる。

(2) 条件より，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ ………①

$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\ \cdots\cdots\cdots ②$$

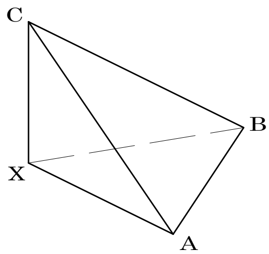
$$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より $\vec{a}=\vec{q}+\vec{r}$，①③より $\vec{b}=\vec{p}+\vec{r}$，①②より $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$

(3) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=-\overrightarrow{\mathrm{LP}}=-\vec{p}$

$$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{r}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{XC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{r}$$



$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ が互いに直交することより，四面体 XABC の体積は，

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\Big)|\vec{r}|=\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ より，L から平面 ABC の下ろした垂線の長さと，X から平面 ABC の下ろした垂線の長さは等しいので，四面体 XABC の体積と四面体 LABC の体積は等しい。

すると，L は OA の中点から，四面体 OABC の体積は，四面体 XABC の 2 倍となり，$\dfrac{1}{3}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$である。

コメント

(3)で与えられた条件によって，四面体 OABC の 4 つの面は合同になります。このとき，この四面体は直方体に埋め込まれるということが元になっています。この考え方を利用する問題もときどき見かけます。

問　題

空間の点$(10,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 9 の球面をS_1とし，点$(0,\ 10,\ 0)$を中心とする半径 8 の球面をS_2とする。S_1とS_2に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル$(a,\ b,\ c)$ $(c\geqq 0)$をすべて求めよ。 [1999]

解答例

条件より，$S_1 : (x-10)^2+y^2+z^2=81$ ………①

$S_2 : x^2+(y-10)^2+z^2=64$ ………②

S_1とS_2に接し原点を通る直線は，$(x,\ y,\ z)=t(a,\ b,\ c)$ ………③

ただし，$a^2+b^2+c^2=1$ ………④

まず③を①に代入して，$(at-10)^2+(bt)^2+(ct)^2=81$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-20at+19=0$

④から，$t^2-20at+19=0$

①と③が接するので，$D/4=100a^2-19=0$，$a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10}$ ………⑤

次に③を②に代入して，$(at)^2+(bt-10)^2+(ct)^2=64$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-20bt+36=0$

④から，$t^2-20bt+36=0$

②と③が接するので，$D/4=100b^2-36=0$，$b=\pm\dfrac{3}{5}$ ………⑥

④⑤⑥より，$\dfrac{19}{100}+\dfrac{9}{25}+c^2=1$

$c\geqq 0$なので，$c=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

以上より，$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$ （複号任意）

コメント

図形的な位置関係を考えてもよいのですが，ここでは代数的に解いてみました。こうすると，数式のもつ威力が感じられます。

問　題

a を 1 ではない正の実数とし, n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1)　$n=6$ のとき, この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2)　この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。 [2019]

解答例＋映像解説

(1)　$a>0$, $a\neq 1$ のとき, $\log_a(x-6) > \dfrac{1}{2}\log_a(12-x)$ ………①

$x-6>0$ かつ $12-x>0$, すなわち $6<x<12$ ……②において,

$$2\log_a(x-6) > \log_a(12-x),\ \log_a(x-6)^2 > \log_a(12-x) \text{ ………③}$$

(i)　$0<a<1$ のとき　③より, $(x-6)^2 < 12-x$ となり,

$$x^2-11x+24<0,\ (x-3)(x-8)<0$$

すると, $3<x<8$ となるが, ②と合わせると $6<x<8$ である。

よって, ①を満たす整数 x は $x=7$ となる。

(ii)　$a>1$ のとき　③より, $(x-6)^2>12-x$ となり, $(x-3)(x-8)>0$

すると, $x<3$, $8<x$ となるが, ②と合わせると $8<x<12$ である。

よって, ①を満たす整数 x は $x=9$, 10, 11 となる。

(2)　$a>0$, $a\neq 1$ のとき, 正の整数 n に対し, $\log_a(x-n) > \dfrac{1}{2}\log_a(2n-x)$ ………④

$x-n>0$ かつ $2n-x>0$, すなわち $n<x<2n$ ……⑤において,

$$2\log_a(x-n) > \log_a(2n-x),\ \log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x) \text{ ………⑥}$$

(i)　$0<a<1$ のとき　⑥より, $(x-n)^2<2n-x$ となり,

$$(x-n)^2-(2n-x)<0,\ x^2-(2n-1)x+n^2-2n<0$$

ここで, $f(x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n$ とおくと,

$$f(n)=-n<0,\ f(2n)=n^2>0$$

⑤の $x=n+1$, $n+2$, …, $2n-1$ について, ④を満たす整数 x が存在する条件は,

$$f(n+1)=1-(n-1)=2-n<0$$

よって, $n>2$ から, n は 3 以上の整数である。

(ii)　$a>1$ のとき　⑥より, $(x-n)^2>2n-x$ となり, $x^2-(2n-1)x+n^2-2n>0$

$f(n)<0$, $f(2n)>0$ に注意し, ⑤の $x=n+1$, $n+2$, …, $2n-1$ について, ④を満たす整数 x が存在する条件は,

$$f(2n-1)=(n-1)^2-1=n(n-2)>0,\ n>2$$

よって, $n>2$ から, n は 3 以上の整数である。

(i)(ii)より，④を満たす整数 x が存在する必要十分条件は，n が 3 以上の整数である。

コメント

対数不等式を題材にした問題です。(2)は 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを念頭に，条件を数式化しています。

問　題

整数 a, b は等式 $3^a-2^b=1$ ……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。 [2018]

解答例＋映像解説

(1) 整数 a, b に対して，$3^a-2^b=1$ ……①より，$3^a=2^b+1$ ………②

すると，$3^a=2^b+1>1$ となるので，$a\geqq 1$ であり，このとき①より，

$$2^b=3^a-1\geqq 3^1-1=2$$

よって，$b\geqq 1$ であり，a, b はともに正となる。

(2) $b>1$ すなわち $b\geqq 2$ のとき，2^b が 4 の倍数であることに着目して，以下，mod 4 で記述すると，②の右辺は $2^b+1\equiv 1$ である。

ここで，k を自然数として a を偶奇に分け，$9\equiv 1$ に注意すると，

(i) $a=2k$ のとき　$3^a=3^{2k}=9^k\equiv 1^k\equiv 1$

(ii) $a=2k-1$ のとき　$3^a=3^{2(k-1)+1}=9^{k-1}\cdot 3\equiv 1^{k-1}\cdot 3\equiv 3$

(i)(ii)より，②が成り立つのは，a が偶数のときである。

(3) (1)より，a, b はともに自然数なので，

(i) $b=1$ のとき　②より $3^a=2^1+1=3$ となり，$a=1$ である。

(ii) $b\geqq 2$ のとき　(2)より $a=2k$ となり，②より，

$$3^{2k}=2^b+1,\ (3^k-1)(3^k+1)=2^b \text{ ………③}$$

ここで，$(3^k+1)-(3^k-1)=2$ であり，さらに 2^b の約数が $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^b$ であることに着目すると，③より，

$$3^k-1=2,\ 3^k+1=2^2$$

これより，$k=1$ から $a=2$ となり，また $2\cdot 2^2=2^b$ から $b=3$ である。

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 3)$

コメント

整数問題に誘導がついているものの，それがアバウトなタイプです。そのため，方針を決めるのに試行錯誤が必要になります。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2)　等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1)　6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n = 6$ のとき　$2^n = 64$，$n^2 + 7 = 43$ より成り立つ。

(ii)　$n = k$ のとき　$2^k > k^2 + 7$ と仮定すると，$2^{k+1} > 2(k^2 + 7)$ となり，

$$2(k^2+7) - \{(k+1)^2 + 7\} = k^2 - 2k + 6 = k(k-2) + 6 > 0$$

すると，$2(k^2 + 7) > (k+1)^2 + 7$ から，$2^{k+1} > (k+1)^2 + 7$

これより，$n = k + 1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2 + 7$ が成り立つ。

(2)　素数 p, q に対して，$p^q = q^p + 7$ ………①

(i)　$p = 2$ のとき　①から $2^q = q^2 + 7$ ………②

(1)から $q \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^q > q^2 + 7$ となり②は成立しない。そこで，$q = 2,\ 3,\ 5$ のときを調べる。

(a)　$q = 2$ のとき　$2^q = 4$，$q^2 + 7 = 11$ となり，②は成立しない。

(b)　$q = 3$ のとき　$2^q = 8$，$q^2 + 7 = 16$ となり，②は成立しない。

(c)　$q = 5$ のとき　$2^q = 32$，$q^2 + 7 = 32$ となり，②は成立する。

(ii)　$p \geqq 3$ のとき　p は奇数となり，$q \geqq 3$ すなわち q も奇数の場合については，p^q，q^p はともに奇数から，①は両辺の偶奇が異なり，成立しない。

そこで，$q = 2$ のときについて，①から $p^2 = 2^p + 7$ ………③

(1)から $p \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^p + 7 > (p^2 + 7) + 7$ となり③は成立しない。そこで，$p = 3,\ 5$ のときを調べる。

(a)　$p = 3$ のとき　$p^2 = 9$，$2^p + 7 = 15$ となり，③は成立しない。

(b)　$p = 5$ のとき　$p^2 = 25$，$2^p + 7 = 39$ となり，③は成立しない。

(i)(ii)より，①を満たす素数 p, q は，$(p,\ q) = (2,\ 5)$ のみである。

コメント

素数が題材の誘導つき不定方程式の問題です。素数で偶数なのは 2 だけということがポイントになっています。なお，(2)で p^q と q^p の偶奇が異なる点に注目すると，少し解答例を短縮できます。

問　題

$k \geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$ が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k-連続和であることは，次の条件(A), (B)の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数である。　　(B) $2n > k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n = 2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする。$n = p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1) n が k-連続和であるとき，$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$ より，

$$n = \frac{m + m + k - 1}{2} \cdot k\,,\ \ 2n = k(2m + k - 1) \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，$2m = \dfrac{2n}{k} - k + 1$ となり，$m = \dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ ………②

②より，$\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数であり，$m \geqq 1$ から $\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2} \geqq 1$ となり，$\dfrac{2n - k^2}{2k} \geqq \dfrac{1}{2}$

よって，$2n - k^2 > 0$ すなわち $2n > k^2$ が成り立つ。

逆に，$\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ が整数で，$2n > k^2$ のとき，m' を整数として，

$$m' = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，$m' = \dfrac{2n - k^2}{2k} + \dfrac{1}{2}$ となり，$2n > k^2$ より $m' > \dfrac{1}{2}$ から m' は自然数である。

このとき，③より $n = m' + (m'+1) + \cdots + (m'+k-1)$ となるので，n は k-連続和である。

(2) f を自然数とし，2^f が k-連続和になると仮定すると，①より，

$$2 \cdot 2^f = k(2m + k - 1)\,,\ \ 2^{f+1} = k(2m + k - 1) \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$(2m + k - 1) - k = 2m - 1$ であるが，$2m - 1$ が奇数なので，$2m + k - 1$ と k の偶奇は異なる，すなわち $2m + k - 1$ と k のいずれか一方は奇数である。さらに，この奇数は，$2m + k - 1 > k \geqq 2$ から 3 以上となる。

すると，④は不成立となり，2^f が k-連続和となる自然数 $k \geqq 2$ は存在しない。

(3)　f を自然数, p を 3 以上の素数として, p^f が k-連続和となるとき, ①より,

$$2p^f = k(2m+k-1) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで, k が偶数すなわち $k = 2p^i$ $(i \geqq 0)$ のとき, $2m+k-1$ は奇数となり, 整数 m は存在する。また, k が奇数すなわち $k = p^j$ $(j \geqq 1)$ のとき, $2m+k-1$ は偶数となり, 整数 m は存在する。

したがって, 以下, k が $2p^f$ の約数で, m が自然数すなわち $k^2 < 2p^f$ ……⑥となる k の個数を求める。

そこで, p が 3 以上に注意して f を偶奇に分けると, l を自然数として,

(i)　f が偶数$(f = 2l)$の場合

$k = 2p^i$ のとき, ⑥より $4p^{2i} < 2p^{2l}$, $p^{2i} < \dfrac{1}{2}p^{2l}$ となり, $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ l-1$

$k = p^j$ のとき, ⑥より $p^{2j} < 2p^{2l}$ となり, $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ l$

これより, k の個数は, $l + l = 2l = f$ である。

(ii)　f が奇数$(f = 2l+1)$の場合

$k = 2p^i$ のとき, ⑥より $4p^{2i} < 2p^{2l+1}$, $p^{2i} < \dfrac{p}{2}p^{2l}$ となり, $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ l$

$k = p^j$ のとき, ⑥より $p^{2j} < 2p^{2l+1} = 2p \cdot p^{2l}$ となり, $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ l$

これより, k の個数は, $(l+1) + l = 2l+1 = f$ である。

(iii)　$f = 1$ の場合

$k = 2p^i$ のとき, ⑥より $4p^{2i} < 2p$, $p^{2i} < \dfrac{p}{2}$ となり, $i = 0$ だけである。

$k = p^j$ のとき, ⑥より $p^{2j} < 2p$ となり, 満たす j は存在しない。

これより, k の個数は, $1 = f$ である。

(i)～(iii)より, p^f が k-連続和となる自然数 $k \geqq 2$ の個数は f となる。

コメント

整数の連続和が題材となっているかなり難しめの問題です。自然数 m が存在するという条件のとらえ方が問われています。なお, (3)で f が奇数の場合に $f = 2l-1$ としなかったのは, $f = 1$ $(l = 1)$ のときの記述がややこしくなるためです。

問　題

n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1)　a_2，b_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3)　各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。　[2007]

解答例

(1)　x^2 を $x^2-6x-12$ で割ると，$x^2=(x^2-6x-12)\cdot 1+(6x+12)$ より，

$$a_2=6,\ b_2=12$$

(2)　x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を $q_n(x)$ とおくと，条件より，

$$x^n=(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx+b_n)$$

すると，

$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx^2+b_nx)\\&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+a_n\{(x^2-6x-12)+(6x+12)\}+b_nx\\&=(x^2-6x-12)\{xq_n(x)+a_n\}+(6a_n+b_n)x+12a_n\end{aligned}$$

ここで，x^{n+1} を $x^2-6x-12$ で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ より，

$$a_{n+1}=6a_n+b_n,\ b_{n+1}=12a_n\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_2=6$，$b_2=12$ なので，(＊)から，帰納的に a_n と b_n はともに 6 の倍数であり，素数の公約数として，2 と 3 をもつ。

さて，a_n と b_n が 5 以上の素数 m を公約数としてもつとき，k, l を整数として，

$$a_n=m\cdot k,\ b_n=m\cdot l$$

(＊)から，$6a_{n-1}+b_{n-1}=m\cdot k$，$12a_{n-1}=m\cdot l$

$$2^2\cdot 3a_{n-1}=m\cdot l,\ 2b_{n-1}=m(2k-l)$$

$m\geqq 5$ より，a_{n-1} と b_{n-1} は素数 m を公約数としてもつ。

すると，帰納的に，a_2 と b_2 は素数 m を公約数としてもつことになるが，これは $a_2=6$，$b_2=12$ に反する。

以上より，a_n と b_n の公約数で素数となるものは 2 と 3 のみである。

コメント

(3)では，記述はしていませんが，a_3 と b_3 も計算をして結論を推測しています。その後，簡略に書きましたが，帰納法を用いて証明をしています。

問　題

数列$\{\alpha_n\}$を初項$\dfrac{4}{5}$，公比 2 の等比数列，数列$\{\beta_n\}$を初項$\dfrac{1}{5}$，公比$-\dfrac{1}{2}$の等比数列とする。

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$のとき，α_nの小数部分を求めよ。

(2) $a_n=\alpha_n+\beta_n$の小数部分b_nを求めよ。

(3) 数列$\{b_n\}$の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ。 [2000]

解答例

(1) 条件より，$\alpha_n=\dfrac{4}{5}\cdot 2^{n-1}=\dfrac{1}{5}\cdot 2^{n+1}$

$\alpha_1=\dfrac{4}{5}$より$[\alpha_1]=0$となり，小数部分は$\dfrac{4}{5}$

$\alpha_2=\dfrac{8}{5}$より$[\alpha_2]=1$となり，小数部分は$\dfrac{8}{5}-1=\dfrac{3}{5}$

$\alpha_3=\dfrac{16}{5}$より$[\alpha_3]=3$となり，小数部分は$\dfrac{16}{5}-3=\dfrac{1}{5}$

$\alpha_4=\dfrac{32}{5}$より$[\alpha_4]=6$となり，小数部分は$\dfrac{32}{5}-6=\dfrac{2}{5}$

$\alpha_5=\dfrac{64}{5}$より$[\alpha_5]=12$となり，小数部分は$\dfrac{64}{5}-12=\dfrac{4}{5}$

(2) $k=1,\ 2,\ 3,\ 4$として，$\dfrac{k}{5}\times 2^4=\dfrac{16}{5}k=3k+\dfrac{k}{5}$となるので，$\alpha_n$の小数部分と$\alpha_{n+4}$の小数部分は等しい。

したがって，α_nの小数部分は周期 4 の周期数列となり，(1)より$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$をくり返す。すなわちα_nの小数部分は，$m\geqq 1$として，$n=4m-3$のとき$\dfrac{4}{5}$，$n=4m-2$のとき$\dfrac{3}{5}$，$n=4m-1$のとき$\dfrac{1}{5}$，$n=4m$のとき$\dfrac{2}{5}$となる。

さて，条件より$\beta_n=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$なので，$\beta_1=\dfrac{1}{5}$, $n\geqq 2$で$|\beta_n|\leqq\dfrac{1}{10}$となる。

すると，$n\geqq 2$のとき，$a_n=\alpha_n+\beta_n$より，$\alpha_n-\dfrac{1}{10}\leqq a_n\leqq\alpha_n+\dfrac{1}{10}$となり，しかも$\alpha_n$の小数部分は$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$なので，

$$[a_n]=[\alpha_n+\beta_n]=[\alpha_n]$$

すなわち，a_nの小数部分b_nは，α_nの小数部分にβ_nを加えたものになる。

よって, m を $m \geqq 1$ の整数として,

$$b_n = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-3} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n = 4m-2 \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n = 4m-1 \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n = 4m \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n = 4m+1 \text{のとき})$$

なお, $a_1 = \alpha_1 + \beta_1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$ なので, 小数部分 b_1 は, $b_1 = 0$ となる。

(3) まず, $c_m = b_{4m-2} + b_{4m-1} + b_{4m} + b_{4m+1}$ とおくと,

$$c_m = 2 + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m}(-8+4-2+1) = 2 - \left(\frac{1}{16}\right)^m$$

すると, $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} b_k = b_1 + \sum_{k=2}^{100} b_k = \sum_{k=2}^{100} b_k = \sum_{m=1}^{25} c_m - b_{101}$

$$= 2 \times 25 - \frac{\frac{1}{16}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{25}\right\}}{1 - \frac{1}{16}} - \left\{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}$$

$$= 50 - \frac{1}{15}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{25}\right\} - \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{25}$$

$$= 49 + \frac{2}{15} - \frac{2}{15}\left(\frac{1}{16}\right)^{25}$$

以上より, 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 100 項までの和の整数部分は 49 である。

コメント

まず(1)で周期性に気付き, 次に β_n は n が大きくなると, その絶対値がごく小さい値となり, a_n と α_n の値には, 違いがほとんどないという感覚が必要です。

問　題

10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ。

(2)　$p(n,\ 1)$ を求めよ。

(3)　$p(n,\ 2)$ を求めよ。　[2019]

解答例＋映像解説

(1)　条件の試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。

さて，試行を $n+1$ 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 2 個のとき，次の 2 つの場合がある。

(i)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 1 個のとき

袋には，赤玉 4 個と白玉 6 個が入っているので，そこから赤玉を 1 個取り出す。このときの確率は $\dfrac{4}{10}p(n,\ 1)=\dfrac{2}{5}p(n,\ 1)$ である。

(ii)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 2 個のとき

袋には，赤玉 3 個と白玉 7 個が入っているので，そこから白玉を 1 個取り出す。このときの確率は $\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ である。

(i)(ii)より，$p(n+1,\ 2)=\dfrac{2}{5}p(n,\ 1)+\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ となる。

(2)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 1 個であるのは，n 回のうち 1 回だけ赤玉を取り出し，それ以外は白玉を取り出す場合である。

初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っており，k 回目 $(1\leqq k\leqq n)$ だけに赤玉を取り出す確率は，$\left(\dfrac{5}{10}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{5}{10}\cdot\left(\dfrac{6}{10}\right)^{n-k}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-k}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k}$ となり，

$$p(n,\ 1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdot 5\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}=5\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(3)　(1)(2)より，$p(n+1,\ 2)=\dfrac{2}{5}\left\{5\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}+\dfrac{7}{10}p(n,\ 2)$ となり，

$$p(n+1,\ 2)=\frac{7}{10}p(n,\ 2)+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

また，$p(2,\ 2)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{5}$となり，$p_n=p(n,\ 2)$とおくと，$p_2=\frac{1}{5}$で，

$$p_{n+1}=\frac{7}{10}p_n+2\left(\frac{3}{5}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①を満たす１つの数列を$p_n=\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^n+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n$（$\alpha,\ \beta$は定数）とおくと，

$$\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{7}{10}\left\{\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^n+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}+2\left(\frac{3}{5}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$$

②から，$\frac{3}{5}\alpha=\frac{7}{10}\alpha+2$，$\frac{1}{2}\beta=\frac{7}{10}\beta-2$となり，$(\alpha,\ \beta)=(-20,\ 10)$

①－②より，$p_{n+1}-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{7}{10}\left\{p_n-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^n-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$となり，

$$p_n-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^n-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{p_2-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^2-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}\quad(n\geqq 2)$$

$(\alpha,\ \beta)=(-20,\ 10)$，$p_2=\frac{1}{5}$を代入して，

$$\begin{aligned}p_n+20\left(\frac{3}{5}\right)^n-10\left(\frac{1}{2}\right)^n&=\left\{\frac{1}{5}+20\left(\frac{3}{5}\right)^2-10\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}\\&=\frac{49}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}=10\left(\frac{7}{10}\right)^n\end{aligned}$$

よって，$p_n=10\left(\frac{7}{10}\right)^n-20\left(\frac{3}{5}\right)^n+10\left(\frac{1}{2}\right)^n$となるので，

$$p(n,\ 2)=10\left(\frac{7}{10}\right)^n-20\left(\frac{3}{5}\right)^n+10\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad(n\geqq 2)$$

コメント

丁寧な誘導のついた確率と漸化式の標準的問題です。なお，(3)の漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問　題

n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1)　$p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2)　$p(2)$ を求めよ。

(3)　n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻すとき, k 回目に取り出した札の番号を X_k とおく。

まず, $X_1 \geqq n$ となるのは $X_1 = n$ から, その確率 $p(1)$ は, $p(1) = \dfrac{1}{n}$ である。

次に, $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n \geqq n$ となるのは, $X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = 1$ で X_n は任意より, その確率 $p(n)$ は,

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \times 1 = \frac{1}{n^{n-1}}$$

(2)　$X_1 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 \geqq n$ となるのは, $X_1 = k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ のときは, $X_2 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より, その確率 $p(2)$ は,

$$p(2) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + (n-1)\right\}$$
$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

(3)　$n \geqq 3$ のとき, $X_1 + X_2 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + X_3 \geqq n$ となるのは, $X_1 + X_2 = k$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ のときは, $(X_1,\ X_2)$ の組が $(1,\ k-1)$, $(2,\ k-2)$, $\cdots$, $(k-1,\ 1)$ の $k-1$ 通りで, $X_3 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より, その確率 $p(3)$ は,

$$p(3) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{n^2} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n-1} (k^2 - 1) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1)$$
$$= \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - (n-1)\right\} = \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3}$$

コメント

確率の標準的な問題です。題意を読み取る力が問われています。

問　題

A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。 [2017]

解答例＋映像解説

(1) 6 枚のカードから無作為に 3 枚のカードを取り出す ${}_6C_3=20$ 通りが同様に確からしいとする。このとき，与えられた条件で，取り出したカードに書かれた数と得点との関係を列挙すると右表のようになる。

カード	得点	カード	得点
1, 2, 3	2	0, 1, 2	3
1, 2, 4	$\frac{7}{3}$	0, 1, 3	4
1, 2, 5	$\frac{8}{3}$	0, 1, 4	5
1, 3, 4	$\frac{8}{3}$	0, 1, 5	6
1, 3, 5	3	0, 2, 3	5
1, 4, 5	$\frac{10}{3}$	0, 2, 4	6
2, 3, 4	3	0, 2, 5	7
2, 3, 5	$\frac{10}{3}$	0, 3, 4	7
2, 4, 5	$\frac{11}{3}$	0, 3, 5	8
3, 4, 5	4	0, 4, 5	9

さて, A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出し，双方とも得点が 3 点となるのは,

(i) A 君，B 君ともに 0 を取り出すとき

その確率は，$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{400}$

(ii) A 君のみ 0 を取り出すとき

その確率は，$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{2}{20}=\dfrac{2}{400}$

(iii) B 君のみ 0 を取り出すとき

その確率は，$\dfrac{2}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{2}{400}$

(i)～(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{400}+\dfrac{2}{400}+\dfrac{2}{400}=\dfrac{1}{80}$ となる。

(2) (1)の表より，得点が 2，8，9，$\dfrac{7}{3}$，$\dfrac{11}{3}$ となる確率は $\dfrac{1}{20}$ ずつ，得点が 4，5，6，7，$\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{10}{3}$ となる確率は $\dfrac{2}{20}$ ずつ，得点が 3 となる確率が $\dfrac{3}{20}$ である。

これより, A 君と B 君が同じ得点になる確率は,

$$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}\times5+\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}\times6+\frac{3}{20}\times\frac{3}{20}=\frac{19}{200}$$

すると, A 君の得点が B 君の得点より大きい確率は, A 君と B 君の対等性より,

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{19}{200}\right)=\frac{181}{400}$$

次に, A 君の得点が B 君の得点より大きく, しかも A 君の得点が整数でないとき, A 君の得点で場合分けをすると,

(i)　A 君が $\frac{7}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{7}{3}$ 点より小なので, 確率は $\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

(ii)　A 君が $\frac{8}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{8}{3}$ 点より小なので, 確率は $\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}=\frac{4}{400}$

(iii) A 君が $\frac{10}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{10}{3}$ 点より小なので, 確率は $\frac{2}{20}\times\frac{7}{20}=\frac{14}{400}$

(iv) A 君が $\frac{11}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{11}{3}$ 点より小なので, 確率は $\frac{1}{20}\times\frac{9}{20}=\frac{9}{400}$

(i)～(iv)より, この確率は, $\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}=\frac{7}{100}$ となる。

以上より, A 君の得点が B 君の得点より大きいときの, A 君の得点が整数ではない条件付き確率は,

$$\frac{7}{100}\div\frac{181}{400}=\frac{28}{181}$$

コメント

センター試験でよく見られる数え上げタイプの確率の基本問題です。20 通りの場合を書き上げて準備することがすべてです。

問　題

a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　$a,\ b,\ c$ を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とするとき，$ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつ条件は，k を 0 以上の整数として，

$$b^2-4ac=k^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，①から $b^2 \geqq 4ac \geqq 8$ となり，$b=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ である。

(i)　$b=3$ のとき　①より $9-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(1,\ 2)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ である。

(ii)　$b=4$ のとき　①より $16-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(0,\ 4)$，$(4,\ 3)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$ である。

(iii)　$b=5$ のとき　①より $25-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(1,\ 6)$，$(9,\ 4)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$ である。

(iv)　$b=6$ のとき　①より $36-k^2=4ac$ となり，

$(k^2,\ ac)=(0,\ 9)$，$(4,\ 8)$，$(16,\ 5)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$，$(1,\ 5)$，$(5,\ 1)$ である。

(v)　$b=7$ のとき　①より $49-k^2=4ac$ となり，

$(k^2,\ ac)=(1,\ 12)$，$(9,\ 10)$，$(25,\ 6)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(2,\ 6)$，$(6,\ 2)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(5,\ 2)$，$(1,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$ である。

(i)～(v)より，組 $(a,\ b,\ c)$ の総数は，$2+2+6+4+10=24$ である。

(2)　$ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつとき，①から $x=\dfrac{-b\pm k}{2a}$ ……②となり，

(i)　$b=3$ のとき　②より $x=\dfrac{-3\pm1}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は，$a=1,\ 2$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(ii)　$b=4$ のとき　②より $x=\dfrac{-4\pm2}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は，$a=1,\ 3$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iii) $b=5$ のとき　②より $x=\dfrac{-5\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は,

(iii-i)　$x=\dfrac{-5\pm 1}{2a}$ に対して，$a=1,\ 2,\ 3$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもち，

$a=6$ のとき整数解をもたない。

(iii-ii)　$x=\dfrac{-5\pm 3}{2a}$ に対して，$a=1,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iv) $b=6$ のとき　②より $x=\dfrac{-6\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は,

(iv-i)　$x=\dfrac{-6\pm 2}{2a}$ に対して，$a=2,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iv-ii)　$x=\dfrac{-6\pm 4}{2a}$ に対して，$a=1,\ 5$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(v)　$b=7$ のとき　②より $x=\dfrac{-7\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は,

(v-i)　$x=\dfrac{-7\pm 1}{2a}$ に対して，$a=2,\ 3,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもち，

$a=6$ のとき整数解をもたない。

(v-ii)　$x=\dfrac{-7\pm 3}{2a}$ に対して，$a=2,\ 5$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(v-iii)　$x=\dfrac{-7\pm 5}{2a}$ に対して，$a=1,\ 2,\ 3,\ 6$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(i)～(v)より，有理数解をもつものの，2 つとも整数解でない組$(a,\ b,\ c)$は,

$(6,\ 5,\ 1)$，$(6,\ 7,\ 2)$

以上より，$ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組$(a,\ b,\ c)$の総数は，(1)から $24-2=22$ である。

コメント

2 次方程式の解を題材にした場合の数の問題です。注意力が要求されるため，かなりの時間が必要です。解答例では，(2)も工夫なく 24 通りを調べています。

問　題

サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2) a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。　[2016]

解答例＋映像解説

(1) a, b, c が 3 辺の長さの三角形が直角三角形となるのは，斜辺の長さが c のとき，

$$a^2+b^2=c^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

そこで，a^2 と b^2，およびその和をまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

すると，和が平方数なのは 25 だけより，①を満たすのは，

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 3,\ 5)$$

また，斜辺の長さが a, b の場合も同様なので，求める直角三角形となる確率は，$\dfrac{2\times 3}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

(2) a, b, c が 3 辺の長さの三角形が鈍角三角形となるのは，最大辺の長さが c のとき，

$$a+b>c \cdots\cdots\cdots ②,\quad a^2+b^2<c^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

まず，$c=1,\ 2$ では成立しないので $c\geqq 3$ となり，それぞれの場合を(1)の表をもとに調べる。

(i) $c=3$ のとき　②より $a+b>3$，③より $a^2+b^2<9$ から，$(a,\ b)=(2,\ 2)$

(ii) $c=4$ のとき

②より $a+b>4$，③より $a^2+b^2<16$ から，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(iii) $c=5$ のとき

②より $a+b>5$，③より $a^2+b^2<25$ から，$(a,\ b)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$

(iv) $c=6$ のとき　②より $a+b>6$，③より $a^2+b^2<36$ から，

$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3)$

(i)〜(iv)より，$(a,\ b)$ の組は $1+2+3+7=13$ 通りとなる。

また，最大辺の長さが a, b の場合も同様に 13 通りずつなので，求める鈍角三角形となる確率は，$\dfrac{13\times 3}{6^3}=\dfrac{13}{72}$ である。

コメント

丁寧に数え上げるタイプの確率の問題です。 表を作ると数えもれが防げます。

問　題

サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$……(∗)を考える。

(1) 方程式(∗)が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式(∗)が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3) 方程式(∗)が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ。　[2015]

解答例＋映像解説

(1) 方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ …(∗)が実数解をもつ条件は，

$$D={p_2}^2-16p_1p_3\geqq 0,\ \ p_2\geqq 4\sqrt{p_1p_3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$p_2\geqq 4$ となり，$p_2=4,\ 5,\ 6$ のときを考える。

(i) $p_2=4$ のとき　①より $1\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$1\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(ii) $p_2=5$ のとき　①より $\dfrac{5}{4}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\dfrac{25}{16}\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(iii) $p_2=6$ のとき　①より $\dfrac{3}{2}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\dfrac{9}{4}\geqq p_1p_3$ となり，

$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i)～(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1+1+3}{6^3}=\dfrac{5}{216}$ である。

(2) 方程式(∗)が虚数解 α, β をもつ条件は，$D<0$ より $p_2<4\sqrt{p_1p_3}$ ………②

さらに，$\alpha\beta=1$ である条件は，$\dfrac{2p_3}{2p_1}=1$ より，$p_3=p_1$ ………③

②③より，$p_2<4\sqrt{{p_1}^2}=4p_1$ ………④

(i) $p_1=p_3=1$ のとき　④より $p_2<4$，$p_2=1,\ 2,\ 3$

(ii) $p_1=p_3\geqq 2$ のとき　$4p_1\geqq 8$ となるので，④より，$p_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

(i)～(ii)より，求める確率は，$\dfrac{3+6\cdot 5}{6^3}=\dfrac{11}{72}$ である。

(3) 方程式(∗)が虚数解 α, β をもつ確率は，(1)から，$1-\dfrac{5}{216}=\dfrac{211}{216}$ である。

このとき，$\alpha\beta<1$ である条件は，(2)と同様にすると $p_3<p_1$ となる。

すると，$p_3<p_1$ の場合と $p_3>p_1$ の場合は対等なので，(2)より求める確率は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{211}{216}-\frac{11}{72}\right)=\frac{89}{216}$$

コメント

よく見かける確率の頻出題です。場合分けも複雑ではなく，内容は基本的です。

問　題

1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。　[2014]

解答例＋映像解説

(1)　10 個の玉から 2 個を取り出す ${}_{10}C_2=45$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，$10=2\times5$ より，${}_2C_1\times{}_2C_1=4$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{4}{45}$ である。

(2)　10 個の玉から 4 個を取り出す ${}_{10}C_4=210$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$100=2^2\times5^2$ より，次の 2 つの場合がある。

(i)　4 つの数字が $(2,\ 2,\ 5,\ 5)$ の場合　1 通り

(ii)　4 つの数字が $(1,\ 4,\ 5,\ 5)$ の場合　${}_2C_1\times{}_2C_1=4$ 通り

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1+4}{210}=\dfrac{1}{42}$ である。

(3)　10 個の玉から 6 個を順に取り出す ${}_{10}P_6$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，1 個目から 3 個目，4 個目から 6 個目に書かれている数字の組合せを，それぞれ A, B とすると，A の 3 つの数字の積と B の 3 つの数字の積が等しい場合は，

(i)　$A=B$ のとき

数字の選び方が ${}_5C_3$ 通り，A, B への数字の振り分けが 2^3 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，${}_5C_3\times2^3\times3!\times3!=5\times2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(ii)　$A=(2,\ 2,\ 3)$, $B=(1,\ 4,\ 3)$，または $A=(1,\ 4,\ 3)$, $B=(2,\ 2,\ 3)$ のとき

A, B への数字の振り分けが $2\times2^2=2^3$ 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，$(2^3\times3!\times3!)\times2=2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(iii)　$A=(2,\ 2,\ 5)$, $B=(1,\ 4,\ 5)$，または $A=(1,\ 4,\ 5)$, $B=(2,\ 2,\ 5)$ のとき

(ii)と同様に，$(2^3\times3!\times3!)\times2=2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(i)〜(iii)より，求める確率は，

$$\frac{(5+1+1)\times 2^4\times(3!)^2}{{}_{10}\mathrm{P}_6}=\frac{7\times 2^4\times(3!)^2}{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}=\frac{2}{75}$$

コメント

$2\times 2=1\times 4$ に注目するために(2)の設問があり，それが(3)へとつながっています。注意深さの要求される問題です。

問　題

A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。

(2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3) B がちょうど 3 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

解答例＋映像解説

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(1) 右表は，一番左側の列が 1 回目の目，一番上側の行が 2 回目の目であり，それらの目とその和との関係を表したものである。

さて，A→B→A と投げて A が勝ちとなるのは，まず B は 5 以下の目を出す。A は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上を出すときになり，右表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は，

$$\frac{5}{6}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{54}$$

(2) A→B→A→B と投げて B が勝ちとなるのは，まず A は 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり，右上表から 10 通りの場合がある。さらに，B は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上であり，これは右上表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は，

$$\frac{10}{36}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{162}$$

(3) A→B→A→B→A→B と投げてゲームが終了しないのは，A, B とも 1 回目と 2 回目と 3 回目の目の和が 5 以下である。

(i) 1 回目の目が 1 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)

(ii) 1 回目の目が 2 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1), (1, 2), (2, 1)

(iii) 1 回目の目が 3 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)

(i)(ii)(iii)より，合わせて，$6+3+1=10$ 通りの場合がある。

したがって，求める確率は，

$$\frac{10}{216}\times\frac{10}{216}=\frac{25}{11664}$$

コメント

確率の基本題ですが，センター試験風に表を作ってしまえば，その後の計算はほとんど不要です。

問　題

袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1)　$N=4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。$X=1$, $X=2$, $X=3$, $X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。

(2)　$N=3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, そのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　与えられた試行に対して, A から取り出した数字と, B から取り出した数字が一致する回数を X とし, $X=i$ である確率を $P(i)$ とおく。

$X=4$ となるのは, A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が 1 通りのときより, $P(4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$ である。

$X=3$ となる場合はないので, $P(3)=0$ である。

$X=2$ となるのは, A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が, 一致する数字の対応が ${}_4C_2$ 通り, それぞれに対し, 一致しない数字の対応が 1 通りずつのときである。これより, $P(2)=\dfrac{{}_4C_2\cdot 1}{4!}=\dfrac{1}{4}$ である。

$X=1$ となるのは, A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が, 一致する数字の対応が ${}_4C_1$ 通り, それぞれに対し, 一致しない数字の対応が 2 通りずつのときである。これより, $P(1)=\dfrac{{}_4C_1\cdot 2}{4!}=\dfrac{1}{3}$ である。

したがって, X の期待値は, $4\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}=1$ である。

(2)　与えられた試行に対して, カードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$, 一致しない確率は $\dfrac{2}{3}$ なので, n 回目でカードが初めて取り除かれる確率 p_n は, $n\geqq 2$ のとき,

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは, $n=1$ のときも成立している。

また, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率 q_n は, $q_1 = q_2 = 0$

$n \geqq 3$ のときは, k 回目 $(1 \leqq k \leqq n-2)$ で初めてカードが 1 枚取り除かれ, $n-1$ 回目と n 回目に 1 枚ずつ取り除かれる場合である。カードが 2 枚のとき, 数字が一致する確率は $\frac{1}{2}$, 一致しない確率は $\frac{1}{2}$ なので,

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^{n-2} p_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1\right\}}{\frac{4}{3} - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1\right\} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

コメント

頻出ですが, (2)は不注意によるミスをやってしまいがちな問題です。

問　題

先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1) 2 回目の操作が終わったとき，A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(2) 2 回目の操作が終わったとき，B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(3) 3 回目の操作で，C が赤玉を取り出す確率を求めよ。　[2011]

解答例

(1) A, B, C が玉を取り出す確率は，それぞれ $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ である。

最初，赤玉 3 個，白玉 7 個入った箱から，A が赤玉 2 個を取り出す確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{540}$$

(2) まず，B が赤玉を手に入れない場合の確率を求める。

(i) 1 回目に B が白玉，2 回目も B が白玉を取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{135}$$

(ii) 1 回目に B が白玉，2 回目は A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{7}{45}$$

(iii) 1 回目は A または C，2 回目に B が白玉を取り出すとき

1 回目に赤玉を取り出すときと白玉を取り出すときに分けると，

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{45}$$

(iv) 1 回目に A または C，2 回目も A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{2}{3}\times1\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{4}{9}$$

(i)～(iv)より，B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率は，

$$1-\left(\frac{7}{135}+\frac{7}{45}+\frac{7}{45}+\frac{4}{9}\right)=\frac{26}{135}$$

(3) 3 回目の操作で，C が赤玉を取り出す確率は，

(i) 1 回目に赤玉，2 回目も赤玉のとき　$\left(1\times\frac{3}{10}\right)\times\left(1\times\frac{2}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{240}$

(ii)　1 回目に赤玉, 2 回目に白玉のとき　$\left(1\times\frac{3}{10}\right)\times\left(1\times\frac{7}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}\right)=\frac{7}{240}$

(iii)　1 回目に白玉, 2 回目に赤玉のとき　$\left(1\times\frac{7}{10}\right)\times\left(1\times\frac{3}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{8}\right)=\frac{7}{240}$

(iv)　1 回目に白玉, 2 回目も白玉のとき　$\left(1\times\frac{7}{10}\right)\times\left(1\times\frac{6}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{21}{240}$

(i)～(iv)より，$\frac{1}{240}+\frac{7}{240}+\frac{7}{240}+\frac{21}{240}=\frac{3}{20}$

コメント

注意力がすべてといっても過言ではない問題です。(2)は，余事象を考えない方がよかったかもしれません。さらに，(iii)の場合も(ii)にまとめた方がよかったかもしれません。

問　題

1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を一の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を十の位とする。このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。　[2010]

解答例

(1) 各位の数字が 1, 2, 3, 4 の 5 桁の整数 X に，数字 1 が 2 回現れる確率は，

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{135}{512} $$

(2) X に，数字 1 が 1 回，2 が 1 回，3 または 4 が 3 回現れる確率は，

$$ {}_5\mathrm{C}_1\ {}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^3=\frac{5}{32} $$

(3) 4 種類の数字を a, b, c, d とすると，X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上あるのは，次の場合である。

(i) aabcd のとき

a の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4\mathrm{C}_1\times\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{64} $$

(ii) aabbb のとき

a, b の選び方が ${}_4\mathrm{P}_2$ 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4\mathrm{P}_2\times\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{128} $$

(iii) aabbc のとき

a, b の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，c の選び方が 2 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4\mathrm{C}_2\times 2\times\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{45}{128} $$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\frac{15}{64}+\frac{15}{128}+\frac{45}{128}=\frac{45}{64}$ である。

コメント

反復試行の確率に関する基本問題です。

問　題

袋の中に青玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ。

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3)　赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。

(4)　4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ。

[2009]

解答例

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出されるのは，青→青→青→赤から，その確率は，

$$\frac{{}_7P_3\times 3}{{}_{10}P_4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{8}$$

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される，すなわち赤玉 3 個，青玉 5 個が取り出される確率は，

$$\frac{{}_8C_3\times 3!\times {}_7P_5}{{}_{10}P_8}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{7}{15}$$

(3)　7 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される，すなわち赤玉 3 個，青玉 4 個が取り出される確率は，

$$\frac{{}_7C_3\times 3!\times {}_7P_4}{{}_{10}P_7}=\frac{7\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{7}{24}$$

すると，赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率は, (2)から，

$$\frac{7}{15}-\frac{7}{24}=\frac{7}{40}$$

(4)　4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数は，

(i)　0 個のとき　この場合の確率は，$\dfrac{{}_7P_4}{{}_{10}P_4}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{1}{6}$

(ii)　1 個のとき　この場合の確率は，$\dfrac{{}_4C_1\times {}_3P_1\times {}_7P_3}{{}_{10}P_4}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{1}{2}$

(iii)　2 個のとき　この場合の確率は，$\dfrac{{}_4C_2\times {}_3P_2\times {}_7P_2}{{}_{10}P_4}=\dfrac{6\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{3}{10}$

(iv)　3 個のとき　この場合の確率は，$\dfrac{{}_4C_3\times {}_3P_3\times {}_7P_1}{{}_{10}P_4}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 7}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{1}{30}$

(i)～(iv)より，赤玉の個数の期待値は

$$0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$$

コメント

順列を同様に確からしいとしています。なお, (3)は(2)を利用した方法です。

問　題

点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。P の座標 a について，$a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し，$a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　P の座標が 8 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　まず，点 P の座標が x であることを，点 $\mathrm{P}(x)$ と表す。

さて，$a=1, 2, 3, 4, 5, 6$ として，最初 $\mathrm{P}(a)$ であったとき，3 回目にサイコロを振って初めて原点に移動し終了するのは，次の場合である。

まず，1 回目に原点に移動しない a 以外の目 l が出て $\mathrm{P}(a-l)$ に移動し，2 回目に $a-l>0$ のときは $a-l$ 以外の目，$a-l<0$ のときは $l-a$ 以外の目が出る場合である。そして，このとき $\mathrm{P}(b)$ に移動したとする。

3 回目は，$b>0$ のときは b の目，$b<0$ のときは $-b$ の目が出て，初めて原点に移動し終了する。

よって，この確率は，$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{216}$ である。

(2)　(1)と同様に考えて，m 回サイコロを振って原点で終了するのは，1 回目からに $m-1$ 回目（$m\geqq 2$）までは原点に移動しない 5 通りずつの目が出て，m 回目に原点に移動するただ 1 通りの目が出る場合である。

すると，この確率は，$\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1}$ である。

なお，この値は $m=1$ の場合も成立している。

(3)　(2)と同様に，最初 $\mathrm{P}(8)$ であったときを考える。

(i)　$n=1$ のとき

1 回目で原点に移動する場合はないので，終了する確率は 0 である。

(ii)　$n=2$ のとき

1 回目は 1 以外の目が出て，P の座標が 2 以上 6 以下になり，2 回目に原点に移動するただ 1 通りの目が出る場合である。

すると，この確率は，$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$ である。

(iii) $n\geqq 3$ のとき

まず，2 回目で原点に移動しない。このとき，P の座標は -4 以上 6 以下になっている。次に，3 回目以降 $n-1$ 回目（$n\geqq 4$）までは原点に移動しない 5 通りずつの目が出て，n 回目に原点に移動するただ 1 通りの目が出る場合である。

よって，この確率は，$\left(1-\dfrac{5}{36}\right)\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$ である。

なお，この値は $n=3$ のときも成立している。

コメント

ポイントは，点 P の座標が -6 以上 6 以下の 0 でない整数であったときにサイコロを振ると，$\dfrac{1}{6}$ の確率で原点への移動が可能であるということです。

問　題

1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し，箱に戻すという操作を繰り返す。ただし，k 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に，k を得点として終了する。

(1)　$2 \leqq k \leqq n+1$ を満たす自然数 k について，得点が k となる確率を求めよ。

(2)　得点の期待値を n で表した式を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ および極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　i 回目に取り出したカードの数字を x_i とすると，得点が k となるのは，

$$x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{k-2} < x_{k-1} \geqq x_k \quad\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$x_{k-1} = l$ $(k-1 \leqq l \leqq n)$ とおくと，$x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{k-2} < l$ を満たす $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-2})$ の組は ${}_{l-1}\mathrm{C}_{k-2}$ 個あり，$l \geqq x_k$ となる x_k は l 個ある。これより，①となる確率 p_k は，

$$p_k = \sum_{l=k-1}^{n} \frac{{}_{l-1}\mathrm{C}_{k-2} \times 1 \times l}{n^k} = \frac{1}{n^k} \sum_{l=k-1}^{n} \frac{(l-1)! \times l}{(k-2)!(l-k+1)!}$$

$$= \frac{k-1}{n^k} \sum_{l=k-1}^{n} \frac{l!}{(k-1)!(l-k+1)!} = \frac{k-1}{n^k} \sum_{l=k-1}^{n} {}_{l}\mathrm{C}_{k-1}$$

さて，一般的に，${}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$ より，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = {}_{n}\mathrm{C}_{r} - {}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$ が成り立つので，$n \geqq k$ のとき，

$$p_k = \frac{k-1}{n^k}\left\{ {}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1} + \sum_{l=k}^{n} ({}_{l+1}\mathrm{C}_{k} - {}_{l}\mathrm{C}_{k}) \right\}$$

$$= \frac{k-1}{n^k}\left\{ 1 + ({}_{k+1}\mathrm{C}_{k} - {}_{k}\mathrm{C}_{k}) + ({}_{k+2}\mathrm{C}_{k} - {}_{k+1}\mathrm{C}_{k}) + \cdots + ({}_{n+1}\mathrm{C}_{k} - {}_{n}\mathrm{C}_{k}) \right\}$$

$$= \frac{k-1}{n^k}\, {}_{n+1}\mathrm{C}_{k} \quad\cdots\cdots\cdots②$$

$n = k-1$ のとき，$p_k = \dfrac{k-1}{n^k}\, {}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1} = \dfrac{k-1}{n^k}$ となり，②は $n = k-1$ のときも成立する。よって，$2 \leqq k \leqq n+1$ のとき，$p_k = \dfrac{k-1}{n^k}\, {}_{n+1}\mathrm{C}_{k}$ である。

(2)　得点 k の期待値が $f(n)$ より，

$$f(n) = \sum_{k=2}^{n+1} kp_k = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k}\, {}_{n+1}\mathrm{C}_{k} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k} \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{n(n+1)}{n^k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n+1-k)!} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{n+1}{n^{k-1}}\, {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-2}$$

ここで，二項定理を適用して，

$$f(n)=\frac{n+1}{n}\sum_{k=2}^{n+1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}=\frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

コメント

いろいろな解法が考えられますが，組合せに関する公式 ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ を利用する方法を採りました。なお, (2)の結論は想定外でした。

問　題

手作りのサイコロがあり，1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，p_6 で表す。ここで

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1,\quad p_1=p_6,\quad p_2=p_5,\quad p_3=p_4$$

が成り立つとする。このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す。

(1)　$Q(5)$ を p_1，p_2 で表せ。

(2)　$p_3=\dfrac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする。$Q(7)$ がとり得る最大の値は何か。また，そのときの p_1，p_2 を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$p_1=p_6$，$p_2=p_5$，$p_3=p_4$ より，$2p_1+2p_2+2p_3=1$ となり，$p_3=\dfrac{1}{2}-p_1-p_2$

サイコロを 3 回振ったとき総和が 5 となるのは，(1, 1, 3)，(1, 2, 2) の 2 つの場合がある。出る目の順序も考えて，

$$Q(5)={p_1}^2p_3\times 3+p_1{p_2}^2\times 3=3{p_1}^2\left(\frac{1}{2}-p_1-p_2\right)+3p_1{p_2}^2$$

$$=\frac{3}{2}{p_1}^2-3{p_1}^3-3{p_1}^2p_2+3p_1{p_2}^2$$

(2)　$p_3=\dfrac{1}{6}$ のとき，$p_1+p_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

サイコロを 3 回振ったとき総和が 7 となるのは，(1, 1, 5)，(1, 2, 4)，(1, 3, 3)，(2, 2, 3) の 4 つの場合があるので，

$$Q(7)={p_1}^2p_2\times 3+p_1p_2p_3\times 3!+p_1{p_3}^2\times 3+{p_2}^2p_3\times 3$$

$$=3{p_1}^2\left(\frac{1}{3}-p_1\right)+p_1\left(\frac{1}{3}-p_1\right)+\frac{1}{12}p_1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-p_1\right)^2$$

$$=-3{p_1}^3+\frac{1}{2}{p_1}^2+\frac{1}{12}p_1+\frac{1}{18}$$

ここで，$0<x<\dfrac{1}{3}$ において，$f(x)=-3x^3+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{12}x+\dfrac{1}{18}$ とおくと，

$$f'(x)=-9x^2+x+\frac{1}{12}$$

$$=-\frac{1}{12}(18x+1)(6x-1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{72}$	$\searrow$	

右表より，$f(x)$ の最大値は $f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{5}{72}$ となる。

よって，$Q(7)$ がとり得る最大の値は $\dfrac{5}{72}$ であり，このとき $p_1=p_2=\dfrac{1}{6}$ となる。

コメント

基本題です。サイコロを 3 回しか振らないので，数えもれもないでしょう。